ISSN 1812-5093

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ

Государственное научное учреждение
«Институт математики Национальной
академии наук Беларуси»

Данный специальный выпуск журнала содержит статьи, посвященные памяти выдающихся ученых, сотрудников Института математики, академика НАН Беларуси Гайшуна Ивана Васильевича (1946–2018) и члена-корреспондента НАН Беларуси Кирилловой Фаины Михайловны (1931–2024).

PROCEEDINGS OF THE INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE NAS OF BELARUS

State Scientific Institute
«The Institute of Mathematics
of the National Academy of Sciences
of Belarus»

This special issue of the journal contains articles dedicated to the memory of distinguished scientists and staff members of the Institute of Mathematics: Academician of the National Academy of Sciences of Belarus Ivan Vasilyevich Gaishun (1946–2018) and Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus Faina Mikhailovna Kirillova (1931–2024).

ТОМ 34, № 1s
(специальный выпуск)
Минск, 2026

ОТ РЕДАКЦИИ

В журнале «Труды Института математики НАН Беларуси» публикуются оригинальные статьи фундаментальной и прикладной математики. Обзорные статьи публикуются по решению редакционной коллегии. Журнал входит в «Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований», утвержденный Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь.

До 2024 г. журнал издавался под названием «Труды Института математики».

Основные разделы журнала:

Алгебра и теория чисел
Вещественный, комплексный и функциональный анализ
Вычислительная математика
Дискретная математика и математическая кибернетика
Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление
Математическое моделирование и численные методы
Математические методы защиты информации
Теория вероятностей и математическая статистика
Топология и геометрия
Краткие сообщения

Адрес редакции: ул. Сурганова, 11, к. 45, 220072, г. Минск, Беларусь
Тел. +375-17-379-17-84

Address: 11, Surganov Str., room 45, Minsk, Belarus, 220072
Phone: +375-17-379-17-84

e-mail: tbusel@im.bas-net.by

EDITOR'S NOTE

The journal "Proceedings of the Institute of Mathematics of the NAS of Belarus" publishes original articles in fundamental and applied mathematics. Publication of review articles requires approval of the editorial board. The journal is approved by the Higher Attestation Commission of the Republic of Belarus for publishing results of dissertation research, and is included in the official list of such publications.

Before 2024, the name of the journal was "Proceedings of the Institute of Mathematics" (Trudy Instituta Matematiki).

Main sections of the journal:

Algebra and number theory
Real, complex and functional analysis
Computational mathematics
Discrete mathematics and mathematical cybernetics
Differential equations, dynamic systems and optimal control
Mathematical modeling and numerical methods
Mathematical methods for information security
Probability theory and mathematical statistics
Topology and geometry
Brief communications

Главный редактор

Сафонов В. Г. – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь

Редакционная коллегия

Гороховик В. В. – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь (*заместитель главного редактора*)
Матус П. П. – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь (*заместитель главного редактора*)
Бусел Т. С. – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь (*ответственный секретарь*)

Антоневич А. Б. – Белорусский государственный университет, Беларусь
Асташкин С. В. – Самарский национальный исследовательский университет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия
Асташова И. В. – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия
Бахтин В. И. – Белорусский государственный университет, Беларусь
Вабищевич П. Н. – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия
Васильев Д. В. – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь
Галанин М. П. – Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН, Россия
Гладков А. Л. – Белорусский государственный университет, Беларусь
Го Веньбинь – Хайнаньский университет, Школа математики и статистики, Китай
Громак В. И. – Белорусский государственный университет, Беларусь
Добровольский Н. М. – Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого, Россия
Егоров А. Д. – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь
Зайцев В. А. – Институт математики, информационных технологий и физики Удмуртского государственного университета, Россия
Изобов Н. А. – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь
Ильин А. В. – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия
Кигурадзе И. Т. – Математический институт имени А. Размадзе, Тбилисский государственный университет имени И. Джавахишвили, Грузия
Ковалев М. Я. – Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Беларусь
Корзюк В. И. – Белорусский государственный университет, Институт математики НАН Беларуси, Беларусь
Костюкова О. И. – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь
Лебедев А. В. – Белорусский государственный университет, Беларусь
Леваков А. А. – Белорусский государственный университет, Беларусь
Лыков К. В. – Белорусский государственный университет, Институт математики НАН Беларуси, Беларусь
Махнев А. А. – Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, Россия
Ни Мин Кан – Восточно-китайский педагогический университет, Институт математических наук, Китай
Осиновская А. А. – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь
Попова С. Н. – Удмуртский государственный университет, Россия
Ровба Е. А. – Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Беларусь
Сарванов В. И. – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь
Сергеев И. Н. – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия
Скиба А. Н. – Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Беларусь
Старовойтов А. П. – Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Беларусь
Фомичев В. В. – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия

Editor-in-Chief

Safonov V. G. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Editorial Board

Gorokhovik V. V. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)

Matus P. P. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)

Busel T. S. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus (*Executive secretary*)

Antonevich A. B. – Belarusian State University, Belarus

Astashkin S. V. – Samara National Research University, Lomonosov Moscow State University, Russia

Astashova I. V. – Lomonosov Moscow State University, Russia

Bakhtin V. I. – Belarusian State University, Belarus

Dobrovol'skii N. M. – Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Russia

Egorov A. D. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Fomichev V. V. – Lomonosov Moscow State University, Russia

Galanin M. P. – Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Russia

Gladkov A. L. – Belarusian State University, Belarus

Gromak V. I. – Belarusian State University, Belarus

Guo Wenbin – Hainan University, The School of Mathematics and Statistics, China

Il'in A. V. – Lomonosov Moscow State University, Russia

Izobov N. A. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Kiguradze I. T. – Andrea Razmadze Mathematical Institute of Ivane Javakhishvili, Tbilisi State University, Georgia

Korzyuk V. I. – Belarusian State University, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Kostyukova O. I. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Kovalev M. Ya. – United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Lebedev A. V. – Belarusian State University, Belarus

Levakov A. A. – Belarusian State University, Belarus

Lykov K. V. – Belarusian State University, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Makhnev A. A. – N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Russia

Ni Min Kan – East China Normal University, School of Mathematical Sciences, China

Osinovskaya A. A. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Popova S. N. – Udmurt State University, Russia

Rovba E. A. – Yanka Kupala State University of Grodno, Belarus

Sarvanov V. I. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Sergeev I. N. – Lomonosov Moscow State University, Russia

Skiba A. N. – Francisk Skorina Gomel State University, Belarus

Starovoitov A. P. – Francisk Skorina Gomel State University, Belarus

Vabishchevich P. N. – Lomonosov Moscow State University, Russia

Vasilyev D. V. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Zaitsev V. A. – Institute of Mathematics, Information Technologies and Physics of Udmurt State University, Russia

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ
Минск. 2026. Т. 34, № 1s

СОДЕРЖАНИЕ

ПАМЯТИ УЧЕНОГО

Иван Васильевич Гайшун (80 лет со дня рождения) 7
Фаина Михайловна Кириллова (95 лет со дня рождения) 11

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Дымков М. П., Дымков В. М. Задачи оптимизации для непрерывных 2D систем управления 15

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

Костюкова О. И., Чемисова Т. В. Параметрические задачи полубесконечного программирования: свойства функций решений 32

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Альсевич В. В. Зависимость между показателями сравнительной статики теории фирмы 50
Астровский А. И., Горячкин В. В. Об устойчивости дискретных нестационарных систем линейных уравнений Вольтерра 60
Васьковский М. М., Зорько М. Ю. Устойчивость систем стационарных линейных стохастических дифференциальных уравнений, управляемых грубыми траекториями с показателями Гельдера, большими $1/3$ 75
Гороховик В. В. Условия оптимальности первого и второго порядка в задаче векторной оптимизации с неопределенным отношением предпочтения 81
Детченя Л. В., Гринь А. А., Кузьмич А. В., Мусафиров Э. В. Локальные фазовые портреты дифференциальной системы с нелинейностями четвертой степени в окрестности сложной точки покоя 98
Дмитрук Н. М. Задачи оптимального наблюдения, сопровождающие задачи оптимального управления по измерениям 111
Калинин А. И., Лавринович Л. И. Асимптотика решения задачи об управлении с минимальной интенсивностью линейной трехтемповой сингулярно возмущенной системой 128
Крахотко В. В., Размыслович Г. П. Относительная управляемость непрерывной системы с запаздыванием по состоянию и ее дискретного аналога 143
Руденок А. Е., Василевич М. Н. Изохроны систем с малым параметром, не зависящие от него 148
Хартовский В. Е., Китурко О. М. Задача назначения конечного спектра для линейных систем нейтрального типа в классе дифференциально-разностных регуляторов типа обратной связи по выходу 155
Цегельник В. В. Аналитические свойства решений трехмерной динамической системы с кубическими нелинейностями 167
Цехан О. Б. К поточечной управляемости линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием 172

PROCEEDINGS
OF THE INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE NAS OF BELARUS
Minsk. 2026. Vol. 34, No. 1s

CONTENTS

IN MEMORY OF THE SCIENTIST

Ivan Vasilyevich Gaishun (80th anniversary of birth) 7
Faina Mikhailovna Kirillova (95th anniversary of birth) 11

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

Dymkov M. P., Dymkou V. M. Optimization problems for 2D continuous control systems 15

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

Kostyukova O. I., Tchemisova T. V. Parametric semi-infinite programming problems: properties of solution functions 32

DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMIC SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

Alsevich V. V. The relationship between the indicators of comparative statics of the firm theory . . . 50
Astrovskii A. I., Gorjachkin V. V. About the stability of discrete nonstationary systems of linear Volterra equations 60
Vaskouski M. M., Zorka M. Y. Stability of stationary linear stochastic differential systems controlled by rough paths with Holder exponents greater than $1/3$ 75
Gorokhovik V. V. First- and second-order optimality conditions in a vector optimization problem with an uncertain preference relation 81
Detchenya L. V., Grin A. A., Kuzmich A. V., Musafirov E. V. Local phase portraits of a differential system with fourth-degree nonlinearities in the neighborhood of multiple equilibrium point 98
Dmitruk N. M. Optimal observation problems accompanying measurement optimal control problems 111
Kalinin A. I., Lavrinovich L. I. Asymptotics of solving control problem with minimum intensity of linear three-tempo singularly perturbed system 128
Krakhotko V. V., Razmyslovich G. P. Relative controlability of a continuous system with state delay and its discrete analogue 143
Roudenok A. E., Vasilevich M. N. Isochrones of systems with a small parameter that are independent of it 148
Khartovskii V. E., Kiturko O. M. Finite spectrum assignment problem for linear neutral-type systems in the class of differential-difference output-feedback controllers 155
Tsegel'nik V. V. Analytical properties of solutions of three-dimensional dynamical system with cubic nonlinearities 167
Tsekhan O. B. On pointwise controllability of a linear time-invariant singularly perturbed system with delay 172

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 7–10

ПАМЯТИ УЧЕНОГО
IN MEMORY OF THE SCIENTIST

https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-7–10
EDN: QGOMCV

ИВАН ВАСИЛЬЕВИЧ ГАЙШУН (80 ЛЕТ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)



29 сентября 2026 г. исполнилось 80 лет со дня рождения выдающегося ученого-математика, академика Национальной академии наук Беларуси, доктора физико-математических наук, профессора Ивана Васильевича Гайшуна – известного специалиста в области дифференциальных уравнений, топологической динамики, математической теории управления и методов математического моделирования.

Иван Васильевич родился в деревне Петровичи Бобруйского района Могилевской области. В 1964 г. после окончания Горбацевичской средней школы он поступил в Белорусский государственный университет на математический факультет, который с отличием окончил в 1969 г., получив специальность «математик». По распределению был направлен на работу в Институт математики АН БССР. Научное творчество И. В. Гайшуна началось еще в студенческие годы, когда он под руководством академика Е. А. Барбашина стал проводить исследования по устойчивости решений систем нелинейных дифференциальных уравнений. В результате этих исследований были разработаны способы построения функций Ляпунова, позволяющие в ряде случаев решить известную проблему абсолютной устойчивости. Эти результаты позволили описать области притяжения положения равновесия важных механических систем. Также были изучены периодические решения дифференциальных уравнений и получены условия устойчивости систем со случайными параметрами. Часть этих результатов была включена академиком Е. А. Барбашиным в его монографию «Функции Ляпунова» (Москва, 1970 г.).

В 1972 г. Иван Васильевич успешно защитил кандидатскую диссертацию, а в 1984 г. в Институте математики и механики Уральского отделения АН СССР – диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.

Высокий научный потенциал, тонкая математическая интуиция и широкая эрудиция позволили Ивану Васильевичу получить ряд выдающихся математических результатов.

Область научных интересов Ивана Васильевича в основном была связана с развитием теории динамических систем, понимаемых в широком смысле, и в первую очередь с такими ее современными разделами, как вполне интегрируемые системы на многообразиях; уравнения в полных производных в банаховых и локально выпуклых топологических пространствах; многомерные, многопараметрические и нечеткие динамические системы; системы уравнений с изменяющейся структурой и системы с запаздыванием; управляемые непрерывные и дискретные линейные динамические системы, рассматриваемые совместно с различными топологическими и алгебраическими структурами (локально-компактными группами, кольцами, топологическими полями и телами). В каждом из этих разделов математики академик И. В. Гайшун получил основополагающие результаты, среди которых теория устойчивости инвариантных множеств, основанная на понятии фильтра в общей топологии; глубокое обобщение теории характеристических чисел

Ляпунова на неавтономные линейные уравнения в полных производных в банаховых пространствах; критерии ограниченности, периодичности и почти периодичности решений уравнений в полных производных на локально выпуклых пространствах. Он предложил единый подход к задачам устойчивости общих динамических систем, развил методы исследования нелинейных дифференциальных, функционально-дифференциальных и дискретных уравнений. Построил теорию уравнений в полных производных, находящуюся на стыке топологической динамики, обыкновенных дифференциальных уравнений и функционального анализа. Разработал функционально-аналитические методы исследования распределенных систем управления, позволившие изучить фундаментальные свойства многопараметрических дифференциально-разностных и дискретных систем, широко используемых в теории обработки изображений. Эти результаты и ряд других важных результатов исследований, в частности, основы теории вполне разрешимых дискретных систем, опубликованы в монографиях «Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения» (Минск, 1983 г.), «Линейные уравнения в полных производных» (Минск, 1989 г.).

В теории нечетких множеств Ивану Васильевичу принадлежит определение нечеткой динамической системы (F-системы), использующее оригинальную интерпретацию функции принадлежности Л. Заде, и полное исследование устойчивости (по некоторому фильтру, обладающему свойством инвариантности) нечетких точек F-систем. И. В. Гайшун изучал также управляемые линейные системы в нечетких пространствах и нашел признаки устойчивости и управляемости таких систем. Фундаментальной задаче моделирования с помощью дискретных систем в пространстве эволюционных процессов посвящен ряд работ Ивана Васильевича, в которых определены дискретные системы с изменяющейся структурой и изучены их свойства устойчивости, управляемости, наблюдаемости, стабилизируемости и вложимости.

Большой цикл исследований, выполненный И. В. Гайшуном по линейной теории управления, представлен им в монографиях «Многопараметрические системы управления» (Минск, 1996 г.), «Введение в теорию линейных нестационарных систем» (Минск, 1999 г.), «Системы с дискретным временем» (Минск, 2001 г.). Две монографии «Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения» и «Введение в теорию линейных нестационарных систем» переизданы российским издательством «Едиториал УРСС» (Москва, 2004 г.).

В монографии «Многопараметрические системы управления» развиты методы качественной теории различных классов многопараметрических дискретных систем управления, включающие популярный в приложениях класс 2D систем. Полученные Иваном Васильевичем результаты по теории 2D систем были им обобщены на значительно более широкий класс линейных систем, заданных в пространствах функций на топологических коммутативных группах.

Иван Васильевич интенсивно проводил исследования в области математической теории управления. Им разработаны основанные на идеях современной алгебры, функционального анализа и топологической динамики новые методы для изучения свойств робастности, устойчивости, стабилизируемости, управляемости и наблюдаемости различных классов линейных динамических систем. В частности, в математической теории систем одной из центральных является проблема классификации совокупности управляемых линейных систем относительно действий различных групп преобразований в пространстве состояний системы. Истоки такого рода задач восходят к исследованиям А. М. Ляпунова, О. Перрона, Н. П. Еругина, Ю. С. Богданова по асимптотической устойчивости линейных нестационарных дифференциальных систем. Идеи приводимости линейных нестационарных систем дифференциальных уравнений с помощью подходящих групп преобразований привели к проблеме построения канонических систем в теории управления-наблюдения. Академик И. В. Гайшун развил метод построения канонических форм линейных нестационарных дифференциальных и дискретных управляемых систем, что позволило в ряде важных случаев получить решение проблемы классификации линейных систем управления-наблюдения. Он предложил способы построения управляющих воздействий в виде обратной связи, которые гарантируют асимптотическую устойчивость линейных нестационарных систем. Разработал методы исследования динамических систем управления-наблюдения, заданных над коммутативными кольцами. Конструктивные методы для построения канонических форм Фробениуса для широкого класса линейных нестационарных систем, а также их применения к различным задачам управления изложены

в монографии «Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений» (Минск, 2013 г.)

Важное место в научном творчестве Ивана Васильевича занимала теория уравнений в полных дифференциалах. Им определены гамильтоновы линейные и квазилинейные системы в полных дифференциалах и для указанного класса систем с периодическими коэффициентами получены критерии устойчивости и условия сильной устойчивости, т. е. условия грубости свойства устойчивости при малых возмущениях параметров, сохраняющих полную интегрируемость и гамильтоновость системы. Иваном Васильевичем развита также теория наблюдаемости линейных нестационарных систем в полных дифференциалах, доказан принцип максимума для класса таких систем и развит способ построения минимальных реализаций линейных стационарных систем в полных дифференциалах.

Отметим, что теоретические исследования Ивана Васильевича имеют непосредственное приложение в различных разделах науки и техники, например, уравнения в полных производных широко используются в квантовой теории поля, статистической механике и теории турбулентности. Результаты по многомерным и управляемым системам прямо связаны с задачами анализа и синтеза автоматических систем регулирования, цифровой обработки многомерных сигналов и криптографии. В работах Ивана Васильевича глубокие теоретические результаты нашли приложение в теории неразрушающего контроля («Структурные свойства динамических систем и обратные задачи математической физики». Минск, 2009 г.), в медицине («Демпфирующая функция артерий и неинвазивные методы ее оценки». Минск, 2016 г.). В 2017–2018 гг. он построил и исследовал математические модели функционирования сердечно-сосудистой системы человека. Под руководством И. В. Гайшуна был выполнен ряд работ по математическому моделированию процессов управления в многофункциональных сложных технических системах, имеющих прямое народно-хозяйственное значение. Академик И. В. Гайшун автор свыше 300 научных публикаций и 8 монографий.

Иван Васильевич успешно сочетал научную деятельность с преподавательской работой. С 1994 г. на кафедре «Прикладная и теоретическая механика» механико-математического факультета Белгосуниверситета он читал курс лекций «Устойчивость и стабилизация динамических систем», «Автоматическое управление», щедро и искренне делился с молодежью накопленным опытом и знаниями. Регулярно возглавлял Государственную экзаменационную комиссию на механико-математическом факультете, являлся научным руководителем студентов при написании курсовых и дипломных работ. Иван Васильевич ответственно относился к воспитанию молодых ученых, уделял много времени подготовке высококвалифицированных научных кадров, сохраняя и преумножая лучшие научные традиции. Авторитетный педагог он с исключительным уважением относился к своим ученикам, удивительным образом сочетая отзывчивость, понимание и требовательность. Будучи членом Президиума ВАК Беларуси, он определял высокий уровень требований к подготовке научных кадров. Под его руководством подготовлено четыре доктора физико-математических наук.

Много сил и энергии Иван Васильевич отдавал научно-организационной работе в системе НАН Беларуси, активно и плодотворно трудился над организацией научных исследований в Беларуси. Он являлся Президентом Белорусского математического общества, членом Президиума ВАК Беларуси, продолжительное время был членом Совета Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, членом Президиума НАН Беларуси. Был рецензентом и участвовал в работе редколлегии ряда журналов («Дифференциальные уравнения», «Доклады НАН Беларуси», «Computational Methods in Applied Mathematics», «Труды Института математики НАН Беларуси»). Являлся руководителем научного семинара по математической теории систем, на котором прошли апробацию десятки диссертационных работ. Имя академика И. В. Гайшуна широко известно мировой научной общественности: он являлся членом Европейской Академии наук и Американского математического общества.

Простой крестьянский парень из сельской глубинки, обладающий несомненным математическим дарованием, работоспособностью и целеустремленностью, сумел самостоятельно и достойно пройти путь от ученика сельской школы, студента математического факультета Белгосуниверситета до академика, директора Института математики НАН Беларуси, выдающегося ученого в области

дифференциальных уравнений и теории управления, топологической динамики и методов математического моделирования. С 1992 г. и до последних дней жизни (до 24 апреля 2018 г.) И. В. Гайшун возглавлял Институт математики НАН Беларуси. С мая 1997 г. по апрель 2002 г. он являлся вице-президентом НАН Беларуси. Иван Васильевич удостоен премии комиссии Совета Министров СССР за выполнение темы по заданию Директивных органов (1981 г.); награжден почетными грамотами Совета Министров за высокие достижения в научной деятельности (1996, 2011 гг.). Он является лауреатом Государственной премии Республики Беларусь за цикл работ «Исследование асимптотических свойств дифференциальных и дискретных систем» (2000 г.); премий академий наук Украины, Беларуси и Молдовы (2011 г.); в 2006 г. ему вынесена Благодарность Президента Республики Беларусь, награжден медалью Франциска Скорины (2017 г.).

В повседневной жизни Иван Васильевич был необычайно скромен и уважителен с коллегами. Отличали его от многих неподдельная искренность и дружелюбие, в том числе и в отношении только начинающих научную и трудовую жизнь. Часто, в минуты его вдохновения, было трогательным слушать в его исполнении стихи Сергея Есенина, большинство произведений которого он знал наизусть, и которые с большим удовольствием декламировал. Особенно проникновенно они звучали в его устах на природе, где время от времени небольшим группкам молодых и не очень молодых сотрудников Института математики случалось бывать – будь то озеро Вяча с ее лодочными прогулками или с/х работы в подшефных хозяйствах Минской области. Казалось, что вместе с грустью этих стихов, Иван Васильевич сопереживает поэту и вспоминает свою юность и времена, когда он проделывал не близкий путь от сельской школы до своей деревни Петровичи в Бобруйском районе.

Неожиданным для многих оказалось плотницкое искусство Ивана Васильевича. Была в нашей стране особая пора расцвета дачного строительства. Не обошла стороной эта эпопея и сотрудников Института математики. Этот период стал порой различных фантазий в архитектурной сфере и домостроении. Иван Васильевич весьма обстоятельно подошел к разработке проекта строительства дома, а когда пришла пора реализации этого проекта, то он проявил особую ловкость и сноровку в работе с топорами, фуганками, калевками и прочим столярным инструментом. Это умение поразило многих бывалых мастеров. Казалось, что только этим он и занимался всю жизнь.

Неиссякаемый запас идей и талант ученого сочетались в Иване Васильевиче с высокими человеческими качествами и умением создавать исключительно добрую и творческую атмосферу. Этим он снискал авторитет справедливого, чуткого и корректного руководителя. Иван Васильевич умел поддержать ученого в моменты творческого кризиса, профессионально оценить полученные результаты и дать дельный совет в сложной ситуации.

Светлая память об Иване Васильевиче навсегда сохранится в сердцах его коллег, учеников, друзей, всех тех, кто знал и ценил его необыкновенную мудрость и талант.

Редколлегия журнала

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 11–14

https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-11–14
EDN: QUGCES

ФАИНА МИХАЙЛОВНА КИРИЛЛОВА (95 ЛЕТ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)



29 сентября 2026 г. исполнилось 95 лет со дня рождения выдающегося ученого-математика, члена-корреспондента Национальной академии наук Беларуси, доктора физико-математических наук, профессора Фаины Михайловны Кирилловой.

Фаина Михайловна Кириллова родилась 29 сентября 1931 г. в поселке Зуевка Кировской области РСФСР. С 1949 по 1954 г. она училась на физико-математическом факультете Уральского государственного университета им. А. М. Горького в г. Свердловске, который окончила с отличием, получив специальность «математик». После окончания университета была направлена на работу в Уральский политехнический институт в г. Свердловске, где в течение следующих шести лет работала ассистентом, лекционным ассистентом кафедры высшей математики.

В сентябре 1960 г. Фаина Михайловна начала работать в Уральском филиале АН СССР в должности младшего научного сотрудника отдела математики, откуда в апреле 1961 г. была переведена в Свердловское отделение Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР на ту же должность. Работа под руководством выдающихся ученых Н. Н. Красовского и Е. А. Барбашина оказала существенное влияние на формирование ее научных интересов. Она сумела не только глубоко усвоить и проникнуть в их научные идеи, но и придать новый импульс развитию этих идей. Проведенная в эти годы под руководством академика АН СССР Н. Н. Красовского научно-исследовательская работа успешно завершилась защитой в 1962 г. в МГУ им. М. В. Ломоносова кандидатской диссертации «Задачи качественной теории оптимального регулирования».

В 1963 г. Фаина Михайловна в должности старшего научного сотрудника вновь начала работать в Уральском филиале АН СССР, откуда в составе отдела энергетики и автоматики в сентябре 1963 г. была переведена в Уральский политехнический институт. Последовавшая за защитой кандидатской диссертации пятилетняя напряженная научная работа по развитию и применению функционального подхода к решению задач оптимального управления легла в основу ее докторской диссертации «О некоторых применениях функционального анализа в теории оптимальных процессов», защищенной в 1967 г. в Ленинградском государственном университете им. А. А. Жданова. Результаты, полученные в диссертации, положительно отметили ведущие ученые СССР и, в частности, выдающийся советский математик, академик АН СССР Л. С. Понтрягин.

В 1967 г. начался новый этап жизни и научной деятельности Фаины Михайловны. В ноябре 1967 г. по приглашению академика Н. П. Еругина она переехала в Минск и начала работать в должности старшего научного сотрудника в Институте математики АН БССР. В то время Фаина Михайловна была первой и единственной в Белоруссии женщиной-математиком, имеющей степень доктора физико-математических наук. В январе 1970 г. она возглавила отдел теории процессов управления, которым успешно руководила до 2008 г. Долгое время она успешно совмещала научную деятельность с преподавательской работой в Белгосуниверситете; в 1972 г. ей было присвоено звание профессора. В 1996 г. Ф. М. Кириллова была избрана членом-корреспондентом НАН Беларуси, став единственной в истории белорусской науки женщиной-математиком, удостоенной столь высокого звания.

Научная деятельность Фаины Михайловны Кирилловой представляет тот почти исключительный счастливый случай, когда на протяжении всей жизни ученый с неослабевающей энергией

занимается одной большой научной проблемой, актуальность которой не уменьшается со временем. Ее стартовая статья «О корректности постановки одной задачи оптимального регулирования», опубликованная в 1958 г., была одной из первых работ в только что зарождавшейся теории оптимальных процессов. В ней для задач оптимального управления развивался новый (функциональный) подход, предложенный в 1957 г. Н. Н. Красовским и известный теперь как метод моментов (в первых статьях его называли методом L-проблемы моментов). В работах Фаины Михайловны было показано, что можно расширить возможности метода моментов, в частности решать задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями, если использовать нестандартные нормы. Ей удалось оптимизировать системы, линейные только по состоянию, но нелинейные по аддитивно входящим управлениям, применяя теоремы об отделимости выпуклых множеств в пространстве состояний и теоремы о минимаксе. Эта техника стала общепринятой в современных работах.

По мере развития теории оптимального управления различные ее аспекты привлекали внимание Фаины Михайловны. В начале 1960-х годов ею была решена задача Летова–Калмана для систем, не являющихся вполне управляемыми. Затем Фаина Михайловна исследовала управляемость и наблюдаемость систем со сложной структурой и систем с последействием. Ею впервые было введено определяющее уравнение – рекуррентное соотношение, составляемое по определенным простым правилам на основе параметров системы управления. Роль определяющих уравнений в теории управления и наблюдения аналогична роли характеристических уравнений в теории устойчивости. С помощью определяющих уравнений легко получаются классические результаты Калмана об управляемости и наблюдаемости обыкновенных систем. Задача относительной управляемости систем с последействием была полностью решена с использованием определяющих уравнений. Затем была разработана общая схема исследования полной управляемости произвольных систем с запаздыванием.

Фаина Михайловна внесла существенный вклад в исследование условий существования оптимальных управлений. В отличие от классических теорем, сформулированных для весьма широких классов систем и не учитывающих индивидуальные особенности конкретных систем, ею впервые были доказаны индивидуальные теоремы существования оптимальных управлений, в которых условия существования решений связываются с условиями оптимальности. Тесно связанная с этой проблемой теория необходимых условий оптимальности получила развитие в работах Фаины Михайловны, установившей универсальный способ выражения принципа максимума и обосновавшей его для широкого класса дифференциально-функциональных систем, включающих, в частности, системы с запаздываниями.

Одним из важных направлений дальнейшего развития теории необходимых условий оптимальности стало исследование особых управлений. Этой теме был посвящен ряд работ и монография, написанная совместно с Р. Габасовым. Для исследования оптимальных особых управлений во внутренней области был разработан универсальный метод пучка вариаций, предложен оригинальный метод матричных импульсов для особых управлений с замкнутыми множествами значений, найдены новые условия оптимального сопряжения экстремалей. Особые оптимальные управления исследовались также с точки зрения динамического программирования, где были предложены новые уравнения высокого порядка, содержащие полезную информацию об оптимальных особых управлениях. Разработанная теория особых управлений связана с результатами Фаины Михайловны в теории условий оптимальности высокого порядка. Новые условия высокого порядка усиливали принцип максимума на неособых дугах, где его условия недостаточны для распознавания неоптимальных управлений.

Большой резонанс в научном мире вызвали работы Ф. М. Кирилловой и Р. Габасова по принципу ε-максимума, в которых впервые принцип максимума Понтрягина получил адекватное выражение для дискретных систем. В отличие от предыдущих результатов в этой области, при стремлении шага дискретизации к нулю из принципа ε-максимума следовал классический принцип максимума для непрерывных систем. Этот результат позволил понять связь между существованием оптимальных управлений в непрерывных системах и справедливостью принципа максимума для дискретных систем.

Новое направление научных исследований Фаины Михайловны возникло в 1970-е годы. Совместно с Р. Габасовым они разработали широкую программу создания конструктивной теории оптимального управления. Конечной целью было построение быстрых численных методов решения задач оптимального управления, однако было решено начать с задач линейного программирования,

чтобы глубже понять способы решения простых задач. Был проанализирован симплекс-метод и предложен так называемый адаптивный метод линейного программирования, в котором основными преимуществами были возможность начинать с произвольного допустимого решения, независимо изменять на каждой итерации допустимое решение и базис, называемый в адаптивном методе опорой, а также использование теории двойственности. Последнее позволяло, с одной стороны, доказать критерий ε-оптимальности и прекращать итерации при достижении субоптимального решения, а с другой – существенно повысить эффективность метода за счет использования «длинных» двойственных шагов. Важным свойством адаптивного метода с точки зрения теории оптимального управления была возможность его развития для решения задач линейного оптимального управления. После широкого использования адаптивного метода для задач линейного программирования он был обобщен на более сложные задачи оптимизации: квадратичное, кусочно-линейное, линейно-дробное программирование и соответствующие задачи оптимального управления. Развитие адаптивного метода для общих нелинейных задач программирования осуществлялось с использованием нового важного понятия – сетевых моделей нелинейных функций. Их применение позволило Ф. М. Кирилловой, Р. Габасову и их сотрудникам учитывать специфику конкретной задачи и строить различные эффективные численные методы решения нелинейных задач программирования с учетом структуры функций, входящих в постановку задачи.

Развитие адаптивного метода применительно к задачам оптимального управления началось с линейных систем. При анализе этого подхода выяснилось, что вместо множителей Лагранжа, определяющих оптимальное поведение сопряженной системы, в качестве основного инструмента целесообразно использовать опору. Последняя тесно связана как с прямой, так и с сопряженной системами и стала определяющим элементом при создании быстрых алгоритмов построения оптимальных программных управлений и оптимальных обратных связей для линейных и нелинейных динамических систем. При переходе от линейных и специальных нелинейных задач к общим задачам оптимального управления большую роль играют задачи с нелинейностью, зависящей от малого параметра. Для решения таких задач Минской научной группой под руководством Фаины Михайловны Кирилловой и Рафаила Габасова были разработаны асимптотические методы. И здесь успех был обусловлен использованием опоры как основного инструмента, которая, в отличие от двойственных переменных, гладко зависит от малого параметра.

К концу 1980-х годов программа создания конструктивной теории задач оптимизации, начатая в начале 1970-х годов, в основном была завершена и привела к появлению многочисленных работ и монографий «Методы линейного программирования» (в 3 томах) и «Методы конструктивной оптимизации» (в 5 томах), опубликованных в Минске Фаиной Михайловной Кирилловой, Рафаилом Габасовым и их учениками. Для задач оптимального управления разработанные методы были ориентированы на построение оптимальных программных решений, однако оказалось, что они могут быть успешно применены для реализации оптимальных обратных связей в реальном времени.

Первая работа по синтезу оптимальных обратных связей для линейных систем на основе нового подхода была опубликована в 1991 г. В дальнейшем этот подход был развит для кусочно-линейных, квазилинейных и нелинейных систем, а исследования продолжены в направлении построения робастных оптимальных обратных связей как по состоянию, так и по выходу. Здесь появились новые типы обратных связей – замыкаемые и замкнутые, которые строятся с учетом некоторой информации о будущих состояниях или их измерениях при построении оптимального управления, что позволяет повысить качество управления.

Среди поздних результатов исследований Фаины Михайловны – работы по конструктивным методам оптимального управления системами с распределенными параметрами, системами с запаздыванием, большими системами, группами взаимосвязанных динамических систем, методам стабилизации, слежения, наведения, а также по некоторым задачам оптимального управления в экономике.

Фаина Михайловна Кириллова является автором более 600 научных работ, опубликованных в престижных научных изданиях, и 14 монографий, 4 из которых переизданы в США и Японии.

Ф. М. Кириллова совместно с Р. Габасовым была основателем белорусской научной школы по математическим методам оптимального управления и оптимизации, известной далеко за пределами республики. Под ее руководством были защищены 49 кандидатских диссертаций, 8 из ее учеников из Беларуси, России и Вьетнама впоследствии защитили докторские диссертации. Всего Фаина

Михайловна и Рафаил Габасов совместно руководили подготовкой 116 кандидатов наук. Ученики Фаины Михайловны плодотворно работают в университетах и научных центрах Беларуси, стран СНГ, США, Канады, Австралии, Португалии, Болгарии, Китая, Вьетнама и других стран, продолжая развивать созданную научную школу.

Научные достижения Ф. М. Кирилловой получили высокую оценку и широкое признание, в том числе на международном уровне. Она являлась лауреатом Премии Совета Министров СССР (1981, 1986), Премии Академии наук Беларуси (1995) за цикл работ по разработке конструктивных методов решения экстремальных задач, была награждена бронзовой медалью ВДНХ СССР (1985). В 2002 г. ей было присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки Республики Беларусь». За большой вклад в подготовку научных кадров высшей квалификации ей было присвоено звание «Почетный доктор наук Иркутского государственного университета» (2001), а за выдающийся вклад в подготовку научных кадров для Вьетнама она была награждена медалью Министерства образования Социалистической Республики Вьетнам и памятной медалью Ханойской военной технической академии. Фаина Михайловна была членом Национального комитета СССР по автоматическому управлению (1975–1991), членом рабочей группы Международной федерации по автоматическому управлению (IFAC) по применениям нелинейного программирования в управлении (1978–1987), заместителем председателя технического комитета IFAC по математическим методам в управлении (1984–1987), председателем рабочей группы IFAC по применениям оптимизации в управлении (1987–1994), председателем рабочей группы IFAC по оптимальному управлению (1996–2002).

Ф. М. Кириллова оказала огромное влияние на развитие и популяризацию идей белорусских математиков. Она входила в состав редколлегий международных журналов «Optimization», «Control and Cybernetics», «Applied and Computational Mathematics», под ее непосредственным руководством были организованы престижные международные конференции по проблемам управления. По ее инициативе в Республике Беларусь было создано общественное объединение «Национальная академия по автоматическому управлению», позднее переименованное в «Белорусскую ассоциацию управления и менеджмента», бессменным руководителем которого она являлась в 1994–2008 гг.

В 2002 г. в журнале Control Systems Magazine, издаваемом в США Институтом инженеров электротехники и электроники (IEEE), была опубликована статья «Women in the field of control systems», в которой Ф. М. Кириллова была признана одной из шести женщин-ученых, оказавших наибольшее влияние на развитие теории управления в XX в.

Фаина Михайловна была целеустремленным, настойчивым, принципиальным ученым, педагогом и организатором, ответственным, честным и отзывчивым человеком, готовым прийти на помощь и оказать поддержку в трудную минуту. Светлая память о Фаине Михайловне навсегда сохранится в сердцах ее коллег, учеников, друзей, всех тех, кто ее знал и ценил за необыкновенную мудрость и талант. Ее научные результаты и идеи продолжают развиваться в работах учеников и последователей, которые применяют их в своих исследованиях и передают накопленные знания новым поколениям математиков в Беларуси и за рубежом.

Редколлегия журнала

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 15–31

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

УДК 517.542
https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-15–31
EDN: RYYHQG

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ 2D СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

М. П. Дымков, В. М. Дымков

Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь
e-mail: dymkov_m@bseu.by, dymkov@mail.ru

Поступила: 11.05.2026 **Исправлена:** 02.07.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: многомерные mD системы, дискретные модели Россера и Форназини–Маркезини, обобщения линейных 2D систем на непрерывный случай, представление решений, операционное исчисление, линейно-квадратичные задачи оптимизации

Аннотация. В статье представлено обобщение дискретных 2D систем Россера и Форназини–Маркезини на непрерывный случай. Получены формулы для представления решений линейных непрерывных 2D систем, в том числе указана возможность расширения методов операционного исчисления путем построения соответствующих интегральных преобразований по пространственной переменной. Рассмотрены линейно-квадратичные задачи оптимизации, для которых получены соответствующие условия оптимальности и форма представления оптимального управления.

OPTIMIZATION PROBLEMS FOR 2D CONTINUOUS CONTROL SYSTEMS

M. P. Dymkov, V. M. Dymkou

Belarusian State Economic University, Minsk, Belarus
e-mail: dymkov_m@bseu.by, dymkov@mail.ru

Received: 11.05.2026 **Revised:** 02.07.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: multidimensional mD systems, Roesser and Fornasini–Marchesini discrete state-space models, Continuous versions of 2D systems, Operational calculus, Optimization problems

Abstract. The paper presents an extension of discrete 2D systems of Roesser and Fornasini–Marchesini types for the continuous case. Formulas for solution representation of linear continuous 2D systems are obtained, including the possibility of expanding the methods of operational calculus by constructing corresponding integral transformations with respect to the spatial variable. Some linear-quadratic optimization problems are considered and the corresponding optimality conditions based on the operator setting are stated. Also, some form of the optimal control representation is presented.

1. Введение

В последние годы определенное внимание привлекают так называемые многопараметрические системы управления. В зарубежных публикациях эти объекты называют mD ($m > 1$, чаще всего $m = 2$) системы (сокращение английского термина multidimensional systems). Отличительной чертой таких систем является то, что их динамические переменные зависят более чем от одного параметра, так что распространение информации в них осуществляется по многим независимым направлениям. При этом эти направления в динамических переменных могут быть представлены в различных комбинациях, как функции дискретных, непрерывных или смешанных дискретно-непрерывных параметров. Если рассматривать, например, случай $m = 2$, то распространение динамики в двух независимых направлениях может быть функцией: а) двух дискретных переменных, б) непрерывной переменной в одном направлении и дискретной в другом, или с) двух непрерывных переменных.

Первоначальные исследования таких моделей мотивировались необходимостью математической формализации многочисленных задач, возникших в практике электрических цепей и обработке многомерных сигналов и их изображений. В первых работах для изучения электрических схем были использованы модели, которые опираются на так называемые передаточные функции, зависящие от двух и более переменных. Наиболее полно развитие теории многопараметрических систем в этот период изложено, по-видимому, в [1], а также ряде обзорных статей, частично опубликованных в Трудах общества IEEE и переведенных затем на русский язык [2]. Все возрастающий интерес к 2D системам объяснялся широким распространением во многих областях естествознания и техники цифровых методов распознавания и обработки изображений, цифровой фильтрации массивов данных и подавления шума, для сжатия и улучшения качества информации, обработки сейсмических, радарных данных и ряда других приложений [3]. Изучение нового круга задач можно осуществлять с использованием различных формальных представлений используемых объектов. В теории цифровой обработки сигналов основной упор делается на описание соответствия между входом и выходом системы посредством передаточной функции, в то время как современная теория управления опирается главным образом на представления в пространстве состояний. Это различие в определенной мере можно объяснить тем, что в каждой области необходимо найти ответы на поставленные там свои вопросы. В первом случае интересуются большей частью проблемами реализации систем с заданным внешним поведением, что и предопределяет необходимость в описании соответствия «вход–выход». Методы же теории управления, основанные на представлении объектов в пространстве состояний посредством динамических систем, позволяют проанализировать качество этих объектов, определить наиболее рациональные режимы их функционирования и синтезировать в итоге оптимальные замкнутые системы управления. При первом подходе основные методы исследования опираются на классические разделы алгебры, прежде всего на теорию полиномов от нескольких переменных. Следует отметить, что теория полиномов от двух и более переменных, а также другие алгебраические объекты, вовлеченные позже в рамках данного подхода, существенно сложнее случая одной переменной. Это обстоятельство является серьезным препятствием для алгебро-геометрических методов. Весьма объективно трудности и проблемы этого подхода изложены в обзоре [4]. По-видимому, в [5; 6] были впервые предложены различные модели дискретных 2D систем управления, определенные непосредственно в пространстве состояний. В монографии И. В. Гайшуна [7] эти модели были объединены и представлены в виде операторного уравнения, заданного в пространствах функций, определенных на целочисленной решетке. Для случая дискретных многопараметрических систем имеется довольно обширная литература. С историей становления теории таких систем и основными направлениями исследований можно познакомиться, например, в [8].

В случае многопараметрических 2D систем с независимыми параметрами, приведенными выше в пункте а), имеется много работ, основанных на линейных моделях Россера и Форназини–Маркезини. Простейший класс линейных дискретных систем Россера, используемых в приложениях и математической теории, может быть описан уравнениями

$$\begin{aligned} x(t+1,s) &= A_{11}x(t,s) + A_{12}y(t,s) + g(t,s), \\ y(t,s+1) &= A_{21}x(t,s) + A_{22}y(t,s) + f(t,s), \end{aligned} \tag{1}$$

заданными на пространстве функций, определенных на целочисленной решетке $(t,s) \in {\mathbb{Z}_+}^2$ относительно неизвестных функций $x(t,s), y(t,s)$. Отметим, что в данном введении не детализированы необходимые начальные и/или граничные условия, а также классы функций и размерность матриц, задействованных для описания представленных моделей. Это будет сделано в следующих разделах.

Важный класс многопараметрических 2D систем составляют так называемые многошаговые (в англоязычной литературе их называют «repetitive processes»), в которых распространение информации имеет специфический характер. Теория таких систем хорошо изложена в работе [9]. Эти системы нашли широкое применение при моделировании многих технических задач, например, в итеративных схемах с обучением в робототехнике, конструировании устройств конвейерного

типа и др. Некоторые результаты из последних исследований, имеющих как теоретический, так и практический интерес, приведены в [10–12]. Простой случай линейных дискретных повторяющихся (или многошаговых) процессов можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} x(t+1,s+1) &= A_{11}x(t+1,s)+A_{12}y(t,s)+g(t,s),\ t \geqslant 0,\\ y(t+1,s) &= A_{21}x(t+1,s)+A_{22}y(t,s)+f(t,s),\ s=0,1,...,h. \end{aligned}$$

Отличительную особенность такого процесса можно проиллюстрировать, рассмотрев операции обработки, в которых материал или заготовка обрабатывается последовательностью движений, называемых проходами (или шагами), некоторого инструмента. На каждом шаге выходной сигнал, полученный на предыдущем шаге, действует как новое начальное состояние и, следовательно, вносит вклад в динамику процесса. Промышленные примеры повторяющихся процессов включают металлопрокатные станки, различные конвейерные устройства и др. Также в последние годы появились приложения, в которых использование для анализа условий повторяющегося процесса имеет явные преимущества перед альтернативными вариантами. Это справедливо, например, для классов итеративных обучающихся схем и алгоритмов управления.

Непрерывные версии для моделей (1) в простейшей форме могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(t,s)}{\partial t} &= A_{11}x(t,s)+A_{12}y(t,s)+g(t,s),\\ \frac{\partial y(t,s)}{\partial s} &= A_{21}x(t,s)+A_{22}y(t,s)+f(t,s) \end{aligned} \tag{2}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(t,s)}{\partial t} &= A_1x(t,s)+g(t,s),\\ \frac{\partial x(t,s)}{\partial s} &= A_2x(t,s)+f(t,s), \end{aligned} \tag{3}$$

где $(t,s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Уравнения (3) часто называют уравнениями Пфаффа или вполне разрешимыми многомерными дифференциальными уравнениями. Первые приложения таких уравнений были связаны с дифференциальной геометрией для нахождения многообразий с заданным тангенциальным подпространством [13]. В электродинамике эта модель описывает электрические потенциалы заданного электрического поля [14]. Поверхность переключения для релейного (bang-bang) оптимального управления также может быть описана дифференциальными уравнениями Пфаффа. Существенной особенностью таких систем уравнений является их переопределенность, т. е. когда число уравнений в такой системе больше, чем неизвестных функций. Некоторые подробности (и библиографию), касающиеся теории устойчивости и управления для этих моделей, можно найти, например, в монографии И. В. Гайшуна [15]. Линейно-квадратичная задача оптимизации для уравнения (3) с помощью функций комплексной переменной экспоненциального типа конечной степени исследовалась в [16].

Другой тип линейной дискретной модели Форназини–Маркезини может быть представлен в виде

$$x(t+1,s) = \sum_{i=0}^{N} A_i x(t,s+i) + g(t,s), \tag{4}$$

где для определения вектора состояний в каждой следующей точке $(t+1,s)$ дискретной решетки необходимо собрать информацию о векторах состояний объекта на всем дискретном интервале $\{(t,s),(t,s+1),\ldots,(t,s+N)\}$ (возможен также случай, когда $N \to +\infty$).

Таким образом, имеется достаточно широкий класс 2D моделей, в которых динамика процесса зависит от различных комбинаций независимых параметров вида a)–c).

Предметом данной работы являются непрерывные 2D системы управления, обобщающие приведенные выше дискретные модели Россера и Форназини–Маркезини. В работе также рассматривается одно из возможных обобщений 2D моделей (4), когда вместо суммирования дискретного

набора состояний объекта требуется осуществлять его непрерывное суммирование на всем временном интервале в виде

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = \int_{s_0}^{s_1} K(t,\tau,x(t,\tau))d\tau + g(x(t,s),t,s), \tag{5}$$

где $s_0,\ s_1$ – некоторые заданные действительные числа. По-видимому впервые такие математические объекты рассматривались в работах Е. А. Барбашина [17], в которых исследовались свойства устойчивости для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений.

В работе исследуются задачи квадратичной оптимизации в многопараметрических системах управления, описываемые непрерывными линейными 2D уравнениями типа (2) и (5). Получены условия существования и единственности решения соответствующих линейно-квадратичных задач оптимизации и дана форма представления этих решений. Кроме того, для модели (2) с возмущениями построены специальные интегральные преобразования (прямые и обратные) для пространственных переменных. Применение этих преобразований совместно с преобразованием Лапласа по временной переменной сводит краевую задачу к системе алгебраических уравнений, которая после применения обратных интегральных преобразований может быть представлена в виде системы взаимосвязанных отдельных блоков, непосредственно связанных с начальными данными. Этот факт может быть использован для привлечения эффективных методов параллельного программирования при нахождении решений задачи.

2. Непрерывная модель Россера

Простейшая непрерывная версия 2D модели Россера (2), описывающая математическую модель отдельного сорбционного аппарата при некоторых предположениях относительно изотермических условий для неравновесной динамики сорбции [18; 19], может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial s(x,t)}{\partial t} &= p(x,t) - s(x,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} &= s(x,t) - p(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant l_1, \end{aligned} \tag{6}$$

где l_1 и t_1 есть длина и период работы устройства соответственно, скалярные функции $s(x,t)$ и $p(x,t)$ обозначают плотность поглощенного вещества, т. е. концентрацию загрязняющего вещества в материале сорбента, и концентрацию загрязняющего вещества в потоке в точке x в момент времени t соответственно (рисунок). Начальные и граничные условия имеют следующий вид:

$$p(0,t) = \psi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1,\ s(x,0) = u(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l_1, \tag{7}$$

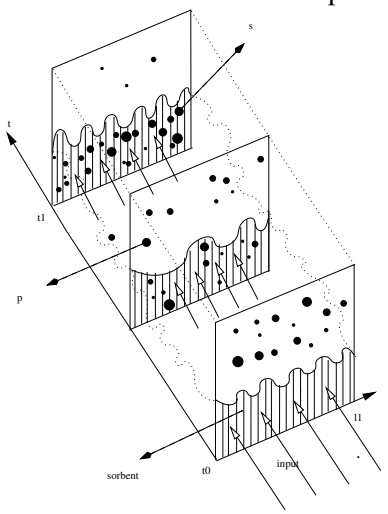
где $\psi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, – заданная непрерывная функция; $u(x) \geqslant 0$ – функция управления, которая представляет собой концентрацию сорбента, загружаемого в устройство в начальный момент времени. Следовательно, управление процессом для простейшей модели сорбционного аппарата возможно лишь в начальный момент $t = 0$. Полагаем, что управления допустимы, если $u(\cdot) \in L^2[0,l_1]$. Абсолютно непрерывные функции являются решениями уравнений (6) с начальными данными (7), если они удовлетворяют (6) и (7) почти всюду на промежутках $0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad 0 \leqslant x \leqslant l_1$. Задача оптимизации заключается в нахождении такой функции управления $u(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l_1$, которая вместе с соответствующим решением $s(x,t)$ и $p(x,t)$ уравнений (6) с граничными условиями (7) минимизирует показатель качества вида

$$J(u) = \int_0^{l_1} u^2(x)dx + \int_0^{l_1}\int_0^{t_1} p^2(x,t)dxdt + \int_0^{l_1}\int_0^{t_1} \left[\left(\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} \right)^2 \right] dx\,dt. \tag{8}$$

Таким образом, цель оптимизационной задачи (6)–(8) заключается в минимизации расхода сорбента и концентрации загрязняющих веществ в потоке. Отметим, что функция управления $u(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l_1$,

$p(x,t)$ – концентрация загрязняющих веществ в потоке

$s(x,t)$ – концентрация загрязняющего вещества в сорбенте



$u(x)$ – управление концентрацией сорбента

Схематическое устройство сорбционного аппарата

в модели сорбционного аппарата присутствует в граничных условиях, так что управление процессом очистки входящего потока осуществляется посредством граничных данных.

2.1. Существование и единственность решения

Введем следующие обозначения: $C(K)$ – пространство непрерывных функций, определенных на множестве $K \subset \mathbb{R}$; $AC(K)$ – пространство абсолютно непрерывных функций на K; $L^2(K)$ – пространство измеримых и интегрируемых с квадратом функций на K; $C^1(\Pi)$, где $\Pi := [0,l_1] \times \times [0,t_1]$ – пространство дифференцируемых функций $f(x,t)$, определенных в некоторой открытой области $\Omega \supset \Pi$ с непрерывными частными производными $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial t}$.

Лемма 2.1. *Система уравнений* (6), (7) *имеет единственное абсолютно непрерывное решение* $p(x,t)$, $s(x,t)$ *для любых начальных данных* $\psi(\cdot) \in C[0,t_1]$ *и управлении* $u(\cdot) \in L^2[0,l_1]$.

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться, что если абсолютно непрерывная функция $p(x,t)$ является решением интегрального уравнения

$$p(x,t) = e^{-(x+t)} \int_0^x \int_0^t e^{\xi+\eta} p(\xi,\eta) d\eta d\xi + e^{-(x+t)} \int_0^x e^z u(z) dz + e^{-x}\psi(t), \tag{9}$$

то $p(x,t)$ и функция

$$s(x,t) = \int_0^t e^{\eta-t} p(x,\eta) d\eta + e^{-t} u(x) \tag{10}$$

почти везде удовлетворяют (6) и (7).

Далее осталось доказать, что уравнение (9) имеет решение. Можно показать, что оператор T, заданный формулой

$$(Tf)(x,t) = \int_0^x \int_0^t e^{\xi+\eta} f(\xi,\eta) d\eta d\xi + e^{-(x+t)} \int_0^x e^z u(z) dz + e^{-x}\psi(t),$$

является сжимающим [20] в пространстве Соболева $W_2^1(\Pi)$ для любых заданных функций $\psi(\cdot) \in \in C[0,t_1]$ и $u(\cdot) \in L^2[0,l_1]$. Тогда по теореме о неподвижной точке [21] интегральное уравнение (9) имеет единственное решение $p(x,t)$, и следовательно, соответствующая функция $s(x,t)$ единственным образом определяется формулой (10). □

Теорема 2.2. *Для любого допустимого управления $u(x)$ система уравнений* (6), (7) *имеет единственное решение* $(p(x,t),s(x,t))$, $t\in[0,t_1]$, $x\in[0,l_1]$, *вида*

$$p(x,t)=e^{-x}\psi(t)+e^{-(x+t)}\int_0^x e^z u(z)dz+e^{-(x+t)}\Bigg[\int_0^x\int_0^t e^{-\xi}R(x,t,\xi,\eta)\psi(\eta)d\eta d\xi+$$
$$+\int_0^x e^z u(z)\Big[\int_z^x\int_0^t e^{-(\xi+\eta)}R(x,t,\xi,\eta)d\eta d\xi\Big]dz\Bigg],\quad s(x,t)=\int_0^t e^{\eta-t}p(x,\eta)d\eta+e^{-t}u(x), \tag{11}$$

где функция $R(x,t,\xi,\eta)$, $0\leqslant x\leqslant l_1$, $0\leqslant t\leqslant t_1$, $0\leqslant\xi\leqslant x$, $0\leqslant\eta\leqslant t$, *удовлетворяет интегральному уравнению*

$$R(x,\xi,t,\eta)=e^{\xi+\eta}+\int_\xi^x\int_\eta^t R(z,\tau,\xi,\eta)dzd\tau, \tag{12}$$

с начальными данными

$$R(x,x,t,\eta)=e^{x+\eta},\qquad R(x,\xi,t,t)=e^{\xi+t}. \tag{13}$$

Доказательство. Для того чтобы получить искомое представление для $p(x,t)$, $t\in[0,t_1]$, $x\in$ $\in[0,l_1]$, рассмотрим параметрическое интегральное уравнение вида

$$p(x,t)=\mu e^{-(x+t)}\int_0^x\int_0^t e^{\eta+\xi}p(\eta,\xi)d\eta d\xi+e^{-(x+t)}\int_0^x e^z u(z)dz+e^{-x}\psi(t), \tag{14}$$

относительно неизвестной функции $p(x,t)$, где μ является скалярным параметром. Это уравнение типа Вольтерра, правая часть которого, как видно из доказательства леммы, является сжимающим оператором [20] при любых $\psi(\cdot)\in C[0,t_1]$ и $u(\cdot)\in L^2[0,l_1]$. Следовательно, опять согласно теореме о неподвижной точке [21] уравнение (14) имеет единственное решение. Решение этого интегрального уравнения можно представить в виде формального степенного ряда относительно параметра μ

$$p(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x,t)\mu^n, \tag{15}$$

где члены степенного ряда $p_n(x,t)$ задаются формулой

$$p_0(x,t)=e^{-x}\psi(t)+e^{-(x+t)}\int_0^x e^z u(z)dz,$$

$$p_n(x,t)=e^{-(x+t)}\int_0^x\int_0^t K_n(x,t,\xi,\eta)p_0(\xi,\eta)d\xi d\eta,\ n=1,2,\ldots,$$

а итерированные ядра $K_n(x,t,\xi,\eta)$ определяются рекуррентным образом по формуле

$$K_{n+1}(x,t,\xi,\eta)=\int_\xi^x\int_\eta^t K_n(z,\tau,\xi,\eta)dzd\tau,\ K_0(x,t,\xi,\eta)=e^{\xi+\eta},\ \ n=0,1,2,\ldots. \tag{16}$$

Можно проверить, что решения интегральных уравнений (16) имеют вид

$$K_{n+1}(x,t,\xi,\eta)=e^{-(x+t)}e^{\xi+\eta}\frac{(x-\xi)^n}{n!}\frac{(t-\eta)^n}{n!},\ \ 0\leqslant x,\xi\leqslant l_1,\quad 0\leqslant t,\eta\leqslant t_1. \tag{17}$$

Из (17) на множестве Π можно получить оценки для ядер $K_{n+1}(x,t,\xi,\eta)$ и функций $p_n(x,t)$ в виде $|K_{n+1}(x,t,\xi,\eta)|\leqslant\dfrac{M^{n+1}}{n!}$ и $|p_n(x,t)|\leqslant\dfrac{L^n}{n!}$ соответственно, где M и L – некоторые константы. Так как функции $p_n(x,t)$ ограничены в области Π, то степенной ряд (15) при любом конечном значении параметра μ является абсолютно и равномерно сходящимся. Тогда при сделанных предположениях при любом конечном значении параметра μ следующий степенной ряд

$$R(x,t,\xi,\eta,\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}K_n(x,t,\xi,\eta)\mu^n \tag{18}$$

также равномерно и абсолютно сходится к резольвенте $R(x,\xi,t,\tau,\mu)$. Можно проверить, что эта резольвента удовлетворяет интегральному уравнению

$$R(x,\xi,t,\eta,\mu)=e^{\xi+\eta}+\mu\int_{\xi}^{x}\int_{\eta}^{t}R(z,\tau,\xi,\eta,\mu)dzd\tau,$$

которое эквивалентно интегро-дифференциальному уравнению вида

$$\frac{\partial R(x,t,\xi,\eta,\mu)}{\partial x}=\mu\int_{\eta}^{t}R(x,\tau,\xi,\eta,\mu)d\tau,$$

с начальными данными вида

$$R(x,x,t,\eta,\mu)=e^{x+\eta},\qquad R(x,\xi,t,t,\mu)=e^{\xi+t}.$$

Теперь записав степенной ряд (15) через итерированые ядра $K_n(x,t,\xi,\eta)$ и заменив затем полученный степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}K_n(x,t,\xi,\eta)\mu^n$ резольвентой $R(x,\xi,t,\eta,\mu)$ из (18), мы получим решение уравнения (14). Положив в полученной формуле $\mu=1$, получим требуемое решение в требуемом виде (11). □

2.2. Условия оптимальности

Теорема 2.3. *Для любых начальных данных $\psi(\cdot)\in C[0,t_1]$ задача оптимизации (6)–(8) имеет единственное оптимальное решение $u^0(\cdot)\in L^2[0,l_1]$.*

Доказательство. В пространствах функций $L^2[0,l_1])$ и $AC(\Pi)$ введем скалярное произведение формулами

$$\big(u,v\big)_2\triangleq\int_0^{l_1}u(x)v(x)dx,\ \ \forall\,u,v\in L^2[0,l_1],$$

и

$$\big(\nu,\omega\big)_1\triangleq\int_0^{t_1}\int_0^{l_1}\nu(x,t)\omega(x,t)dxdt+\int_0^{t_1}\int_0^{l_1}\left[\frac{\partial\nu(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial\nu(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\right]dxdt \tag{19}$$

соответственно. Определим оператор $\mathcal{L}:L^2[0,l_1]\to AC(\Pi)$ формулой

$$\big(\mathcal{L}u\big)(x,t)=e^{-(x+t)}\int_0^x e^zu(z)dz+\int_0^x e^zu(z)\Big[\int_z^x\int_0^t e^{-(\xi+\eta)}R(x,t,\xi,\eta)d\eta d\xi\Big]dz, \tag{20}$$

и оператор $\mathcal{F}:C[0,t_1]\to AC(\Pi)$ в виде

$$\big(\mathcal{F}\psi\big)(x,t)\ \ =\ \ e^{-x}\psi(t)+e^{-(x+t)}\int_0^x\int_0^t e^{-\xi}R(x,t,\xi,\eta)\psi(\eta)d\eta d\xi,$$

где функция $R(x,t,\xi,\eta)$ определяется интегральным уравнением (12) и начальными данными (13). Тогда решение $p\in AC(\Pi)$ первого уравнения в (6) с начальными условиями (7) можно представить в операторной форме следующим образом:

$$p=\mathcal{L}u+\mathcal{F}\psi, \tag{21}$$

и, следовательно, функционал качества (8) можно записать в виде

$$J(u) = \Big(p,p\Big)_1 + \Big(u,u\Big)_2\Big((\mathcal{L}u+\mathcal{F}\psi),(\mathcal{L}u+\mathcal{F}\psi)\Big)_1 + \Big(u,u\Big)_2 = \\ = \Big(u,(\mathcal{L}^*\mathcal{L}+\mathcal{E})u\Big)_2 + 2\Big(u,(\mathcal{L}^*\mathcal{F})\psi\Big)_2 + \Big(\psi,\mathcal{F}^*\mathcal{F}\psi\Big)_2, \tag{22}$$

где $\mathcal{E}$ обозначает тождественный оператор в $L^2[0,l_1]$, а $\mathcal{L}^* : AC(\Pi) \to L^2[0,l_1]$ есть оператор, сопряженный к оператору $\mathcal{L}$ относительно скалярного произведения, определенного выше.

Так как оператор $\mathcal{L}^*\mathcal{L}+\mathcal{E}$ обратимый [22], то можно определить управление в операторном виде формулой

$$u^0 = -(\mathcal{L}^*\mathcal{L}+\mathcal{E})^{-1}\mathcal{L}^*\mathcal{F}\varphi. \tag{23}$$

Для того чтобы убедиться, что функция u^0 является оптимальным управлением, достаточно проверить, что неравенство $J(u)-J(u^0) \geqslant 0$ выполняется для всех допустимых управлений $u \in \in L^2[0,l_1]$. Обозначим $\Gamma = (\mathcal{L}^*\mathcal{L}+\mathcal{E})$. Тогда, принимая во внимание формулы (22), (23), получаем, что приращение показателя качества можно представить в следующем виде:

$$J(u)-J(u^0) = (\Gamma(u-u^0),(u-u^0))_2,$$

и, так как оператор $\Gamma = \mathcal{L}^*\mathcal{L}+\mathcal{E} > 0$ является положительным [22], то верно неравенство

$$J(u)-J(u^0) = ((\mathcal{E}+\mathcal{L}^*\mathcal{L})(u-u^0),(u-u^0))_2 > 0$$

для любых допустимых u, $u \neq u^0$. Это означает, что функция u^0, определенная формулой (23), является единственным оптимальным управлением и $p^0 = \mathcal{L}u^0+\mathcal{F}\psi$ является оптимальной траекторией в задаче (6)–(8). □

Как известно, для линейно-квадратичных 1D задач оптимизации важным является представление оптимального управления через переменные состояния исходной системы. Подобное представление для задачи оптимизации (6)–(8) приведено в нижеследующей теореме.

Теорема 2.4. *Оптимальное управление $u^0(z)$, $0 \leqslant z \leqslant l_1$, в задаче (6)–(8) представимо в виде*

$$u^0(z) = e^z\Bigg[\int_0^{t_1} e^{-t}\frac{\partial p^0(z,t)}{\partial z}dt + \int_z^{l_1}\int_0^{t_1}\Bigg(e^{-(x+t)}p^0(x,t)+ \\ +(t-e^{-(x+t)})\frac{\partial p^0(x,t)}{\partial x}+(x-z-e^{-(x+t)})\frac{\partial p^0(x,t)}{\partial t}+ \\ +\int_z^x\int_0^t e^{-(\xi+\eta)}\Bigg(p^0(x,t)R(x,t,\xi,\eta)+\frac{\partial p^0(x,t)}{\partial x}\frac{\partial R(x,t,\xi,\eta)}{\partial x}+ \\ +\frac{\partial p^0(x,t)}{\partial t}\frac{\partial R(x,t,\xi,\eta)}{\partial t}\Bigg)d\eta d\xi\Bigg)dxdt\Bigg], \tag{24}$$

где функция $R(x,t,\xi,\eta)$ является решением интегрального уравнения

$$R(x,\xi,t,\eta) = e^{\xi+\eta} + \int_\xi^x\int_\eta^t R(z,\tau,\xi,\eta)dzd\tau$$

с начальными данными

$$R(x,x,t,\eta) = e^{x+\eta}, \quad R(x,\xi,t,t) = e^{\xi+t},$$

а $p^0(x,t)$ есть решение (6), (7), соответствующее оптимальному управлению.

Доказательство. Как следует из (23), оптимальное управление u^0 удовлетворяет операторному уравнению

$$\mathcal{L}^*\Big(\mathcal{L}u^0+\mathcal{F}\psi\Big)+\mathcal{E}u^0 = 0, \tag{25}$$

где $\mathcal{E}$ обозначает тождественный оператор в $L^2[0,l_1]$. Тогда из (21) следует, что оптимальная траектория $p^0 \in AC(\Pi)$ системы (6)–(8) может быть представлена в виде

$$p^0 = \mathcal{L}u^0 + \mathcal{F}\psi.$$

Следовательно, операторное уравнение (25) можно переписать как

$$\mathcal{L}^* p^0 + \mathcal{E}u^0 = 0.$$

Отсюда имеем

$$u^0 = -\mathcal{L}^* p^0. \tag{26}$$

Для скалярного произведения (19) и функций $u \in L_2[0,l_1],\ \varphi \in AC(\Pi)$ сопряженный оператор $\mathcal{L}^* : AC(\Pi) \to C[0,t_1]$ к оператору $\mathcal{L} : C[0,t_1] \to AC(\Pi)$ из (20) определяется как

$$(\varphi, \mathcal{L}u)_1 = (\mathcal{L}^*\varphi, u)_2.$$

Таким образом, имеем

$$(\varphi, \mathcal{L}u)_1 = \int_0^{l_1}\int_0^{t_1} \Big(\varphi(x,t), (\mathcal{L}u)(x,t)\Big)dxdt + \int_0^{l_1}\int_0^{t_1} \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial(\mathcal{L}u)(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial(\mathcal{L}u)(x,t)}{\partial t}dxdt, \tag{27}$$

где

$$\big(\mathcal{L}u\big)(x,t) = e^{-(x+t)}\int_0^x e^z u(z)dz + \int_0^x e^z u(z)\Big[\int_z^x\int_0^t e^{-(\xi+\eta)}R(x,t,\xi,\eta)d\eta d\xi\Big]dz.$$

Можно показать, что

$$\frac{\partial(\mathcal{L}u)(x,t)}{\partial x} = e^{-t}u(x) + (t - e^{-(x+t)})\int_0^x e^z u(z)dz + \int_0^x e^z u(z)\left(\int_x^x\int_0^t e^{-(\xi+\eta)}\frac{\partial R(x,t,\xi,\eta)}{\partial t}d\eta d\xi\right)dz.$$

Аналогично вычисляется производная $\dfrac{\partial(\mathcal{L}u)(x,t)}{\partial t}$. Подставив полученные производные в (27) и поменяв порядок интегрирования в полученном выражении, получим, что сопряженный оператор $\mathcal{L}^* : AC(\Pi) \to L^2[0,l_1]$ имеет вид

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}^*\varphi)(z) = e^z\Bigg[&\int_0^{t_1} e^{-t}\frac{\partial\varphi(z,t)}{\partial z}dt + \int_z^{l_1}\int_0^{t_1}\Bigg(e^{-(x+t)}\varphi(x,t) + \\ &+(t-e^{-(x+t)})\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x} + (x-z-e^{-(x+t)})\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} + \\ &+\int_z^x\int_0^t e^{-(\xi+\eta)}\Bigg(\varphi(x,t)R(x,t,\xi,\eta) + \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial R(x,t,\xi,\eta)}{\partial x} + \\ &+\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial R(x,t,\xi,\eta)}{\partial t}\Bigg)d\eta d\xi\Bigg)dxdt\Bigg].\end{aligned}$$

Применив построенный оператор $\mathcal{L}^*$ в (26), получим требуемое представление (24). □

2.3. Обобщенные непрерывные 2D модели Россера

Непрерывные версии 2D моделей Россера в форме (2) широко используются во многих прикладных исследованиях. Например, для описания основных параметров движения изотермического турбулентного газа часто используется система линейных дифференциальных уравнений [19; 23] вида

$$\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t} = -s\frac{\partial p(t,x)}{\partial x} - \rho Q(t,x) - \beta p(t,x) + v_1(t,x),$$

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = \alpha\frac{\partial Q(t,x)}{\partial x} + v_2(t,x),\ x \in [0,1],\ t \geqslant 0. \tag{28}$$

Здесь состояние системы определяется давлением газа $p(t,x)$ и объемом (массой) потока газа $Q(t,x)$ в точках сечения трубопровода, где x обозначает пространственную, а t – временную переменную; s – площадь поперечного сечения; d – диаметр трубы; c – изотермическая скорость звука; ρ – коэффициент трения; $v_1(t,x), v_2(t,x)$ – заданные функции. Начальные и граничные условия задаются в виде

$$y(0,x) = \begin{bmatrix} y_1(0,x) \\ y_2(0,x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0(x) \\ p_0(x) \end{bmatrix} \tag{29}$$

и

$$\begin{aligned} U_1(y) &= \int_0^1 y_2(t,x)(t,x)dx = \int_0^1 p(t,x)dx = \text{const}, \\ U_2(y) &= y_2(t,0) - y_2(t,1) = p(t,0) - p(t,1) = 0, \forall t \geqslant 0 \end{aligned} \tag{30}$$

соответственно. Заданные начальные условия отражают факт возникновения возмущений $q_0(x), p_0(x)$ в начальный момент $t = 0$ для некоторого предписанного режима $\overline{Q}(t,x), \overline{p}(t,x)$ движения газа в трубопроводе, а граничные условия обеспечивают сохранение начального и конечного значений давления и количества газа в трубопроводе.

В инженерной практике широко используются преобразования Лапласа для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, что позволяет эти уравнения свести к алгебраическим уравнениям. Для реализации такой идеи при решении уравнений в частных производных требуются иные интегральные преобразования, учитывающие сложный характер поведения решений на границе области пространственных переменных.

Для этих целей в работе предлагается использовать специальные интегральные преобразования (прямые и обратные) для пространственных переменных [24; 25]. Применение этих преобразований совместно с преобразованием Лапласа по временной переменной сводит краевую задачу к системе алгебраических уравнений, которая после применения обратных интегральных преобразований может быть представлена в виде системы взаимосвязанных отдельных блоков, непосредственно зависящих от начальных данных. Этот факт может быть использован для привлечения эффективных методов параллельного программирования. В частности, данный подход был успешно использован для решения некоторых актуальных задач магнитогидродинамики [26; 27].

Для получения такого представления решений уравнений будем использовать так называемые канонические системы базисных функций, которые состоят из совокупности собственных и присоединенных функций прямого и сопряженного к нему оператора, порождаемых рассматриваемой задачей. С этой целью рассматриваемую непрерывную 2D модель Россера (28) перепишем в операторной форме

$$D_t y(t,x) = Ly(t,x) + v(t,x), \tag{31}$$

где $y(t,x) = \begin{bmatrix} y_1(t,x) \\ y_2(t,x) \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} Q(t,x) \\ p(t,x) \end{bmatrix}$; $v(t,x) = \begin{bmatrix} v_1(t,x) \\ v_2(t,x) \end{bmatrix}$, а оператор $L : C^1([0,1], R^2) \to$ $\to L_2([0,1], R^2)$ задается формулой

$$L = A + BD_x = \begin{bmatrix} -\rho & -sD_x - \beta \\ \alpha D_x & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -\rho & -\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -s \\ \alpha & 0 \end{bmatrix},$$

а символы D_t и D_x обозначают частные производные по временной и пространственной переменной соответственно. Начальные и граничные условия зададим в виде

$$y_0(x) = y(0,x) = \begin{bmatrix} q_0(x) \\ p_0(x) \end{bmatrix}, U(y) \doteq \begin{bmatrix} U_1(y) \\ U_2(y) \end{bmatrix} = 0, \tag{32}$$

где $U_1(y) = y_1(t,1) - y_1(t,0)$; $U_2(y) = y_2(t,1) - y_2(t,0)$, $t \geqslant 0$. Оператор L действует в пространстве абсолютно непрерывных функций с непрерывной производной, которое плотно в пространстве $L_2([0,1],R^2)$. Можно показать, что сопряженный к L оператор L^* определяется формулой

$$L^* = A^T - B^T D_x = \begin{bmatrix} -\rho & -\alpha D_x \\ -\beta + sD_x & 0 \end{bmatrix}$$

и граничными данными вида

$$V_1(z) = 0 \Leftrightarrow z_1(t,1) - z_1(t,0) = 0,$$
$$V_2(z) = 0 \Leftrightarrow z_2(t,1) - z_2(t,0) = 0.$$

Применяя к задаче (31), (32) одностороннее преобразование Лапласа по переменной t, получим уравнение в частотной области комплексной переменной s:

$$sY(s,x) = LY(s,x) + V(s,x) + y_a(x), \quad s \in \mathbf{C},\ x \in [0,1], \tag{33}$$

с граничными условиями

$$Y(s,1) - Y(s,0) = 0,\ s \in \mathbf{C}. \tag{34}$$

Для дальнейшей трансформации граничной задачи (33), (34) к алгебраическим уравнениям относительно функций в комплексной плоскости требуется построить соответствующие преобразования. Для этого будем использовать многопараметрические интегральные преобразования (прямые и обратные) [1, p. 193–194] по пространственной переменной x, ядром которых являются канонические системы, построенные из цепочек собственных и присоединенных функций $\{e_m^{(p)}(x,\lambda), p = 1,...,P(\lambda_i), m = 0,1,...,M_p\}$ оператора L и собственных и присоединенных функций $\{\varepsilon_m^{(p)}(x,\lambda), p = 1,...,P(\lambda_i), m = 0,1,...,M_p\}$ сопряженного к нему оператора L^*. Здесь M_p и $P(\lambda_i)$ обозначают кратность и порядок рассматриваемых собственных значений и собственных функций. Можно показать, что эти две канонические системы после соответствующей нормализации являются биортогональными. В работах [25; 27; 28] приведены детали нахождения канонических систем функций в различных задачах. Предполагается, что линейный оператор L является секториальным с компактной резольвентой и непустым спектром $\sigma(\lambda)$.

Построенные канонические системы функций являются ядром требуемых интегральных преобразований пространственных переменных уравнений, с помощью которых можно преобразовать дифференциальные уравнения к их алгебраическим аналогам в комплексной области. Каноническая система $\{\varepsilon_m^{(p)}(x,\lambda), p = 1,...,P(\lambda_i), m = 0,1,...,M_p\}$ из собственных и присоединенных векторов сопряженного оператора L^* является ядром интегрального преобразования $T = \{T_m^p(\lambda_i), \lambda_i \in \sigma(L^*)\}$ по пространственной переменной x и задается следующим образом:

$$T_m^p(\lambda_i)\{Y(s,x)\} \triangleq \widetilde{Y_m^p}(s,\lambda_i) = (Y(s,x), \varepsilon_m^{(p)}(x,\lambda_i^*))_{L_2} = \int_0^1 Y(s,x)\varepsilon_m^{(p)}(x,\lambda_i^*)dx,$$

где $p = 1,...,P(\lambda_i); m = 0,1,...,M_p$. Аналог теоремы дифференцирования оригинала при преобразовании Лапласа для введенного преобразования имеет следующий вид:

$$T_m^p(\lambda_i)\{LY(s,x)\} = (L\{Y(s,x)\}, \varepsilon_m^{(p)}(x,\lambda_i^*))_{L_2} = (Y(s,x), L^*\{\varepsilon_m^{(p)}(x,\lambda_i^*)\}).$$

Отсюда следует, что для любого $m = 1,2,...,M_p$ справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$T_m^p(\lambda_i)\{LY(s,x)\} = \lambda_i \widetilde{Y_m^p}(s,\lambda_i) - \widetilde{Y_{m-1}^p}(s,\lambda_i),$$

где для краткости полагаем, что $\widetilde{Y^{p_k}}(s,\lambda_i) \equiv 0$ при $k < 0$.

Обратное преобразование T^{-1} определяется с помощью канонической системы $\{e_m^{(p)}(x,\lambda), p = 1,...,P(\lambda_i), m = 0,1,...,M_p\}$ оператора L и задается следующим образом:

$$T^{-1}\{\widetilde{Y_m^p}(s,\lambda_i)\} = Y_m^p(s,x) = \sum_{\lambda_i\in\sigma(L)}\sum_{p=1}^{P_i}\sum_{m=0}^{M_p}\widetilde{Y_m^p}(s,\lambda_i)e^p_{M_p-m}(x,\lambda_i).$$

По аналогии с [28] можно показать, что в рассматриваемой задаче собственные числа оператора L имеют следующий вид:

$$\lambda_{1,2}^{(n)} = -\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\alpha\beta\pi i + 4h\alpha\pi^2 n^2}, \tag{35}$$

где $i^2 = -1$, $a = \frac{-\beta}{2h}$ и при этом кратность найденных собственных значений равна единице $P(\lambda_i) = 1$. Соответствующие собственные функции оператора L имеют следующий вид:

$$e_{1,0}(x,\lambda_i^{(n)}) = \begin{bmatrix} f^1_{p,0}(x,\lambda_i^{(n)}) \\ f^2_{p,0}(x,\lambda_i^{(n)}) \end{bmatrix} = c_k^{(n)} e^{2\pi nix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2a\alpha\pi nj}{\lambda_k^{(n)}} \end{bmatrix}, k = 1,2,\ n = 0,\pm1,...$$

Для тривиального собственного значения $\lambda_0 = 0$ собственная функция есть

$$e_{1,0}(x,\lambda_0) = \begin{bmatrix} f^1_{p,0}(x,\lambda_0) \\ f^2_{p,0}(x,\lambda_0) \end{bmatrix} = c_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Для собственных значений вида $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \beta\sqrt{1+\frac{4\alpha}{h}}$ собственные функции имеют вид

$$e_{1,0}(x,\lambda_k) = \begin{bmatrix} f^1_{p,0}(x,\lambda_k) \\ f^2_{p,0}(x,\lambda_1) \end{bmatrix} = c_k e^{ax} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{a\alpha}{\lambda_k} \end{bmatrix},\ k = 1,2.$$

Собственные числа $\hat{\lambda}_{1,2}^{(n)},\ n = 0,\pm1,\pm2,...$ сопряженного оператора L^* выражаются формулой (35), соответствующие собственные функции задаются в виде

$$\epsilon_{1,0}(x,\hat{\lambda}_k^{(n)}) = \begin{bmatrix} z^1_{p,0}(x,\hat{\lambda}_k) \\ z^2_{p,0}(x,\hat{\lambda}_k) \end{bmatrix} = c_k^{(n)} e^{2\pi nix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2(ah+\beta)\alpha\pi ni}{\hat{\lambda}_k^{(n)}} \end{bmatrix},\ k = 1,2.$$

Для тривиального собственного значения $\hat{\lambda_0} = 0$ собственная функция $\epsilon_{1,0}(x,\hat{\lambda_0}) = e_{1,0}(x,\lambda_0)$. Для собственных значений вида $\hat{\lambda}_{1,2} = -\beta \pm \beta\sqrt{1+\frac{4\alpha}{h}}$ собственные функции имеют вид

$$\epsilon_{1,0}(x,\hat{\lambda}_k)\sigma = c_k e^{-ax} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2(ah+\beta)\alpha}{\hat{\lambda}_k} \end{bmatrix},\ k = 1,2.$$

Теорема 2.5. *Решение задачи* (28)–(30) *в частотной области имеет вид*

$$Y(s,x) = Y_0(s,x) + Y_{inp}(s,x),$$

где

$$Y_0(s,x) = \sum_{\lambda_i\in\sigma(L)}\sum_{p=1}^{P_i}\sum_{m=0}^{M_p}\left(\sum_{q=0}^{m}\frac{\widetilde{y}^p_{0,m-q}}{(s-\lambda_i)^{q+1}}\right)e^p_{M_p-m}(x,\lambda_i),$$

$$Y_{inp}(s,x) = \sum_{\lambda_i\in\sigma(L)}\sum_{p=1}^{P_i}\sum_{m=0}^{M_p}\left(\sum_{q=0}^{m}\frac{\widetilde{V}^p_{m-q}}{(s-\lambda_i)^{q+1}}\right)e^p_{M_p-m}(x,\lambda_i).$$

Доказательство. Применим к (31), (32) преобразование $T = \{T_m^p(\lambda_i), \lambda_i \in \sigma(L)\}$ по пространственной переменной x поочередно при $m = 0,1,....M_p$, учитывая начальные данные и свойство

дифференцирования, получим
при $m = 0$

$$s\widetilde{Y}_0(\lambda_i,s) = \lambda_i\widetilde{Y}_0(\lambda_i,s) + \widetilde{V}_0{}^p(\lambda_i,s) + \widetilde{y}_{00}^p(\lambda_i),$$

где

$$\widetilde{V}_0^p(\lambda_i,s) = (V(s,x), e_0^p(x,\lambda_i^*))_{L_2} = \int_0^1 V(s,x)e_0^p(x,\lambda_i^*)dx,$$

$$\widetilde{y}_{00}^p(\lambda_i) = (y_0(s,x), e_0^p(x,\lambda_i^*))_{L_2} = \int_0^1 y_0(s,x)e_0^p(x,\lambda_i^*)dx.$$

Отсюда имеем

$$\widetilde{Y}_0(\lambda_i,s) = \frac{1}{s-\lambda_i}\widetilde{V}_0^p(\lambda_i,s) + \frac{1}{s-\lambda_i}\widetilde{y}_{00}^p(\lambda_i).$$

Продолжая эту процедуру для любого m и учитывая свойство дифференцирования, получим

$$s\widetilde{Y}_m^p(\lambda_i,s) = \lambda_i\widetilde{Y}_m^p(\lambda_i,s) - \widetilde{Y}_m^p(\lambda_i,s) + \widetilde{V}_m^p(\lambda_i,s) + \widetilde{y}_{0m}^p(\lambda_i)$$

и

$$\begin{aligned}\widetilde{Y}_m^p(\lambda_i,s) &= \frac{1}{s-\lambda_i}\widetilde{V}_m^p(\lambda_i,s) + \frac{1}{s-\lambda_i}\widetilde{y}_{0m}^p(\lambda_i) + \frac{1}{s-\lambda_i}\widetilde{V}_{m-1}^p(\lambda_i,s) = \\ &= \sum_{q=0}^{m}\left(\frac{1}{(s-\lambda_i)^{q+1}}\widetilde{V}_{m-q}^p(\lambda_i,s) + \frac{1}{(s-\lambda_i)^{q+1}}\widetilde{y}_{0m-q}^p(\lambda_i)\right).\end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно теперь лишь воспользоваться обратным преобразованием T^{-1} и выделить слагаемые, связанные с начальными данными $y_0(x)$ и функциями возмущения $v(t,x)$, оказывающими воздействие на систему. □

Таким образом, в соответствии с вышеприведенной теоремой, решение $Y(s,x)$ рассматриваемой задачи в частотной области можно представить через найденные канонические системы функций. Как отмечалось выше, детали построения канонических систем $\{e_m^{(p)}(x,\lambda), p = 1,...,P(\lambda_i), m = 0,1,...,M_p\}$ и $\{\varepsilon_m^{(p)}(x,\lambda), p = 1,...,P(\lambda_i), m = 0,1,...,M_p\}$ можно найти в работах [25; 28]. Для нахождения решения $y(t,x)$ исходной задачи нужно к найденной функции $Y(s,x)$ применить обратное преобразование Лапласа.

3. Непрерывная модель Форназини–Маркезини

В этом разделе кратко обсуждается возможность обобщения дискретной модели Форназини–Маркезини (4) на непрерывный случай. В качестве такого обобщения рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = \int_{s_0}^{s_1} K(t,\tau,s)x(t,\tau)d\tau + a(t,s)x(t,s) + b(t,s)u(t,s),\ t \in [t_0,t_1],\ s \in [s_0,s_1], \tag{36}$$

с начальным условием

$$x(t_0,s) = \varphi(s),\ s \in [s_0,s_1], \tag{37}$$

где $x(t,s) \in \mathbb{R}$ есть скалярная переменная состояния; $u(t,s) \in \mathbb{R}$ – скалярная функция управления.

Как отмечалось во введении, по-видимому, впервые такие математические объекты рассматривались в работах Е. А. Барбашина [17], где исследовались свойства устойчивости для общего класса интегро-дифференциальных уравнений.

Обозначим $D \triangleq \{t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ s_0 \leqslant s \leqslant s_1\}$. Будем предполагать, что функции $a(t,s),\ b(t,s)$ непрерывны на множестве D, $\varphi(s)$ непрерывна на промежутке $s_0 \leqslant s \leqslant s_1$, $K(t,\tau,s)$ непрерывна на $[t_0,t_1] \times [t_0,t_1] \times [s_0,s_1]$.

Непрерывную функцию $u(t,s),\ (t,s)\in D$, назовем допустимым управлением, если $u(t,s)\in$ $\in U,\ \forall\,(t,s)\in D$, где U есть некоторое замкнутое и ограниченное множество из $\mathbb{R}$.

Задача оптимизации заключается в нахождении такого допустимого управления $u(t,s)$, которое вместе с соответствующим решением $x(t,s)$ уравнения (36) с начальным условием (37) минимизирует квадратичный функционал качества вида

$$J(u)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\big(Q(t,s_1)x^2(t,s_1)+F(t,s_1)u^2(t,s_1)\big)dt+\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{s_0}^{s_1}\big(Q(t,s)x^2(t,s)+F(t,s)u^2(t,s)\big)dtds, \tag{38}$$

где $Q(t,s)\geqslant 0,\ F(t,s)>0$ – заданные непрерывные на D функции.

Используя метод, предложенный в разделе 2.1 и внося необходимые модификации, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3.1. *При заданном допустимом управлении $u(t,s)$ уравнение* (36) *с начальным условием* (37) *имеет единственное абсолютно непрерывное решение вида*

$$x(t,s)=\int\limits_{t_0}^{t}\Big[e^{\int\limits_{\tau}^{t}a(\theta,s)d\theta}b(\tau,s)u(\tau,s)+\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{s_0}^{s_1}e^{\int\limits_{\tau}^{\tau_1}a(\theta,\xi)d\theta}R(t,\tau_1,s,\xi)b(\tau,\xi)u(\tau,\xi)d\xi d\tau_1\Big]d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{s_0}^{s_1}e^{\int\limits_{t_0}^{\tau}a(\theta,\xi)d\theta}R(t,\tau,s,\xi)\varphi(\xi)d\xi d\tau+e^{\int\limits_{t_0}^{t}a(\theta,s)d\theta}\varphi(s),$$

где резольвента $R(t,\tau,s,\xi)$ ядра $K(t,\tau,s)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial R(t,\tau,s,\xi)}{\partial t}=a(t,s)R(t,\tau,s,\xi)+\int\limits_{s_0}^{s_1}K(t,\tau_1,\xi)R(\tau_1,\tau,s,\xi)d\tau_1 \tag{39}$$

с начальными данными

$$R(t,\tau,s,s)=K(t,\tau,s). \tag{40}$$

По аналогии с разделами 2.2, 2.3 можно доказать существование и единственность решения оптимизационной задачи (36)–(38) и получить форму представления оптимального управления в виде

Теорема 3.2. *Оптимальное управление для задачи* (36)–(38) *при $U=\mathbb{R}$ имеет вид*

$$u^0(\tau,\xi)=-F^{-1}(\tau,\xi)\Bigg\{b(\tau,s_1)\int\limits_{\tau}^{t_1}e^{\int\limits_{\tau}^{t}a(\theta,s_1)d\theta}Q(t,s_1)x^0(t,s_1)dt+$$

$$+b(\tau,\xi)\Bigg[\int\limits_{\tau}^{t_1}\int\limits_{\tau}^{t}e^{\int\limits_{\tau}^{\tau_1}a(\theta,\xi)d\theta}R(t,\tau_1,s_1,\xi)Q(t,s_1)x^0(t,s_1)d\tau_1dt+$$

$$+\int\limits_{s_0}^{s_1}\int\limits_{\tau}^{t_1}\int\limits_{\tau}^{t}e^{\int\limits_{\tau}^{\tau_1}a(\theta,\xi)d\theta}R(t,\tau_1,s,\xi)Q(t,s)x^0(t,s)dsd\tau_1dt\Bigg]\Bigg\},$$

где функция $R(t,\tau,s,\xi)$ определяется из (39), (40), *а $x^0(t,s)$ есть решение системы* (36), (37), *соответствующее оптимальному управлению.*

Детали доказательства и другие подробности можно найти в [29].

Литература

1. *Bose N. K.* Applied Multidimensional System Theory. New York: Van Nostrand Reinhold, 1982.

2. *Морф М., Леви Б. С., Гуп С. Ю.* Новые результаты теории двумерных систем // ТИЭР. 1997. Т. 65, № 6. С. 157–176.

3. *Прэтт У.* Цифровая обработка изображений. М.: Наука, 1995. Т. 1–2. 720 с.

4. *Wood J., Oberst U., Rogers E., Owens D.* A behavioural approach to the pole structure of 1*D* and *nD* linear systems // SIAM Journal of Control and Optimization. 2000. Vol. 32, N 8. P. 627–661.

5. *Roesser R. P.* A state-space model for linear image processing // IEEE Transactions on Automatic Control. 1975. Vol. AC-20, N 1. P. 1–10.

6. *Fornasini E., Marchesini G.* Doubly indexed dynamical systems: state-space models and structural properties // Mathematical Systems Theory. 1975. Vol. 12. P. 59–72.

7. *Гайшун И. В.* Многопараметрические системы управления. Мн.: Наука и техника, 1996. 200 с.

8. *Дымков М. П.* Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления. Мн.: Изд-во БГЭУ, 2005. 363 с.

9. *Rogers E., Galkowski K., Owens D. H.* Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes. Springer Verlag LNCIS, 2007. N 349.

10. *Dymkov M., Gaishun I., Rogers E., Galkowski K., Owens D. H.* Exponential stability of discrete linear repetitive processes // Int. J. Control. 2002. Vol. 75, N 12. P. 861–869.

11. *Dymkov M., Gaishun I., Rogers E., Galkowski K., Owens D. H.* z-Transform and Volterra-Operator based Approaches to Controllability and Observability Analysis for Discrete Linear Repetitive Processes // Multidimensional Systen and Signal Processing. 2003. Vol. 14, N 4. P. 365–395.

12. *Dymkov M., Rogers E., Dymkou S., Galkowski K.* Constrained optimal control theory for differential linear repetitive processes // SIAM Journal on Control and Optimization. 2008. Vol. 47, N 1. P. 396–420.

13. *Petrovskii I. G.* Selected Works: Systems of partial differential equations and algebraic geometry. Gordon and Breach Publishers, 1996.

14. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 478 с.

15. *Гайшун И. В.* Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Мн.: Наука и техника, 1983. 200 с.

16. *Dymkou V. M., Dymkov M.* An application of the Fourier transform to optimization of continuous $2-D$ systems // Appl. Math. and Comp. Sci. 2003. Vol. 13, N 1. P. 45–54.

17. *Барбашин Е. А.* Об условиях сохранения свойств устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений // Изв. высш. учебн. заведен. Математика. 1957. Т. 1. С. 25–34.

18. *Смирнов А. Д.* Сорбционная очистка воды. Л.: Химия, 1982.

19. *Osiadacz A.* Simulation and Analysis of Gas Network. London: Gulf Publishing Company, 1987.

20. *Porter D., Stirling S. T.* Integral equations: a practical treatment: from spectral theory to applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

21. *Agarwal R. P., O'Regan D., Sahu D. R.* Fixed Point Theory for Lipschitzian-Type Mappings with Applications: Topological Fixed Point Theory and its Applications. NY: Springer, 2009.

22. *Rudin W.* Functional analysis. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973.

23. *Bondarenko L. N.* Mathematical model of cascade of sorption apparatus // Mathematical modelling. 1997. Vol. 9, N 11. P. 23–32.

24. *Dymkou V., Rabenstein R., Stefen P.* Discrete simulation of a class of distributed systems using functional analytic methods // Multidimensional Systems and Signal Processsing. 2006. Vol. 17. P. 177–209.

25. *Dymkou V.* Application of Operator Theory for the Representation of Continuous and Discrete Distributed Parameter Systems, PhD Thesis. Germany: Erlangen-Nurenberg University, 2006.

26. *Dymkou V., Pothérat A.* Spectral methods for wall bounded MHD // Journal of Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 2009. Vol. 23, N 6. P. 535–555.

27. *Pothérat A., Dymkou V.* Direct numerical simulations of low-Rm MHD turbulence based on the least dissipative modes // J. Fluid Mechanics. 2010. Vol. 655. P. 174–197.

28. *Dymkou S., Dymkou V., Dymkov M.* Multifunctional transformation method in flow modeling // Proceedings of 19th IFAC World Congress. 2014. Cape Town, South Africa, Publisher: International Federation of Automatic Control, 2014. Vol. 19, Part 1. P. 7013–7018.

29. *Dymkov M.* Linear-quadratic optimization problems for generalized 2*D* continuous control systems // Journal of Mathematical Sciences. 2024. Springer Nature Switzerland AG. Vol. 286, N 4. P. 508–525.

References

1. Bose N. K. *Applied Multidimensional System Theory*. New York, Van Nostrand Reinhold, 1982.

2. Morf M., Levy B., Gup S. U. New results in the theory of two-dimensional systems. *TIER*, 1997, vol. 65, no. 6, pp. 157–176 (in Russian).

3. Prett Y. *Digital image processing.* Vol. 1–2. Moscow, Nauka, 1995. 720 p. (in Russian).

4. Wood J., Oberst U., Rogers E., Owens D. A behavioural approach to the pole structure of 1*D* and *nD* linear systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 2000, vol. 32, no. 8, pp. 627–661.

5. Roesser R. P. A state-space model for linear image processing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1975, vol. AC-20, no. 1, pp. 1–10.

6. Fornasini E., Marchesini G. Doubly indexed dynamical systems: state-space models and structural properties. *Mathematical Systems Theory*, 1975, vol. 12, pp. 59–72.

7. Gaishun I. V. *Multidimensional control systems.* Minsk, Navuka i Tekhnika, 1996. 200 p. (in Russian).

8. Dymkov M. P. *Extremal problems fot multidimensional control systems*. Minsk, Publishing House BSEU, 2005. 363 p. (in Russian).

9. Rogers E., Galkowski K., Owens D. H. *Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes*. Springer Verlag LNCIS, 2007, no. 349.

10. Dymkov M., Gaishun I., Rogers E., Galkowski K., Owens D. H. Exponential stability of discrete linear repetitive processes. *Int. J. Control*, 2002, vol. 75, no. 12, pp. 861–869.

11. Dymkov M., Gaishun I., Rogers E., Galkowski K., Owens D. H. z-Transform and Volterra-Operator based Approaches to Controllability and Observability Analysis for Discrete Linear Repetitive Processes. *Multidimensional Systen and Signal Processing*, 2003, vol. 14, no. 4, pp. 365–395.

12. Dymkov M., Rogers E., Dymkou S., Galkowski K. Constrained optimal control theory for differential linear repetitive processes. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2008, vol. 47, no. 1, pp. 396–420.

13. Petrovskii I. G. *Selected Works: Systems of partial differential equations and algebraic geometry.* Gordon and Breach Publishers, 1996.

14. Lurie K. A. *Optimal control in problems of mathematical physics.* Moscow, Nauka, 1975. 478 p. (in Russian).

15. Gaishun I. V. *Complitely solved multidimensional differential equations*. Minsk, Navuka i Tekhnika, 1983. 200 p. (in Russian).

16. Dymkou V. M., Dymkov M. An application of the Fourier transform to optimization of continuous 2*D* systems. *Appl. Math. and Comp. Sci.*, 2003, vol. 13, no. 1, pp. 45–54.

17. Barbashin E. A. Conditions for invariance of stability of solutions of integro-differential equations . *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1957, no. 1, pp. 25–34 (in Russian).

18. Smirnov A. D. *Sorption water purification.* Leningrad, Chemistry, 1982 (in Russian).

19. Osiadacz A. *Simulation and Analysis of Gas Network.* London, Gulf Publishing Company, 1987.

20. Porter D., Stirling S. T. *Integral equations: a practical treatment: from spectral theory to applications.* Cambridge, Cambridge University Press, 1990.

21. Agarwal R. P, O'Regan D., Sahu D. R. *Fixed Point Theory for Lipschitzian-Type Mappings with Applications: Topological Fixed Point Theory and its Applications.* NY, Springer, 2009.

22. Rudin W. *Functional analysis.* New York, McGraw-Hill Book Company, 1973.

23. Bondarenko L. N. Mathematical model of cascade of sorption apparatus. *Mathematical modelling*, 1997, vol. 9, no. 11, pp. 23–32.

24. Dymkou V., Rabenstein R., Stefen P. Discrete simulation of a class of distributed systems using functional analytic methods. *Multidimensional Systems and Signal Processsing*, 2006, vol. 17, pp. 177–209.

25. Dymkou V. *Application of Operator Theory for the Representation of Continuous and Discrete Distributed Parameter Systems*, PhD Thesis. Germany, Erlangen-Nurenberg University, 2006.

26. Dymkou V., Pothérat A. Spectral methods for wall bounded MHD. *Journal of Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 2009, vol. 23, no. 6, pp. 535–555.

27. Pothérat A., Dymkou V. Direct numerical simulations of low-Rm MHD turbulence based on the least dissipative modes. *J. Fluid Mechanics*, 2010, vol. 655, pp. 174–197.

28. Dymkou S., Dymkou V., Dymkov M. Multifunctional transformation method in flow modeling. *Proceedings of 19th IFAC World Congress*, 2014. Cape Town, South Africa, Publisher, International Federation of Automatic Control, 2014, vol. 19, part 1, pp. 7013–7018.

29. Dymkov M. Linear-quadratic optimization problems for generalized 2*D* continuous control systems. *Journal of Mathematical Sciences*, 2024, Springer Nature Switzerland AG, vol. 286, no. 4, pp. 508–525.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 32–49



ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА
DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS



UDC 519.855
https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s -32–49
EDN: VEVQUF

PARAMETRIC SEMI-INFINITE PROGRAMMING PROBLEMS: PROPERTIES OF SOLUTION FUNCTIONS

O. I. Kostyukova[1], **T. V. Tchemisova**[2]

[1]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
[2]*Department of Mathematics, University of Aveiro, Campus Universitario Santiago, Aveiro, Portugal*
e-mail:kostyukova@im.bas-net.by, tatiana@ua.pt

Received: 30.06.2026 **Revised:** 24.08.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: convex optimization, semi-infinite programming, parametric problems, dual problems, solutions functions

Abstract. We study sensitivity and asymptotic behavior of solutions to parametric convex semi-infinite programming problems with compact polyhedral index sets. We analyze properties of optimal solutions, Lagrange multipliers, and active sets as the parameter approaches a nominal value. Under standard smoothness, convexity, and constraint qualification assumptions, we characterize the limits and first-order derivatives of the associated primal and dual mappings.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ: СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ РЕШЕНИЙ

О. И. Костюкова[1], **Т. В. Чемисова**[2]

[1]*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*
[2]*Факультет математики, Университет Авейру, Университетский кампус Сантьяго, Авейру, Португалия*
e-mail: kostyukova@im.bas-net.by, tatiana@ua.pt

Поступила: 30.06.2026 **Исправлена:** 24.08.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: выпуклая оптимизация, полубесконечное программирование, параметрические задачи, прямая и двойственная задачи, функции решений

Аннотация. В работе исследуются анализ чувствительности и асимптотическое поведение решений параметрических выпуклых задач полубесконечного программирования с компактными полиэдральными индексными множествами. Анализируются свойства оптимальных решений, множителей Лагранжа и множества активных индексов при стремлении параметра к номинальному значению. При стандартных предположениях о гладкости, выпуклости и выполнении условий регулярности ограничений получены соотношения, характеризующие пределы и производные первого порядка соответствующих прямых и двойственных функций решений.

1. Introduction

Parametric optimization, which investigates how the optimal solutions and value functions of optimization problems respond to perturbations in problem data, constitutes a vital and rapidly evolving field of mathematical programming [1–3]. Understanding the sensitivity, stability, and well-posedness of optimization models is crucial for both theoretical analysis and practical applications, such as engineering design, economic forecasting, and robust decision-making under uncertainty [4–8].

Over the past few decades, substantial research efforts have been dedicated to analyzing parametric optimization problems. The existing literature can be broadly classified into three main research directions, according to the structure of the underlying optimization models:

A. **Parametric Nonlinear Programming (NLP)**, where the problems involve a finite number of variables and constraints. Classic foundations and comprehensive surveys in this area can be found in the pioneering works of Fiacco [1], Bank et al. [9], see also [2; 10–12].

B. **Parametric Semi-Infinite Programming (SIP)**, which deals with a finite number of variables but infinitely many constraints. Key contributions to the theoretical foundations, stability, and sensitivity analysis of SIP include the landmark studies by Hettich and Kortanek [4], López and Still [13], Gobera and López [14], as well by the authors of [15; 16].

C. **General Parametric Optimization in Banach Spaces**, which provides an abstract and unified framework for the analysis of optimization problems in infinite-dimensional settings. Representative contributions in this area include the monographs by Bonnans and Shapiro [3] and Rockafellar and Wets [17], see also [18; 19].

A fundamental concept that connects convergence and stability across these areas is well-posedness under perturbations. This notion, extensively developed by Levitin and Polyak [20; 21], has become a cornerstone of modern sensitivity and error bound analysis [22].

Formally, three classes of models introduced above satisfy the inclusion relation $A \subset B \subset C$, where SIP occupies a unique intermediate position. Due to the presence of infinitely many constraints, standard results and techniques from finite-dimensional parametric NLP (Group A) cannot be directly applied to SIP problems without facing significant topological and analytical challenges. On the other hand, since SIP constitutes a particular class of optimization problems in Banach spaces (Group C), the abstract perturbation framework developed for general infinite-dimensional optimization remains applicable.

However, relying solely on the general framework of Group C often yields conditions that are overly abstract, non-constructive, and difficult to verify in practice. By exploiting the specific structure of SIP – namely, a finite-dimensional decision space combined with an infinite constraint system indexed by a compact set – these general results can be significantly refined and simplified, making them more transparent, computationally tractable, and readily verifiable. Furthermore, the explicit geometric and analytical structure of SIP allows one to establish stronger, sharper, and more exact sensitivity results than those obtained by a direct application of the general infinite-dimensional theory. Consequently, SIP occupies a particularly attractive position, combining the rich theoretical framework of infinite-dimensional optimization with structural properties that permits a more precise and practical analysis.

Interest in this area has experienced a strong resurgence in recent years. Current research (2020–2026) has significantly advanced the study of parametric and stability properties of semi-infinite problems, extending classical results to nonconvex SIP, generalized SIP (GSIP), and robust optimization frameworks. These developments are reflected in recent surveys and research contributions by Mitsos et al. [23], López [24], as well as in a growing number of engineering and applied optimization studies [5].

In this paper, we consider the following parametric convex semi-infinite programming problem

$$\begin{aligned} (\mathrm{SIP}(\varepsilon)): \qquad & \min_{x} \quad f_*(x,\varepsilon), \\ & \text{s.t.} \quad f(x,t,\varepsilon) \leqslant 0, \quad \forall t \in T := \{t \in \mathbb{R}^p : a_i^\top t \leqslant b_i,\ i \in I\}, \end{aligned}$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is the decision variable; $t \in \mathbb{R}^p$ is the constraint index, and $\varepsilon \in \mathbb{R}$ is the parameter. The index set T is a non-empty compact polyhedron defined by a finite number of linear inequalities, vectors $a_i \in \mathbb{R}^p$, $i \in I$, and numbers b_i, $i \in I$, are supposed to be given. We assume that the scalar functions $f_*(x,\varepsilon)$ and $f(x,t,\varepsilon)$ are sufficiently smooth with respect to all their arguments. Furthermore, they are assumed to be convex with respect to $x \in \mathbb{R}^n$ for all $t \in T$ and all $\varepsilon \in \mathcal{E}(\varepsilon_0) := [\varepsilon_0 - \delta, \varepsilon_0 + \delta]$, where $\delta > 0$ is a sufficiently small positive number. Here and in what follows, the symbol $^\top$ stands for the transpose operation.

For a fixed parameter value ε, let $x(\varepsilon)$ be an optimal solution to problem $(\mathrm{SIP}(\varepsilon))$, and let $T_a(x(\varepsilon),\varepsilon)$ denote the corresponding active index set defined as:

$$T_a(x(\varepsilon),\varepsilon) := \{t \in T : f(x(\varepsilon),t,\varepsilon) = 0\}.$$

Suppose that the active set above consists of a finite number of elements, i. e., $T_a(x(\varepsilon),\varepsilon) = \{t_s(\varepsilon),\ s \in S(\varepsilon)\}$, with $|S(\varepsilon)| < \infty$. Then, under standard constraint qualification assumptions (such as the Slater constraint qualification), the first-order optimality conditions guarantee the existence of Lagrange multipliers $y_s(\varepsilon) \geqslant 0$, $s \in S(\varepsilon)$, such that:

$$\frac{\partial f_*(x(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x} + \sum_{s \in S(\varepsilon)} y_s(\varepsilon) \frac{\partial f(x(\varepsilon),t_s(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x} = 0.$$

The main objective of this paper is to systematically study the properties and asymptotic behavior of the mappings representing the primal solution $x(\varepsilon)$, the dual solution $y(\varepsilon) = (y_s(\varepsilon),\ s \in S(\varepsilon))$, and the active indices $t_s(\varepsilon)$, $s \in S(\varepsilon)$, as the parameter ε approaches the unperturbed value ε_0. Specifically, we analyze the limiting values of these mappings and their derivatives at $\varepsilon = \varepsilon_0$. We show that both the limiting values and the derivatives can be characterized as solutions of certain linearly constrained quadratic optimization problems. This characterization enables us to derive a system of linear equations and inequalities that must be satisfied by the corresponding limiting values and derivatives.

The theoretical results obtained in this paper are intended to provide a solid foundation for future research on the corresponding inverse problem. Specifically, given a known solution to the unperturbed problem (SIP(ε_0)), our goal is to predict and accurately characterize the local behavior of the primal-dual solution trajectories under small perturbations of the parameter ε. In particular, we seek to describe and track the evolution of both primal and dual solutions as ε varies in a neighborhood of ε_0.

2. Problem Statement, Notation, and Assumptions

In this paper, we consider the parametric semi-infinite programming problem (SIP(ε)) formulated in the Introduction. For simplicity and without loss of generality, we suppose hereinafter that $\varepsilon_0 = 0$.

We also assume that the following standard assumption is fulfilled.

Assumption 2.1. *Let the following conditions be satisfied:*

1. *The constraints of problem* (SIP(0)) *satisfy the Slater condition, i. e., there exists* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *such that* $f(\bar{x}, t, 0) < 0$ *for all* $t \in T$.

2. *The sets of feasible solutions* $X(\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x,t,\varepsilon) \leqslant 0,\ t \in T\}$ *of parametric problems* (SIP(ε))*, are non-empty and uniformly bounded for* $\varepsilon \in \mathcal{E}(0) := [-\delta, \delta]$*, for a sufficiently small* $\delta > 0$.

Under Assumption 2.1, problem (SIP(ε)) has an optimal solution for any $\varepsilon \in \mathcal{E}(0)$ (see [3]). Let $x(\varepsilon)$ be an optimal solution to (SIP(ε)).

Assumption 2.2. *Suppose that for all* $\varepsilon \in \mathcal{E}(0)$*, the set* $T_a(x(\varepsilon), \varepsilon)$ *consists of a finite number of elements, i. e. it admits a representation*

$$T_a(x(\varepsilon), \varepsilon) = \{t_s(\varepsilon),\ s \in S(\varepsilon)\}$$

and there exists $M > 0$ *such that the cardinality of the set* $S(\varepsilon)$ *is less than* M.

Consider $\varepsilon \in \mathcal{E}(0)$. It is evident that for all $s \in S(\varepsilon)$, the vector $t_s(\varepsilon)$ is a global optimal solution of the lower level problem (LLP($x(\varepsilon), \varepsilon$)):

$$(\mathrm{LLP}(x, \varepsilon)): \qquad \max_t \quad f(x,t,\varepsilon),\ \text{ s.t. } \quad t \in T.$$

For $s \in S(\varepsilon)$, denote

$$I_s(\varepsilon) := I_a(t_s(\varepsilon)),\ \text{where}\ I_a(t) := \{i \in I : a_i^\top t = b_i\}.$$

Then, for $s \in S(\varepsilon)$, according to the optimality conditions for $t_s(\varepsilon)$ in problem (LLP($x(\varepsilon), \varepsilon$)), there exists a vector $\mu(s, \varepsilon) = (\mu_i(s, \varepsilon),\ i \in I_s(\varepsilon))^\top$ such that:

$$\frac{\partial f(x(\varepsilon), t_s(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial t} = \sum_{i \in I_s(\varepsilon)} a_i \mu_i(s, \varepsilon), \quad \mu_i(s, \varepsilon) \geqslant 0,\ i \in I_s(\varepsilon), \tag{1}$$

$$l^\top \frac{\partial^2 f(x(\varepsilon), t_s(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial t^2} l \leqslant 0, \quad \forall l \in K(t_s(\varepsilon), \varepsilon),$$

where

$$K(t, \varepsilon) := \left\{ l \in \mathbb{R}^p : a_i^\top l \leqslant 0,\ i \in I_a(t),\ l^\top \frac{\partial f(x(\varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial t} \geqslant 0 \right\}.$$

Note that the set $K(t_s(\varepsilon), \varepsilon)$ admits the following representation:

$$K(t_s(\varepsilon), \varepsilon) = \{l \in \mathbb{R}^p : a_i^\top l = 0 \text{ if } \mu_i(s, \varepsilon) > 0,\ a_i^\top l \leqslant 0 \text{ if } \mu_i(s, \varepsilon) = 0,\ i \in I_s(\varepsilon)\}.$$

Under the Slater condition, the first-order optimality conditions for $x(\varepsilon)$ in problem (SIP(ε)) imply the existence of Lagrange multipliers $y_s(\varepsilon)$, $s \in S(\varepsilon)$, such that

$$\frac{\partial f_*(x(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x} + \sum_{s\in S(\varepsilon)} y_s(\varepsilon)\frac{\partial f(x(\varepsilon),t_s(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x} = 0, \quad y_s(\varepsilon) \geqslant 0,\ s \in S(\varepsilon). \tag{2}$$

Assumptions 2.1, 2.2 and the compactness of the set T imply the existence of an index set $\bar{J}$ and a subsequence ε_m, $m = 1,2,\ldots$, such that $\varepsilon_m \to 0$ as $m \to \infty$,

$$S(\varepsilon_m) = S \text{ for all sufficiently large } m, \quad S = \bigcup_{j\in\bar{J}} S_j, \quad S_j \cap S_i = \varnothing \text{ if } i \neq j,$$

and there exist limits

$$\lim_{m\to\infty} t_s(\varepsilon_m) =: t_j^*,\ s \in S_j,\ j \in \bar{J}, \tag{3}$$

$$\lim_{m\to\infty} y_s(\varepsilon_m) =: y_s^*,\ s \in S, \quad \lim_{m\to\infty} x(\varepsilon_m) =: x^0. \tag{4}$$

In what follows, we simplify the notation by considering the sequence $\varepsilon \to 0$ instead of the subsequence $\varepsilon_m \to 0$ as $m \to \infty$, without loss of generality.

Denote

$$T_a(x^0,0) = \{t_j^0,\ j \in J^0\},$$

where $J^0 := S(0)$. It follows from Assumption 2.2 that $|J^0| < \infty$, and it is evident that $\{t_j^*,\ j \in \bar{J}\} \subset T_a(x^0,0)$, where t_j^*, $j \in \bar{J}$, and x^0 are defined in (3) and (4). Hence, we can assume that

$$t_j^0 = t_j^*, \quad j \in \bar{J} \subset J^0.$$

Let us set

$$y_j^0 := \sum_{s\in S_j} y_s^*,\ j \in \bar{J}; \quad y_j^0 = 0,\ j \in J^0 \setminus \bar{J}. \tag{5}$$

It is easy to show that the vector x^0 is a feasible solution to unperturbed problem (SIP(0)) and that the following conditions are satisfied:

$$\frac{\partial f_*(x^0,0)}{\partial x} + \sum_{j\in J^0} y_j^0 \frac{\partial f(x^0,t_j^0,0)}{\partial x} = 0, \quad y_j^0 \geqslant 0,\ j \in J^0. \tag{6}$$

These conditions imply the optimality of x^0 in problem (SIP(0)), taking into account its convexity.

By definition, $T_a(x^0,0) = T_a(x(\varepsilon),\varepsilon)|_{\varepsilon=0}$, hence, as mentioned above, the vectors t_j^0, $j \in J^0$, are global optimal solutions to the lower level problem (LLP($x^0,0$)). Consequently, there exist vectors

$$\mu(j) = (\mu_i(j),\ i \in I_j)^\top, \quad j \in J^0,$$

such that

$$\frac{\partial f(x^0,t_j^0,0)}{\partial t} = \sum_{i\in I_j} a_i \mu_i(j), \quad \mu_i(j) \geqslant 0,\ i \in I_j,\ j \in J^0, \tag{7}$$

$$l^\top \frac{\partial^2 f(x^0,t_j^0,0)}{\partial t^2} l \leqslant 0, \quad \forall l \in K(j), \tag{8}$$

where

$$I_j := \{i \in I : a_i^\top t_j^0 = b_i\},$$

$$K(j) := \{l \in \mathbb{R}^p : a_i^\top l = 0 \text{ if } \mu_i(j) > 0,\ a_i^\top l \leqslant 0 \text{ if } \mu_i(j) = 0,\ i \in I_j\} =$$

$$= \{l \in \mathbb{R}^p : a_i^\top l \leqslant 0,\ i \in I_j;\ l^\top \frac{\partial f(x^0,t_j^0,0)}{\partial t} = 0\}, \quad j \in J^0.$$

Assumption 2.3. *In the terminology defined earlier, there exist finite limits:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x(\varepsilon)-x^0}{\varepsilon}=:\varkappa^*, \tag{9}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{t_s(\varepsilon)-t_j^0}{\varepsilon}=:\tau_s^*,\quad s\in S_j,\ j\in\bar{J}. \tag{10}$$

For simplicity, in what follows we use the following shorthand notation:

$$f_j(\cdot):=f(x^0,t_j^0,0),\quad \frac{\partial^{k+s}f_j(\cdot)}{\partial x^k\partial y^s}:=\frac{\partial^{k+s}f(x^0,t_j^0,0)}{\partial x^k\partial y^s},\quad j\in J^0,\ s\geqslant 0,\ k\geqslant 0,\ k+s\leqslant 2.$$

Let us denote

$$\begin{gathered}\bar{L}(x,\varepsilon):=f_*(x,\varepsilon)+\sum_{j\in J^0}y_j^0f(x,t_j^0,\varepsilon);\ D:=\frac{\partial^2\bar{L}(x^0,0)}{\partial x^2},\quad c:=\frac{\partial^2\bar{L}(x^0,0)}{\partial x\partial\varepsilon};\\ D_j:=\frac{\partial^2f_j(\cdot)}{\partial t^2},\ A_j:=\frac{\partial^2f_j(\cdot)}{\partial t\partial x},\ c_j:=\frac{\partial^2f_j(\cdot)}{\partial t\partial\varepsilon},\ q_j:=\frac{\partial f_j(\cdot)}{\partial x},\quad \omega_j=\frac{\partial f_j(\cdot)}{\partial\varepsilon},\ j\in J^0.\end{gathered} \tag{11}$$

Consider the following linear programming problem:

$$(\mathrm{LP}):\quad \max\sum_{j\in J^0}y_j\omega_j,\quad \text{s. t.}\quad \frac{\partial f_*(x^0,0)}{\partial x}+\sum_{j\in J^0}y_jq_j=0,\quad y_j\geqslant 0,\ j\in J^0,$$

and its dual problem:

$$(\mathrm{DLP}):\qquad \min\qquad \varkappa^\top\frac{\partial f_*(x^0,0)}{\partial x},\quad \text{s. t.}\quad q_j^\top\varkappa+\omega_j\leqslant 0,\ j\in J^0.$$

It follows from (6) that the vector y^0 is a feasible solution to problem (LP). Moreover, by the Slater condition (see Assumption 2.1), the feasible set of this problem is bounded. Hence, the optimal solution set of problem (LP) is nonempty and also bounded. Consequently, both problems (LP) and (DLP) have optimal solutions.

Let Y^0 be the set of all optimal solutions to problem (LP). Introduce the following sets:

$$J_*^*:=\{j\in J^0:\exists y\in Y^0 \text{ such that } y_j>0\},\quad J_0^*:=J^0\setminus J_*^*.$$

It is evident that there exists $\bar{y}\in Y^0$ such that

$$\bar{y}_j>0\quad\forall j\in J_*^*,\quad \bar{y}_j=0\quad\forall j\in J_0^*. \tag{12}$$

Then, it is easy to show that the optimal solution set $\mathcal{X}^*$ of problem (DLP) can be characterized as follows:

$$\mathcal{X}^*=\{\varkappa\in\mathbb{R}^n:q_j^\top\varkappa+\omega_j=0,\ j\in J_*^*,\quad q_j^\top\varkappa+\omega_j\leqslant 0,\ j\in J_0^*\}. \tag{13}$$

3. Main results

In this section, we will use the following functions:

$$\Psi_j(\tau,x):=\frac{1}{2}\tau^\top D_j\tau+c_j^\top\tau+x^\top A_j\tau,\quad x\in\mathbb{R}^n,\ \tau\in\mathbb{R}^p,\ j\in J^0; \tag{14}$$

$$\Omega_j(\varkappa,\rho):=\frac{1}{2}\varkappa^\top\frac{\partial^2f_j(\cdot)}{\partial x^2}\varkappa+\frac{\partial^2f_j(\cdot)}{\partial x\partial\varepsilon}\varkappa+\frac{1}{2}\frac{\partial^2f_j(\cdot)}{\partial\varepsilon^2}+\rho,\quad \varkappa\in\mathbb{R}^n,\ \rho\in\mathbb{R}; \tag{15}$$

$$\Omega_0(\varkappa):=\frac{1}{2}\varkappa^\top\frac{\partial^2f_*(x^0,0)}{\partial x^2}\varkappa+\frac{\partial^2f_*(x^0,0)}{\partial x\partial\varepsilon}\varkappa+\frac{1}{2}\frac{\partial^2f_*(x^0,0)}{\partial\varepsilon^2},\quad \varkappa\in\mathbb{R}^n;$$

$$\rho_j(\varkappa):=\max_{\tau\in K(j)}\Psi_j(\tau,\varkappa),\quad j\in J_*^*; \tag{16}$$

$$\Delta x(\varepsilon)=x(\varepsilon)-x^0,\quad \Delta t_s(\varepsilon)=t_s(\varepsilon)-t_j^0,\quad s\in S_j,\ j\in\bar{J}.$$

Notice that functions $\Omega_j(\varkappa,\rho)$, $j\in J_*^*$, and $\Omega_0(\varkappa)$ are convex with respect to their variables, functions $\Psi_j(\tau,x)$, $j\in J^0$, are not convex with respect to $\tau\in\mathbb{R}^p$ in general.

3.1. Properties of vector y^0 and derivatives τ_s^*, $s \in S_j$, $j \in \bar{J}$

In this subsection, we show that the vector y^0 defined in (5) is a solution to certain linear programming problems, and that for $j \in \bar{J}$, the vectors τ_s^*, $s \in S_j$, solve a non-convex linear-quadratic problem.

Theorem 3.1. *Let Assumptions* 2.1–2.3 *hold. Consider the vector* $y^0 = (y_j^0,\ j \in J^0)$ *with entries defined in* (5)*, and the vectors* $\varkappa^*$ *and* τ_s^*, $s \in S_j$, $j \in \bar{J}$, *defined in* (9) *and* (10)*, respectively. Then:*

i) the vectors $y^0 = (y_j^0,\ j \in J^0)$ *and* $\varkappa^*$ *are optimal solutions to problems* (LP) *and* (DLP)*;*

ii) for $j \in \bar{J}$, *the vectors* τ_s^*, $s \in S_j$, *solve the corresponding problem*

$$\max \Psi_j(\tau, \varkappa^*), \quad s.\,t. \quad \tau \in K(j). \tag{17}$$

Proof. Let us prove statement i). To this end, we first show that for $j \in \bar{J}$, the inclusions $\tau_s^* \in K(j)$, $s \in S_j$, hold true.

It is evident that $I_s(\varepsilon) = I_a(t_s(\varepsilon)) \subset I_j$ for sufficiently small $\varepsilon > 0$. Hence, for such ε and $\Delta t_s(\varepsilon) := t_s(\varepsilon) - t_j^*$, we have

$$a_i^\top \Delta t_s(\varepsilon) = 0, \quad i \in I_s(\varepsilon), \quad a_i^\top \Delta t_s(\varepsilon) \leqslant 0, \quad i \in I_j \setminus I_s(\varepsilon). \tag{18}$$

Dividing both sides of (18) by ε and passing to the limit yields:

$$a_i^\top \tau_s^* \leqslant 0, \quad i \in I_j,\ s \in S_j,\ j \in \bar{J}.$$

Using (18), we multiply both sides of (1) by $\Delta t_s(\varepsilon)$ to get:

$$\frac{\partial f^\top(x(\varepsilon), t_s(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial t} \Delta t_s(\varepsilon) = \sum_{i \in I_s(\varepsilon)} a_i^\top \Delta t_s(\varepsilon) \mu_i(s, \varepsilon) = 0.$$

Dividing both sides of the last equality by ε and passing to the limit, we obtain

$$\frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial t} \tau_s^* = 0, \quad s \in S_j,\ j \in \bar{J}. \tag{19}$$

Hence, we have shown that $\tau_s^* \in K(j)$, $s \in S_j$, $j \in \bar{J}$.

By construction,

$$f(x^0, t_j^0, 0) = 0, \quad j \in J^0,$$
$$f(x(\varepsilon), t_s(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \quad s \in S_j,\ j \in \bar{J}; \quad f(x(\varepsilon), t_j^0, \varepsilon) \leqslant 0, \quad j \in J^0 \setminus \bar{J}.$$

Hence,

$$0 = f(x(\varepsilon), t_s(\varepsilon), \varepsilon) =$$
$$= \frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial x} \Delta x(\varepsilon) + \frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial t} \Delta t_s(\varepsilon) + \frac{\partial f_j(\cdot)}{\partial \varepsilon} \varepsilon + o(\| (\Delta x(\varepsilon), \Delta t_s(\varepsilon), \varepsilon) \|),\ s \in S_j,\ j \in \bar{J}; \tag{20}$$
$$f(x(\varepsilon), t_j^0, \varepsilon) = \frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial x} \Delta x(\varepsilon) + \frac{\partial f_j(\cdot)}{\partial \varepsilon} \varepsilon + o(\| (\Delta x(\varepsilon), \varepsilon) \|) \leqslant 0, \quad j \in J^0 \setminus \bar{J}. \tag{21}$$

After dividing both sides of (20) and (21) by ε and letting $\varepsilon \to 0$, we obtain

$$\frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial x} \varkappa^* + \frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial t} \tau_s^* + \frac{\partial f_j(\cdot)}{\partial \varepsilon} = 0, \quad s \in S_j,\ j \in \bar{J},$$
$$\frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial x} \varkappa^* + \frac{\partial f_j(\cdot)}{\partial \varepsilon} \leqslant 0, \quad j \in J^0 \setminus \bar{J}.$$

Taking into account (19), the above relations imply:

$$q_j^\top \varkappa^* + \omega_j = 0, \quad j \in \bar{J}, \quad q_j^\top \varkappa^* + \omega_j \leqslant 0, \quad j \in J^0 \setminus \bar{J}. \tag{22}$$

Hence the vector $\varkappa^*$ is a feasible solution to problem (DLP).

Consider the vector $y^0 = (y_j^0,\ j \in J^0)^\top$, where the components y_j^0, $j \in J^0$, are defined in (5). It follows from (6) that y^0 is a feasible solution to problem (LP). Moreover, the relations (22) imply that y^0 is an optimal solution to (LP) and $\varkappa^*$ is the corresponding dual optimal solution; that is, $\varkappa^*$ solves the problem (DLP). Hence, statement i) is proved.

Now, let us prove statement ii) by showing that for $j \in \bar{J}$, the vectors τ_s^*, $s \in S_j$, are global optimal solutions to problem (17).

Suppose, to the contrary, that for some $j \in \bar{J}$ and $s \in S_j$, there exists a vector $\tau_j \in K(j)$ such that

$$-\frac{1}{2}\tau_j^\top D_j \tau_j - (c_j + A_j^\top \varkappa^*)^\top \tau_j < -\frac{1}{2}\tau_s^{*\top} D_j \tau_s^* - (c_j + A_j^\top \varkappa^*)^\top \tau_s^*. \tag{23}$$

Since $\tau_j \in K(j)$, there exists $\varepsilon_* > 0$ such that $t_j^0 + \varepsilon\tau_j \in T$ for all $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$.
As mentioned above, for any $s \in S_j$ and $\varepsilon \in \mathcal{E}(0)$, we have

$$0 = f(x(\varepsilon), t_s(\varepsilon), \varepsilon) \geqslant f(x(\varepsilon), t, \varepsilon), \quad \forall t \in T. \tag{24}$$

Computing the Taylor expansions yields:

$$\begin{aligned} 0 = f(x(\varepsilon), t_s(\varepsilon), \varepsilon) = f_j(\cdot) + \frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial x}\Delta x(\varepsilon) + \frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial t}\Delta t_s(\varepsilon) + \frac{\partial f_j(\cdot)}{\partial \varepsilon}\varepsilon + \\ + \tfrac{1}{2}\Delta x^\top(\varepsilon)\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial x^2}\Delta x(\varepsilon) + \tfrac{1}{2}\Delta t_s^\top(\varepsilon)\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t^2}\Delta t_s(\varepsilon) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial \varepsilon^2}\varepsilon^2 + \\ + \Delta t_s^\top(\varepsilon)\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t \partial x}\Delta x(\varepsilon) + \frac{\partial^2 f_j^\top(\cdot)}{\partial \varepsilon \partial x}\Delta x(\varepsilon)\varepsilon + \frac{\partial^2 f_j^\top(\cdot)}{\partial \varepsilon \partial t}\Delta t_s(\varepsilon)\varepsilon + o(\| (\Delta x(\varepsilon), \Delta t_s(\varepsilon), \varepsilon) \|^2) \end{aligned} \tag{25}$$

and

$$\begin{aligned} f(x(\varepsilon), t_j^0 + \varepsilon\tau_j, \varepsilon) = f_j(\cdot) + \frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial x}\Delta x(\varepsilon) + \frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial t}\tau_j\varepsilon + \frac{\partial f_j(\cdot)}{\partial \varepsilon}\varepsilon + \\ + \tfrac{1}{2}\Delta x^\top(\varepsilon)\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial x^2}\Delta x(\varepsilon) + \tfrac{1}{2}\tau_j^\top\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t^2}\tau_j\varepsilon^2 + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial \varepsilon^2}\varepsilon^2 + \\ + \tau_j^\top\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t \partial x}\Delta x(\varepsilon)\varepsilon + \frac{\partial^2 f_j^\top(\cdot)}{\partial \varepsilon \partial x}\Delta x(\varepsilon)\varepsilon + \frac{\partial^2 f_j^\top(\cdot)}{\partial \varepsilon \partial t}\tau_j\varepsilon^2 + o(\| (\Delta x(\varepsilon), \varepsilon) \|^2). \end{aligned} \tag{26}$$

Note that, due to Assumption 2.3, in the above expansions, we have $o(\| (\Delta x(\varepsilon), \Delta t_s(\varepsilon), \varepsilon) \|^2) = o(\varepsilon^2)$ and $o(\| (\Delta x(\varepsilon), \varepsilon) \|^2) = o(\varepsilon^2)$.

Since $\tau_j \in K(j)$, it holds that $\frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial t}\tau_j = 0$. Multiplying both sides of (7) by $\Delta t_s(\varepsilon)$ and using (18), we get $\frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial t}\Delta t_s(\varepsilon) \leqslant 0$. Consequently, it follows from (24)–(26) that

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\Delta t_s^\top(\varepsilon)\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t^2}\Delta t_s(\varepsilon) + \Delta t_s^\top(\varepsilon)\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t \partial x}\Delta x(\varepsilon) + \frac{\partial^2 f_j^\top(\cdot)}{\partial \varepsilon \partial t}\Delta t_s(\varepsilon)\varepsilon + o(\varepsilon^2) \geqslant \\ \geqslant \tfrac{1}{2}\tau_j^\top\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t^2}\tau_j\varepsilon^2 + \tau_j^\top\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t \partial x}\Delta x(\varepsilon)\varepsilon + \frac{\partial^2 f_j^\top(\cdot)}{\partial \varepsilon \partial t}\tau_j\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Dividing both sides of this inequality by ε^2 and passing to the limit, we obtain

$$\frac{1}{2}\tau_s^{*\top}\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t^2}\tau_s^* + \tau_s^{*\top}\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t \partial x}\varkappa^* + \frac{\partial^2 f_j^\top(\cdot)}{\partial \varepsilon \partial t}\tau_s^* \geqslant \frac{1}{2}\tau_j^\top\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t^2}\tau_j + \tau_j^\top\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t \partial x}\varkappa^* + \frac{\partial^2 f_j^\top(\cdot)}{\partial \varepsilon \partial t}\tau_j.$$

But this contradicts inequality (23). Hence, we have proved that for any $j \in \bar{J}$, each vector τ_s^*, $s \in S_j$, is a global optimal solution to problem (17). □

It was proved above that $y^0 \in Y^0$ and $\varkappa^* \in \mathcal{X}^*$. Taking these inclusions into account along with the fact that, by construction, $y_j^0 = 0$ for $j \in J^0 \setminus \bar{J}$ and that $\varkappa^*$ satisfies (22), we conclude that

$$\begin{gathered} y_j^0 = 0 \quad \forall j \in J^0 \setminus (J_*^* \cap \bar{J}), \\ q_j^\top \varkappa^* + \omega_j = 0,\ j \in \bar{J}, \quad q_j^\top \varkappa^* + \omega_j = 0,\ j \in J_*^* \setminus \bar{J}, \quad q_j^\top \varkappa^* + \omega_j \leqslant 0,\ j \in J_0^* \setminus \bar{J}. \end{gathered} \tag{27}$$

To derive further properties of the vector $y^0 = (y_j^0,\ j \in J^0)$ defined in (5), we introduce one more assumption.

Assumption 3.2. *Suppose the following condition holds*

$$\left(\varkappa^{*\top} A_j + c_j^\top\right) l \leqslant 0, \quad \forall l \in \Delta K(j) := \{l \in K(j) \setminus \{0\} : l^\top D_j l = 0\}, \quad \forall j \in J_*^* \setminus \bar{J}.$$

Note that for $j \in J_*^* \setminus \bar{J}$, this condition is considered to be satisfied if $\Delta K(j) = \varnothing$. Thus, Assumption 3.2 holds whenever the inequalities (8) are strict.

According to [25], this assumption is equivalent to the following condition: for each $j \in J_*^* \setminus \bar{J}$, problem (17) admits an optimal solution.

Theorem 3.3. *Let Assumptions* 2.1–2.3, 3.2 *be fulfilled. Then the vector* $y^0 = (y^0_j,\ j \in J^0)$ *defined in* (5) *is an optimal solution to the following problem*

$$\max_{y \in Y^0} \Big(\sum_{j \in J^*_*} y_j \Omega_j(\varkappa^*, \rho_j(\varkappa^*)) + \Omega_0(\varkappa^*) \Big). \tag{28}$$

Proof. Problem (28) can be rewritten in the form

$$(\mathrm{LP}^*): \quad \max \sum_{j \in J^*_*} y_j W_j(\varkappa^*), \quad \text{s. t.} \quad \sum_{j \in J^*_*} q_j y_j + \frac{\partial f_*(x^0, 0)}{\partial x} = 0, \quad y_j \geqslant 0,\ j \in J^*_*;$$

where $W_j(\varkappa^*) := \Omega_j(\varkappa^*, \rho_j(\varkappa^*))$, $j \in J^*_*$, and the functions $\rho_j(\varkappa)$, $\Omega_j(\varkappa, \rho_j)$ are defined in (16) and (15).

Let us write the dual problem to problem (LP^*):

$$(\mathrm{DLP}^*): \quad \min \frac{\partial f_*(x^0, 0)^\top}{\partial x} w, \quad \text{s. t.} \quad q_j^\top w + W_j(\varkappa^*) \leqslant 0,\ j \in J^*_*.$$

The feasible set of problem (LP^*) coincides with that of problem (LP). Therefore, it is nonempty and bounded. By standard results from linear programming theory, the feasible set of dual problem (DLP^*) is also nonempty.

First, let us show that

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial t} \Delta t_s(\varepsilon) = 0, \quad j \in J^*_* \cap \bar{J}. \tag{29}$$

Consider $j \in J^*_* \cap \bar{J}$. Since $\Delta t_s(\varepsilon) := t_s(\varepsilon) - t^0_j = \varepsilon(\tau^*_s + \Delta\tau_s(\varepsilon))$, where $\|\Delta\tau_s(\varepsilon)\| \to 0$ as $\varepsilon \to 0$, and $\frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial t} \tau^*_s = 0$ for $s \in S_j$, $j \in \bar{J}$ (see (19)), we need to show that

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial t} \Delta\tau_s(\varepsilon) = 0. \tag{30}$$

The direction $\Delta t_s(\varepsilon)$ is feasible at the point t^0_j in the set T, and t^0_j solves the problem $\max_{t \in T} f(x^0, t, 0)$. Hence, by the first-order optimality conditions, we have the following

$$\frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial t} \Delta t_s(\varepsilon) \leqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial t} \Delta\tau_s(\varepsilon) \leqslant 0. \tag{31}$$

The direction $-\Delta t_s(\varepsilon)$ is feasible at the point $t_s(\varepsilon)$ in T, and $t_s(\varepsilon)$ solves the problem $\max_{t \in T} f(x(\varepsilon), t, \varepsilon)$. Therefore, by the first-order optimality conditions for this problem, we have

$$\frac{\partial f^\top(x(\varepsilon), t_s(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial t} \Delta t_s(\varepsilon) \geqslant 0.$$

Hence,

$$0 \leqslant \left(\frac{\partial f_j(\cdot)}{\partial t} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t \partial x} \varkappa^* + \frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t^2} \tau^*_s + \frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t \partial \varepsilon} \right) + o(\varepsilon) \right)^\top (\tau^*_s + \Delta\tau_s(\varepsilon)). \tag{32}$$

It was noted above that $\frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial t} \tau^*_s = 0$ and τ^*_s is an optimal solution to problem (17). Then from the first-order optimality conditions for τ^*_s in problem (17), we get

$$\left(\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t \partial x} \varkappa^* + \frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t^2} \tau^*_s + \frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t \partial \varepsilon} \right)^\top \tau^*_s = 0.$$

Consequently, the inequality (32) can be rewritten as follows

$$0 \leqslant \left(\frac{\partial f_j(\cdot)}{\partial t} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t \partial x} \varkappa^* + \frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t^2} \tau^*_s + \frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t \partial \varepsilon} \right) + o(\varepsilon) \right)^\top \Delta\tau_s(\varepsilon).$$

By dividing both sides of the preceding inequality by ε and passing to the limit as $\varepsilon \to 0$, keeping in mind that $\Delta\tau_s(\varepsilon) \to 0$ as $\varepsilon \to 0$, we obtain

$$0 \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial t} \Delta\tau_s(\varepsilon).$$

Together with (31), this inequality implies (30) and, therefore, (29).

It follows from Assumption 2.3 that the vector $x(\varepsilon)$ admits the representation

$$x(\varepsilon) = x^0 + \varkappa^*\varepsilon + \varepsilon w(\varepsilon) = x^0 + \varkappa^*\varepsilon + \varepsilon^2\tilde{w}(\varepsilon), \tag{33}$$

where $w(\varepsilon) \to 0$ as $\varepsilon \to 0$, and $\tilde{w}(\varepsilon) := \frac{w(\varepsilon)}{\varepsilon}$.

Consider $j \in J_*^* \cap \bar{J}$. Then, for each $s \in S_j$, it follows from (25), where $o(\|(\Delta x(\varepsilon), \Delta t_s(\varepsilon), \varepsilon)\|^2) = o(\varepsilon^2)$, that

$$0 = \varepsilon^2 \frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial x}\tilde{w}(\varepsilon) + \frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial t}\Delta t_s(\varepsilon) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\Big(\varkappa^{*\top}\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial x^2}\varkappa^* + \frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial \varepsilon^2} +$$
$$+2\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial \varepsilon \partial x}\varkappa^* + 2\varkappa^{*\top}\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial x \partial t}\tau_s^* + \tau_s^{*\top}\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t^2}\tau_s^* + 2\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial \varepsilon \partial t}\tau_s^*\Big) + o(\varepsilon^2) \implies$$
$$\implies 0 = f(x(\varepsilon), t_s(\varepsilon), \varepsilon) = \varepsilon^2 \frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial x}\tilde{w}(\varepsilon) + \frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial t}\Delta t_s(\varepsilon) + \varepsilon^2 W_j(\varkappa^*) + o(\varepsilon^2). \tag{34}$$

Here, we used the relation $\Delta x(\varepsilon) := x(\varepsilon) - x^0 = \varkappa^*\varepsilon + \varepsilon w(\varepsilon)$ (see (33)), the equality $\frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial x}\varkappa^* = 0$, and the fact that the vector τ_s^* solves problem (17).

Now consider $j \in J_*^* \setminus \bar{J}$, and let $\tau_j^* \in K(j)$ be an optimal solution to the corresponding problem (17). By Assumption 3.2, such a solution exists. Hence,

$$\frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial t}\tau_j^* = 0, \quad \rho_j(\varkappa^*) = \varkappa^{*\top}\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial x \partial t}\tau_j^* + \frac{1}{2}\tau_j^{*\top}\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t^2}\tau_j^* + \frac{\partial^2 f_j^\top(\cdot)}{\partial \varepsilon \partial t}\tau_j^*. \tag{35}$$

Since $j \notin \bar{J}$, it follows from the assumption that, for all sufficiently small $\varepsilon > 0$, we have $t_j^0 + \varepsilon\tau_j^* \in T$ and $f(x(\varepsilon), t_j^0 + \varepsilon\tau_j^*, \varepsilon) < 0$. Thus,

$$f(x(\varepsilon), t_j^0 + \varepsilon\tau_j^*, \varepsilon) = \varepsilon^2 \frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial x}\tilde{w}(\varepsilon) + \varepsilon\frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial t}\tau_j^* + \frac{1}{2}\varepsilon^2\Big(\varkappa^{*\top}\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial x^2}\varkappa^* + \frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial \varepsilon^2} + 2\frac{\partial^2 f_j^\top(\cdot)}{\partial \varepsilon \partial x}\varkappa^* +$$
$$+2\varkappa^{*\top}\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial x \partial t}\tau_j^* + \tau_j^{*\top}\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t^2}\tau_j^* + 2\frac{\partial^2 f_j^\top(\cdot)}{\partial \varepsilon \partial t}\tau_j^*\Big) + o(\varepsilon^2) \implies$$
$$\implies f(x(\varepsilon), t_j^0 + \varepsilon\tau_j^*, \varepsilon) = \varepsilon^2 \frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial x}\tilde{w}(\varepsilon) + \varepsilon^2 W_j(\varkappa^*) + o(\varepsilon^2) < 0. \tag{36}$$

Here, we used relations (35), (33), and (27). Taking into account (29), we divide both sides of relations (34) and (36) by ε^2. This yields

$$q_j^\top\tilde{w}(\varepsilon) + W_j(\varkappa^*) = \tilde{O}(\varepsilon),\ j \in J_*^* \cap \bar{J}; \quad q_j^\top\tilde{w}(\varepsilon) + W_j(\varkappa^*) = d_j(\varepsilon) + \tilde{O}(\varepsilon),\ d_j(\varepsilon) \leqslant 0,\ j \in J_*^* \setminus \bar{J}, \tag{37}$$

where $\tilde{O}(\varepsilon)$ denotes a function satisfying $\tilde{O}(\varepsilon) \to 0$ as $\varepsilon \to 0$.

Consider the convex quadratic programming problem

$$(\mathrm{QP}_*): \quad \min_w (w - \tilde{w}(\varepsilon))^\top (w - \tilde{w}(\varepsilon)), \quad \text{s. t.} \quad q_j^\top w + W_j(\varkappa^*) \leqslant 0,\ j \in J_*^*.$$

As observed above, the feasible set of this problem is nonempty. Therefore, this problem admits a unique optimal solution, denoted by $w^0(\varepsilon)$. The optimality conditions for $w^0(\varepsilon)$ in (QP_*) imply the existence of a vector $\lambda(\varepsilon) = (\lambda_j(\varepsilon),\ j \in J_*^*)^\top$ such that

$$w^0(\varepsilon) + Q\lambda(\varepsilon) - \tilde{w}(\varepsilon) = 0, \quad \lambda(\varepsilon) \geqslant 0, \quad \lambda^\top(\varepsilon)(Q^\top w^0(\varepsilon) + W(\varkappa^*)) = 0,$$

where $Q = (q_j,\ j \in J_*^*)$ and $W(\varkappa^*) = (W_j(\varkappa^*),\ j \in J_*^*)^\top$. Hence,

$$\tilde{w}(\varepsilon) = w^0(\varepsilon) + Q\lambda(\varepsilon) \quad \implies \quad Q^\top\tilde{w}(\varepsilon) = Q^\top w^0(\varepsilon) + Q^\top Q\lambda(\varepsilon) \implies \tag{38}$$
$$\implies Q^\top\tilde{w}(\varepsilon) + W(\varkappa^*) = Q^\top w^0(\varepsilon) + W(\varkappa^*) + Q^\top Q\lambda(\varepsilon) \implies$$
$$\implies \lambda^\top(\varepsilon)\Big(Q^\top\tilde{w}(\varepsilon) + W(\varkappa^*)\Big) = \lambda^\top(\varepsilon)Q^\top Q\lambda(\varepsilon). \tag{39}$$

Let us show that

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\lambda(\varepsilon)\| = 0. \tag{40}$$

If $\lambda(\varepsilon) = 0$ for all sufficiently small $\varepsilon > 0$, then equality (40) is evident. Suppose that $\lambda(\varepsilon) \neq 0$ for all sufficiently small $\varepsilon > 0$, and set $\lambda^* := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\lambda(\varepsilon)}{\|\lambda(\varepsilon)\|}$. Assume that $\lim_{\varepsilon\to 0} \|\lambda(\varepsilon)\| > 0$. Dividing both sides of equality (39) by $\|\lambda(\varepsilon)\|^2$ and passing to the limit while taking into account relations (37), we obtain

$$\sum_{j\in J_*^*\setminus\bar{J}} \lambda_j^* \bar{d}_j = \lambda^{*\top} Q^\top Q\lambda^* \geqslant 0, \quad \text{where } \bar{d}_j = \lim_{\varepsilon\to 0} d_j(\varepsilon)/\|\lambda(\varepsilon)\| \leqslant 0,\ j \in J_*^* \setminus \bar{J}.$$

The above relations imply $Q\lambda^* = 0$, $\lambda^* \geqslant 0$, and $\lambda^* \neq 0$. However, this contradicts the fact that the feasible set of problem (LP_*) is bounded (see problem *(LP)* and its properties). Hence, equality (40) holds.

Relations (38) and equality (40) imply that

$$\tilde{w}(\varepsilon) = w^0(\varepsilon) + \tilde{O}(\varepsilon). \tag{41}$$

By construction, $\sum_{j\in J_*^*} \bar{y}_j q_j = \sum_{j\in J_*^*\cap\bar{J}} y_j^0 q_j$, where the vector $\bar{y} = (\bar{y}_j,\ j \in J^0)^\top \in Y^0$ and satisfies (12). It follows from this equality and relations (37) that

$$\sum_{j\in J_*^*} \bar{y}_j q_j^\top \tilde{w}(\varepsilon) = \sum_{j\in J_*^*\cap\bar{J}} y_j^0 q_j^\top \tilde{w}(\varepsilon) = -\sum_{j\in J_*^*\cap\bar{J}} y_j^0 W_j(\varkappa^*) + \tilde{O}(\varepsilon).$$

Hence,

$$\sum_{j\in J_*^*} \bar{y}_j q_j^\top \tilde{w}(\varepsilon) = \bar{y}_*^\top Q^\top \tilde{w}(\varepsilon) = \mathrm{const} + \tilde{O}(\varepsilon), \tag{42}$$

where $\mathrm{const} := -\sum_{j\in J_*^*\cap\bar{J}} y_j^0 W_j(\varkappa^*)$ and $\bar{y}_* = (\bar{y}_j,\ j \in J_*^*)^\top$.

The feasible set $\mathcal{W} := \{w \in \mathbb{R}^n : Q^\top w + W(\varkappa^*) \leqslant 0\}$ of problems (DLP_*) and (QP_*) is a polyhedron. Hence, it admits a V-representation; that is, there exist finite sets of n-vectors $\mathbf{b}_i$, $i \in I_*$, and $\mathbf{a}_i$, $i \in I_0 \cup I_1$, such that

$$q_j^\top \mathbf{a}_i = 0,\ j \in J_*^*,\ i \in I_0; \quad q_j^\top \mathbf{a}_i \leqslant 0,\ j \in J_*^*,\ \sum_{j\in J_*^*} q_j^\top \mathbf{a}_i = -1,\ i \in I_1; \tag{43}$$

$$\mathcal{W} = \{w \in \mathbb{R}^n : w = \mathcal{B}\gamma + \mathcal{A}_0\alpha + \mathcal{A}_1\beta,\ \gamma \in \Gamma,\ \beta \geqslant 0\},$$

$$\text{where } \mathcal{B} = (\mathbf{b}_i,\ i \in I_*),\ \gamma = (\gamma_i,\ i \in I_*),\ \Gamma = \{\gamma : \gamma_i \geqslant 0,\ i \in I_*,\ \sum_{i\in I_*} \gamma_i = 1\},$$

$$\mathcal{A}_0 = (\mathbf{a}_i,\ i \in I_0),\ \alpha = (\alpha_i,\ i \in I_0),\ \mathcal{A}_1 = (\mathbf{a}_i,\ i \in I_1),\ \beta = (\beta_i,\ i \in I_1).$$

Since $w^0(\varepsilon) \in \mathcal{W}$, there exist $\gamma(\varepsilon) \in \Gamma$, $\alpha(\varepsilon)$ and $\beta(\varepsilon) \geqslant 0$ such that

$$w^0(\varepsilon) = \mathcal{B}\gamma(\varepsilon) + \mathcal{A}_0\alpha(\varepsilon) + \mathcal{A}_1\beta(\varepsilon). \tag{44}$$

It follows from the last representation, together with relations (41), (42), and the equality $Q^\top\mathcal{A}_0 = 0$ (see (43)), that

$$\mathrm{const} + \tilde{O}(\varepsilon) = \bar{y}_*^\top Q^\top \tilde{w}(\varepsilon) = \bar{y}_*^\top Q^\top w^0(\varepsilon) + \tilde{O}(\varepsilon) = \bar{y}_*^\top Q^\top \mathcal{B}\gamma(\varepsilon) + \bar{y}_*^\top Q^\top \mathcal{A}_1\beta(\varepsilon) + \tilde{O}(\varepsilon).$$

Consequently,

$$\bar{y}_*^\top Q^\top \mathcal{B}\gamma(\varepsilon) + \bar{y}_*^\top Q^\top \mathcal{A}_1\beta(\varepsilon) = \mathrm{const} + \tilde{O}(\varepsilon). \tag{45}$$

We now examine the term $\bar{y}_*^\top Q^\top \mathcal{A}_1\beta(\varepsilon)$

$$\bar{y}_*^\top Q^\top \mathcal{A}_1\beta(\varepsilon) = \sum_{j\in J_*^*} \bar{y}_j q_j^\top \sum_{i\in I_1} \mathbf{a}_i\beta_i(\varepsilon) = \sum_{i\in I_1} \beta_i(\varepsilon) \sum_{j\in J_*^*} \bar{y}_j q_j^\top \mathbf{a}_i = \sum_{i\in I_1} \beta_i(\varepsilon)\sigma_i, \tag{46}$$

where, with respect to relations (43), $-\bar{y}_{\max} \leqslant \sigma_i := \sum_{j\in J_*^*} \bar{y}_j q_j^\top \mathbf{a}_i \leqslant -\bar{y}_{\min}$, $\bar{y}_{\max} := \max_{j\in J_*^*} \bar{y}_j \geqslant$ $\geqslant \bar{y}_{\min} := \min_{j\in J_*^*} \bar{y}_j > 0$. Since $\gamma(\varepsilon) \in \Gamma$ and the set Γ is bounded, it follows from (45) and (46) that there exists $M > 0$ such that $0 \leqslant \beta_i(\varepsilon) \leqslant M$ for $i \in I_1$. Hence, without loss of generality, we may assume that

$$\gamma(\varepsilon) \to \gamma^* \in \Gamma, \quad \beta_i(\varepsilon) \to \beta_i^*, \quad 0 \leqslant \beta_i^* \leqslant M,\ i \in I_1, \quad \text{as } \varepsilon \to 0.$$

It follows from (41), (44), and (37) that

$$q_j^\top \tilde{w}(\varepsilon) + W_j(\varkappa^*) = q_j^\top [\mathcal{B}\gamma(\varepsilon) + \mathcal{A}_0\alpha(\varepsilon) + \mathcal{A}_1\beta(\varepsilon)] + W_j(\varkappa^*) + \tilde{O}(\varepsilon) =$$

$$= q_j^\top [\mathcal{B}\gamma(\varepsilon) + \mathcal{A}_1\beta(\varepsilon)] + W_j(\varkappa^*) + \tilde{O}(\varepsilon) = \begin{cases} \tilde{O}(\varepsilon), & j \in J_*^* \cap \bar{J}; \\ d_j(\varepsilon) + \tilde{O}(\varepsilon), & j \in J_*^* \setminus \bar{J}. \end{cases}$$

Passing to the limit as $\varepsilon \to 0$ in the last expression and keeping in mind that $d_j(\varepsilon) \leqslant 0$ for $j \in J_*^* \setminus \bar{J}$, we obtain

$$q_j^\top \bar{w}^* + W_j(\varkappa^*) \begin{cases} = 0, & j \in J_*^* \cap \bar{J}; \\ \leqslant 0, & j \in J_*^* \setminus \bar{J}, \end{cases} \tag{47}$$

where $\bar{w}^* = \mathcal{B}\gamma^* + \mathcal{A}_1\beta_*$ and $\beta_* = (\beta_i^*,\ i \in I_1)^\top$.

By construction, the vector $(y_j^0,\ j \in J_*^*)$ is feasible for problem (LP_*) with $y_j^0 \geqslant 0$ for $j \in J_*^* \cap \bar{J}$ and $y_j^0 = 0$ for $j \in J_*^* \setminus \bar{J}$. This fact, combined with (47), implies that the vector $(y_j^0,\ j \in J_*^*)$ is an optimal solution to problem (LP_*) and the vector $\bar{w}^*$ is an optimal solution to problem (DLP_*). Hence, we have proved that the vector $(y_j^0,\ j \in J^0)$ solves problem (28).

□

3.2. Properties of the primal solution function derivative $\varkappa^*$

The purpose of this subsection is to show that the vector $\varkappa^*$, defined in (9), is an optimal solution to a certain linear-quadratic problem. This problem can be formulated solely in terms of the optimal solution x^0 to the unperturbed problem $(\mathrm{SIP}(0))$, which is a limit point of the sequence $x(\varepsilon)$ as $\varepsilon \to 0$.

Using notations (11) and (15), let us consider the following SIP problem:

$$\begin{aligned} (\mathrm{SIP}^*): \quad & \sum_{j \in J_*^* \cap \bar{J}} y_j^0 \Omega_j(\varkappa, \rho_j) + \Omega_0(\varkappa) \to \min, \\ \text{s. t.} \quad & \frac{1}{2}\tau^\top D_j \tau + c_j^\top \tau + \varkappa^\top A_j \tau - \rho_j \leqslant 0 \quad \forall \tau \in K(j),\ j \in J_*^* \cap \bar{J}; \\ & q_j^\top \varkappa + \omega_j = 0,\ j \in J_*^*;\ \ q_j^\top \varkappa + \omega_j \leqslant 0,\ j \in J_0^*. \end{aligned} \tag{48}$$

In problem (SIP^*), the vector of decision variables is $\phi = (\varkappa \in \mathbb{R}^n,\ \rho_j \in \mathbb{R},\ j \in J_*^* \cap \bar{J})$.

Theorem 3.4. *Let Assumptions* 2.1–2.3 *be fulfilled. Then the vector*

$$\phi^0 = (\varkappa^*,\ \rho_j^* = \rho_j(\varkappa^*),\ j \in J_*^* \cap \bar{J}), \tag{49}$$

where the functions $\rho_j(\varkappa)$, $\varkappa \in \mathbb{R}^n$, $j \in J_*^*$, *are defined in* (16)*, is an optimal solution to problem* (SIP^*).

Proof. It follows from the statements of Theorem 3.1 that the vector $\varkappa^*$ is a feasible solution of (SIP^*).

Consider the following convex quadratic programming problem

$$\begin{aligned} (\mathrm{QP}): \quad & \sum_{j \in J_*^* \cap \bar{J}} y_j^0 \Omega_j(\varkappa, \rho_j) + \Omega_0(\varkappa) \to \min_{\varkappa, \rho}, \\ \text{s. t.} \quad & \frac{1}{2}\tau_s^{*\top} D_j \tau_s^* + c_j^\top \tau_s^* + \varkappa^\top A_j \tau_s^* - \rho_j \leqslant 0, \quad s \in S_j,\ j \in J_*^* \cap \bar{J}; \\ & q_j^\top \varkappa + \omega_j = 0, \quad j \in J_*^*;\ \ q_j^\top \varkappa + \omega_j \leqslant 0, \quad j \in J_0^*. \end{aligned}$$

Let us show that the vector (49) is an optimal solution to problem (QP).

Using notation (11) and setting $\Delta y_s(\varepsilon) := y_s(\varepsilon) - y_s^*$, $s \in S_j$, $j \in \bar{J}$, we obtain from (2)–(6) the following implication

$$\begin{aligned} & 0 = \frac{\partial f_*(x(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial x} + \sum_{s \in S(\varepsilon)} y_s^* \frac{\partial f(x(\varepsilon), t_s(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial x} + \sum_{s \in S(\varepsilon)} \Delta y_s(\varepsilon) \frac{\partial f(x(\varepsilon), t_s(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial x} \implies \\ & \implies 0 = D\Delta x(\varepsilon) + \sum_{j \in \bar{J}} \sum_{s \in S_j} y_s^* A_j \Delta t_s(\varepsilon) + \sum_{j \in \bar{J}} \sum_{s \in S_j} \Delta y_s(\varepsilon) q_j + c\varepsilon + o(\| (\Delta x(\varepsilon), \Delta t_s(\varepsilon), s \in S_j, j \in \bar{J}, \varepsilon) \|). \end{aligned}$$

Taking into account Assumption 2.3, dividing both sides of the last equality by ε, and passing to the limit, we obtain

$$D\varkappa^* + \sum_{j \in \bar{J}} \sum_{s \in S_j} A_j y_s^* \tau_s^* + \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{j \in \bar{J}} q_j \sum_{s \in S_j} \frac{\Delta y_s(\varepsilon)}{\varepsilon} + c = 0. \tag{50}$$

Denote $c^* = D\varkappa^* + \sum_{j\in\bar J}\sum_{s\in S_j} A_j y_s^* \tau_s^* + c$, $Q^* = (q_j,\ j\in\bar J)$,

$$\Delta y_j(\varepsilon) = \sum_{s\in S_j} \Delta y_s(\varepsilon),\ j\in\bar J,\ \Delta y(\varepsilon) = (\Delta y_j(\varepsilon),\ j\in\bar J),\ z(\varepsilon) = Q^*\frac{\Delta y(\varepsilon)}{\varepsilon} + c^*.$$

Then it follows from (50) that $z(\varepsilon)\to 0$ as $\varepsilon\to 0$.

Notice that $y_s^* = 0$ for $s\in S_j$ and $j\in\bar J\setminus J_*^*$. Hence, $\Delta y_j(\varepsilon)\geqslant 0$ for all $j\in\bar J\setminus J_*^*$. Applying Proposition 6.1 (see Appendix), we conclude that there exist numbers η_j^0, $j\in\bar J$, such that $Q^*(\eta_j^0,\ j\in\in\bar J)^\top + c^* = 0$ and $\eta_j^0\geqslant 0$ for $j\in\bar J\setminus J_*^*$.

By setting $\eta_j^0 = 0$ for all $j\in J^0\setminus\bar J$, we conclude that the following relations hold true:

$$D\varkappa^* + \sum_{j\in J_*^*\cap\bar J}\sum_{s\in S_j} A_j y_s^*\tau_s^* + \sum_{j\in J^0} q_j\eta_j^0 + c = 0, \tag{51}$$
$$y_s^*\geqslant 0,\ s\in S_j,\quad \sum_{s\in S_j} y_s^* = y_j^0,\quad j\in J_*^*\cap\bar J,\quad \eta_j^0\geqslant 0,\ j\in J_0^*.$$

It follows from Theorem 3.1 that $\varkappa^*\in\mathcal{X}^*$ (see (13)) and the following equalities take place:

$$\frac{1}{2}\tau_s^{*\top} D_j\tau_s^* + c_j^\top\tau_s^* + \varkappa^{*\top} A_j\tau_s^* - \rho_j^* = 0,\quad s\in S_j,\ j\in J_*^*\cap\bar J. \tag{52}$$

Hence, the vector ϕ^0 is a feasible solution to problem (QP).

It follows from (51) and (52) that the vector ϕ^0 satisfies the necessary and sufficient optimality conditions for the convex problem (QP). Therefore, ϕ^0 solves problem (QP).

Since $\tau_s^*\in K(j)$ for $s\in S_j$, $j\in J_*^*\cap\bar J$, the feasible set of problem (SIP*) is contained in the feasible set of problem (QP). Thus, taking into account the feasibility of the vector ϕ^0 for problem (SIP*) and its optimality in problem (QP), we conclude that ϕ^0 is an optimal solution to problem (SIP*) as well. □

Corollary 3.5. *Let Assumptions* 2.1–2.3 *be fulfilled. Suppose that the following limits exist:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{y_s(\varepsilon) - y_s^*}{\varepsilon} =: \Delta\eta_s,\quad s\in S_j,\ j\in\bar J.$$

Then these limits, together with those defined in (4)*,* (9)*, and* (10) *solve the following system:*

$$D\varkappa^* + \sum_{j\in\bar J}\sum_{s\in S_j} A_j y_s^*\tau_s^* + \sum_{j\in\bar J} q_j\sum_{s\in S_j}\Delta\eta_s + c = 0,$$
$$y_s^*\geqslant 0,\ s\in S_j,\quad \sum_{s\in S_j} y_s^* = y_j^0,\quad j\in\bar J,\quad \Delta\eta_s\geqslant 0,\ s\in S_j,\ j\in\{i\in\bar J : y_j^0 = 0\},$$
$$q_j^\top\varkappa^* + \omega_j = 0,\quad j\in\bar J\cap J_*^*,\quad q_j^\top\varkappa^* + \omega_j\leqslant 0,\quad j\in J_0^*\setminus\bar J.$$

Consider the minimax problem:

$$F(\varkappa) := \Big[\Omega_0(\varkappa) + \max_{y\in Y^0}\sum_{j\in J^0} y_j\left(\bar\Omega_j(\varkappa) + \max_{\tau\in K(j)}\Psi_j(\tau,\varkappa)\right)\Big] \to \min_{\varkappa\in\mathcal{X}^*}, \tag{53}$$

where $\bar\Omega_j(\varkappa) = \Omega_j(\varkappa,\rho) - \rho$, $j\in J^0$, the functions $\Omega_j(\varkappa,\rho)$, $j\in J^0$, and $\Omega_0(\varkappa)$ are defined in (15), the functions $\Psi_j(\tau,x)$, $j\in J^0$, are defined in (14), Y^0 is the set of optimal solutions to problem (LP), and $\mathcal{X}^*$ is the set of optimal solutions to problem (DLP).

Notice that, to formulate this problem, one needs to know only the optimal solution x^0 to the unperturbed problem (SIP(0)), which is the limit point of the sequence $x(\varepsilon)$ as $\varepsilon\to 0$.

Theorem 3.6. *Let Assumptions* 2.1–2.3 *and* 3.2 *be fulfilled. Then the vector $\varkappa^*$ is an optimal solution to problem* (53)*.*

Proof. Note that it follows from Assumptions 2.1–2.3 and Theorems 3.1, 3.4 that $\varkappa^*\in\mathcal{X}^*$ and $F(\varkappa^*) < +\infty$. Hence, without loss of generality, we can restrict our consideration in problem (53) to

the feasible solutions satisfying the condition $F(x) < +\infty$. Under this condition, problem (53) can be rewritten in the following form:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{SIP}^{**}): \qquad & \beta \to \min, \\
\text{s. t.} \quad & \sum_{j\in J_*^*} y_j \Omega_j(x,\rho_j) + \Omega_0(x) - \beta \leqslant 0 \quad \forall y \in Y^0; \\
& \Psi_j(\tau,x) - \rho_j \leqslant 0 \quad \forall \tau \in K(j),\ j \in J_*^*; \\
& q_j^\top x + \omega_j = 0, \quad j \in J_*^*;\ q_j^\top x + \omega_j \leqslant 0, \quad j \in J_0^*.
\end{aligned}
$$

In this problem, the vector of decision variables is

$$
(x \in \mathbb{R}^n,\ \rho_j \in \mathbb{R},\ j \in J_*^*,\ \beta \in \mathbb{R}). \tag{54}
$$

As before, let us define the functions

$$
\rho_j(x) := \max_{\tau\in K(j)} \Psi_j(\tau,x), \quad j \in J_*^*, \quad \beta(x) := \max_{y\in Y^0} \Big(\sum_{j\in J_*^*} y_j \Omega_j(x,\rho_j(x)) + \Omega_0(x) \Big).
$$

Notice that if vector (54) is a feasible solution of problem (SIP^{**}), then $\rho_j(x) < +\infty$ for all $j \in J_*^*$.

Let x be a feasible solution of problem (53). It is easy to verify that the vector $(x,\ \rho_j(x),\ j \in J_*^*,\ \beta(x))$ is a feasible solution of (SIP^{**}), and for any feasible solution $(x,\ \rho_j,\ j \in J_*^*,\ \beta)$ of (SIP^{**}), we have $\beta(x) \leqslant \beta$. Moreover, we have $F(x) = \beta(x)$.

Let $\tilde{x} \in \mathcal{X}^*$ be a feasible solution of problem (53) such that $F(\tilde{x}) < +\infty$. Then, taking into account that $y^0 \in Y^0$, we obtain

$$
F(\tilde{x}) = \beta(\tilde{x}) = \max_{y\in Y^0} \Big(\sum_{j\in J_*^*} y_j \Omega_j(\tilde{x},\rho_j(\tilde{x})) + \Omega_0(\tilde{x}) \Big) \geqslant \sum_{j\in J_*^*} y_j^0 \Omega_j(\tilde{x},\rho_j(\tilde{x})) + \Omega_0(\tilde{x}).
$$

Since Assumption 3.2 is satisfied, problem (17) has an optimal solution for each $j \in J_*^* \setminus \bar{J}$. Hence, without loss of generality, the constraint (48) in problem (SIP^*) can be replaced by the following one:

$$
\frac{1}{2}\tau^\top D_j \tau + c_j^\top \tau + x^\top A_j \tau - \rho_j \leqslant 0 \quad \forall \tau \in K(j),\ j \in J_*^*,
$$

and the vector of decision variables $\phi = (x \in \mathbb{R}^n,\ \rho_j \in \mathbb{R},\ j \in J_*^* \cap \bar{J})$ can be replaced by $(x \in \mathbb{R}^n,\ \rho_j \in \mathbb{R},\ j \in J_*^*)$.

Taking into account this observation, together with the fact that $y_j^0 = 0$ for all $j \in J_*^* \setminus \bar{J}$ and applying Theorem 3.4, we obtain

$$
\sum_{j\in J_*^*} y_j^0 \Omega_j(\tilde{x},\rho_j(\tilde{x})) + \Omega_0(\tilde{x}) \geqslant \sum_{j\in J_*^*} y_j^0 \Omega_j(x^*,\rho_j(x^*)) + \Omega_0(x^*).
$$

Furthermore, by Theorem 3.3, we know that

$$
\sum_{j\in J_*^*} y_j^0 \Omega_j(x^*,\rho_j(x^*)) + \Omega_0(x^*) = \max_{y\in Y^0} \Big(\sum_{j\in J_*^*} y_j \Omega_j(x^*,\rho_j(x^*)) + \Omega_0(x^*) \Big) =: \beta(x^*) = F(x^*).
$$

Hence, we have shown that $F(\tilde{x}) \geqslant F(x^*)$ for any $\tilde{x} \in \mathcal{X}^*$. Since $x^* \in \mathcal{X}^*$, we conclude that x^* is an optimal solution to problem (53). □

4. Strengthening Assumption 3.2

In this section, we consider some assumptions that guarantee that Assumption 3.2 holds.

Assumption 4.1. *There exists a finite limit*

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x(\varepsilon) - x^0 - \varepsilon x^*}{\varepsilon^2} =: w^*.
$$

Lemma 4.2. *Let Assumptions* 2.1–2.3 *and* 4.1 *be fulfilled. Then Assumption* 3.2 *is fulfilled as well; i. e., for $j \in J_*^* \setminus \bar{J}$, problem* (17) *has an optimal solution.*

Proof. Suppose the contrary: for some $j_0 \in J_*^* \setminus \bar{J}$, the corresponding problem (17) has no optimal solution. Then it follows from [25] that there exists a vector $\bar{\tau} \in \mathbb{R}^p$ such that

$$\bar{\tau} \in K(j_0), \quad \bar{\tau}^\top D_{j_0} \bar{\tau} = 0, \quad (c_{j_0} + A_{j_0}^\top \varkappa^*)\bar{\tau} > 0. \tag{55}$$

Notice that it was proved above that, under Assumption 2.3, relations (27) hold. It follows from these relations that $q_j^\top \varkappa^* + \omega_j = 0$ for $j \in J_*^*$ and hence,

$$q_{j_0}^\top \Delta x(\varepsilon) + \omega_{j_0}\varepsilon = q_{j_0}^\top w^* \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \tag{56}$$

Since $\bar{\tau} \in K(j_0)$, there exists a number $\varepsilon_* > 0$ such that $t_{j_0}^0 + \varepsilon\bar{\tau} \in T$ for all $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$. By construction, $f(x^0, t_{j_0}^0, 0) = 0, \quad f(x(\varepsilon), t_{j_0}^0 + \varepsilon\bar{\tau}, \varepsilon) \leqslant 0$, and therefore

$$f(x(\varepsilon), t_{j_0}^0 + \varepsilon\bar{\tau}, \varepsilon) = \tag{57}$$
$$= \varepsilon^2 \big(\tfrac{\partial f_{j_0}^\top(\cdot)}{\partial x} w^* + \tfrac{1}{2} \varkappa^{*\top} \tfrac{\partial^2 f_{j_0}(\cdot)}{\partial x^2} \varkappa^* + \tfrac{1}{2} \tfrac{\partial^2 f_{j_0}(\cdot)}{\partial \varepsilon^2} + \tfrac{\partial^2 f_{j_0}^\top(\cdot)}{\partial \varepsilon \partial x} \varkappa^* + \bar{\tau}^\top \tfrac{\partial^2 f_{j_0}(\cdot)}{\partial t \partial x} \varkappa^* + \tfrac{\partial^2 f_{j_0}^\top(\cdot)}{\partial \varepsilon \partial t} \bar{\tau} \big) + o(\varepsilon^2) \leqslant 0.$$

Here, we took into account Assumption 2.3, the equalities $\frac{\partial f_{j_0}^\top(\cdot)}{\partial t}\bar{\tau} = 0$, $\bar{\tau}^\top D_{j_0}\bar{\tau} = 0$ (see (55)), and (56).

Dividing both sides of inequality (57) by ε^2 and passing to the limit, we obtain

$$\text{const} + (A_{j_0}^\top \varkappa^* + c_{j_0})^\top \bar{\tau} \leqslant 0, \tag{58}$$

where $\text{const} = \frac{\partial f_{j_0}^\top(\cdot)}{\partial x} w^* + \frac{1}{2} \varkappa^{*\top} \frac{\partial^2 f_{j_0}(\cdot)}{\partial x^2} \varkappa^* + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_{j_0}(\cdot)}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 f_{j_0}^\top(\cdot)}{\partial \varepsilon \partial x} \varkappa^*$.

Notice that it follows from (55) that without loss of generality, the vector $\bar{\tau}$ can be scaled such that $(A_{j_0}^\top \varkappa^* + c_{j_0})^\top \bar{\tau} \geqslant a$, where $0 < a < \infty$ is any fixed number. However, this contradicts (58). Hence, we have proved that, for any $j \in J_*^* \setminus \bar{J}$, problem (17) has an optimal solution. □

Let us make the following assumption.

Assumption 4.3. *There exists a limit* (9)*, and for each* $j \in J_*^* \cup \bar{J}$*,*

$$\big(A_j^\top \varkappa^* + c_j\big)^\top l < 0 \quad \forall l \in \Delta K(j) := \{l \in K(j) \setminus \{0\} : l^\top D_j l = 0\}. \tag{59}$$

Note that relations (59) imply the fulfillment of Assumption 3.2 and, consequently, the existence of optimal solutions to problem (17) for all $j \in J_*^* \cup \bar{J}$.

Lemma 4.4. *Suppose that Assumption* 4.3 *is fulfilled. Then there exist limits* (10).

Proof. Consider an index $j \in \bar{J}$. It follows from Assumption 4.3 that the corresponding problem (17) has an optimal solution, say τ_j. Since $\tau_j \in K(j)$, there exists a number $\varepsilon_* > 0$ such that $t_j^0 + \varepsilon\tau_j \in T$ for all $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$.

Recall that, for $s \in S_j$, inequalities (24) and expansions (25) and (26) hold. Since $\tau_j \in K(j)$, we have $\frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial t}\tau_j = 0$. Multiplying both sides of (7) by $\Delta t_s(\varepsilon)$ and taking into account (18), we get $\frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial t}\Delta t_s(\varepsilon) \leqslant 0$. Consequently, from (24), (25), and (26) it follows:

$$\frac{1}{2}\Delta t_s^\top(\varepsilon)\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t^2}\Delta t_s(\varepsilon) + \Delta t_s^\top(\varepsilon)\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t \partial x}\Delta x(\varepsilon) + \frac{\partial^2 f_j^\top(\cdot)}{\partial \varepsilon \partial t}\Delta t_s(\varepsilon)\varepsilon + o(\| (\Delta t_s(\varepsilon), \varepsilon) \|^2) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\tau_j^\top \frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t^2}\tau_j \varepsilon^2 + \tau_j^\top \frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t \partial x}\Delta x(\varepsilon)\varepsilon + \frac{\partial^2 f_j^\top(\cdot)}{\partial \varepsilon \partial t}\tau_j \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \tag{60}$$

It is evident that $I_s(\varepsilon) = I_a(t_s(\varepsilon)) \subset I_j$ for sufficiently small $\varepsilon > 0$. Hence, we have

$$a_i^\top \Delta t_s(\varepsilon) = 0, \quad i \in I_s(\varepsilon), \quad a_i^\top \Delta t_s(\varepsilon) \leqslant 0, \quad i \in I_j \setminus I_s(\varepsilon). \tag{61}$$

Multiplying both sides of (1) by $\Delta t_s(\varepsilon)$ and taking into account (61), we obtain:

$$\frac{\partial f^\top(x(\varepsilon), t_s(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial t}\Delta t_s(\varepsilon) = \sum_{i \in I_s(\varepsilon)} a_i^\top \Delta t_s(\varepsilon)\mu_i(s, \varepsilon) = 0. \tag{62}$$

Conditions (61) and (62) imply that $\Delta t_s(\varepsilon) \in K(j)$. Hence, it follows from (8) that

$$\Delta t_s^\top(\varepsilon)\frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t^2}\Delta t_s(\varepsilon) \leqslant 0. \tag{63}$$

Let us divide both sides of (61) by $\|\Delta t_s(\varepsilon)\|$ and pass to the limit. As a result, we obtain

$$a_i^\top \bar{\tau}_s^* \leqslant 0, \quad i \in I_j,\ s \in S_j,\ j \in \bar{J}, \quad \text{with } \bar{\tau}_s^* = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta t_s(\varepsilon)}{\|\Delta t_s(\varepsilon)\|}.$$

Next, dividing both sides of equality (62) by $\|\Delta t_s(\varepsilon)\|$ and passing to the limit, we get

$$\frac{\partial f_j^\top(\cdot)}{\partial t} \bar{\tau}_s^* = 0, \quad s \in S_j,\ j \in \bar{J}.$$

Hence, we have shown that $\bar{\tau}_s^* \in K(j)$ for $s \in S_j$, $j \in \bar{J}$.

Suppose that $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\|\Delta t_s(\varepsilon)\|}{\varepsilon} = \infty$. This implies that $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\|\Delta t_s(\varepsilon)\|} = 0$.

Dividing both sides of inequality (60) by $\|\Delta t_s(\varepsilon)\|^2$ and passing to the limit yields $\frac{1}{2} \bar{\tau}_s^{*\top} \frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t^2} \bar{\tau}_s^* \geqslant 0$. This inequality, together with the inclusion $\bar{\tau}_s^* \in K(j)$ and inequalities (8), implies that

$$\frac{1}{2} \bar{\tau}_s^{*\top} \frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t^2} \bar{\tau}_s^* = 0.$$

Now, let us divide both sides of inequality (60) by $\|\Delta t_s(\varepsilon)\| \varepsilon$ and pass to the limit. We then obtain

$$\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\frac{\|\Delta t_s(\varepsilon)\|}{\varepsilon} \frac{\Delta t_s^\top(\varepsilon)}{\|\Delta t_s(\varepsilon)\|} \frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t^2} \frac{\Delta t_s(\varepsilon)}{\|\Delta t_s(\varepsilon)\|} \Big) +$$
$$+ (\bar{\tau}_s^*)^\top \frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t \partial x} \varkappa^* + \frac{\partial^2 f_j^\top(\cdot)}{\partial \varepsilon \partial t} \bar{\tau}_s^* + \frac{o(\|(\Delta t_s(\varepsilon), \varepsilon)\|^2)}{\|\Delta t_s(\varepsilon)\| \varepsilon} \geqslant 0. \tag{64}$$

It follows from Assumption 4.3, the inclusion $\bar{\tau}_s^* \in K(j)$, and the equality $\frac{1}{2} (\bar{\tau}_s^*)^\top \frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t^2} \bar{\tau}_s^* = 0$ that

$$(\bar{\tau}_s^*)^\top \frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t \partial x} \varkappa^* + \frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial \varepsilon \partial t} \bar{\tau}_s^{*\top} < 0.$$

From (63), we conclude that

$$\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\frac{\|\Delta t_s(\varepsilon)\|}{\varepsilon} \frac{\Delta t_s^\top(\varepsilon)}{\|\Delta t_s(\varepsilon)\|} \frac{\partial^2 f_j(\cdot)}{\partial t^2} \frac{\Delta t_s(\varepsilon)}{\|\Delta t_s(\varepsilon)\|} \Big) \leqslant 0.$$

However, these inequalities contradict inequality (64). The resulting contradiction proves that $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\|\Delta t_s(\varepsilon)\|}{\varepsilon} < \infty$, and consequently, there exists a limit $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta t_s(\varepsilon)}{\varepsilon} =: \tau_s^*$. □

The following corollary is a direct consequence of Theorems 3.3, 3.6 and Lemmas 4.2, 4.4.

Corollary 4.5. *Suppose that one of the following sets of assumptions is fulfilled:*

• *Assumptions* 2.1–2.3 *and* 4.1,

• *Assumptions* 2.1–2.2 *and* 4.3.

Then the vector $y^0 = (y_j^0,\ j \in J^0)$ *defined in* (5) *is an optimal solution to problem* (28) *and* $\varkappa^*$ *is an optimal solution to problem* (53).

5. Comparison with known results

The results obtained in this paper are most closely related to those presented in [3], which investigates parametric problems of both semi-infinite programming and more general optimization problems in Banach spaces. In [3], the analysis of parametric SIP problems primarily focuses on the behavior of the objective function under small perturbations of the parameter ε. For the asymptotic analysis and structural properties of the optimal solution $x(\varepsilon)$, the authors refer to general results established for abstract parametric optimization problems.

Regarding these general results, the following limitations can be highlighted:

a) These results are formulated in a highly complex and abstract framework.

b) The underlying assumptions are difficult to verify in practice.

c) The assumptions in [3] are quite restrictive, as they are tailored to much broader classes of optimization problems rather than specifically to SIP.

Specifically, Theorem 4.101 in [3] provides a formulation that is closest to SIP settings, since it assumes a finite-dimensional decision variable vector. Under certain conditions, this theorem states that

> "For any $o(\varepsilon)$-optimal solution $\tilde{x}(\varepsilon)$ of SIP(ε), every accumulation point of $\frac{\tilde{x}(\varepsilon)-x^0}{\varepsilon}$ as $\varepsilon \to 0$ is an optimal solution of the min-max problem DQ",

where problem DQ serves as an analogue to our problem (53). One of the key assumptions required for this theorem is the second-order regularity condition (see condition (v) of Theorem 4.101 in [3]). This condition is formulated implicitly and is generally difficult to verify.

To overcome this drawback, sufficient conditions ensuring this second-order regularity are provided in [3]. The sufficient condition closest to the structure of our problem and our assumptions can be stated as follows (using the notation introduced above [3, p. 526]):

Let x^0 be an optimal solution to SIP(0). *Suppose that:*

(a) The set of active indices $T_a(x^0,0) = \{t_j^0,\ j \in J^0\}$ is finite.

(b) The set T is second-order regular at every point of $T_a(x^0,0)$.

(c) The second-order growth condition for the lower-level problem holds, i. e., for every $t_j^0 \in T_a(x^0,0)$, there exist a constant $c > 0$ and a neighborhood N_j of t_j^0 such that

$$-f(x^0,t,0) \geqslant c\|t-t_j^0\|^2 \quad \forall t \in N_j.$$

Then the second-order regularity condition (v) in Theorem 4.101 *from* [3] *is satisfied.*

Let us show that if there exists an index $j_0 \in J^0$ such that $\Delta K(j_0) := \{l \in K(j_0) \setminus \{0\} : l^\top D_j l = 0\} \neq \varnothing$, then condition (c) fails to hold.

Indeed, let $l \in \Delta K(j_0)$ with $\|l\| = 1$. Then $\tau(\theta) := t_{j_0}^0 + \theta l \in T$ and $\tau(\theta) \in N_{j_0}$ for sufficiently small $\theta \geqslant 0$. Computing the Taylor expansion yields:

$$-f(x^0,t_{j_0}^0+\theta l,0) = -\Big(\theta\frac{\partial f_{j_0}^\top(\cdot)}{\partial t}l + \frac{1}{2}\theta^2 l^\top \frac{\partial^2 f_{j_0}(\cdot)}{\partial t^2}l + o(\theta^2)\Big) = o(\theta^2).$$

However, the relations $o(\theta^2) \geqslant c\|\tau(\theta) - t_{j_0}^0\|^2 = c\theta^2$ cannot hold for a strictly positive constant c and sufficiently small $\theta \geqslant 0$.

Note that, for our min-max problem (53), we provide an explicit formulation in the form of a specific convex semi-infinite programming problem (SIP**). This problem has been studied in detail in [26; 27].

In our framework, we do not exclude the case where $\Delta K(j_0) \neq \varnothing$. Consequently, our assumptions are weaker than those in [3], and the results presented in this paper cannot be derived as direct consequences of the theorems in [3].

Furthermore, Theorems 3.1–3.4 characterize the asymptotic properties not only of the limit points $\varkappa^*$ of the sequence $\frac{x(\varepsilon)-x^0}{\varepsilon}$, but also of the limit points τ_s^* of the sequence $\frac{t_s(\varepsilon)-t_j^0}{\varepsilon}$ for $s \in S_j$, $j \in \bar{J}$, as well as the limit points $\Delta\eta_s$ of the sequence $\frac{y_s(\varepsilon)-y_s^*}{\varepsilon}$ for $s \in S_j$, $j \in \bar{J}$ as $\varepsilon \to 0$. Namely, it is shown that for $j \in \bar{J}$, the vectors τ_s^*, $s \in S_j$, are optimal solutions to the problem $\max\limits_{\tau \in K(j)} \Psi_j(\tau, \varkappa^*)$, and the vector $\eta^0 = (\eta_j^0 = \sum_{s\in S_j}\Delta\eta_s,\ j \in \bar{J};\ \eta_j^0 = 0,\ j \in J^0 \setminus \bar{J})^\top$ is the vector of optimal Lagrange multipliers for the problem (QP) corresponding to the constraints:

$$q_j^\top \varkappa + \omega_j = 0, \quad j \in J_*^*; \qquad q_j^\top \varkappa + \omega_j \leqslant 0, \quad j \in J_0^*.$$

The derived properties of the derivatives $\varkappa^*$, η^0, and τ_s^* ($s \in S_j$, $j \in \bar{J}$), along with the explicitly constructed optimization problems they solve, are highly convenient for analyzing the inverse problem. That is, given the solution to the unperturbed problem, it is necessary to describe the behavior of the perturbed system, including predicting the (new) number of active indices under perturbation. These topics will be the focus of our future research.

6. Appendix

Proposition 6.1. *Suppose that*

$$Q^*\frac{\Delta y(\varepsilon)}{\varepsilon} + c^* = z(\varepsilon)\ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_*], \tag{65}$$
$$z(\varepsilon) \to 0,\ \Delta y(\varepsilon) = (\Delta y_k(\varepsilon), k \in P)^\top \to 0 \ as\ \varepsilon \to 0;\ \Delta y_k(\varepsilon) \geqslant 0, k \in I \subset P.$$

Then there exists a vector $y^* = (y^*_k, k \in P)^\top$ *such that*

$$Q^* y^* + c^* = 0,\ y^*_k \geqslant 0,\ k \in I. \tag{66}$$

Proof. Consider the following linear programming problem:

$$(\mathrm{LP}_0): \qquad \max\ \theta \text{ s. t. } Q^* y + \theta c^* = 0,\ y_k \geqslant 0,\ k \in I.$$

This problem has a feasible solution $(y = 0,\ \theta = 0)$. Suppose that there exists another feasible solution $(\bar{y}, \bar{\theta})$ of this problem such that $\bar{\theta} > 0$. Then the vector $y^* = \bar{y}/\bar{\theta}$ satisfies relations (66) and the proposition is proved.

Suppose now that there is no feasible solution $(\bar{y}, \bar{\theta})$ of problem (LP_0) such that $\bar{\theta} > 0$. Then $(y^0 = 0, \theta^0 = 0)$ is an optimal solution to problem (LP_0). Therefore, by the optimality conditions,

$$\Delta^* := Q^{*\top}\lambda^*,\ \Delta^*_k = 0\ \forall k \in P \setminus I,\ \Delta^*_k \geqslant 0\ \forall k \in I,\ \lambda^{*\top} c^* = 1. \tag{67}$$

Multiplying equality (65) by $\lambda^{*\top}$, we obtain $\lambda^{*\top} Q^* \frac{\Delta y(\varepsilon)}{\varepsilon} + \lambda^{*\top} c^* = \lambda^{*\top} z(\varepsilon)$, and taking into account (67), we have

$$\sum_{k \in I} \Delta^*_k \frac{\Delta y_k(\varepsilon)}{\varepsilon} + 1 = \lambda^{*\top} z(\varepsilon) \text{ where } \Delta^*_k \geqslant 0,\ \Delta y_k(\varepsilon) \geqslant 0\ \forall k \in I. \tag{68}$$

Set $\alpha := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sum\limits_{k \in I} \Delta^*_k \frac{\Delta y_k(\varepsilon)}{\varepsilon} \geqslant 0$. Since $z(\varepsilon) \to 0$ as $\varepsilon \to 0$, passing to the limit in (68) yields $\alpha + 1 = 0$ which is impossible because $\alpha \geqslant 0$. This contradiction completes the proof of the proposition. □

The work was supported by the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus under the state program "Convergence–2030" and by CIDMA (https://ror.org/05pm2mw36) under the Portuguese Foundation for Science and Technology (FCT, https://ror.org/00snfqn58), Grant UID/04106/2025 (https://doi.org/10.54499/UID/04106/2025).

References

1. Fiacco A. V. *Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming*. New York, Academic Press, 1983.

2. Levitin E. S. *Perturbation Theory in Mathematical Programming and its Applications*. Moscow, Nauka, 1992 (in Russian).

3. Bonnans J. F., Shapiro A. *Perturbation Analysis of Optimization Problems*. Springer Science & Business Media, 2013.

4. Hettich R., Kortanek K. Semi-infinite programming: Theory, methods and applications. *SIAM Review*, 1993, vol. 35, iss. 3, pp. 380–429.

5. Stecher J., Kiltz, L., Ruess N., Graichen K. Why engineers should care about semi-infinite programming: Nominal versus tolerance-aware geometry optimization of a proportional electromagnetic actuator. *IFAC-PapersOnLine,* 2025, vol. 59, iss. 17, pp. 113–118.

6. Castillo E., Minguez R., Castillo C. Sensitivity analysis in optimization and reliability problems. *Reliability Engineering & System Safety,* 2008, vol. 93, iss. 12, pp. 1788–1800.

7. Ben-Tal A., Nemirovski A. Selected topics in robust convex optimization. *Mathematical Programming*, 2008, vol. 112, iss. 1, pp. 125–158.

8. Puschke J., Djelassi H., Kleinekorte J., Hannemann-Tamás R., Mitsos A. Robust dynamic optimization of batch processes under parametric uncertainty: Utilizing approaches from semi-infinite programs. *Computers & Chemical Engineering,* 2018, vol. 116, pp. 253–267.

9. Bank B., Guddat J., Klatte D., Kummer B., Tammer K. *Non-Linear Parametric Optimization*. Birkhauser, Basel, 1983.

10. Izmailov A. F. Sensitivity of solutions to systems of optimality conditions under the violation of constraint qualifications. *Computational Mathematics and Mathematical Physics,* 2007, vol. 47, iss. 4, pp. 533–554.

11. Dontchev A. L. Rockafellar R. T. Characterizations of Lipschitzian stability in nonlinear programming. *Fiacco A. V. (Ed.). Mathematical Programming with Data Perturbations*, CRC Press, 2020, pp. 65–82.

12. Dempe S. Directional differentiability of optimal solutions under Slater's condition. *Mathematical Programming,* 1993, vol. 59, iss. 1, pp. 49–69.

13. López M. A., Still G. Semi-infinite programming. *European Journal of Operational Research*, 2007, vol. 180, iss. 2, pp. 491–518.

14. Goberna M. A., López M. A. *Post-Optimal Analysis in Linear Semi-Infinite Optimization*. Springer, Briefs in Optimization, 2014.

15. Reemtsen R., Ruckmann J. J. (Eds.). *Semi-Infinite Programming.* New York, Springer Science & Business Media, 2013. 514 p.

16. Goberna M. A., Terlaky T., Todorov M. I. Sensitivity analysis in linear semi-infinite programming via partitions. *Mathematics of Operations Research,* 2010, vol. 35, iss. 1, pp. 14–26.

17. Rockafellar R. T., Wets R. J.-B. *Variational Analysis*. Springer Science & Business Media, 2009.

18. Cánovas M. J., López M. A., Mordukhovich B. S., Parra J. Variational analysis in semi-infinite and infinite programming, I: Stability of linear inequality systems of feasible solutions. *SIAM Journal on Optimization,* 2010, vol. 20, iss. 3, pp. 1504–1526.

19. Poore A. B. Bifurcation problems for some parametric nonlinear programs in Banach spaces. *SIAM Journal on Control and Optimization,* 1996, vol. 34, iss. 6, pp. 1947–1971.

20. Levitin E. S., Polyak B. T. Constrained minimization methods. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1966, vol. 6, iss. 5, pp. 1–50 (in Russian).

21. Polyak B. T. *Introduction to Optimization*. New York, Optimization Software, Inc., Publications Division, 1987.

22. Zheng X. Y., Liu S. T. Levitin–Polyak well-posedness and stability for parametric optimization problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2021, vol. 189, iss. 1, pp. 112–134.

23. Mitsos A., Gharbaoui B., Stein O. Recent advances in nonconvex semi-infinite programming: Applications and algorithms. *Journal of Computing and Optimization*, 2021, vol. 5, iss. 2, pp. 105–124.

24. López M. A. A brief tutorial on semi-infinite optimization: Theory, models and new analytical constructions. *Top / Springer Nature*, 2026, vol. 34, iss. 1, pp. 1–25.

25. Eaves B. C. On quadratic programming. *Management Science,* 1971, vol. 17, iss. 11, pp. 698–711.

26. Kostyukova O., Tchemisova T., Kurdina M. Existence theorem and optimality conditions for a class of convex semi-infinite problems with noncompact index sets. *Statistics, Optimization & Information Computing,* 2017, vol. 5, iss. 4, pp. 278–294.

27. Kostyukova O., Tchemisova T., Kurdina M. On optimal properties of special nonlinear and semi-infinite problems arising in parametric optimization. *Statistics, Optimization & Information Computing,* 2017, vol. 5, iss. 2, pp. 99–108.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 50–59



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMIC SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL



УДК 330.4(075.8) https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-50–59
EDN: VGNXYC

ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ПОКАЗАТЕЛЯМИ СРАВНИТЕЛЬНОЙ СТАТИКИ ТЕОРИИ ФИРМЫ

В. В. Альсевич

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: alsevichvv@mail.ru

Поступила: 25.08.2026 **Исправлена:** 14.09.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: задачи теории фирмы, функции спроса на факторы производства, функция предложения, показатели сравнительной статики, аналог теоремы Слуцкого в теории фирмы

Аннотация. Как известно, одним из основных результатов теории потребления является теорема Е. Е. Слуцкого, устанавливающая зависимость между показателями сравнительной статики этой теории. В теории производства (фирмы) основные задачи аналогичны задачам теории потребления. Поэтому вызывает интерес получить аналогичный результат в теории фирмы. В научной литературе имеются похожие результаты при различных подходах к соответствующей постановке задачи фирмы. В данном сообщении получены соотношения между показателями сравнительной статики теории фирмы, являющиеся аналогом теоремы Слуцкого в теории потребления в интерпретации Дж. Хикса.

THE RELATIONSHIP BETWEEN THE INDICATORS OF COMPARATIVE STATICS OF THE FIRM THEORY

V. V. Alsevich

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: alsevichvv@mail.ru

Received: 25.08.2026 **Revised:** 14.09.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: problems of the theory of the firm, factor demand functions, supply function, comparative statics measures, analogue of the Slutsky theorem in the theory of the firm

Abstract. As is well known, the fundamental result of consumption theory is E. E. Slutsky's theorem, which establishes a relationship between the comparative statics indicators of this theory. In production theory (of the firm), the main problems are similar to those of consumption theory. Therefore, it is of interest to obtain a similar result within the theory of the firm. Similar results can be found in the academic literature across various approaches to formulating the problem of the firm. In this paper, we obtain relationships between the comparative statics indicators of the theory of the firm, which are analogous to Slutsky's theorem in consumer theory as interpreted by J. Hicks.

1. Введение

Как известно, в теории потребления одним из основных результатов является теорема Е. Е. Слуцкого, выражающая соотношения между показателями сравнительной статики, которые определяют поведение спроса на товары при изменении цен на них и бюджет (см., напр., [1–4]). Независимо от Слуцкого аналогичная теорема была доказана другими авторами, в частности, Дж. Хиксом [5], хотя в несколько иной интерпретации. Следует отметить, что именно в интерпретации Хикса в основном приводится в учебной литературе эта теорема, а фамилия Хикса при этом не всегда упоминается.

Если сравнить частные случаи задач фирмы с задачей потребления, они в чем-то схожи. Следует подчеркнуть, что сравнение необходимо проводить именно с частными случаями задач фирмы

(при фиксированном выпуске или фиксированных издержках), поскольку вывод об оптимальном поведении фирмы, полученный из общепринятой постановки задачи производства, дает уравнения, из которых для почти всех известных производственных функций решение можно получить лишь при определенном соотношении цен, при котором прибыль равна нулю, что соответствует условиям равновесия, которое в реальной экономике не осуществимо (см. пример ниже).

Следует также отметить, что задачи и теории фирмы, и теории потребления являются задачами оптимизации, для решения которых применяются однотипные математические методы.

Отсюда возникает ряд вопросов, в частности: а) как зависит цена на выпускаемую продукцию при изменении цен на производственные факторы, чтобы не изменилась, например, прибыль фирмы? б) как при этом зависят между собой показатели сравнительной статики теории фирмы? Другими словами: не справедлива ли теорема в теории производства (фирмы), аналогичная теореме Слуцкого в теории потребления?

Ответ на последний вопрос по-разному формулируется в научной литературе в зависимости от соответствующих постановок задач, причем почти нигде не упоминается, что полученные результаты похожи на уравнения Слуцкого в теории потребления. В предлагаемой работе предпринята еще одна попытка получить некоторые ответы на поставленные вопросы и дать их графическую интерпретацию в случае двух производственных факторов, в качестве которых выступают капиталовложения и трудовые затраты.

2. Задачи производства в неоклассической постановке

Сначала приведем некоторые факты из теории производства, которые потребуются для вывода основного утверждения. Как известно, основная задача фирмы в долгосрочном периоде в неоклассической теории заключается в максимизации прибыли на всем пространстве факторов:

$$\Pi(x) = p_0 f(x) - p'x \to \max, \quad x \in \mathbb{R}^m_+, \tag{1}$$

где p_0 – цена производимой фирмой продукции; x – m-вектор затрат; $p = (p_1, ..., p_m)$ – вектор цен факторов производства; $f(x)$ – производственная функция (вогнутая), ставящая в соответствие каждому набору x затрат факторов максимальный объем Q выпуска продукции одного типа и удовлетворяющая определенным свойствам, в частности, в некоторой области пространства затрат (называемой экономической) увеличение использования затрат каждого фактора не приводит к уменьшению выпуска продукции, а в части экономической области (называемой особой) увеличение использования затрат каждого фактора ведет к увеличению выпуска; $R = p_0 f(x)$ – доход; $C = p'x$ – издержки производства. Заметим, что в экономической области функция $f(x)$ вогнутая, а в особой – строго вогнутая. Следует отметить, что почти все известные производственные функции являются однородными некоторой степени $\alpha > 0$, т. е. $f(tx) = t^\alpha f(x)$, $t > 0$.

Как обычно, предполагается, что все векторы понимаются как вектор-столбцы, $'$(штрих) – знак транспонирования, соотношения $x \geqslant y$ $(x \leqslant y,\ x = y)$ для векторов одинаковой размерности означают покомпонентные соотношения, а все операции с векторами и матрицами подчиняются правилам векторно-матричного исчисления.

В силу вогнутости функции $f(x)$ задача (1) – задача выпуклого программирования. Пусть x^0 – решение задачи (1) (*если оно существует*). Как известно из любых источников по экономике, в случае гладкой функции $f(x)$, как следует из выпуклого программирования, если $x_i^0 > 0$ (производственный фактор используется при выпуске продукции), то выполняется равенство

$$p_0 \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} - p_i = 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{2}$$

Согласно определению предельного продукта $Mf_i(x^0) = \partial f(x^0)/\partial x_i$ равенства (2) означают: если i-й фактор используется в производстве, то

$$p_0 Mf_i(x^0) = p_i,$$

т. е. *стоимость предельного продукта* $p_0 M f_i(x^0)$ *равна цене* p_i *соответствующего затрачиваемого фактора*. Это утверждение в экономической литературе считается *основным выводом* в теории фирмы.

Если дополнительно потребовать строгой вогнутости функции $f(x)$, то решение $x^0 > 0$ этой задачи, *если оно существует*, единственное и для каждой пары (p_0, p) является решением векторного уравнения

$$p_0 \frac{\partial f(x)}{\partial x} - p = 0. \tag{3}$$

Однако, как указывалось выше, решение векторного уравнения (3) для основных производственных функций (ПФ) может существовать лишь при определенном соотношении цен. Покажем это для простейшей ПФ Кобба–Дугласа.

Пусть в задаче (1) $x = (K, L)$, где K – размер капиталовложений; L – трудовые затраты. Тогда ПФ Кобба–Дугласа имеет вид $f(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $A > 0$, а задачу (1) можем записать следующим образом:

$$p_0 AK^{\alpha}L^{1-\alpha} - p_K K - p_L L \to \max, \quad K \geqslant 0, \quad L \geqslant 0. \tag{4}$$

Здесь p_K, p_L – «цены» капиталовложений и трудовых затрат. Понятно, что $p_K > 0$, $p_L > 0$, $p_0 > 0$. Если $(K^0, L^0) > 0$ – решение задачи (4), то согласно (2) будем иметь

$$p_0 \alpha A \left(\frac{L^0}{K^0}\right)^{1-\alpha} = p_K, \quad p_0(1-\alpha)A\left(\frac{K^0}{L^0}\right)^{\alpha} = p_L. \tag{5}$$

С математической точки зрения система (5) не имеет решения *при произвольно заданных ценах*. В самом деле, если заданы p_0, p_K, p_L, то из (5) можем лишь указать соотношения между капиталовложениями и трудовыми затратами:

$$\frac{K^0}{L^0} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{p_L}{p_K}. \tag{6}$$

Но это не может быть решением системы (5) при произвольных ценах, а лишь при следующем их соотношении:

$$p_0 = \frac{1}{A}\left(\frac{p_K}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}, \tag{7}$$

которое получим при подстановке (6) в (5). А тогда прибыль равна нулю: $\Pi(K^0, L^0) = 0$ для любых (K^0, L^0), лежащих на прямой $(1-\alpha)p_K K - \alpha p_L L = 0$.

Но, во-первых, какая фирма будет работать без прибыли? А, во-вторых, даже нулевая прибыль обеспечивается лишь при соотношении (7) цен. А такое, как сказано выше, возможно лишь в условиях экономического равновесия, которое в реальной экономике не осуществимо.

В связи с этим задача (1) исследуется в некотором смысле в эквивалентных постановках: либо при фиксированном выпуске $Q = f(x)$ (заметим, что в дальнейшем в экономической литературе задача (1) исследуется именно в этой форме, хотя это не подчеркивается), либо при фиксированных издержках $C = p'x$.

3. Решение задачи при фиксированном выпуске

Пусть в задаче (1) фиксирован выпуск в объеме Q. Тогда задача примет вид

$$p_0 Q - p'x \to \max, \quad f(x) = Q, \quad x \geqslant 0. \tag{8}$$

Введем функцию Лагранжа $L(x, \lambda_Q) = p_0 Q - p'x + \lambda_Q(f(x) - Q)$. Будем считать, что функция $f(x)$ строго вогнутая. Тогда задача (8) – задача выпуклого программирования. Пусть $x^0 = x^0(Q)$ – решение задачи (8), λ_Q^0 – соответствующий множитель Лагранжа. Согласно теореме Куна–Таккера [6] будут выполняться равенства

$$\frac{\partial L(x^0,\lambda_Q^0)}{\partial x_i} = -p_i + \lambda_Q^0 \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,m}; \tag{9}$$

$$\frac{\partial L(x^0,\lambda_Q^0)}{\partial \lambda_Q} = f(x^0) - Q = 0. \tag{10}$$

Из равенства (9) согласно определению предельного продукта получим

$$\lambda_Q^0 M f_i(x^0) = p_i, \quad i = \overline{1,m}.$$

Поскольку $p > 0$ и функция $f(x)$ строго вогнутая, то $\lambda_Q^0 > 0$. Очевидно, что если выпуск Q не фиксирован, то к системе (9), (10) добавится равенство

$$\frac{\partial L(x^0,\lambda_Q^0)}{\partial Q} = p_0 - \lambda_Q^0 = 0,$$

откуда $\lambda_Q^0 = p_0$. В этом случае равенство (9) примет вид (2), что, как указывалось выше и показано ниже на примере с ПФ Кобба–Дугласа, некорректно для реальной экономики, в которой фирма будет работать с нулевой прибылью.

Таким образом, решив систему уравнений (9), (10) при фиксированных ценах, найдем $x^0 = x^0(Q)$.

Определив таким образом вектор затрат как функцию выпуска, получим множество $\{x^0 : x^0 = x^0(Q), Q \geqslant 0\}$, которое называют *долгосрочным путем расширения*.

Следует обратить внимание и на то, что решение не зависит от цены p_0.

Покажем справедливость сказанного выше на примере. Обратимся к задаче (4) и рассмотрим случай фиксированного выпуска

$$p_0 Q - p_K K - p_L L \to \max, \quad AK^\alpha L^{1-\alpha} = Q, \quad K \geqslant 0, \quad L \geqslant 0. \tag{11}$$

Система уравнений (9), (10) для оптимального плана (K^0, L^0) и соответствующего множителя Лагранжа λ_Q^0 указанной задачи (11) примет вид

$$\alpha\lambda_Q^0 A\left(\frac{L^0}{K^0}\right)^{1-\alpha} = p_K, \quad (1-\alpha)\lambda_Q^0 A\left(\frac{K^0}{L^0}\right)^{\alpha} = p_L, \quad A(K^0)^\alpha (L^0)^{1-\alpha} = Q.$$

Заметим, что решение последней системы уравнений зависит не только от Q, но и от цен p, что потребуется в дальнейшем. Поэтому, решая эту систему, будем иметь

$$K^0(p,Q) = \frac{1}{A}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{p_L}{p_K}\right)^{1-\alpha} Q, \quad L^0(p,Q) = \frac{1}{A}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_K}{p_L}\right)^{\alpha} Q, \tag{12}$$

$$\lambda_Q^0(p) = \frac{1}{A}\left(\frac{p_K}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}. \tag{13}$$

Подсчитаем прибыль. Согласно (12), (13) будем иметь

$$\Pi^0(Q,p_0,p) = p_0 Q - p_K K^0 - p_L L^0 = \left(p_0 - \frac{1}{A}\left(\frac{p_K}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right) Q = (p_0 - \lambda_Q^0(p))Q.$$

Отсюда видно, что при

$$p_0 > \frac{1}{A}\left(\frac{p_K}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \tag{14}$$

прибыль будет положительная. Но теперь решение задачи (11) существует всегда, зависит от цен, и при их указанном соотношении (14) производство не убыточно, а при соотношении (7), т. е. когда $\lambda_Q^0(p) = p_0$, – бесприбыльно.

4. Решение задачи при фиксированных издержках

Эта задача имеет вид

$$p_0 f(x) - C \to \max, \quad p'x = C, \quad x \geqslant 0. \tag{15}$$

Введя функцию Лагранжа $L(x,\lambda_C) = p_0 f(x) - C + \lambda_C(C - p'x)$, условия оптимальности примут вид

$$\frac{\partial L(x^0,\lambda_C^0)}{\partial x_i} = p_0 \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} - \lambda_C^0 p_i = 0, \quad i = \overline{1,m}; \tag{16}$$

$$\frac{\partial L(x^0,\lambda_C^0)}{\partial \lambda_C} = C - p'x^0 = 0. \tag{17}$$

Решая систему (16), (17), получим $x^0 = x^0(C)$. Изменяя $C \geqslant 0$, получим множество $\{x^0 : x^0 = x^0(C), C \geqslant 0\}$, которое, как и в случае с фиксированным выпуском, является долгосрочным путем расширения и при одинаковых технологиях фирмы, т. е. при одинаковых производственных функциях и одинаковых ценах, совпадает с указанным множеством для задачи (8).

Обратимся к задаче (4) и решим ее при фиксированных издержках:

$$p_0 A K^\alpha L^{1-\alpha} - C \to \max, \quad p_K K + p_L L = C, \quad K \geqslant 0, \quad L \geqslant 0. \tag{18}$$

Решение этой задачи удовлетворяет равенствам

$$\alpha p_0 A \left(\frac{L^0}{K^0}\right)^{1-\alpha} = \lambda_C^0 p_K, \quad (1-\alpha) A \left(\frac{K^0}{L^0}\right)^{\alpha} = \lambda_C^0 p_L, \quad p_K K^0 + p_L L^0 = C,$$

из которых получим

$$K^0(p,C) = \frac{\alpha}{p_K} C, \quad L^0(p,C) = \frac{1-\alpha}{p_L} C, \quad \lambda_C^0(p_0,p) = \frac{1}{p_0 A} \left(\frac{p_K}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(\frac{p_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}, \tag{19}$$

$$\Pi^0(C) = \frac{p_0 A \alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha} - p_K^\alpha p_L^{1-\alpha}}{p_K^\alpha p_L^{1-\alpha}} C.$$

Из всего полученного выше видно, что $\Pi^0(Q) > 0$, $\Pi^0(C) > 0$ при условии (14), причем во всех приводимых случаях оптимальный план лежит на луче $(1-\alpha)p_K K - \alpha p_L L = 0$, который является долгосрочным путем расширения, а в точках, соответствующих оптимальным планам, изокванта касается изокосты, под которыми понимаются соответственно множества точек пространства затрат, соответствующих либо постоянному выпуску, либо постоянным издержкам. Заметим только, что условия оптимальности, которым удовлетворяет оптимальный план в задачах (4), (11), (15), не одинаковы и при любых ценах не все подчиняются указанному в разд. 1 «основному выводу». Однако указанные соотношения можно представить в виде

$$\frac{M f_K(K^0,L^0)}{p_K} = \frac{M f_L(K^0,L^0)}{p_L} = \beta,$$

где $\beta = 1/p_0$ в задаче (4), $\beta = 1/\lambda_Q^0$ – в задаче с фиксированным выпуском и $\beta = \lambda_C^0/p_0$ – в задаче с фиксированными издержками. Последнее соотношение эквивалентно следующему равенству:

$$\frac{M f_K(K^0,L^0)}{M f_L(K^0,L^0)} = \frac{p_K}{p_L},$$

которое справедливо для всех случаев рассмотренных задач и не зависит от соотношения цен. Поэтому указанный выше «основной результат» теории фирмы правильнее сформулировать следующим образом: *при оптимальном поведении фирмы в условиях совершенной конкуренции отношение предельного продукта к цене соответствующего производственного фактора есть постоянная величина для всех затрачиваемых факторов* или, по-другому, *отношение предельных продуктов равно отношению их цен*.

Нетрудно подсчитать, что

$$\beta = \frac{1}{\lambda_Q^0} = \frac{\lambda_C^0}{p_0} = A \left(\frac{\alpha}{p_K}\right)^{\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{p_L}\right)^{1-\alpha}.$$

Понятно, что если $\lambda_Q^0 = p_0$ или $\lambda_C^0 = 1$, то получим один и тот же результат, сформулированный в разд. 1. Однако, как легко подсчитать, в этих случаях будет выполняться равенство (7), согласно которому прибыль во всех случаях равна нулю. Заметим, что решение задачи (4) весьма простое. В каждой задаче достаточно подставить данные в готовые формулы (12) или (19) при фиксированном выпуске или издержках. При этом долгосрочный путь расширения во всех случаях определяется формулой (6).

Результаты этого раздела в дальнейшем используем при графической интерпретации основного результата данного сообщения.

5. Показатели сравнительной статики теории фирмы

Рассмотрим теперь задачу (1) как семейство задач, зависящих от цен p_0, p. Решением этого семейства будет $x^0 = x^0(p_0, p)$, $p_0 \geqslant 0$, $p \geqslant 0$. Очевидно, в этом случае и оптимальный выпуск зависит от цен: $Q^0 = Q^0(p_0, p) = f(x^0(p_0, p))$.

Как известно, чувствительность оптимальных затрат и выпуска к изменениям цен определяется величинами $\partial x^0/\partial p_0, \partial x^0/\partial p, \partial Q^0/\partial p_0, \partial Q^0/\partial p$, которые называют показателями сравнительной статики теории фирмы. Будем считать, что функция $f(x)$ строго вогнута в особой области. В экономической литературе для семейства задач вида (1) подробно исследовано поведение спроса на затраты и предложения выпуска при отдельном изменении либо цены p_0, либо цен p_i, $i = 1, \ldots, m$.

К сожалению, автору данного сообщения неизвестны исследования поведения спроса и предложения при одновременном изменении цены на какой-либо фактор и на выпускаемую продукцию, чтобы при этом, например, не изменилась прибыль. Другими словами, как ведут себя спрос и предложение при так называемом компенсированном изменении цен. Обозначим эти величины $(\partial x^0/\partial p)_{\text{comp}}$, $(\partial Q^0/\partial p)_{\text{comp}}$.

6. Уравнения сравнительной статики для неоклассической задачи фирмы

Рассмотрим следующую ситуацию. Изменяется цена p_i на какой-либо фактор. Как при этом надо изменить цену p_0 на выпускаемую продукцию, чтобы не изменилась прибыль, другими словами, чтобы выполнялось тождество

$$\Pi(x^0(p_0, p), Q^0(p_0, p)) = p_0 f(x^0(p_0, p)) - p' x^0(p_0, p) \equiv \text{const}. \tag{20}$$

В этой ситуации $p_0 = p_0(p)$, причем $x^0 = x^0(p_0(p), p)$,

$$Q^0 = Q^0(p_0(p), p) \equiv f(x^0(p_0(p), p)). \tag{21}$$

Заметим, что в таком случае, например, $(\partial x_i^0/\partial p_j)_{\text{comp}}$ – это с математической точки зрения полная производная по p_j от x_i^0 , т. е. в матрично-векторной форме получим

$$\left(\frac{\partial x^0}{\partial p}\right)_{\text{comp}} = \frac{\partial x^0}{\partial p} + \frac{\partial x^0}{\partial p_0}\left(\frac{\partial p_0}{\partial p}\right)', \tag{22}$$

$$\left(\frac{\partial Q^0}{\partial p}\right)_{\text{comp}} = \frac{\partial Q^0}{\partial p} + \frac{\partial Q^0}{\partial p_0}\left(\frac{\partial p_0}{\partial p}\right)'. \tag{23}$$

Найдем величину $\partial p_0/\partial p$. Очевидно, для $x^0(p_0, p)$, где $p_0 = p_0(p)$, согласно (2) выполняется векторное тождество

$$p_0 \frac{\partial f(x^0(p_0, p))}{\partial x} \equiv p. \tag{24}$$

Дифференцируя тождество (20) по p и считая $p_0 = p_0(p)$, получим

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial p}\right)' f(x^0(p_0, p)) + p_0 \frac{\partial f'(x^0(p_0, p))}{\partial x}\left(\frac{\partial x^0}{\partial p}\right)_{\text{comp}} - (x^0)' - p'\left(\frac{\partial x^0}{\partial p}\right)_{\text{comp}} = 0. \tag{25}$$

Используя тождества (21), (24), из равенства (25) получим

$$\frac{\partial p_0}{\partial p} = \frac{x^0}{Q^0}. \tag{26}$$

Подставляя (26) в (22), (23), получим

$$\frac{\partial x^0}{\partial p} = \left(\frac{\partial x^0}{\partial p}\right)_{\text{comp}} - \frac{1}{Q^0}\frac{\partial x^0}{\partial p_0}(x^0)', \tag{27}$$

$$\frac{\partial Q^0}{\partial p} = \left(\frac{\partial Q^0}{\partial p}\right)_{\text{comp}} - \frac{1}{Q^0}\frac{\partial Q^0}{\partial p_0}(x^0)'. \tag{28}$$

Уравнения (27), (28) и представляют *аналог уравнений Слуцкого в теории производства (фирмы)* в дифференциальной форме. Конечно, здесь использован подход, аналогичный схеме Хикса, а не Слуцкого, и правильнее было бы назвать эти уравнения *аналогом уравнений Хикса*.

7. Уравнения сравнительной статики для задач с фиксированным выпуском

Рассмотрим семейство задач вида (8) с фиксированным выпуском Q, другими словами, функция предложения удовлетворяет тождеству

$$Q^0(p_0, p) = f(x^0(p_0, p)) \equiv Q. \tag{29}$$

Заметим, что и в этом случае основное уравнение будет иметь тот же вид (27), только вместо выпуска Q^0 будет фиксированный выпуск Q. В самом деле, прибыль в этом семействе задач равна

$$\Pi(p_0, p) = p_0 Q - p' x^0(p_0, p) \equiv \text{const}. \tag{30}$$

Дифференцируя по p тождества (29), (30), получим

$$\frac{\partial f'}{\partial x}\left(\frac{\partial x^0}{\partial p}\right)_{\text{comp}} = 0, \tag{31}$$

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial p}\right)' Q - (x^0)' - p'\left(\frac{\partial x^0}{\partial p}\right)_{\text{comp}} = 0. \tag{32}$$

Согласно (9) имеем $\partial f/\partial x = p/\lambda_Q^0$. Тогда равенство (31) примет вид

$$\frac{1}{\lambda_Q^0} p'\left(\frac{\partial x^0}{\partial p}\right)_{\text{comp}} = 0. \tag{33}$$

В силу (33) из равенства (32) для выражения $\partial p_0/\partial p$ получим тот же вид, что и равенство (26), в котором вместо Q^0 будет стоять фиксированный выпуск Q. Подставляя затем (26) в (22), получим уравнение (27), в котором, как сказано выше, вместо Q^0 будет постоянный выпуск Q. Заметим, что уравнение (27) в дискретной постановке можно представить в следующем виде:

$$\Delta x_{(p)} = (\Delta x_{(p)})_{\text{comp}} - \Delta x_{(p_0)}. \tag{34}$$

Здесь $\Delta x_{(p)}$ – общий эффект от изменения цен на производственные факторы; $-\Delta x_{(p_0)}$ – эффект от изменения цены на выпускаемую продукцию; $(\Delta x_{(p)})_{\text{comp}}$ – эффект замены.

Таким образом, уравнения (27), (28) (или (34)) в теории производства можно интерпретировать по аналогии с теоремой Слуцкого в теории потребления в виде следующего утверждения.

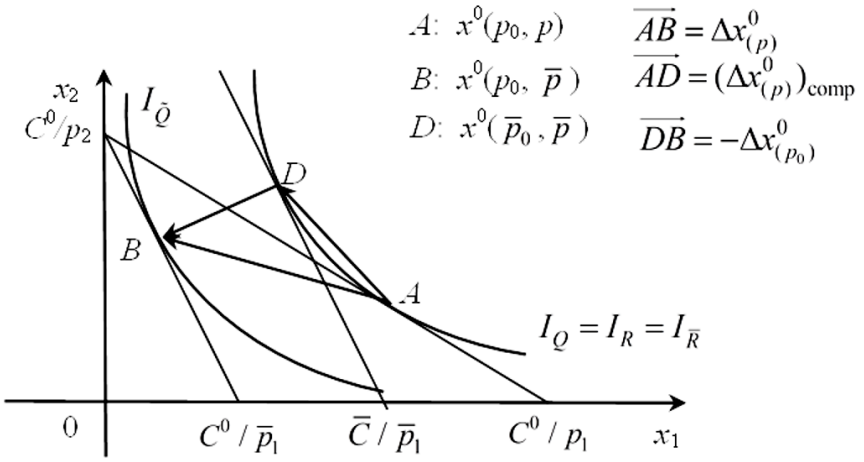
Теорема. *При указанных в разд. 2 свойствах производственной функции общий эффект от изменения цен на производственные факторы равен сумме эффекта от изменения цены на выпускаемую продукцию и эффекта замены (компенсации).*

8. Графическая интерпретация основного результата

К сожалению, для семейства задач теории фирмы в неоклассической постановке (1) основной результат в графической интерпретации представить невозможно. Как указывалось выше, в общем

случае найти конкретное решение задачи невозможно, а лишь при определенном соотношении цен, при котором нулевая прибыль. Однако при изучении поведения показателей сравнительной статики постановка семейства задач (1) несколько изменяется, т. е. добавляется тождество (21). Но и в этом случае нельзя получить конкретное решение задачи. Другими словами, решение этих задач заполняет все пространство факторов при изменении цен. Поэтому рассмотрим случай фиксированного выпуска Q.

На рисунке представлена графическая интерпретация уравнения (27) (или (34)) в случае двух факторов при достаточно малых изменениях цен.



Графическая интерпретация основного результата

Приведем пояснения. Пусть меняется цена на первый фактор: увеличивается от p_1 до $\bar{p}_1$. Поскольку выпуск фиксирован, то получаем изокванту I_Q, любая точка которой соответствует набору факторов, использование которых определяет один и тот же уровень выпуска Q.

Точка A соответствует набору факторов $x^0(p_0, p)$ – решению задачи (8) при заданных ценах p_0, p.

Заметим, что решение задачи (8) не зависит от p_0. Поэтому, на самом деле, $x^0 = x^0(p, Q)$. Это – точка касания изокванты $I_R = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : R = p_0 f(x) = p_0 Q\}$ с изокостой $I_{C^0} = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : p_1 x_1 + p_2 x_2 = C^0\}$, где $C^0 = p' x^0(p, Q)$. Как легко заметить, для изокванты I_Q справедливы соотношения: $I_Q = I_R = I_{\bar{R}}$, где I_R соответствует цене p_0, $I_{\bar{R}}$ – цене $\bar{p}_0$.

Точка B соответствует точке касания изокосты $\bar{p}_1 x_1 + p_2 x_2 = C^0$ и изокванты $I_{\widetilde{Q}} = I_{\widetilde{R}}$, где $\widetilde{R} = p_0 \widetilde{Q}$, $\widetilde{Q}$ – решение задачи (15) при $\bar{p} = (\bar{p}_1, p_2)$; $C = C^0$.

Точка D соответствует решению задачи (8) с тем же выпуском Q и новыми ценами $\bar{p}_0$, $\bar{p}$, причем цена $\bar{p}_0$ такова, что прибыль не меняется. Как указывалось выше, точка D соответствует набору факторов $x^0 = x^0(\bar{p}, Q)$, так что $f(x^0(p, Q) = f(x^0(\bar{p}, Q) = Q$. Решив задачу (8) для нового вектора цен $\bar{p}$, найдем издержки $\bar{C}^0 = \bar{p}' x^0(\bar{p}, Q)$. Новая цена $\bar{p}_0$ определяется из условия $\Pi(p_0, p, Q) \equiv \text{const}$, т. е. из равенства $p_0 Q - C^0 = \bar{p}_0 Q - \bar{C}^0$, откуда получим

$$\bar{p}_0 = p_0 + \frac{\bar{C}^0 - C^0}{Q}. \tag{35}$$

Исходя из приведенных выкладок, можно сделать следующий вывод. Поскольку при решении задачи (8), вообще говоря, решение получается как функция цен на факторы и выпуск, то, решив задачу при произвольных p и Q, получим соответствующие готовые формулы, затем подставляем в них конкретные значения p, Q и получаем конкретный результат.

Покажем сказанное на примере двухфакторной производственной функции Кобба–Дугласа, рассмотренной в разд. 1–3.

9. Пример

В задачах (4), (11), (18) имеем: $x=(K,L)$, $p=(p_K,p_L)$. При постоянном выпуске Q и заданном векторе цен p решение задачи (11) имеет вид (12), (13) (на рисунке соответствует точке A). Аналогично решение этой же задачи, например, при векторе цен $\bar{p}=(\bar{p}_K,p_L)$ представимо в виде

$$K^0(\bar{p},Q)=\frac{1}{A}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{p_L}{\bar{p}_K}\right)^{1-\alpha}Q,\quad L^0(p,Q)=\frac{1}{A}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{\bar{p}_K}{p_L}\right)^{\alpha}Q, \tag{36}$$

$$\lambda_Q^0(\bar{p})=\frac{1}{A}\left(\frac{\bar{p}_K}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}. \tag{37}$$

Нетрудно подсчитать, что оптимальные издержки согласно (12), (13) и (36), (37) будут равны соответственно

$$C^0=C^0(p)=\lambda_Q^0(p)Q=\frac{1}{A}\left(\frac{p_K}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}Q, \tag{38}$$

$$\bar{C}^0=C^0(\bar{p})=\frac{1}{A}\left(\frac{\bar{p}_K}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}. \tag{39}$$

Отсюда согласно (35) и (38), (39) получим

$$\bar{p}_0=p_0+\frac{1}{A}\left(\frac{p_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\frac{(\bar{p}_K)^{\alpha}-(p_K)^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}.$$

Рассмотрим равенство (34) и соответствующий рисунок, в которых положим $x=(K,L)$. Координаты точек A и D представлены формулами (12) и (36) соответственно. Найдем координаты точки B. Для этого необходимо решить задачу (18) с издержками $C=C^0$, полученными в (38), и вектором цен $\bar{p}=(\bar{p}_K,p_L)$. В итоге согласно (19), (38) получим

$$K^0(\bar{p},C^0)=\frac{\alpha}{\bar{p}_K}C^0=\frac{\alpha}{A\bar{p}_K}\left(\frac{p_K}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}Q,$$

$$L^0(\bar{p},C^0)=\frac{1-\alpha}{p_L}C^0=\frac{1}{A}\left(\frac{(1-\alpha)p_K}{\alpha p_L}\right)^{\alpha}Q.$$

$$\lambda_C^0(p_0,\bar{p})=\frac{1}{p_0A}\left(\frac{\bar{p}_K}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}.$$

Таким образом, рассматривая задачи фирмы с фиксированными выпуском либо издержками, на самом деле получим решение в виде функций спроса, зависящих соответственно от выпуска или издержек, причем при любом соотношении цен в отличие от общей задачи, имеющей решение лишь при определенном соотношении цен, при котором прибыль равна нулю. После решения таких задач получим готовые формулы для подстановки в них конкретных значений соответствующих параметров задачи.

Литература

1. *Слуцкий Е.* К теории сбалансированного бюджета потребителя // Экономико-математические методы. Народнохозяйственные модели. Теоретические вопросы потребления. М., 1963. (Пер. с ит.: Slutsky E. Sulla teoria del consumatore // Giornale degli Economisti. July, 1915.)

2. *Альсевич В. В.* Введение в математическую экономику. Кн. 1: Конструктивная теория. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2021. 254 с.

3. *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. М.: URSS, 2022. 300 с.

4. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-пресс, 2002. 600 с.

5. *Хикс Дж. Р.* Стоимость и капитал. М.: Прогресс, 1993. 488 с.

6. *Габасов Р., Кириллова Ф. М., Альсевич В. В., Калинин А. И., Крахотко В. В., Павленок Н. С.* Методы оптимизации. Мн.: Четыре четверти, 2011. 472 с.

References

1. Slutsky E. Towards a theory of a balanced consumer budget. *Economic and Mathematical Methods. National Economic Models. Theoretical Issues of Consumption*. Moscow, 1963. (Transl. from It.: Slutsky E. Sulla teoria del consumatore // Giornale degli Economisti. July, 1915.) (in Russian).

2. Alsevich V. V. *Introduction to Mathematical Economics. Book 1: Constructive Theory.* Moscow, Book House LIBROKOM, 2021. 254 p. (in Russian).

3. Ashmanov S. A. *Introduction to Mathematical Economics*. Moscow, URSS, 2022. 300 p. (in Russian).

4. Intriligator M. *Mathematical Methods of Optimization and Economic Theory.* Moscow, Iris-press, 2002. 600 p. (in Russian).

5. Hicks J. R. *Value and Capital.* Moscow, Progress, 1993. 488 p. (in Russian).

6. Gabasov R., Kirillova F. M., Alsevich V. V., Kalinin A. I., Krakhotko V. V., Pavlenok N. S. *Optimization Methods.* Minsk, Four quarters, 2011. 472 p. (in Russian).

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 60–74

УДК 517.962.2+517.977 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-60–74
EDN: YLVTVZ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

А. И. Астровский[1], **В. В. Горячкин**[2]

[1]*Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь*
[2]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*
e-mail: aastrov53@gmail.com, gorvv@bsu.by

Поступила: 08.07.2026 **Исправлена:** 04.08.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: дискретные нестационарные системы линейных уравнений Вольтерра, матрицы Коши, устойчивость, асимптотическая устойчивость, интервальная устойчивость, запас устойчивости, робастность, системы с интервальными матрицами, интервальная арифметика

Аннотация. Исследуются различные типы устойчивости для дискретных нестационарных линейных систем уравнений Вольтерра, особенностью которых является зависимость каждого последующего состояния от всей предыстории процесса. Решения систем уравнений Вольтерра представлены через матрицы Коши. Установлены необходимые и достаточные условия устойчивости, асимптотической устойчивости в обычной и интервальной постановках. Полученные условия выражены в виде определенных ограничений на нормы матриц Коши и на спектральный радиус специальной матрицы. Рассмотрены задачи устойчивости возмущенной системы и получены оценки на нормы матриц возмущений, при выполнении которых сохраняется асимптотическая устойчивость.

ABOUT THE STABILITY OF DISCRETE NONSTATIONARY SYSTEMS OF LINEAR VOLTERRA EQUATIONS

A. I. Astrovskii[1], **V. V. Gorjachkin**[2]

[1]*Belarusian State Economic University, Minsk, Belarus*
[2]*Belarusian State University, Minsk, Belarus*
e-mail: aastrov53@gmail.com, gorvv@bsu.by

Received: 08.07.2026 **Revised:** 04.08.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: discrete nonstationary systems of linear Volterra equations, Cauchy matrices, stability, asymptotic stability, interval stability, stability margin, robustness, systems with interval matrices, interval arithmetic

Abstract. Various type of stability for discrete nonstationary linear systems of Volterra equations are investigated, the peculiarity of which is the dependence of each subsequent state on the entire prehistory of the process. The solutions of the system of linear Volterra equations are represented through Cauchy matrices. Necessary and sufficient conditions for stability and asymptotic stability in the usual and interval statement are established. The presented conditions are expressed in the form of certain restrictions on the norms of Cauchy matrices and on the spectral radius of a special matrix. The stability problems of a perturbed system are considered and estimates are obtained based on the norms of perturbation matrices, which preserve asymptotic stability.

1. Введение

Для надежного функционирования широкого класса прикладных систем (технических, биологических, экономических и т. д.) важна не только их устойчивость, но и сохранение устойчивости при возможных ограниченных изменениях коэффициентов систем. Это требование к системам в более общей форме известно как свойство грубости или робастной устойчивости. Данная проблема занимает важное место в математической теории управления и связана с получением условий устойчивости не одной конкретной системы, а целой совокупности систем с заданными ограничениями на их параметры. Исследованию робастной устойчивости для линейных обыкновенных стационарных дискретных систем с априорной параметрической неопределенностью посвящено большое число работ (см., напр., [1–5]).

Задачи устойчивости стационарных дифференциальных и дискретных систем уравнений Вольтерра были рассмотрены в ряде работ В. Б. Колмановского [6–8] и И. В. Гайшуна [9–13].

Однако в литературе сравнительно мало внимания уделено исследованию устойчивости систем Вольтерра с интервальными неопределенностями.

В данной работе развивается метод сравнения [14–16], применительно к исследованию устойчивости, асимптотической устойчивости систем линейных нестационарных дискретных уравнений Вольтерра как в обычной, так и интервальной постановках. Метод сравнения – это один из фундаментальных и наиболее мощных подходов в качественной теории динамических систем и теории управления. Его главная идея состоит в том, что свойства решений сложной системы изучаются путем их сравнения с решениями другой более простой системы сравнения, свойства которой хорошо известны или легко изучаются. Метод сравнения для рассматриваемых систем реализуется при помощи специально построенных мажорантных систем. Особое внимание уделено исследованию проблемы интервальной и робастной асимптотической устойчивости интервальных линейных нестационарных дискретных систем уравнений Вольтерра. Получены достаточные условия и критерии асимптотической устойчивости как в обычной, так и интервальной постановках.

2. Представление решений и устойчивость

Рассмотрим систему дискретных линейных нестационарных однородных уравнений Вольтерра

$$x(t+1) = \sum_{i=0}^{t} A_i(t)x(t-i),\ (t = 0,1,\ldots), \tag{1}$$

в которой $(n \times n)$-вещественные матрицы $A_i(t)$ $(i = 0,1,\ldots,t)$ предполагаются известными точно; $x(t)$ – n-вектор-столбец решения системы (1) в момент времени t. Если заданы начальные условия при $t = 0$

$$x(0) = v \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

то будем также использовать обозначение $x(t,v)$ для решения системы (1) с заданным начальным условием.

Введем $(n \times n)$-матрицы $F_0(t)$ $(t = 0,1,2,\ldots,)$ по рекуррентным правилам

$$F_0(t) = \sum_{i=0}^{t-1} A_i(t-1)F_0(t-1-i),\ t = 1,2,\ldots,\ F_0(0) = E. \tag{3}$$

Здесь E – единичная $(n \times n)$-матрица. Матрицы $F_0(t)$ будем называть матрицами Коши.

Из [17] следует, что решение $x(t) = x(t,v)$ $(t \geqslant 0)$ задачи (1), (2) определяется по формуле Коши

$$x(t,v) = F_0(t)v,\ t \geqslant 0. \tag{4}$$

Обобщая результаты работ [9–13; 18] приведем определения устойчивости и асимптотической устойчивости системы (1).

Пусть $\|z\|$ обозначает евклидову норму вектора z в пространстве $\mathbb{R}^n$, а $\|G\|$ – согласованную с ней норму матрицы G, которая определяется следующим образом: $\|G\| = \max\limits_{\|z\|=1} \|Gz\|$.

Определение 2.1. Система (1) называется устойчивой, если существует такая постоянная величина $c > 0$, что для любых начальных условий $x(0) = v \in \mathbb{R}^n$ выполняется условие

$$\|x(t,v)\| \leqslant c\|v\|,\ t \geqslant 0.$$

Система (1) называется асимптотически устойчивой, если $x(t,v) \to 0$ при $t \to +\infty$ для любых начальных условий.

Пусть $F_0(t)$ – матрицы, определенные по формулам (3). Справедлива

Теорема 2.2 [13]. *Система уравнений Вольтерра* (1)*:*

– устойчива тогда и только тогда, когда существует такая положительная постоянная c, что $\|F_0(t)\| \leqslant c$ для любых $t \geqslant 0$;

– асимптотически устойчива, если и только если $F_0(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Проверка приведенных в теореме 2.2 условий устойчивости для систем Вольтерра (1) на практике вызывает определенные трудности. Поэтому, следуя [9; 18; 19] приведем достаточные

условия устойчивости и асимптотической устойчивости, выраженные через параметры исходной системы (1).

Теорема 2.3. *Пусть в каждый момент времени* $t = 0,1,\ldots$ *нормы матриц* $\|A_i(t)\|$ $(i = 0,1,\ldots,t)$ *ограничены некоторыми неотрицательными постоянными* L_i, *ряд* $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} L_i$ *сходится и его сумма равна* L. *Тогда, если* $L \leqslant 1$, *то система* (1) *устойчива и* $\|x(t,v)\| \leqslant \|v\|$. *Если же* $L < 1$, *то она асимптотически устойчива.*

Приведем ряд обозначений и пояснений, которые будут далее использованы при применении метода сравнения для систем уравнений Вольтерра (1).

Пусть $\big|G\big|_+$ обозначает матрицу, составленную из абсолютных величин элементов квадратной матрицы G. Через $\rho\big(G\big)$ обозначим спектральный радиус квадратной матрицы G, т. е. число

$$\rho\big(G\big) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(G)\},$$

где $|\lambda|$ – модуль комплексного числа λ, а $\sigma(G)$ – спектр матрицы G. При условии $\rho\big(G\big) < 1$ для любой матричной нормы выполняется [20, с. 359] неравенство $\rho\big(G\big) \leqslant \|G\|$ и для матрицы $E - G$ существует обратная матрица $\big(E - G\big)^{-1}$, а также $G^k \to O$ при $k \to +\infty$. Здесь O – нулевая матрица. Будем использовать запись $M \prec 0$ для обозначения отрицательной определенности квадратной матрицы M, а запись $M \succ 0$ – для положительной определенности.

Теорема 2.4 [18]. *Пусть для матриц* $A_i(t)$ $(i = 0,1,\ldots,t)$ *существуют такие неотрицательные постоянные матрицы* V_i, *что в каждый момент времени* $t = 0,1,\ldots$ *выполняются матричные неравенства* $|A_i(t)|_+ \leqslant V_i$, *матричный ряд* $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} V_i$ *сходится и его сумма равна матрице* V. *Тогда система уравнений Вольтерра* (1) *устойчива (асимптотически устойчива), если для матрицы* V *ее спектральный радиус* $\rho\big(V\big) < 1$, *т. е. матрица* V *устойчива по Шуру* [13].

Заметим, что требование устойчивости по Шуру матрицы V эквивалентно существованию положительно определенного решения $P \succ 0$ дискретного матричного неравенства Ляпунова $VPV^T - P \prec 0$ [21].

3. Об оценке запаса устойчивости при аддитивных возмущениях

Пусть матрицы системы (1) подвергаются действию линейно входящих возмущений $\Delta_i(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, для которых в каждый момент времени $t = 0,1,\ldots$ выполняются неравенства $|\Delta_i(t)|_+ \leqslant \Omega_i$ $(i = 0,1,\ldots,t)$. Здесь Ω_i – неотрицательные постоянные квадратные матрицы, для которых матричный ряд $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \Omega_i = \Omega$ сходится.

С учетом изменений коэффициентов исходной системы (1) получим систему уравнений Вольтерра с неопределенными (возмущенными) коэффициентами

$$x(t+1) = \sum_{i=0}^{t} \big(A_i(t) + \Delta_i(t)\big)x(t-i),\ (t = 0,1,\ldots). \tag{5}$$

Предположим, что для исходной системы (1) выполняются условия теоремы 2.4. Требуется найти положительное число δ, обладающее свойством: для любой матрицы $\Omega \in \mathbb{R}^{n\times n}$, евклидова норма которой меньше δ, система (5) с матрицами $V_i + \Omega_i$ сохраняет свойство устойчивости. Здесь число δ играет роль запаса устойчивости матрицы V. Точную верхнюю грань δ_0 таких чисел δ будем называть запасом устойчивости матрицы V. Другими словами, необходимо количественно оценить робастность (или грубость системы), т. е. найти оценку величины норм возмущений системы, не нарушающих ее устойчивость [4; 22]. Далее оценим норму возмущений матриц устойчивой дискретной системы Вольтерра, не выводящих эту систему из класса устойчивых.

Пусть спектральный радиус матрицы $V + \Omega$ удовлетворяет неравенству

$$\rho\big(V\big) \leqslant \rho\big(V + \Omega\big) \leqslant \|V + \Omega\| \leqslant \|V\| + \|\Omega\| = 1.$$

Отсюда имеем

$$\|\Omega\| = 1 - \|V\| \leqslant 1 - \rho\big(V\big) = \delta_0$$

и приходим к утверждению.

Теорема 3.1. *При выполнении условий теоремы* 2.4 *и если* $\|\Omega\| < \delta_0$, *где* $\delta_0 = 1 - \rho\big(V\big)$, *то возмущенная система* (5) *устойчива.*

Число δ_0 играет роль запаса устойчивости дискретной системы Вольтерра (1).

Рассмотрим случай матрицы V с различными характеристическими числами

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_p,\ \mu_1 \pm i\eta_1,\ \mu_2 \pm i\eta_2,\ \ldots,\ \mu_q \pm i\eta_q,\ i^2 = -1,\ p + 2q = n,$$

которым соответствуют собственные векторы (в комплексном пространстве)

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p,\ y_1 \pm iz_1,\ y_2 \pm iz_2,\ \ldots,\ y_q \pm iz_q.$$

В пространстве $\mathbb{R}^n$ определим векторы

$$e_k = x_k,\ 1 \leqslant k \leqslant p,\ e_{p+2k-1} = y_k,\ e_{p+2k} = z_k,\ 1 \leqslant k \leqslant q.$$

Пусть $G\big(e_1, e_2, \ldots, e_n\big)$ – матрица Грама системы векторов $e_1,\ e_2, \ldots, e_n$, а χ – мера обусловленности этой матрицы, т. е. отношение модулей наибольшего и наименьшего собственных значений матрицы G.

Адаптируя результаты из [4], приходим к утверждению.

Теорема 3.2. *При выполнении условий теоремы* 2.4 *и если* $\|\Omega\| < \delta_0$, *где* $\delta_0 = \dfrac{1 - \rho\big(V\big)}{\sqrt{\chi}}$, *а* χ *– мера обусловленности матрицы Грама G, то для матрицы* $V + \Omega$ *ее спектральный радиус меньше единицы.*

Замечание 3.3. *Для оценки спектрального радиуса матрицы V можно воспользоваться результатом из работы* [4]. *Если* Υ *– множество всех обратимых* $(n \times n)$*-матриц, то имеет место равенство*

$$\rho\big(V\big) = \min_{T \in \Upsilon} \max_{\|x\|=1} \big|T^{-1}VTx\big|,$$

причем минимум по T достигается при $T = T_0$, *где* T_0 *– матрица, столбцами которой являются векторы* $e_1,\ e_2,\ \ldots, e_n$.

4. Устойчивость интервальной дискретной системы уравнений Вольтерра

Для описания интервальной дискретной системы уравнений Вольтерра введем следующие понятия. Интервалами будем называть множества вида

$$[\eta, \vartheta] = \{\xi \in \mathbb{R} : \eta \leqslant \xi \leqslant \vartheta\}$$

для вещественных чисел $\eta, \vartheta \in \mathbb{R}$, $\eta \leqslant \vartheta$. Интервалы будем обозначать буквами жирного шрифта.

Далее будем обозначать через $\mathrm{mid}(\mathbf{a}) = \dfrac{a^* + a_*}{2}$ середину интервала $\mathbf{a} = [a_*,\ a^*]$, а через $\mathrm{rad}(\mathbf{a}) = \dfrac{a^* - a_*}{2}$ радиус интервала, $|\mathbf{a}| = \max\{|a^*|,\ |a_*|\}$ – абсолютное значение (модуль) интервала. Запись $\mathbf{a} \geqslant 0$ для интервала $\mathbf{a} = [a_*,\ a^*]$ означает, что $a_* \geqslant 0$.

Обозначим через $\mathbf{A}_i(t)$ интервальные вещественные $(n \times n)$-матрицы, т. е.

$$\mathbf{A}_i(t) = [A_{*i}(t),\ A_i^*(t)],\ t \geqslant 0;\ i = 0, 1, \ldots, t,$$

где $A_{*i}(t)$ и $A_i^*(t)$ – заданные матрицы $\big(A_{*i}(t) \leqslant A_i^*(t)\big)$. Здесь и далее матричные и векторные неравенства понимаются поэлементно. Интервальный вещественный вектор $\mathbf{x}(t)$ размерности n – это интервал $[x_*(t), x^*(t)]$, понимаемый как покомпонентный интервал в $\mathbb{R}^n$.

Вещественная неотрицательная матрица $|\mathbf{B}| = \big(|\mathbf{b}_{ij}|\big)$ называется абсолютной величиной интервальной матрицы $\mathbf{B}$ [23].

Интервальной нестационарной дискретной системой линейных уравнений Вольтерра в классической интервальной арифметике [23–26] назовем соотношение

$$\mathbf{x}(t+1) = \sum_{i=0}^{t} \mathbf{A}_i(t)\mathbf{x}(t-i),\ t = 0,1,\ldots. \tag{6}$$

Решение системы (6) с начальным условием $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}$ понимается в интервальной арифметике как совокупность интервалов $\mathbf{x}\big(t,\mathbf{v}\big) = [x_*(t,v),\ x^*(t,v)]$ $(t \geqslant 0)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, полученная при всевозможных матрицах $A_i(t) \in [A_{*i}(t), A_i^*(t)]$ $(t \geqslant 0;\ i = 0,1,\ldots,t)$ и начальных условиях из заданного интервала $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}$:

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(0),\ \ldots,\ \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{A}_0(\tau-1)\mathbf{x}(\tau-1) + \mathbf{A}_1(\tau-1)\mathbf{x}(\tau-2) + \cdots + \mathbf{A}_{\tau-1}(\tau-1)\mathbf{x}(0).$$

Интервальный вектор $\mathbf{x}(0)$ называется начальным условием интервальной системы (6). Ясно, что всякий начальный интервальный вектор $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}$ однозначно определяет решение (интервальную траекторию) $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}\big(t,\mathbf{v}\big)$ на множестве $[0,\tau]$ $(0 < \tau \in \mathbb{Z}_+)$, где $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел.

Определение 4.1. Будем говорить, что система (6) интервально асимптотически устойчива, если для любого начального условия $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}$ решение системы (6) удовлетворяет требованию $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} h\big(\mathbf{x}(t),0\big)\right) = 0$, где h – метрика Хаусдорфа в интервальной арифметике [23, с. 23; 25, с. 68].

Напомним, что расстояние по Хаусдорфу между двумя интервалами $\mathbf{a} = [a_*,\ a^*]$ и $\mathbf{b} = [b_*,\ b^*]$ определяется по формуле

$$h\big(\mathbf{a},\mathbf{b}\big) = \operatorname{dist}\big(\mathbf{a},\mathbf{b}\big) = \max\big\{|a_* - b_*|,\ |a^* - b^*|\big\}.$$

Теорема 4.2. *Пусть для интервальных матриц $\mathbf{A}_i(t)$ $(t \geqslant 0;\ i = 0,1,\ldots,t)$ существуют такие неотрицательные постоянные матрицы V_i, что в каждый момент времени $t = 0,1,\ldots$ выполняются неравенства $|\mathbf{A}_i(t)| \leqslant V_i$ и матричный ряд $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} V_i$ сходится, сумма которого равна матрице V. Тогда система уравнений Вольтерра* (6) *интервально асимптотически устойчива, если спектральный радиус $\rho\big(V\big)$ матрицы V строго меньше единицы.*

Доказательство. Действительно, пусть $\rho\big(V\big) < 1$. Введем в рассмотрение постоянные неотрицательные матрицы по правилу

$$M_0 = V_0, \quad M_{t+1} = \sum_{i=0}^{t} V_i M_{t-i} + V_{t+1},\ t = 0,1,\ldots.$$

Исходя из (6) и [23, с. 131–132] последовательно выпишем оценки

$$|\mathbf{x}(1)| = |\mathbf{A}_0(0)\mathbf{x}(0)| \leqslant V_0|\mathbf{v}| = M_0|\mathbf{v}|,$$
$$|\mathbf{x}(2)| = |\mathbf{A}_0(1)\mathbf{x}(1) + \mathbf{A}_1(1)\mathbf{x}(0)| \leqslant V_0M_0|\mathbf{v}| + V_1|\mathbf{v}| = M_1|\mathbf{v}|.$$

Применяя метод математической индукции, получим

$$|\mathbf{x}(t+1| = \left|\sum_{i=0}^{t} \mathbf{A}_i(t)\mathbf{x}(t-i)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{t} V_i|\mathbf{x}(t-i)| \leqslant \big(V_0M_{t-1} + V_1M_{t-2} + \cdots + V_t\big)|\mathbf{v}| = M_t|\mathbf{v}|. \tag{7}$$

Таким образом, при любом допустимом $\mathbf{v}$ справедливо неравенство

$$|\mathbf{x}(t+1)| \leqslant M_t|\mathbf{v}|. \tag{8}$$

Покажем, что матричная последовательность $M_t \to 0$ при $t \to +\infty$. Для этого будем суммировать t первых равенств в правой части оценок (7), (8) и группировать матрицы при M_i $(i = 0,1,\ldots,t)$. В результате получим

$$M_0 + M_1 + \cdots + M_t = V_0 + V_1 + \cdots + V_t + \big(V_0 + V_1 + \cdots + V_{t-1}\big)M_0 +$$
$$+ \cdots + V_0M_{t-1} \leqslant V\big(E + M_0 + M_1 + \cdots + M_{t-1}\big).$$

Полагая

$$Y_t = M_0 + M_1 + \cdots + M_t,$$

приходим к рекуррентному неравенству

$$Y_{t+1} \leqslant VY_t + V, \quad Y_0 = O,\ t = 0,1,\ldots,$$

решение которого удовлетворяет соотношению

$$M_0 + M_1 + \cdots + M_t = Y_t \leqslant V + V^2 + V^3 + \cdots + V^t + V^{t+1} \leqslant V(E-V)^{-1},\ t = 0,1,\ldots.$$

Отсюда в силу $\rho\big(V\big) < 1$ матричный ряд $\sum\limits_{t=0}^{+\infty} M_t$ из неотрицательных матриц сходится. Следовательно, общий член ряда $M_t \to 0$ при $t \to +\infty$. Поэтому в силу неравенств (8) и свойств метрики Хаусдорфа

$$h(\mathbf{x}_i(t+1), 0) = |\mathbf{x}_i(t+1)|,\ i = 1,2,...,n,$$

система (6) интервально асимптотически устойчива. □

Реализацией системы (6) назовем систему (1) при заданных матрицах из указанных интервалов, т. е. при $A_i(t) \in \mathbf{A}_i(t)$ $(t \geqslant 0;\ i = 0,1,\ldots,t)$. Реализацию системы (6) также будем называть точечной системой.

Определение 4.3. Систему (6) назовем робастно асимптотически устойчивой, если каждое решение любой ее реализации (1) стремиться к нулю при $t \to +\infty$.

Теорема 4.4. *Если система* (6) *интервально асимптотически устойчива, то она робастно асимптотически устойчива.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из очевидного включения $x(t,v) \in \mathbf{x}(t,\mathbf{v})$, где $x(t,v)$ и $\mathbf{x}(t,\mathbf{v})$ соответственно решения систем (1) и (6) с точечным начальным условием $x(0) = v$ и интервальным начальным условием $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}$. □

Далее рассмотрим свойство устойчивости частных систем вида (6).

5. Устойчивость интервальных систем Вольтерра с точечными матрицами

Сначала рассмотрим систему уравнений Вольтерра с фиксированными (точечными) матрицами $A_i(t)$ $(t \geqslant 0;\ i = 0,1,\ldots,t)$ и интервальным начальным условием $\mathbf{x}(0,\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. В этом случае система (6) примет вид

$$\mathbf{x}(t+1) = \sum_{i=0}^{t} A_i(t)\mathbf{x}(t-i),\ t = 0,1,\ldots. \tag{9}$$

Для представления интервальной системы уравнений (9) в виде двух точечных систем воспользуемся утверждением

Лемма 5.1. *Для любых трех вещественных чисел a, c и d, удовлетворяющих условию $d \geqslant c$, справедливы равенства*

$$\min(ac, ad) = \frac{a(c+d) - |a|(d-c)}{2}, \quad \max(ac, ad) = \frac{a(c+d) + |a|(d-c)}{2}. \tag{10}$$

Лемма доказывается непосредственной проверкой.

В классической интервальной арифметике формула (10) имеет следующую интерпретацию:

$$a[c,d] = \big[a\mathrm{mid}\big([c,d]\big) - |a|\mathrm{rad}\big([c,d]\big),\ a\mathrm{mid}\big([c,d]\big) + |a|\mathrm{rad}\big([c,d]\big)\big]. \tag{11}$$

Формулы (10), (11) позволяют записать следующим образом произведение точечной матрицы D на интервальный вектор $\mathbf{q} = [q_*,\ q^*]$ (при условии согласования размеров сомножителей):

$$D\mathbf{q} = D[q_*,\ q^*] = \big[D\mathrm{mid}(\mathbf{q}) - |D|\mathrm{rad}(\mathbf{q}),\ D\mathrm{mid}(\mathbf{q}) + |D|\mathrm{rad}(\mathbf{q})\big]. \tag{12}$$

Здесь и далее центры, радиусы и модули матриц и векторов – это центры, радиусы и модули, составленные из соответствующих элементов матриц и векторов.

Представим систему уравнений (9) с учетом формулы (12). Имеем

$$\mathbf{x}(t+1)=\sum_{i=0}^{t}\big[A_i(t)\mathrm{mid}\big(\mathbf{x}(t-i)\big)-|A_i(t)|\mathrm{rad}\big(\mathbf{x}(t-i)\big),\ A_i(t)\mathrm{mid}\big(\mathbf{x}(t-i)\big)+|A_i(t)|\mathrm{rad}\big(\mathbf{x}(t-i)\big)\big]. \quad (13)$$

Так как каждый интервал $\mathbf{a}$ однозначно определяется своим радиусом $\mathrm{rad}(\mathbf{a})$ и центром $\mathrm{mid}(\mathbf{a})$, то система (13) эквивалентна системе уравнений Вольтерра из двух точечных уравнений

$$\begin{aligned}\mathrm{mid}\big(\mathbf{x}(t+1)\big) &= \sum_{i=0}^{t} A_i(t)\mathrm{mid}\big(\mathbf{x}(t-i)\big),\\ \mathrm{rad}\big(\mathbf{x}(t+1)\big) &= \sum_{i=0}^{t} |A_i(t)|\mathrm{rad}\big(\mathbf{x}(t-i)\big).\end{aligned} \quad (14)$$

Введем в рассмотрение следующие матрицы и векторы:

$$\Phi_i(t)=\begin{pmatrix}A_i(t) & O\\ O & |A_i(t)|\end{pmatrix},\quad z(t)=\begin{pmatrix}\mathrm{mid}\big(\mathbf{x}(t)\big)\\ \mathrm{rad}\big(\mathbf{x}(t)\big)\end{pmatrix},\quad z_0=\begin{pmatrix}\mathrm{mid}(\mathbf{v})\\ \mathrm{rad}(\mathbf{v})\end{pmatrix}.$$

Тогда можно перейти от интервального представления системы Вольтерра (9) к эквивалентному точечному представлению в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$

$$z(t+1)=\sum_{i=0}^{t}\Phi_i(t)z(t-i),\ t=0,1,\dots,\ z(0)=z_0.$$

Далее в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ можем воспользоваться как необходимыми, так и достаточными условиями асимптотической устойчивости, изложенными в разделе 2.

Легко видеть, что выполнение требования на расстояние Хаусдорфа между интервальной траекторией и нулем $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} h\big(\mathbf{x}(t),0\big)\right)=0$ в интервальной арифметике эквивалентно двум условиям:

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{mid}\big(\mathbf{x}(t)\big)=0,\quad \lim_{t\to+\infty}\mathrm{rad}\big(\mathbf{x}(t)\big)=0.$$

Значит, имеют место аналоги теорем 2.2, 2.3 и 2.4 для интервальной системы (9). Например, теореме 2.4 в интервальной постановке соответствует теорема

Теорема 5.2. *Пусть для матриц $\Phi_i(t)$ $(i=0,1,\dots t)$ существуют такие неотрицательные постоянные матрицы V_i, что в каждый момент времени $t=0,1,\dots$ выполняются неравенства $\big|\Phi_i(t)\big|_+\leqslant V_i$ и матричный ряд $\sum\limits_{i=0}^{+\infty}V_i$ сходится, сумма которого равна матрице V. Тогда интервальная система уравнений Вольтерра* (9) *интервально асимптотически устойчива, если для матрицы V ее спектральный радиус $\rho\big(V\big)<1$.*

В исходных матрицах системы (9) теорема 5.2 может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 5.3. *Пусть для матриц $A_i(t)$ $(i=0,1,\dots t)$ существуют такие неотрицательные постоянные матрицы V_i, что в каждый момент времени $t=0,1,\dots$ выполняются неравенства $|A_i(t)|_+\leqslant V_i$ и матричный ряд $\sum\limits_{i=0}^{+\infty}V_i$ сходится, сумма которого равна матрице V. Тогда интервальная система уравнений Вольтерра* (9) *интервально асимптотически устойчива, если для матрицы V ее спектральный радиус $\rho\big(V\big)<1$.*

Замечание 5.4. *Учитывая структуру матрицы $\Phi_i(t)$, легко видеть, что если выполнены достаточные условия асимптотической устойчивости всех точечных систем* (1)*, то будут выполнены достаточные условия интервальной асимптотической устойчивости системы* (9) *и наоборот.*

Для каждого из уравнений (14), учитывая формулы (3), (4), запишем формулы Коши. Получим

$$\mathrm{mid}\big(\mathbf{x}(t,\mathbf{v})\big)=F_0(t)\mathrm{mid}(\mathbf{v}),\quad \mathrm{rad}\big(\mathbf{x}(t,\mathbf{v})\big)=P_0(t)\mathrm{rad}(\mathbf{v}),\ t\geqslant 0.$$

Здесь матрицы $F_0(t)$ вычислены по формуле (3), а матрицы $P_0(t)$ определены по формуле, аналогичной формуле (3):

$$P_0(t) = \sum_{i=0}^{t-1} |A_i(t-1)| P_0(t-i-1),\ t = 1,2,\ldots, \quad P_0(0) = E.$$

Из предыдущих рассуждений приходим к формуле Коши для решения интервальной системы (9)

$$\mathbf{x}(t,\mathbf{v}) = \big[F_0(t)\mathrm{mid}(\mathbf{v}) - P_0(t)\mathrm{rad}(\mathbf{v}),\ F_0(t)\mathrm{mid}(\mathbf{v}) + P_0(t)\mathrm{rad}(\mathbf{v})\big],\ t \geqslant 0.$$

Исходя из этого представления несложно прийти к критерию асимптотической устойчивости интервальной системы Вольтерра с точечными матрицами.

Теорема 5.5. *Система Вольтерра* (9) *с точечными матрицами интервально асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда последовательность матриц* $P_0(t)$ $(t = 0,1,\ldots)$ *стремится к нулевой матрице при* $t \to +\infty$.

6. Устойчивость интервальной системы Вольтерра с неотрицательными матрицами

В данном разделе рассматриваются только матрицы $A_i(t)$, $i = 0,1,\ldots,t$, $t \geqslant 0$, с неотрицательными элементами, т. е. $O \leqslant A_i(t)$.

Для заданного точечного вещественного объекта w (скаляра, вектора или матрицы) введем две операции по правилам: $w^+ = \max\big(0, w\big)$, $w^- = \max\big(0, -w\big)$.

Очевидны соотношения $w = w^+ - w^-$ и $\big|w\big| = w^+ + w^-$.

Лемма 6.1. *Для любых вещественных чисел a, b, c, d, удовлетворяющих условию* $c \leqslant d$, $0 \leqslant a \leqslant b$ *справедливы равенства*

$$\min(ac, ad, bc, bd) = ac^+ - bc^-, \quad \max(ac, ad, bc, bd) = bd^+ - ad^-. \tag{15}$$

Лемма доказывается непосредственной проверкой.

В классической интервальной арифметике формулы (15) позволяют в явном виде записать произведение интервалов. Если $0 \leqslant a \leqslant b$, то под произведением интервалов $[a,b]$ и $[c,d]$ понимается интервал, который задается следующим образом:

$$[a,b] \cdot [c,d] = [ac^+ - bc^-,\ bd^+ - ad^-]. \tag{16}$$

Из леммы 6.1, формулы (16) и работы [23, с. 16, 128] следует формула представления произведения любой неотрицательной интервальной матрицы $\mathbf{D} = [D_*, D^*]$ на интервальный вектор $\mathbf{q} = [q_*, q^*]$ (размеры сомножителей согласованы)

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{q} = [D_*,\ D^*] \cdot [q_*,\ q^*] = \big[D_* q_*^+ - D^* q_*^-,\ D^* q^{*+} - D_* q^{*-}\big]. \tag{17}$$

Для реализации метода сравнения и построения мажорантных систем перейдем от системы уравнений (6) с учетом (17) для всех $t = 0,1,\ldots$ к эквивалентному представлению интервальной системы уравнений Вольтерра:

$$\mathbf{x}(t+1) = \sum_{i=0}^{t} \Big[A_{*i}(t) x_*^+(t-i) - A_i^*(t) x_*^-(t-i),\ A_i^*(t) x^{*+}(t-i) - A_{*i}(t) x^{*-}(t-i)\Big]. \tag{18}$$

Очевидно, из интервальной асимптотической устойчивости системы (18) следует интервальная асимптотическая устойчивость системы (6) и наоборот.

Заметим, что интервальное уравнение (18) эквивалентно двум точечным системам

$$x_*(t+1) = \sum_{i=0}^{t} \Big(A_{*i}(t) x_*^+(t-i) - A_i^*(t) x_*^-(t-i)\Big),\ x_*^+(0) = v_*^+,\ x_*^-(0) = v_*^-,\ t \geqslant 0, \tag{19}$$

$$x^*(t+1) = \sum_{i=0}^{t} \Big(A_i^*(t) x^{*+}(t-i) - A_{*i}(t) x^{*-}(t-i)\Big),\ x^{*+}(0) = v^{*+},\ x^{*-}(0) = v^{*-},\ t \geqslant 0. \tag{20}$$

Учитывая неотрицательность матриц $O \leqslant A_{*i}(t) \leqslant A_i^*(t)$ и векторов $x_*^+(t), x^{*+}(t), x_*^-(t), x^{*-}(t)$, получим мажоранту системы уравнений (19):

$$x_*(t+1) \leqslant \sum_{i=0}^{t} A_i^*(t)\Big(x_*^+(t-i) - x_*^-(t-i)\Big) = \sum_{i=0}^{t} A_i^*(t)x_*(t-i),\ t \geqslant 0.$$

В силу неотрицательности слагаемых в системе уравнений (20), имеем

$$|x^*(t+1)| = \Big|\sum_{i=0}^{t}\Big(A_i^*(t)x^{*+}(t-i) - A_{*i}(t)x^{*-}(t-i)\Big)\Big| \leqslant \sum_{i=0}^{t}\Big(A_i^*(t)x^{*+}(t-i) + A_{*i}(t)x^{*-}(t-i)\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{t}\Big(A_i^*(t)x^{*+}(t-i) + A_i^*(t)x^{*-}(t-i)\Big) = \sum_{i=0}^{t} A_i^*(t)\big|x^*(t-i)\big|,\ t \geqslant 0.$$

В результате приходим к двум мажорантным системам уравнений для систем (19) и (20):

$$w_*(t+1) = \sum_{i=0}^{t} A_i^*(t)w_*(t-i),\ w_*(0) = v_*,\ t \geqslant 0, \tag{21}$$

$$|w^*(t+1)| = \sum_{i=0}^{t} A_i^*(t)|w^*(t-i)|,\ w^*(0) = v^*,\ t \geqslant 0. \tag{22}$$

Если уравнения (21), (22) асимптотически устойчивы, то интервально асимптотически устойчива система (6) с неотрицательными матрицами. Поэтому справедливо утверждение – аналог теоремы 2.4.

Теорема 6.2. *Пусть матрицы системы* (6) *неотрицательны* $\mathbf{A}_i(t) \geqslant O$ *и для матриц* $A_i^*(t)$ $(i = 0, 1, \ldots t)$ *существуют такие неотрицательные постоянные матрицы* V_i, *что в каждый момент времени* $t = 0, 1, \ldots$ *выполняются матричные неравенства* $A_i^*(t) \leqslant V_i$. *Далее пусть матричный ряд* $\sum_{i=0}^{+\infty} V_i$ *сходится, сумма которого равна матрице* V. *Тогда интервальная система* (6) *асимптотически устойчива, если матрица* V *устойчива по Шуру.*

Теорема 6.3. *Пусть матрицы системы* (6) *неотрицательны* $\mathbf{A}_i(t) \geqslant O$. *Если для точечной системы* (1) *с матрицами* $A_i(t) = \big|\mathbf{A}_i(t)\big|$ *выполнены требования теоремы* 2.4, *то интервальная система* (6) *робастно и интервально асимптотически устойчива.*

Доказательство. Система (1) с матрицами $A_i(t) = |\mathbf{A}_i(t)|$ асимптотически устойчива. Так как для любой матрицы $A_i(t) \in \mathbf{A}_i(t)$ справедливо неравенство $A_i(t) \leqslant \big|\mathbf{A}_i(t)\big|$, то из достаточных условий теоремы 2.4 следует робастная асимптотическая устойчивость системы (6). Ясно, что для системы (6) выполняются условия теоремы 4.2, которые гарантируют ее интервальную асимптотическую устойчивость. □

Далее будем говорить, что система (6) имеет неотрицательные параметры, если все ее матрицы неотрицательны, т. е. $\mathbf{A}_i(t) \geqslant O$ и все начальные условия также являются неотрицательными векторами $\mathbf{x}(0) = [x_*(0),\ x^*(0)] = \mathbf{v} \geqslant 0$. Очевидно достаточные условия теоремы 6.2 обеспечивают интервальную асимптотическую устойчивость системы (6).

Чтобы получить критерии устойчивости системы (6) с неотрицательными параметрами, приведем сначала формулу Коши для точного решения интервальной задачи (6) с начальными условиями $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v} \geqslant 0$. Заметим, что в данном случае интервальное решение $\mathbf{x}\big(t, \mathbf{v}\big) \geqslant 0$.

Введем в рассмотрение неотрицательные интервальные матрицы $\mathbf{P}_0(t) = [P_{*0}(t),\ P_0^*(t)]$ по правилу (3). В формулах (3) для удобства изложения точечные матрицы $F_0(t)$ заменены на неотрицательные интервальные матрицы $\mathbf{P}_0(t)$, а арифметические операции понимаются в смысле классической интервальной арифметики. Тогда интервальная формула Коши примет вид

$$\mathbf{x}\big(t, \mathbf{x}(0)\big) = \mathbf{P}_0(t)\mathbf{x}(0). \tag{23}$$

Формула (23) доказывается методом математической индукции, учитывая неотрицательность матриц $\mathbf{A}_i(t)$, $\mathbf{P}_0(t)$, векторов $\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{x}(t)$, а также свойства ассоциативности и дистрибутивности операций над неотрицательными интервальными матрицами [23].

Очевидно, что в этом случае

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}_0(t)\mathbf{x}(0) = \big[P_{*0}(t)x_*(0),\ P_0^*(t)x^*(0)\big].$$

В силу неравенств

$$O \leqslant P_{*0}(t)x_*(0) \leqslant P_0^*(t)x^*(0)$$

интервальная асимптотическая устойчивость равносильна асимптотической устойчивости точечной системы

$$x^*(t+1) = \sum_{i=0}^{t} A_i^*(t)x^*(t-i),\ t = 0,1,\ldots. \tag{24}$$

Справедливы теоремы.

Теорема 6.4. *Система* (6) *с неотрицательными параметрами интервально асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда асимптотически устойчива точечная система Вольтерра* (24) *с матрицами, взятыми из правых границ интервалов* $\mathbf{A}_i(t) = [A_{*i}(t),\ A_i^*(t)]$ *и неотрицательных начальных условий* $x_*(0) \geqslant 0$.

Теорема 6.5. *Для системы* (6) *с неотрицательными параметрами интервальная асимптотическая устойчивость эквивалентна робастной асимптотической устойчивости.*

Доказательство. Необходимость утверждения следует из теоремы 4.4 и того факта, что решение любой реализация системы (6) мажорируется решением системы (24) при одном и том же неотрицательном начальном значении.

Достаточность теоремы вытекает, из того факта, что из робастной асимптотической устойчивости системы (6) следует асимптотическая устойчивость системы (24), что гарантирует интервальную асимптотическую устойчивость системы (6). □

7. Устойчивость неотрицательных решений интервальной системы Вольтерра

Во многих моделях математической экономики, жизнедеятельности биологических популяций, процессов взаимодействия лекарственных препаратов в теле пациента при медикоментозном лечении и др. представляют интерес условия неотрицательности решений, очевидно, при неотрицательных начальных условиях.

Решение $\mathbf{x}(t)$ интервальной задачи Коши будем называть неотрицательным, если все векторы в последовательности $\mathbf{x}(0),\ \mathbf{x}(1),\ \ldots,\ \mathbf{x}(t),\ldots$ неотрицательны.

Адаптируя схему рассуждений из [27] на системы Вольтерра, установим необходимые и достаточные условия неотрицательности интервального решения задачи Коши.

Заметим, что из-за перестановочности произведения интервалов

$$[c,d]\cdot[a,b] = [a,b]\cdot[c,d],\ \text{здесь } [a,b] \geqslant 0,$$

результат леммы 6.1 имеет следующую интерпретацию:

$$[c,d]\cdot[a,b] = \big[c\cdot\mathrm{mid}\big([a,b]\big) - |c|\cdot\mathrm{rad}\big([a,b]\big),\ d\cdot\mathrm{mid}\big([a,b]\big) + |d|\cdot\mathrm{rad}\big([a,b]\big)\big]. \tag{25}$$

Из (25) и [23, с. 16, 128] следует формула для произведения интервальной матрицы $\mathbf{D}$ на неотрицательный интервальный вектор $\mathbf{q}$

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{q} = [D_*,\ D^*]\cdot[q_*,\ q^*] = \big[D_*\cdot\mathrm{mid}(\mathbf{q}) - |D_*|\cdot\mathrm{rad}(\mathbf{q}),\ D^*\cdot\mathrm{mid}(\mathbf{q}) + |D^*|\cdot\mathrm{rad}(\mathbf{q})\big]. \tag{26}$$

Пусть траектория системы (6) неотрицательна. Воспользуемся формулой (26) и выпишем формулу для представления интервальной системы (6)

$$\mathbf{x}(t+1) = \sum_{i=0}^{t}\big[A_{*i}(t)\mathrm{mid}\big(\mathbf{x}(t-i)\big) - |A_{*i}(t)|\mathrm{rad}\big(\mathbf{x}(t-i)\big),\ A_i^*(t)\mathrm{mid}\big(\mathbf{x}(t-i)\big) + |A_i^*(t)|\mathrm{rad}\big(\mathbf{x}(t-i)\big)\big]. \tag{27}$$

Вычисляя середину и радиус интервалов (27), перейдем к точечным рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} m(t+1) &= \sum_{i=0}^{t} \Big(\operatorname{mid}\big(\mathbf{A}_i(t)\big) m(t-i) + \frac{\big(|A_i^*(t)| - |A_{*i}(t)|\big) r(t-i)}{2} \Big),\ m(0) = \operatorname{mid}\big(\mathbf{x}(0)\big) = \operatorname{mid}\big(\mathbf{v}\big), \\ r(t+1) &= \sum_{i=0}^{t} \Big(\operatorname{rad}\big(\mathbf{A}_i(t)\big) m(t-i) + \frac{\big(|A_i^*(t)| + |A_{*i}(t)|\big) r(t-i)}{2} \Big),\ r(0) = \operatorname{rad}\big(\mathbf{x}(0)\big) = \operatorname{rad}\big(\mathbf{v}\big), \end{aligned} \tag{28}$$

относительно центров $m(t) = \operatorname{mid}\big(\mathbf{x}(t)\big)$ и радиусов $r(t) = \operatorname{rad}\big(\mathbf{x}(t)\big)$ интервальных векторов $\mathbf{x}(t)$.

Так как было предположено, что траектория системы (6) неотрицательна, то

$$\mathbf{x}(t) = \operatorname{mid}\big(\mathbf{x}(t)\big) + [-1,\ 1]\operatorname{rad}\big(\mathbf{x}(t)\big) \geqslant 0.$$

Следовательно, неравенства

$$m(t) - r(t) \geqslant 0,\ t = 0, 1, \ldots, \tag{29}$$

относительно дискретных функций $m(t)$ и $r(t)$, которые построены по соотношениям (28), необходимы для неотрицательности решения $\mathbf{x}(t)$ задачи Коши для системы (6).

Теорема 7.1. *Задача Коши для интервальной дискретной системы Вольтерра* (6) *имеет неотрицательное решение* $\mathbf{x}(t) \geqslant 0$ *тогда и только тогда, когда решения* $m(t)$, $r(t)$ *задачи Коши* (28) *удовлетворяют условиям* (29)*, при этом* $\mathbf{x}(t) = [m(t) - r(t),\ m(t) + r(t)]$.

Доказательство. Необходимость теоремы была доказана выше. Достаточность условий (29) для неотрицательности интервальных решений системы (6) докажем методом математической индукции.

Пусть функции $m(t)$, $r(t)$ $(t \geqslant 0)$ удовлетворяют соотношениям (28) и неравенству (29). При $t = 0$ из (29) следует, что $\mathbf{x}(0) = \big[m(0) - r(0),\ m(0) + r(0)\big] = \mathbf{v} \geqslant 0$, т. е. $m(0) \geqslant r(0) \geqslant 0$.

Пусть при некотором t $(t > 0)$ выполнены соотношения

$$\mathbf{x}(t) = \big[m(t) - r(t),\ m(t) + r(t)\big] \geqslant 0,\ m(t) \geqslant r(t) \geqslant 0.$$

Покажем справедливость неравенства $\mathbf{x}(t+1) \geqslant 0$ на следующем $t+1$ шаге. Из формул (28) следует, что $r(t+1) \geqslant 0$. Далее, по условию (29) $m(t+1) - r(t+1) \geqslant 0$, откуда имеем $m(t+1) \geqslant 0$. Тогда можем построить неотрицательный интервальный вектор

$$\mathbf{z}(t+1) = \big[m(t+1) - r(t+1),\ m(t+1) + r(t+1)\big] \geqslant 0. \tag{30}$$

Подставим в (30) выражения из (28). Получим

$$\mathbf{z}(t+1) = \Big[\sum_{i=0}^{t} (A_{*i}(t) m(t-i) - |A_{*i}(t)| r(t-i)),\ \sum_{i=0}^{t} (A_i^*(t) m(t-i) + |A_i^*(t)| r(t-i)) \Big]. \tag{31}$$

В формуле (31) заменим выражения для $m(t+1) = \operatorname{mid}\big(\mathbf{x}(t+1)\big)$, $r(t+1) = \operatorname{rad}\big(\mathbf{x}(t+1)\big)$ и получим

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t+1) = \sum_{i=0}^{t} \Big[& A_{*i}(t) \operatorname{mid}\big(\mathbf{x}(t-i)\big) - |A_{*i}(t)| \operatorname{rad}\big(\mathbf{x}(t-i)\big), \\ & A_i^*(t) \operatorname{mid}\big(\mathbf{x}(t-i)\big) + |A_i^*(t)| \operatorname{rad}\big(\mathbf{x}(t-i)\big) \Big]. \end{aligned} \tag{32}$$

Отметим, что соотношение (32) установлено в предположении $\mathbf{x}(t) \geqslant 0$. Сравнивая правые части (27) и (32), а также применяя условие (28), приходим к соотношению $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{z}(t+1) \geqslant 0$, т. е. $\mathbf{x}(t+1) \geqslant 0$.

Таким образом, показано методом математической индукции, что выполнение условий (29) обеспечивает неотрицательность решения системы (6). □

Найдем условия интервальной устойчивости и асимптотической устойчивости неотрицательных решений интервальной системы (6) при произвольных вещественных интервальных матрицах $\mathbf{A}_i(t)$. Для этого определим точечные матрицы $\Psi_i(t)$ для $i = 0, 1, \ldots, t$

$$\Psi_i(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{mid}\big(\mathbf{A}_i(t)\big) & \dfrac{|A_i^*(t)| - |A_{*i}(t)|}{2} \\ \operatorname{rad}\big(\mathbf{A}_i(t)\big) & \dfrac{|A_i^*(t)| + |A_{*i}(t)|}{2} \end{pmatrix}.$$

Тогда относительно векторов $z(t) = \begin{pmatrix} m(t) \\ r(t) \end{pmatrix}$ $(z(t) \geqslant 0)$ с учетом формул (28) и условия (29) имеем в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ точечную систему Вольтерра

$$z(t+1) = \sum_{i=0}^{t} \Psi_i(t) z(t-i),\ t = 0,1,\ldots, \quad z(0) = \begin{pmatrix} \operatorname{mid}\big(\mathbf{v}\big) \\ \operatorname{rad}\big(\mathbf{v}\big) \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Очевидно, что система (6) с неотрицательными решениями интервально асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда точечная система (33) асимптотически устойчива при выполнении условий (29). Поэтому справедлива

Теорема 7.2. *Система Вольтерра* (6) *с неотрицательными решениями интервально асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда система* (6) *асимптотически устойчива и совместна система неравенств* $m(t) - r(t) \geqslant 0,\ t = 0,1,\ldots.$ *Здесь функции* $m(t)$ *и* $r(t)$ *определены по формулам* (28).

Условия робастной и интервальной асимптотической устойчивости системы (6) приведены в разделах 2,4.

8. Устойчивость систем с симметричными начальными условиями

Пусть матрицы $\mathbf{A}_i(t)$ произвольные, а начальные условия $\mathbf{x}(0)$ симметричны относительно нуля, т. е. имеют место соотношения

$$\mathbf{x}(0) = \big[-\operatorname{rad}\big(\mathbf{x}(0)\big),\ \operatorname{rad}\big(\mathbf{x}(0)\big)\big], \quad \operatorname{mid}\big(\mathbf{x}(0)\big) = 0,\ \operatorname{rad}\big(\mathbf{x}(0)\big) = |\mathbf{x}(0)|.$$

Отметим, что произведение интервальной матрицы $\mathbf{D}$ на интервальный вектор $\mathbf{q}$, из которых по крайней мере один симметричный, дает симметричный интервальный результат. Действительно

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{q} = [D_*,\ D^*] \cdot [q_*,\ q^*] = \big[-|\mathbf{D}||\mathbf{q}|,\ |\mathbf{D}||\mathbf{q}|\big].$$

Поэтому решение $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}\big(t, \mathbf{x}(0)\big)$ системы (6) с симметричным начальным условием является также симметричным интервальным вектором.

Запишем формулу Коши для симметричного решения $\mathbf{x}(t)$ в терминах середины и радиуса интервала

$$\operatorname{mid}\big(\mathbf{x}(t)\big) \equiv 0,\ \operatorname{rad}\big(\mathbf{x}(t)\big) = S_0(t) \operatorname{rad}\big(\mathbf{x}(0)\big),\ t \geqslant 0,$$

где точечные матрицы $S_0(t)$ вычисляются по аналогии с формулами (3):

$$S_0(t) = \sum_{i=0}^{t-1} |\mathbf{A}_i(t-1)| S_0(t-i-1),\ t = 1,2,\ldots,\ S_0(0) = E.$$

С учетом теоремы 2.2, справедлива

Теорема 8.1. *Система* (6) *с симметричными начальными условиями интервально асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда* $\lim S_0(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

По аналогии сформулируем достаточные условия интервальной асимптотической устойчивости.

Теорема 8.2. *Пусть для матриц* $|\mathbf{A}_i(t)|$ $(i = 0,1,\ldots,t)$ *существуют такие неотрицательные постоянные матрицы* V_i, *что в каждый момент времени* $t = 0,1,\ldots$ *выполняются матричные неравенства* $|\mathbf{A}_i(t)| \leqslant V_i$, *матричный ряд* $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} V_i$ *сходится, сумма которого равна матрице* V. *Тогда система уравнений Вольтерра* (6) *с симметричными начальными условиями интервально асимптотически устойчива, если для матрицы* V *ее спектральный радиус* $\rho\big(V\big) < 1$.

Литература

1. *Джури Э. И.* Робастность дискретных систем (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1990. № 5. С. 3–28.

2. *Гусев Ю. М., Ефанов В. Н., Крымский В. Г., Рутковский В. Ю.* Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). I // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1991. № 1. С. 3–23.

3. *Гусев Ю. М., Ефанов В. Н., Крымский В. Г., Рутковский В. Ю.* Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). II // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1991. № 2. С. 3–30.

4. *Бобылев Н. А., Емельянов С. В., Коровин С. К.* О робастной устойчивости линейных дискретных систем // Автомат. и телемех. 1998. № 8. С. 138–145.

5. *Баландин А. А., Коган М. М.* Робастная устойчивость параметрически возмущенного маятника // Известия вузов «ПНД». 2005. Т. 13, № 3. С. 61–66.

6. *Колмановский В. Б., Родионов А. М.* Об устойчивости некоторых дискретных процессов Вольтерра // Автомат. и телемех. 1995. № 2. С. 3–13.

7. *Колмановский В. Б.* О применении второго метода Ляпунова к разностным уравнениям Вольтерра // Автомат. и телемех. 1995. № 11. С. 50–64.

8. *Колмановский В. Б.* Устойчивость дискретных уравнений Вольтерра // Докл. РАН. 1996. Т. 349, № 5. С. 610–614.

9. *Гайшун И. В.* Устойчивость дискретных уравнений Вольтерра // Докл. АН Беларуси. 1996. Т. 40, № 2. С. 5–8.

10. *Гайшун И. В.* Устойчивость дискретных процессов Вольтерра с убывающим последействием // Автомат. и телемех. 1997. № 6. С. 118–124.

11. *Гайшун И. В.* Дискретные уравнения с изменяющейся структурой и устойчивость их решений // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 12. С. 1607–1614.

12. *Гайшун И. В.* Стабилизируемость дискретных уравнений Вольтерра // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 2. С. 272–278.

13. *Гайшун И. В.* Системы с дискретным временем. Мн.: Институт математики НАН Беларуси. 2001. 400 с.

14. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А.* Устойчивость движения: метод сравнения. Киев: Наукова думка, 1991. 248 с.

15. *Матросов В. М.* Метод функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001. 384 с.

16. *Соколова С. П., Ширяева О. И.* Агрегированная система сравнения для интервальной системы управления // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 3(14). С. 91–102. https://doi.org/10.15622/sp.14

17. *Астровский А. И., Горячкин В. В., Дымков М. П.* Об управляемости и наблюдаемости дискретных нестационарных линейных систем Вольтерра // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2023. Т. 59, № 3. С. 213–223. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-3-213-223

18. *Дымков М. П., Астровский А. И., Горячкин В. В.* Об устойчивости и стабилизируемости линейных дискретных нестационарных уравнений Вольтерра // Научные труды Белорусского государственного экономического университета. Мн.: Колорград, 2024. Вып. 17. С. 80–93. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-3-213-223

19. *Астровский А. И., Горячкин В. В., Дымков М. П.* Стабилизация линейных дискретных нестационарных уравнений Вольтерра // Еругинские чтения – 2026: Материалы XXII Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям (Республика Беларусь, Гродно, 18–22 мая 2026 г.): в 2 ч. Ч. 1 / Институт математики Нац. акад. наук Беларуси, Белорус. гос. ун-т, Гродн. гос. ун-т им. Янки Купалы. – Гродно: ГрГУ, 2026. С. 102–104.

20. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

21. *Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Щербаков П. С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях. Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.

22. *Бобылев Н. А., Емельянов С. В., Коровин С. К.* Оценки возмущений устойчивых матриц // Автомат. и телемех. 1998. № 4. С. 15–24.

23. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 360 с.

24. *Калмыков С. А., Шокин Ю. А., Юлдашев З. Х.* Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986. 224 с.

25. *Шарый С. П.* Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: XYZ, 2019. 647 с. – URL: https://www.nsc/interval/Libraly/InterBookc/SharyBook.pdf.

26. *Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э.* Прикладной интервальный анализ. М.; Ижевск, 2005.

27. *Ащепков Л. Т.* Неотрицательная управляемость интервальной линейной системы // Известия Иркутского государственного университета. 2009. Т. 2, № 1. С. 37–51.

References

1. *Djuri E. I.* Robustness of discrete systems (review) // *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1990, no. 5, pp. 3–28 (in Russian).

2. *Gusev U. M., Efanov B. N., Krimskii B. G., Rutcovskii B. U.* Analysis and synthesis of linear interval dynamical systems (state problem). I. *Izvestiya AN USSR. Technical Cybernetics*, 1991, no. 1, pp. 3–23 (in Russian).

3. *Gusev U. M., Efanov B. N., Krimskii B. G., Rutcovskii B. U.* Analysis and synthesis of linear interval dynamical systems (state problem). II. *Izvestiya AN USSR. Technical Cybernetics*, 1991, no. 2, pp. 3–30 (in Russian).

4. Balandin A. A., Kogan M. M. Robust stability of a parametrically perturbed pendulum. *Izvestiya vuzov «PND»*, 2004, vol. 13, no. 3, pp. 61–66 (in Russian).

5. Bobylev N. A., Emeljanov C. V., Korovin C. K. About robust stability of linear discrete systems. *Avtomatica and telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1998, no. 8, pp. 138–145 (in Russian).

6. Kolmanovskii V. B., Rodionov A. M. On stability of some discrete Volterra processes. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1995, no. 2, pp. 3–13 (in Russian).

7. Kolmanovskii V. B. About application of the second Lyapunov method to difference Volterra equations. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1995, no. 11. pp. 50–64 (in Russian).

8. Kolmanovskii V. B. Stability of discrete Volterra equations. *Doklady Mathematics*, 1996, vol. 349, no. 5, pp. 610–614 (in Russian).

9. Gaishun I. V. On stability of discrete Volterra equations. *Doklady Akademii Nauk Belarusi = Doklady of the Academy of Sciences of Belarus*, 1996, vol. 40, no. 2, pp. 5–8 (in Russian).

10. Gaishun I. V. Stability of discrete Volterra processes with decreasing aftereffect. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1997, no. 6, pp. 118–124 (in Russian).

11. Gaishun I. V. Discrete equations with variable structure and stability their solutions. *Differential equations*, 1997, vol. 33, no. 12, pp. 1607–1614 (in Russian).

12. Gaishun I. V. Stabilization of discrete Volterra equations. *Differential equations*, 1998, vol. 34, no. 2, pp. 272–278 (in Russian).

13. Gaishun I. V. *Systems with Discrete Time*. Minsk, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2001. 400 p. (in Russian).

14. Lakshmikantham V., Lila S., Martynuk A. A. *Stability of motion: method of comparison*. Kiev, Naukova dumka, 1991. 248 p.

15. Matrosov V. M. *Method of Lyapunov functions: analysis of dynamical properties of nonlinear systems*. Moscow, Fizmatlit, 2001. 384 p.

16. Sokolova S. P., Shiryayeva O. I. Aggregeted composite systems to interval control systems. *Proceedings of the SPIIRAS*, 2010, issue 3(14), pp. 91–102. https://doi.org/10.15622/sp.14

17. Astrovskii A. I., Goryachkin V. V., Dymkov M. P. On the controllability, observability and optimization of discrete nonstationary linear Volterra systems // *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 59, no. 3, pp. 213–223 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-3-213-223

18. Dymkov M. P., Astrovskii A. I., Goryachkin V. V. On the stability and stabilizability of linear discrete nonstationary Volterra equations // *Scientific Papers of the Belarusian State University of Economics*. Minsk, Colorgrad, 2024, vol. 17, pp. 80–93 (in Russian).

19. Astrovskii A. I., Goryachkin V. V., Dymkov M. P. Stabilization of linear discrete nonstationary Volterra equations. *Yeruginsky Readings–2026: Proceedings of the XXII International Scientific Conference on Differential Equations (Republic of Belarus, Grodno, May 18-22, 2026)*: Institute of Mathematics of the National acad. Sciences of Belarus, Belarusian State University, Grodno State University Yanka Kupala. Grodno, GrSU, 2026, pp. 102–104 (in Russian).

20. Horn R. A., Jonhson C. R. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge, Cambridge University Press, 1988. 655 p.

21. Polyak B. N., Khlebnikov V. N., Shcherbakov S. N. *Control of linear systems under external influences. Technique of linear matrix inequalities*. Moscow, LENAND, 2014 (in Russian).

22. Bobylev N. A., Emeljanov C. V., Korovin C. K. Estimates of disturbances for stability matrix. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1998, no. 4, pp. 15–24 (in Russian).

23. Alefeld G., Herzberger J. *Introduction to interval computations*. Toronto, Academic Press, 1983. 360 p.

24. Kalmykov S. A., Shokin I. Y., Yuldashev Z. C. *Methods of interval analysis*. Novosibirsk, Nauka, 1986. 224 p. (in Russian).

25. Sharyi S. P. *Finite-dimensional interval analysis*. Novosibirsk, XYZ, 2019. 647 p. (in Russian). URL: https://www.nsc/interval/Libraly/InterBookc/SharyBook.pdf

26. Jolene L., Kiefer M., Didri O., Walter E. *Applied interval Analysis*. Moscow, Izhevsk, 2005 (in Russian).

27. Ashchepkov L. T. Non-negative controllability of the interval linear system. *Izvestiya Irkutsk State University*, 2009, vol. 2, no. 1, pp. 37–51 (in Russian).

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 75–80

УДК 517.928 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-75–80
EDN: YQXNVP

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, УПРАВЛЯЕМЫХ ГРУБЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ С ПОКАЗАТЕЛЯМИ ГЕЛЬДЕРА, БОЛЬШИМИ 1/3

М. М. Васьковский, М. Ю. Зорько

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: vaskovskii@bsu.by, matwejzorka2005@gmail.com

Поступила: 03.07.2026 **Исправлена:** 22.09.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: грубая траектория, гельдеровская функция, устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость, дробное броуновское движение

Аннотация. В статье доказаны критерии устойчивости и асимптотической устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений, управляемых грубыми траекториями с показателями Гельдера, большими 1/3. Получены достаточные условия устойчивости по вероятности и асимптотической устойчивости по вероятности линейных систем стохастических дифференциальных уравнений, управляемых грубыми траекториями с показателями Гельдера, большими 1/3.

STABILITY OF STATIONARY LINEAR STOCHASTIC DIFFERENTIAL SYSTEMS CONTROLLED BY ROUGH PATHS WITH HOLDER EXPONENTS GREATER THAN 1/3

M. M. Vaskouski, M. Y. Zorka

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: vaskovskii@bsu.by, matwejzorka2005@gmail.com

Received: 03.07.2026 **Revised:** 22.09.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: rough path, Holder function, Lyapunov stability, asymptotic stability, fractional Brownian motion

Abstract. There are proved stability and asymptotic stability criteria for linear rough path differential systems controlled by rough signals with Holder exponent greater than 1/3. We obtain sufficient conditions of stability in probability and asymptotic stability in probability of stochastic linear rough path differential equations controlled by rough signals with Holder exponent greater than 1/3.

1. Введение

В настоящей работе исследуем проблему устойчивости по Ляпунову решений стационарных линейных дифференциальных систем

$$dY_t = AY_t dX_t,\ t \geqslant 0,\ Y = (Y_t)_{t\geqslant 0},\ Y_t \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где A – постоянная $(n \times n)$-матрица, а X_t – скалярная α-гельдеровская функция (или случайный процесс, траектории которого являются α-гельдеровскими). Поскольку отображение X не является дифференцируемым, вообще говоря, уравнение (1) следует понимать в смысле соответствующего интегрального уравнения

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t AY_\tau dX_\tau. \tag{2}$$

Отметим, что в случае $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ интеграл в правой части (2) не может быть интерпретирован как интеграл Римана–Стилтьеса в виду недостаточной гладкости подынтегральной функции. В настоящей статье мы изучаем случай $\alpha > \frac{1}{3}$ и опираемся на разработанную на стыке XX и XXI веков теорию грубых траекторий [1; 2].

Несмотря на то что общая теория дифференциальных и стохастических дифференциальных уравнений, управляемых α-гельдеровскими грубыми траекториями при $\alpha > \frac{1}{3}$, в целом построена [3; 4], асимптотические свойства решений, в частности, вопросы устойчивости, мало изучены до настоящего времени. Это обстоятельство можно объяснить тем фактом, что для дифференциальных

уравнений, управляемых грубыми траекториями, известные методы исследования устойчивости не работают или дают слабые результаты. И даже в случае линейных систем с постоянными коэффициентами проблема остается открытой.

В статье [5] была исследована проблема устойчивости решений одномерных дифференциальных и стохастических дифференциальных уравнений, управляемых грубой траекторией с произвольным положительным показателем Гельдера. Это стало возможным благодаря тому, что была найдена явная формула для решений таких уравнений через решения соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений. В настоящей статье развивается этот подход. Для уравнения (2) находим явную формулу решений, что позволяет для детерминированной системы (2) получить критерии устойчивости и асимптотической устойчивости, аналогичные известным критериям для систем стационарных линейных дифференциальных систем, а для стохастической системы (2) получить явные достаточные условия устойчивости по вероятности и асимптотической устойчивости по вероятности.

Также отметим недавнюю работу [6], посвященную исследованию устойчивости нелинейных дифференциальных уравнений, управляемых грубыми траекториями. В данной работе на основе методов дискретизации и техники Досс–Суссмана разработан аналог метода функций Ляпунова исследования устойчивости. Тем не менее, построение функций Ляпунова для конкретных систем и получение явных результатов об устойчивости представляет нетривиальную задачу даже для линейных систем.

2. Устойчивость детерминированных систем

Пусть $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $3 > p > \frac{1}{\alpha}$. Рассмотрим скалярную α-гельдеровскую функцию X_t, определенную на промежутке $[0, +\infty)$. Следуя [5], построим геометрическую грубую траекторию $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X})$ над X, где $\mathbb{X}_{s,t} = \frac{(X_t - X_s)^2}{2}$. Согласно [7] существует последовательность непрерывных кусочно-линейных функций X_m, которые сходятся к X по метрике p-вариации. Определим последовательность сглаженных грубых траекторий $\mathbf{X}_m = (X_m, \mathbb{X}_m)$, где $\mathbb{X}_{m,s,t} = \frac{(X_m(t) - X_m(s))^2}{2}$.

Пусть A – постоянная $(n \times n)$-матрица над полем $\mathbb{R}$. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение, управляемое грубой траекторией $\mathbf{X}$:

$$dY_t = AY_t d\mathbf{X}_t, \quad t \in [0; +\infty). \tag{3}$$

Определение 2.1. Решением уравнения (3) будем называть такое отображение (Y_t, Y_t'), что при любом $T > 0$ сужение этого отображения на отрезок $[0, T]$ есть элемент пространства $\mathcal{D}_X^{2\alpha}([0,T], \mathbb{R}^n)$ [3], $Y_t' = AY_t$ и выполнено следующее интегральное соотношение:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t AY_s d\mathbf{X}_s.$$

Решение уравнения (3) с начальным условием $Y_0 = \xi$ называется единственным, если для двух решений (Y_t, Y_t'), (Z_t, Z_t') уравнения (3) с начальным условием $Y_0 = \xi$ выполняется $Y_t = Z_t$, $Y_t' = Z_t'$ для любых $t \geqslant 0$.

Предложение 2.2. *Для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ уравнение* (3) *с начальным условием $Y_0 = \xi$ имеет единственное решение (Y_t, Y_t') и*

$$Y_t = \exp(AX_{0,t})\xi$$

для любого $t \geqslant 0$, где $X_{0,t} = X_t - X_0$.

Доказательство. Существование и единственность решения (Y_t, Y_t') в пространстве $\mathcal{D}_X^{2\alpha}$ установлено в [3, глава 8]. Согласно [8, теорема 4.5] последовательность Y_m решений уравнений $dY_m(t) = AY_m(t)dX_m(t)$ с начальным условием $Y_m(0) = \xi$ сходится к некоторому $\widetilde{Y}$ по метрике p-вариации. Как показано в [3, глава 8], $(\widetilde{Y}_t, \widetilde{Y}_t') = (Y_t, Y_t')$.

Покажем, что $Y_t = \exp(AX_{0,t})\xi$ является решением уравнения (3).

Зафиксируем произвольное $T > 0$. Возьмем произвольное m и обозначим $X_m(t) = x_t$. Докажем, что выполняется следующее соотношение:

$$e^{Ax_t - Ax_0} = E + A\int_0^t e^{Ax_\tau - Ax_0} dx_\tau. \tag{4}$$

Имеем

$$A\int_0^t e^{Ax_\tau - Ax_0} dx_\tau = e^{-Ax_0}\int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+1}x_\tau^k}{k!} dx_\tau = e^{-Ax_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{k+1}}{k!}\int_0^t x_\tau^k dx_\tau =$$

$$= e^{-Ax_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{k+1}(x_t^{k+1} - x_0^{k+1})}{(k+1)!} = e^{-Ax_0}(e^{Ax_t} - e^{Ax_0}) = e^{Ax_t - Ax_0} - E.$$

Пусть $\mathbf{X}_m = (X_m, \mathbb{X}_m)$ – каноническая грубая траектория над X_m. Тогда для любого $y_0 \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$A\int_0^t e^{AX_m(\tau) - AX_m(0)} y_0 dX_m(\tau) = A\int_0^t e^{AX_m(\tau) - AX_m(0)} y_0 d\mathbf{X}_m(\tau). \tag{5}$$

Из соотношений (4) и (5) вытекает, что функция $Y_m(t) = e^{AX_m(t) - AX_m(0)} y_0$ является решением уравнения $dY_m(t) = AY_m(t)d\mathbf{X}_m(t)$ с начальным условием $Y_m(0) = y_0$, где $Y_m' = AY_m$, $Y_m'' = A^2 Y_m$. Так как (Y_m, Y_m') сходится по метрике p-вариации к решению (Y, Y') уравнения $dY(t) = AY(t)d\mathbf{X}(t)$ с начальным условием $Y(0) = y_0$, то

$$Y(t) = e^{AX_t - AX_0} y_0,$$

что и требовалось доказать. □

Определение 2.3. Нулевое решение уравнения (3) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, что для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условию $\|\xi\| < \delta_\varepsilon$, выполнено $\sup\limits_{t \geqslant 0} \|Y_t\| < \varepsilon$, где (Y_t, Y_t') – решение уравнения (3) с начальным условием $Y_0 = \xi$.

Определение 2.4. Нулевое решение уравнения (3) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и существует такое $\delta > 0$, что для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условию $\|\xi\| < \delta$, выполнено $\lim\limits_{t \to \infty} \|Y_t\| = 0$, где (Y_t, Y_t') – решение уравнения (3) с начальным условием $Y_0 = \xi$.

Теорема 2.5. *Предположим,* $\lim\limits_{t \to \infty} X_t = +\infty$. *Тогда нулевое решение уравнения* (3) *асимптотически устойчиво, если и только если действительные части всех собственных значений матрицы A отрицательные.*

Доказательство. Для доказательства рассмотрим отклонение решений возмущенной и невозмущенной задач Коши:

$$\rho(t, \xi) = \left\| \exp(AX_{0,t})\xi \right\|.$$

По свойству экспоненты, если $A = S^{-1}JS$ – жорданова нормальная форма матрицы A для некоторой невырожденной матрицы S, то $\exp(AX_{0,t}) = S^{-1}\exp(JX_{0,t})S$, поэтому для асиптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{t \to +\infty} \|\exp(J_\lambda X_{0,t})\| = 0$, где λ – произвольное собственное значение A, а J_λ – произвольная соответствующая ему клетка Жордана матрицы J. Обозначим через m размер J_λ. Тогда

$$\exp(J_\lambda X_{0,t}) = e^{\lambda X_t}\begin{pmatrix} 1 & X_{0,t} & \frac{1}{2!}X_{0,t}^2 & \dots & \frac{1}{m!}X_{0,t}^m \\ 0 & 1 & X_{0,t} & \dots & \frac{1}{(m-1)!}X_{0,t}^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = e^{\lambda X_{0,t}} P_{J_\lambda}(X_{0,t}).$$

Поскольку $X_{0,t} \to +\infty$ при $t \to +\infty$, то для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{t \to +\infty} \|e^{\lambda t} P_{J_\lambda}(t)\| = 0$$

для любого собственного значения λ матрицы A. Требуемое утверждение вытекает из известного критерия асимптотической устойчивости (случай $X_t = t$). □

Теорема 2.6. *Предположим,* $\lim\limits_{t\to\infty} X_t = +\infty$. *Тогда нулевое решение задачи* (1) *устойчиво по Ляпунову, если и только если действительные части всех собственных значений матрицы A неположительны и все жордановы клетки, соответствующие чисто мнимым собственным значениям A, имеют размер* 1.

Доказательство. Исходя из доказательства предыдущей теоремы, достаточно рассмотреть случай клетки Жордана J_λ, соответствующей собственному значению λ матрицы A, для которого $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Обозначим через m размер клетки Жордана J_λ.

Если $m > 1$, то $\|P_{J_\lambda}(t)\| \to +\infty$ при $t \to +\infty$, поэтому вне зависимости от $\|\xi\|$ норма отклонения будет стремиться к $+\infty$ при $t \to +\infty$ и в этом случае нулевое решение не будет устойчивым по Ляпунову. Если $m = 1$, то $\|P_{J_\lambda}(t)\|$ константна для любого $t \geqslant 0$, поэтому

$$\lim_{\|\xi\|\to 0} \sup_{t\geqslant 0} \|\exp(J_\lambda X_{0,t}) P_{J_\lambda}(X_{0,t})\xi\| = 0.$$ □

3. Исследование устойчивости линейных стохастических систем

Пусть $X_t, t \geqslant 0$, – одномерный случайный процесс, определенный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, имеющий п. н. α-гельдеровские траектории. Аналогично определим грубую траекторию $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X})$ над процессом X. Не нарушая общности, будем предполагать, что $X_0 = 0$ п. н.

Определение 3.1. Решением стохастического уравнения (3) будем называть случайный процесс (Y_t, Y_t') на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, такой что для почти всех $\omega \in \Omega$ элемент $(Y_t(\omega), Y_t'(\omega))$ является решением детерминированного уравнения $dY_t(\omega) = AY_t(\omega)d\mathbf{X}_t(\omega)$. Решение стохастического уравнения (3) называется единственным, если для любых решений (Y_t, Y_t'), (Z_t, Z_t') выполняется $P(Y_t = Z_t \ \forall t \geqslant 0) = 1$.

Из предложения 2.2 вытекает, что для любой случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ стохастическое уравнение (3) с начальным условием $Y_0 = \xi$ имеет единственное решение.

Определение 3.2. Нулевое решение стохастического уравнения (3) *устойчиво по вероятности*, если для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$, такое что для любой случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| \leqslant \delta$ п. н., выполняется неравенство

$$P\left(\sup_{t\geqslant 0} \|Y_t\| \geqslant \varepsilon_1\right) \leqslant \varepsilon_2.$$

Определение 3.3. Нулевое решение стохастического уравнения (3) *асимптотически устойчиво по вероятности*, если оно устойчиво по вероятности и существует $\Delta > 0$, такое что для любой случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| \leqslant \Delta$ п. н., имеет место сходимость по вероятности

$$Y_t \underset{t\to+\infty}{\xrightarrow{P}} 0.$$

Теорема 3.4. *Пусть* $X_t \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$ *п. н. и для любого* $T > 0$ *величина*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|\right)$$

конечна. Тогда для устойчивости (соответственно асимптотической устойчивости) по вероятности нулевого решения стохастического уравнения (3) *достаточно, чтобы нулевое решение системы* $dY_t = AY_t dt$ *являлось устойчивым (соответственно асимптотически устойчивым) при* $t \geqslant 0$.

Доказательство. Предположим, что нулевое решение системы $dY_t = AY_t dt$ устойчиво при $t \geqslant 0$. Не нарушая общности, будем считать, что матрица A совпадает со своей матрицей Жордана J, которая в свою очередь состоит из одной клетки J_λ. Возьмем произвольные $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Покажем, что существует $\delta = \delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$, такое что для любой случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| \leqslant \delta$ п. н., выполняется неравенство

$$P\left(\sup_{t\geqslant 0} \|Y_t\| \geqslant \varepsilon_1\right) \leqslant \varepsilon_2.$$

Поскольку $X_t \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$ п. н., то существует $\tau = \tau(\varepsilon_2)$, такое что

$$P(X_t \geqslant 0 \ \forall t \geqslant \tau) \geqslant 1 - \varepsilon_2/2.$$

Так как величина

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,\tau]} |X_t|\right)$$

конечна, то по неравенству Чебышева найдется постоянная $M = M(\tau, \varepsilon_2)$, такая что

$$P(|X_t| \leqslant M \ \forall t \in [0,\tau]) \geqslant 1 - \varepsilon_2/2.$$

Так как нулевое решение системы $dY_t = AY_t dt$ устойчиво по Ляпунову, то найдется постоянная C, такая что

$$\sup_{t\geqslant -M} \|e^{\lambda t} P_{J_\lambda}(t)\| \leqslant C.$$

Положим $\delta = \frac{\varepsilon_1}{2C}$, $\|\xi\| \leqslant \delta$ п. н. Имеем

$$P\left(\sup_{t\geqslant 0}\|Y_t\| \geqslant \varepsilon_1\right) = P\left(\sup_{t\geqslant 0}\|e^{\lambda X_{0,t}} P_{J_\lambda}(X_{0,t})\xi\| \geqslant \varepsilon_1\right) \leqslant$$

$$\leqslant P\left(\sup_{t\in[0,\tau]}\|e^{\lambda X_{0,t}} P_{J_\lambda}(X_{0,t})\xi\| \geqslant \varepsilon_1\right) + P\left(\sup_{t\geqslant \tau}\|e^{\lambda X_{0,t}} P_{J_\lambda}(X_{0,t})\xi\| \geqslant \varepsilon_1\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon_2}{2} + P\left(\sup_{t\in[-M,M]}\|e^{\lambda t} P_{J_\lambda}(t)\xi\| \geqslant \varepsilon_1\right) + \frac{\varepsilon_2}{2} + P\left(\sup_{t\geqslant 0}\|e^{\lambda t} P_{J_\lambda}(t)\xi\| \geqslant \varepsilon_1\right) = \varepsilon_2.$$

Допустим, что нулевое решение системы $dY_t = AY_t dt$ асимптотически устойчиво при $t \geqslant 0$. Аналогично будем считать, что матрица A совпадает со своей матрицей Жордана J, которая в свою очередь состоит из одной клетки J_λ. Возьмем произвольные ε_1, $\varepsilon_2 > 0$. Требуется доказать, что существует $\Delta > 0$ и $\tau_1 = \tau_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$, такие что любой случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| \leqslant \Delta$ п. н., выполняется неравенство

$$P(\|Y_t\| \leqslant \varepsilon_1 \ \forall t \geqslant \tau_1) \geqslant 1 - \varepsilon_2.$$

Так как

$$\lim_{t\to+\infty} \|e^{\lambda t} P_{J_\lambda}(t)\| = 0,$$

то существует τ_2, что

$$\sup_{t\geqslant \tau_2} \|e^{\lambda t} P_{J_\lambda}(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Поскольку $X_t \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$ п. н., то существует $\tau_1 > 0$, такое что

$$P(X_t \geqslant \tau_2 \ \forall t \geqslant \tau_1) \geqslant 1 - \varepsilon_2/2.$$

Возьмем $\Delta = 1$. Имеем

$$P\left(\sup_{t\geqslant\tau_1}\|Y_t\| \geqslant \varepsilon_1\right) = P\left(\sup_{t\geqslant\tau_1}\|e^{\lambda X_{0,t}} P_{J_\lambda}(X_{0,t})\xi\| \geqslant \varepsilon_1\right) \leqslant \frac{\varepsilon_2}{2} + P\left(\sup_{t\geqslant\tau_2}\|e^{\lambda t} P_{J_\lambda}(t)\xi\| \geqslant \varepsilon_1\right) = \frac{\varepsilon_2}{2},$$

что и требовалось доказать.

□

Пример 3.5. Пусть B_t^H – одномерное дробное броуновское движение с показателем Харста $H \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. Рассмотрим систему линейных стохастических уравнений

$$\begin{cases} dy_1 = y_2 dt + y_2 dB_t^H, \\ dy_2 = -y_1 dt - y_1 dB_t^H. \end{cases} \tag{6}$$

Положим $X_t = t + B_t^H$, тогда

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как показано в [5] для любого $T > 0$ величина

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|X_t|\right),$$

конечна, а из [9] следует, что $X_t \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$ п. н. Согласно [4, с. 55] для любого $\beta \in (0,H)$ траектории процесса X_t п. н. непрерывны по Гельдеру с показателем β. Следовательно, по теореме 3.4 нулевое решение системы (6) устойчиво по вероятности.

Благодарность. Авторы благодарят рецензентов за замечания, позволившие существенно улучшить содержание статьи.

Литература

1. *Lyons T.* Differential equations driven by rough signals // Rev. Mat. Iberoamericana. 1998. Vol. 14, N 2. P. 215–310.

2. *Gubinelli M.* Controlling rough paths // J. of Funct. Anal. 2004. Vol. 216, N 1. P. 86–140.

3. *Friz P., Hairer M.* A Course on Rough Paths with an Introduction to Regularity Structures. Cham: Springer International Publishing AG, 2020.

4. *Леваков А. А., Васьковский М. М.* Стохастические дифференциальные уравнения и включения. Минск: БГУ, 2019.

5. *Васьковский М. М.* Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гельдера // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 11. С. 1443–1449.

6. *Duc L. H., Hong P. T., Cong N. D.* Stability criteria for rough systems // SIAM Journal on Control and Optimization. 2026. Vol. 64, N 2. P. 645–672.

7. *Lyons T., Victoir N.* An extension theorem to rough paths // Annales de l'Institut Henri Poincare – Analyse Non Lineaire. 2007. Vol. 24. P. 835–847.

8. *Lyons T., Caruana M., Levy T.* Differential Equations Driven by Rough Paths: Lecture Notes in Mathematics (Book 1908). Berlin; Heidelberg: Springer, 2007.

9. *Monrad D., Rootzen H.* Small values of Gaussian processes and functional laws of the iterated logarithm // Probab. Theory Relat. Fields. 1995. Vol. 101. P. 173–192.

References

1. Lyons T. Differential equations driven by rough signals. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1998, vol. 14, no. 2, pp. 215–310.

2. Gubinelli M. Controlling rough paths. *J. of Funct. Anal.*, 2004, vol. 216, no. 1, pp. 86–140.

3. Friz P., Hairer M. *A Course on Rough Paths with an Introduction to Regularity Structures*. Cham, Springer International Publishing AG, 2020.

4. Levakov A. A., Vas'kovskii M. M. *Stochastic Differential Equations and Inclusions*. Minsk, BSU, 2019 (in Russian).

5. Vas'kovskii M. M. Stability of solutions of stochastic differential equations weakly controlled by rough paths with arbitrary positive holder exponent. *Differential Equations*, 2021, vol. 57, no. 11, pp. 1419–1425.

6. Duc L. H., Hong P. T., Cong N. D. Stability criteria for rough systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2026, vol. 64, no. 2, pp. 645–672.

7. Lyons T., Victoir N. An extension theorem to rough paths. *Annales de l'Institut Henri Poincare – Analyse Non Lineaire*, 2007, vol. 24, pp. 835–847.

8. Lyons T., Caruana M., Levy T. *Differential Equations Driven by Rough Paths: Lecture Notes in Mathematics (Book 1908)*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2007.

9. Monrad D., Rootzen H. Small values of Gaussian processes and functional laws of the iterated logarithm. *Probab. Theory Relat. Fields*, 1995, vol. 101, pp. 173–192.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 81–97

УДК 512.542 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-81–97
EDN: ABKLPV

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЗАДАЧЕ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ОТНОШЕНИЕМ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

В. В. Гороховик

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
e-mail: gorokh@im.bas-net.by

Поступила: 27.08.2026 **Исправлена:** 16.09.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: векторная оптимизация, отношение предпочтения, неопределенность, скаляризация, H-дифференцируемость по направлениям, вторая производная по Фреше–Тэйлору, условия оптимальности первого и второго порядков

Аннотация. В данной статье рассматривается задача векторной оптимизации с неопределенным отношением предпочтения. Неопределенность обусловлена тем, что известно лишь семейство $\mathcal{P}$ отношений предпочтения, одно из которых реализуется на самом деле, причем конкретная реализация неизвестна. В качестве оптимального решения данной задачи в работе предлагается рассматривать такие допустимые решения, которые доставляют целевому отображению гарантированный (слабый, сильный) максимум относительно семейства $\mathcal{P}$, т. е. такие, которые доставляют отображению (слабый, сильный) максимум при любой конкретной реализации отношения предпочтения из $\mathcal{P}$. При некоторых предположениях относительно семейства $\mathcal{P}$ доказана теорема о скаляризации данной задачи векторной оптимизации при помощи разностно сублинейных функций. Эта теорема используется затем при выводе необходимых, а также достаточных условий первого и второго порядка гарантированной $\mathcal{P}$-максимальности допустимых решений. При этом необходимые условия получены для решений, доставляющих гарантированный слабый $\mathcal{P}$-максимум, а достаточные условия для решений, доставляющих гарантированный сильный $\mathcal{P}$-максимум.

FIRST- AND SECOND-ORDER OPTIMALITY CONDITIONS IN A VECTOR OPTIMIZATION PROBLEM WITH AN UNCERTAIN PREFERENCE RELATION

V. V. Gorokhovik

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
e-mail: gorokh@im.bas-net.by

Received: 27.08.2026 **Revised:** 16.09.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: vector optimization, preference relation, uncertainty, scalarization, Hadamard directionally differentiability, second Frechet–Taylor derivative, first- and second-order optimality conditions

Abstract. In this paper we consider a vector optimization problem with an uncertain preference relation. The uncertainty arises from the fact that only a family $\mathcal{P}$ of preference relations is known, one of which is actually realized, while the concrete realization is unknown. As an optimal solution of this problem, we propose to consider such admissible solutions that provide the objective mapping with the guaranteed (weak, strong) maximum relative to the family $\mathcal{P}$, i. e., those that provide the objective mapping with (weak, strong) maximum for any concrete realization of the preference relation from $\mathcal{P}$. Under some assumptions regarding the family $\mathcal{P}$, a theorem on the scalarization of this vector optimization problem by means of difference sublinear functions is proved. Then this theorem is used for deriving first- and second-order necessary and sufficient conditions for admissible solutions that provide the objective mapping with the guaranteed $\mathcal{P}$-maximum. The necessary conditions are established for solutions that provide the guaranteed weak $\mathcal{P}$-maximum, while the sufficient conditions are established for solutions that provide the guaranteed strong $\mathcal{P}$-maximum.

1. Постановка задачи

Прежде всего напомним определения основных понятий, относящихся к стандартной задаче векторной оптимизации, под которой понимается (см., напр., [1–3]) задача максимизации (или минимизации) отображения, принимающего значения в упорядоченном векторном пространстве.

Пусть X – некоторое множество, Y – вещественное векторное пространство, $\prec$ – отношение предпочтения на Y. Под отношением предпочтения понимается отношение строгого частичного порядка (асимметриченое и транзитивное бинарное отношение) [4; 5], определенное на Y и согласованное с алгебраическими операциями, заданными на Y.

Напомним, что бинарное отношение $\prec$ (не обязательно отношение предпочтения), определенное на векторном пространстве Y, является согласованным с алгебраическими операциями, заданными на Y, если для любых $y_1, y_2, y \in Y$, и любого положительного числа $\alpha > 0$ выполняются следующие импликации:

1) $y_1 \prec y_2 \Longrightarrow \alpha y_1 \prec \alpha y_2$;

2) $y_1 \prec y_2 \Longrightarrow y_1 + y \prec y_2 + y$.

Если бинарное отношение $\prec$ является отношением предпочтения, то условия 1) и 2) эквивалентны тому, что множество $P_\prec := \{y \in Y \,|\, 0 \prec y\}$ (называемое *конусом положительных элементов* или, просто, *положительным конусом*) есть асимметричный ($P_\prec \bigcap (-P_\prec) = \varnothing$) выпуклый конус в Y, при этом

$$y_1 \prec y_2 \Longleftrightarrow y_2 - y_1 \in P_\prec. \tag{1}$$

Векторное пространство Y с заданным на нем согласованным отношением предпочтения $\prec$ называется упорядоченным векторным пространством, для его обозначения обычно используется символ $(Y, \prec)$.

Предположим, что заданы также отображение $F : X \to (Y, \prec)$, определенное на некотором множестве X и принимающее значения в упорядоченном векторном пространстве $(Y, \prec)$, и подмножество $Q \subset X$.

Говорят [3], что точка $x^0 \in Q$ является *точкой $\prec$-максимума* отображения $F : X \to (Y, \prec)$ на множестве Q, если соотношение $F(x^0) \prec F(x)$ не выполняется ни при каких $x \in Q$ или, эквивалентно, если $F(x^0) \not\prec F(x)$ при всех $x \in Q$.

Символ $\not\prec$ обозначает отрицание отношения $\prec$. Очевидно, что $y_1 \not\prec y_2 \Longleftrightarrow y_2 - y_1 \notin P_\prec$.

Аналогично, точка $x^0 \in Q$ называется [3] *точкой $\prec$-минимума* отображения $F : X \to (Y, \prec)$ на множестве Q, если соотношение $F(x) \prec F(x^0)$ не выполняется ни при каких $x \in Q$ или, эквивалентно, если при всех $x \in Q$ выполняется соотношение $F(x) \not\prec F(x^0)$.

Задачу нахождения точек $\prec$-максимума, а также задачу нахождения точек $\prec$-минимума отображения $F : X \to (Y, \prec)$ на некотором множестве $Q \subset X$ принято называть *задачами векторной оптимизации*. Подобно скалярным задачам оптимизации множество Q называется при этом множеством допустимых точек, а отображение $F : X \to (Y, \prec)$ – целевым отображением.

Из тождества (1) следует, что точка $x^0 \in Q$ является точкой $\prec$-максимума отображения $F : X \to (Y, \prec)$ на множестве Q тогда и только тогда, когда

$$(F(Q) - F(x^0)) \cap P_\prec = \varnothing.$$

Аналогично, точка $x^0 \in Q$ является точкой $\prec$-минимума отображения $F : X \to (Y, \prec)$ на множестве Q тогда и только тогда, когда

$$(F(Q) - F(x^0)) \cap (-P_\prec) = \varnothing.$$

Понятно, что с теоретической точки зрения достаточно изучить одну из задач, например, задачу нахождения точек $\prec$-максимума, поэтому договоримся, что всюду ниже под задачей векторной оптимизации мы будем понимать задачу нахождения точек $\prec$-максимума некоторого векторного отображения $F : X \to (Y, \prec)$.

При исследовании точек $\prec$-максимума отображений чаще всего используются локальные аппроксимации отображений и множеств, поэтому естественно при проведении таких исследований перейти к локальному понятию $\prec$-максимума.

Если X – топологическое пространство, то говорят, что точка $x^0 \in Q$ доставляет отображению $F : X \to (Y, \prec)$ на множестве Q *локальный $\prec$-максимум,* если для некоторой окрестности $\mathcal{N}(x^0)$ точки x^0 соотношение $F(x^0) \not\prec F(x)$ выполняется при всех $x \in Q \cap \mathcal{N}(x^0)$ или, эквивалентно, если

$$(F(Q \cap \mathcal{N}(x^0)) - F(x^0)) \cap P_\prec = \varnothing.$$

Всюду далее будем предполагать, что Y является нормированным пространством и определенное на нем отношение предпочтения $\prec$ таково, что $\mathrm{int}P_{\prec} \neq \varnothing$. При таких предположениях введем на пространстве Y производные отношения $\prec\prec$ и $\preceq$, определив их следующим образом:

$$y_1 \prec\prec y_2 \iff y_2 - y_1 \in \mathrm{int}P_{\prec}$$

и

$$y_1 \preceq y_2 \iff y_2 - y_1 \in \mathrm{cl}P_{\prec}.$$

Здесь $\mathrm{int}P_{\prec}$ и $\mathrm{cl}P_{\prec}$ – внутренность и замыкание конуса $P_{\prec}$ соответственно.

Заметим, что отношение $\prec\prec$ также является отношением строгого частичного порядка на Y, тогда как отношение $\preceq$ рефлексивно и транзитивно и, следовательно, является отношением предпорядка. Символы $\not\prec\not\prec$ и $\not\preceq$ обозначают, соответственно, отрицания отношений $\prec\prec$ и $\preceq$.

Говорят, что точка $x^0 \in Q$ является *точкой локального слабого $\prec$-максимума* отображения $F : X \to (Y, \prec)$ на множестве Q, если для некоторой окрестности $\mathcal{N}(x^0)$ точки x^0 соотношение $F(x^0) \not\prec\not\prec F(x)$ выполняется при всех $x \in Q \cap \mathcal{N}(x^0)$ или, эквивалентно, если

$$(F(Q \cap \mathcal{N}(x^0)) - F(x^0)) \cap (\mathrm{int}P_{\prec}) = \varnothing.$$

Точка $x^0 \in Q$ называется *точкой локального сильного $\prec$–максимума* отображения $F : X \to$ $\to (Y, \prec)$ на множестве Q, если найдется окрестность $\mathcal{N}(x^0)$ точки x^0 такая, что $F(x^0) \not\preceq F(x)$ для всех $x \in Q \cap \mathcal{N}(x^0)$, $F(x) \neq F(x^0)$ или, эквивалентно, если

$$F(x) - F(x^0) \notin \mathrm{cl}P_{\prec} \text{ для всех } x \in Q \cap \mathcal{N}(x^0),\ F(x) \neq F(x^0).$$

Так как $\mathrm{int}P_{\prec} \subset P_{\prec} \subset \mathrm{cl}P_{\prec} \setminus \{0\}$, то любая точка локального сильного $\prec$-максимума является точкой локального $\prec$-максимума, а любая точка локального $\prec$-максимума является точкой локального слабого $\prec$-максимума. Обратные импликации, вообще говоря, неверны. Однако если $P_{\prec} = \mathrm{int}P_{\prec}$, то, естественно, что понятие локального $\prec$-максимума совпадает с понятием локального слабого $\prec$-максимума. Если же $P_{\prec} = \mathrm{cl}P_{\prec} \setminus \{0\}$, то совпадают понятия локального $\prec$-максимума и локального сильного $\prec$-максимума. В частном случае, когда Y есть множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ с естественным отношением упорядочения $<$, все три понятия совпадают и сводятся к понятию локального максимума вещественнозначной функции на множестве. Это сразу же следует из того, что конус положительных элементов $P_{<}$ упорядоченного пространства $(\mathbb{R}, <)$ есть множество положительных вещественных чисел, для которого, как очевидно, справедливы равенства $\mathrm{int}P_{<} = P_{<} = \mathrm{cl}P_{<} \setminus \{0\}$.

В настоящей работе задача векторной оптимизации рассматривается в предположении, что отношение предпочтения задано неопределенно. При этом неопределенность обусловлена тем, что лицу, осуществляющему выбор решения, известно лишь семейство $\mathcal{P}$ отношений предпочтения, любое из которых может реализоваться в процессе выбора решения, в то же время конкретная реализация отношения предпочтения лицу принимающему решение неизвестна.

При исследовании данной задачи, прежде всего, надо определить понятие оптимальности допустимого решения. В том случае, когда семейство отношений предпочтений $\mathcal{P}$ является одноэлементным, т. е. в случае, когда отношение предпочтения задано точно, в качестве оптимальных решений, как мы видели выше, рассматриваются такие элементы множества допустимых решений, которые доставляют $\prec$-максимум (или $\prec$-минимум) целевому отображению относительно заданного отношения предпочтения $\prec$. В общем случае, когда семейство $\mathcal{P}$ состоит не из одного, а из целого множества отношений предпочтения, при отсутствии какой-либо другой дополнительной информации о реализации отношения предпочтения, бесспорным является лишь такой подход, который гарантирует оптимальность решения при любой реализации отношения предпочтения. Такой подход приводит к следующему понятию.

Пусть $\mathcal{P}$ – семейство отношений предпочтения, определенных на векторном пространстве Y и согласованных с алгебраическими операциями, заданными на Y.

Определение 1.1. Будем говорить, что допустимая точка $x^0 \in Q$ является *точкой гарантированного максимума* для отображения $F : X \to Y$ на множестве Q относительно семейства

согласованных отношений предпочтения $\mathcal{P}$, определенных на Y, или, более просто, *точкой гарантированного $\mathcal{P}$-максимума* для отображения $F : X \to Y$ на множестве Q, если соотношение $F(x^0) \prec F(x)$ не выполняется ни при каких $x \in Q$ и $\prec \in \mathcal{P}$ или, эквивалентно, если

$$(F(Q) - F(x^0)) \cap (\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\}) = \varnothing.$$

Определим далее понятия гарантированного слабого и гарантированного сильного максимумов, при этом будем предполагать, что семейство отношений предпочтения $\mathcal{P}$ удовлетворяет следующим условиям (i) $\operatorname{int} P_\prec \neq \varnothing$ для любого $\prec \in \mathcal{P}$ и (ii) $\operatorname{cl}(\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\}) \neq Y$.

Как объединение семейства конусов множество $\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\}$ является конусом, причем при выполнении условий (i) и (ii) конус $\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\}$ является нетривиальным, т. е. $\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\} \neq \{0\}$ и $\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\} \neq Y$. Кроме того, так как $\cup\{\operatorname{int} P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\} \subset \operatorname{int}(\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\})$, то $\operatorname{int}(\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\}) \neq \varnothing$.

Определение 1.2. Будем говорить, что допустимая точка $x^0 \in Q$ является

(а) *точкой гарантированного слабого максимума* для отображения $F : X \to Y$ на множестве Q относительно (удовлетворяющего условиям (i) и (ii)) семейства согласованных отношений предпочтения $\mathcal{P}$, определенных на Y, или, более просто, *точкой гарантированного слабого $\mathcal{P}$-максимума* для отображения $F : X \to Y$ на множестве Q, если

$$(F(Q) - F(x^0)) \cap (\operatorname{int}(\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\})) = \varnothing; \tag{2}$$

(б) *точкой гарантированного сильного максимума* для отображения $F : X \to Y$ на множестве Q относительно (удовлетворяющего условиям (i) и (ii)) семейства согласованных отношений предпочтения $\mathcal{P}$, определенных на Y, или, более просто, *точкой гарантированного сильного $\mathcal{P}$-максимума* для отображения $F : X \to Y$ на множестве Q, если

$$(F(x) - F(x^0)) \notin \operatorname{cl}(\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\}) \text{ для всех } x \in Q,\ F(x) \neq F(x^0). \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что в случае, когда семейство $\mathcal{P}$ состоит из единственного отношения предпочтения $\prec$, введенные выше понятия гарантированного слабого и сильного $\mathcal{P}$-максимумов сводятся к общепринятым определениям слабого и сильного $\prec$-максимума. Идейно данные определения восходят к работам [6; 7], посвященным исследованию задач оптимизации и оптимального управления в условиях неопределенности.

Так как $\operatorname{int}(\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\}) \subset \cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\} \subset \operatorname{cl}(\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\}) \setminus \{0\}$, то любая точка гарантированного сильного $\mathcal{P}$-максимума является точкой гарантированного $\mathcal{P}$-максимума, а любая точка гарантированного $\mathcal{P}$-минимума является точкой гарантированного слабого $\mathcal{P}$-минимума. Обратные импликации, вообще говоря, неверны.

Основная цель настоящей статьи – получить необходимые, а также достаточные условия первого и второго порядков для решений, доставляющих локальный гарантированный $\mathcal{P}$-максимум целевому отображению $F : X \to (y, \prec)$ на множестве допустимых решений $Q \subset X$. Вывод этих условий будет осуществлен по методике, впервые предложенной автором в [1] и развитой в последующих работах, см., напр., [8–12] и др. В соответствии с этой методикой исследование проводится в два этапа. На первом этапе, используя подходящую вещественнозначную функцию, аналитически характеризующую объединение конусов положительных элементов отношений предпочтения, принадлежащих $\mathcal{P}$, устанавливается, что допустимое решение является гарантированно $\mathcal{P}$-максимальным в исходной задаче векторной оптимизации тогда и только тогда, когда оно является решением некоторого скалярного вариационного неравенства. Этот этап называют обычно «скаляризацией задачи векторной оптимизации». В статье скаляризации задачи векторной оптимизации с неопределенным отношением предпочтения посвящен § 2, при этом показано, что для скаляризации рассматриваемой задачи могут быть использованы разностно сублинейные функции. На втором этапе из полученного в результате скаляризации скалярного вариационного неравенства, используя средства дифференциального анализа, основанные на локальных аппроксимациях целевого отображения F и множества допустимых решений Q, выводятся необходимые и/или достаточные условия $\mathcal{P}$-максимальности. Условиям $\mathcal{P}$-максимальности первого порядка посвящен § 4, а условиям $\mathcal{P}$-максимальности второго порядка § 5. Для вывода этих условий использованы локальные аппроксимации отображения F производными первого и второго порядков, а также локальные аппроксимации множества Q

касательным конусом первого порядка и касательным множеством второго порядков, определения которых и некоторые их свойства представлены в § 3.

Отметим что условиям оптимальности в задачах векторной оптимизации посвящены многочисленные публикации, см. [1; 3; 8–19] и ссылки в них.

2. Скаляризация задачи векторной оптимизации с неопределенным отношением предпочтения

Начиная с этого раздела и далее будем предполагать, что пространство Y значений целевого отображения $F : X \to (Y, \prec)$ является конечномерным нормированным пространством.

Предлагаемый здесь метод скаляризации задач векторной оптимизации с неопределенным отношением предпочтения основан на аналитическом представлении замкнутых конусов при помощи разностно сублинейных функций. Впервые возможность такого представления была доказана А. Шапиро в работе [20]. Начало активному использованию разностно сублинейных функций в теории оптимизации и негладком анализе было положено в начале 1980-х годов В. Ф. Демьяновым и А. М. Рубиновым [21] (см. также [1; 22; 23]).

Приведем необходимые в дальнейшем сведения о разностно сублинейных функциях и отображениях.

Прежде всего напомним, что функция $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ называется *сублинейной*, если она является положительно однородной $(\varphi(\lambda y) = \lambda\varphi(y), y \in Y, \lambda > 0)$ и субаддитивной $(\varphi(y_1 + y_2) \leqslant \varphi(y_1) + \varphi(y_2), y_1, y_2 \in Y)$.

Каждой сублинейной функции $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ однозначно соответствует в пространстве линейных непрерывных функционалов Y^* выпуклое компактное подмножество

$$\partial\varphi = \{y^* \in Y^* \,|\, y^*(y) \leqslant \varphi(y) \,\forall y \in Y\},$$

называемое *субдифференциалом* функции φ, при этом

$$\varphi(y) = \max_{y^* \in \partial\varphi} y^*(y), y \in Y. \tag{4}$$

Функция $p : Y \to \mathbb{R}$ называется *разностно сублинейной* [1; 23], если она может быть представлена в виде разности двух сублинейных функций, т. е. если $p(y) = \underline{p}(y) - \overline{p}(y), y \in Y$, где $\underline{p}$ и $\overline{p}$ – сублинейные функции.

Совокупность всех разностно сублинейных функций, определенных на пространстве Y, будем обозначать символом $P(Y)$. Нетрудно убедиться, что относительно стандартных алгебраических операций поточечного сложения и умножения на число $P(Y)$ является векторным пространством, при этом совокупность всех сублинейных функций, обозначаемая ниже $\hat{P}(Y)$, образует в $P(Y)$ выпуклый конус, линейная оболочка которого совпадает с $P(Y)$.

Пусть $p : Y \to \mathbb{R}$ – произвольная разностно сублинейная функция и пусть $p(y) = \underline{p}(y) - \overline{p}(y), y \in Y$, – произвольное ее представление в виде разности двух сублинейных функций $\underline{p}$ и $\overline{p}$ из $\hat{P}(Y)$. Используя это представление, поставим в соответствие функции p упорядоченную пару $Dp = (\underline{\partial}p, \overline{\partial}p)$ выпуклых компактных подмножеств из Y^*, где $\underline{\partial}p$ и $\overline{\partial}p$ – субдифференциалы сублинейных функций $\underline{p}$ и $\overline{p}$ соответственно. Упорядоченная пара $Dp = (\underline{\partial}p, \overline{\partial}p)$ называется при этом [1; 23] *квазидифференциалом* функции p. В силу (4) разностно сублинейная функция p и ее квазидифференциал $Dp = (\underline{\partial}p, \overline{\partial}p)$ связаны соотношением

$$p(y) = \max_{y^* \in \underline{\partial}p} y^*(y) - \max_{y^* \in \overline{\partial}p} y^*(y), y \in Y.$$

Обратим внимание на то, что представление функции p в виде разности $p = \underline{p} - \overline{p}$ не является однозначным, поэтому и соответствие $p \to Dp = (\underline{\partial}p, \overline{\partial}p)$ также является неоднозначным.

Предложение 2.1 [23]. *Пусть $p : Y \to \mathbb{R}$ – разностно сублинейная функция и пусть $Dp = (\underline{\partial}p, \overline{\partial}p)$ – произвольный квазидифференциал функции p. Тогда*

а) $p(y) \geqslant 0$ для всех $y \in Y$ в том и только том случае, когда

$$\overline{\partial}p \subset \underline{\partial}p;$$

б) $p(y) > 0$ *для всех* $y \in Y, y \neq 0$, *в том и только том случае, когда существует положительное число* $\delta > 0$ *такое, что*

$$\overline{\partial} p + \delta B_{Y^*} \subset \underline{\partial} p.$$

Здесь B_{Y^*} *– единичный шар с центром в нулевой точке в пространстве* Y^*.

Разностно сублинейные отображения могут быть определены следующим образом (см. [1, § 16]).

Пусть Y и Z – конечномерные нормированные пространства и пусть Z^* – пространство линейных функций, определенных на Z.

Отображение $G : Y \to Z$, определенное на Y и принимающее значения в Z, называется *разностно сублинейным*, если при любом $z^* \in Z^*$ композиция $z^* \circ G : Y \ni y \to z^*(G(y)) \in \mathbb{R}$ является вещественнозначной разностно сублинейной функцией, определенной на Y.

Предложение 2.2 [1, Предложение 16.1]. *Пусть* X, Y *и* Z *– конечномерные нормированные пространства. Если отображения* $T : X \to Y$ *и* $G : Y \to Z$ *являются разностно сублинейными, то их композиция* $G \circ T : X \to Z$ *также является разностно сублинейным отображением.*

В частности, композиция $p \circ T : X \to \mathbb{R}$, где $T : X \to Y$ – разностно сублинейное отображение, а $p : Y \to \mathbb{R}$ – разностно сублинейная функция, является разностно сублинейной функцией.

Как уже отмечалось выше, замкнутый конус в конечномерном нормированном пространстве может быть аналитически представлен при помощи разностно сублинейной функции. Справедливо следующее утверждение

Предложение 2.3 [20]. *Для любого нетривиального* $(\mathrm{cl}K \neq \{0\}, \mathrm{cl}K \neq Y)$ *конуса* $K \subset Y$ *существует разностно сублинейная функция* $p_K : Y \to \mathbb{R}$ *такая, что*

$$\mathrm{cl}K = \{y \in Y \,|\, p_K(y) \leqslant 0\}. \tag{5}$$

Более того, если конус K *удовлетворяет условию* $\mathrm{cl}(\mathrm{int}K) = \mathrm{cl}K$, *то разностно сублинейная функция* $p_K : Y \to \mathbb{R}$ *может быть выбрана так, что наряду с равенством* (5) *будет выполняться также равенство*

$$\mathrm{int}K = \{y \in Y \,|\, p_K(y) < 0\}. \tag{6}$$

Доказательство см. в [20].

Замечание 2.4. Как было показано в [1], если K – выпуклый телесный ($\mathrm{int}K \neq \varnothing$) конус, то в качестве функции p_K, удовлетворяющей равенствам (5) и (6) может быть выбрана сублинейная функция $p_K(y) := \inf\limits_{z \in K} \|y - z\| - \inf\limits_{z \in Y \setminus K} \|y - z\|$. (Для произвольного множества $K \subset Y$ данная функция была введена Хириарт–Уррути [24; 25] и названа в [1, § 15] симметризованным расстоянием до множества K.)

Вернемся к задаче векторной оптимизации с неопределенным отношением предпочтения, при этом будем предполагать далее, что семейство отношений предпочтения $\mathcal{P}$ наряду с условиями (i) $\mathrm{int}P_\prec \neq \varnothing$ для любого $\prec \in \mathcal{P}$ и (ii) $\mathrm{cl}(\cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\}) \neq Y$ удовлетворяет также условию (iii) $\mathrm{cl}(\cup\{\mathrm{int}P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\}) = \mathrm{cl}(\cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\})$.

Как уже отмечалось выше при выполнении условий (i) и (ii) множество $\cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\}$ является нетривиальным конусом и, кроме того, так как

$$\cup\{\mathrm{int}P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\} \subset \mathrm{int}(\cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\}) \subset \cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\},$$

то

$$\mathrm{cl}(\cup\{\mathrm{int}P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\}) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\})) \subset \mathrm{cl}(\cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\}).$$

Из последних включений следует, что при выполнении условия (iii) справедливо равенство $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\})) = \mathrm{cl}(\cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\})$.

Таким образом, конус $\cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\}$ удовлетворяет всем предположениям предложения 2.3 и, следовательно, для него существует разностно сублинейная функция $p : Y \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\mathrm{int}(\cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\}) = \{y \in Y \,|\, p(y) < 0\} \tag{7}$$

и

$$\mathrm{cl}(\cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\}) = \{y \in Y \,|\, p(y) \leqslant 0\}. \tag{8}$$

Ниже будем предполагать, что разностно сублинейная функция $p : Y \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая равенствам (7) и (8), а также ее представление в виде разности $p = \underline{p} - \overline{p}$ двух сублинейных функций $\underline{p}, \overline{p} \in \hat{P}(Y)$ выбраны и зафиксированы.

Теорема 2.5 (Теорема о скаляризации). *а) Точка $x^0 \in Q$ доставляет локальный гарантированный слабый $\mathcal{P}$-максимум отображению $F : X \to Y$ на множестве $Q \subset X$ в том и только том случае, когда существует окрестность $\mathcal{N}(x^0)$ точки x^0 такая, что*

$$p(F(x) - F(x^0)) \geqslant 0 \text{ для всех } x \in Q \cap \mathcal{N}(x^0). \tag{9}$$

б) Точка $x^0 \in Q$ доставляет локальный гарантированный сильный $\mathcal{P}$-максимум отображению $F : X \to Y$ на множестве $Q \subset X$ в том и только том случае, когда для некоторой окрестности $\mathcal{N}(x^0)$ точки x^0 выполняется условие

$$p(F(x) - F(x^0)) > 0 \text{ для всех } x \in Q \cap \mathcal{N}(x^0), F(x) \neq F(x^0). \tag{10}$$

Доказательство утверждения *а*) следует из условий (2) и (7), а утверждения *б*) из условий (3) и (8).

Очевидно, что условие (9) является необходимым, а условие (10) – достаточным условием для точек локального гарантированного $\mathcal{P}$-минимума отображения $F : X \to Y$ на множестве Q.

Важно отметить то, что условия (9) и (10) не зависят от конкретного выбора разностно сублинейной функции $p : Y \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей равенствам (7) и (8). Таким образом, условия (9) и (10) сводят задачу $\mathcal{P}$-максимизации векторнозначного целевого отображения F на множестве допустимых точек Q к задаче минимизации скалярной целевой функции $x \to p(F(x) - F(x^0))$ на том же множестве Q и именно в этом смысле скаляризуют исходную задачу векторной оптимизации с неопределенным отношением предпочтения. По сути дела, условия (9) и (10) переформулируют теоретико-множественные по своему содержанию определения точек гарантированного слабого и сильного $\mathcal{P}$-максимума в эквивалентной аналитической форме, в виде вариационных неравенств, для исследования которых можно применить хорошо развитые средства нелинейного функционального анализа.

К анализу соотношений (9) и (10), в результате которого будут получены как необходимые, так и достаточные условия для точек локального гарантированного $\mathcal{P}$-максимума отображения F, мы далее и переходим. Случай, когда отношение предпочтения задано точно и, следовательно, семейство $\mathcal{P}$ состоит из единственного отношения предпочтения $\prec$, достаточно подробно изучен автором ранее в работах [1; 3; 8–11].

3. Локальные аппроксимации множества допустимых решений и целевого отображения

В этом параграфе будут приведены определения и некоторые свойства локальных аппроксимаций множеств и отображений, которые будут использованы в следующих параграфах при выводе условий первого и второго порядков гарантированной $\prec$-максимальности допустимых решений задачи векторной оптимизации с неопределенным отношением предпочтения. Будем предполагать при этом, что X является вещественным нормированным пространством. Это позволит нам использовать в качестве локальных аппроксимации множества допустимых решений $Q \subset X$ касательные конусы первого и второго порядков, а для построения локальных аппроксимаций целевого отображения использовать целый спектр различных понятий теории дифференцирования отображений, которые наиболее развиты именно в нормированных пространствах.

Символом $S(0)$ будем обозначать ниже семейство последовательностей положительных вещественных чисел (t_n), $t_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящихся к нулю.

Для любого подмножества M из вещественного нормированного пространства X символом U_M будем обозначать семейство всех последовательностей (x_n) таких, что $x_n \in M$, $n = 1, 2, \ldots$, а символом $U_M(x^0)$ – подсемейство из U_M, состоящее из последовательностей (x_n), сходящихся (в смысле нормы, заданной на X) к точке x^0.

Говорят [23; 26–29], что вектор $h \in X$ является *касательным вектором первого порядка* к множеству M в точке $x^0 \in \mathrm{cl}M$, если существуют последовательности $(t_n) \in S(0)$ и $(x_n) \in U_M(x^0)$ такие, что $\dfrac{x_n - x^0}{t_n} \to h$ при $n \to \infty$.

Совокупность всех векторов из X, касательных (первого порядка) к множеству M в точке $x^0 \in \mathrm{cl}M$, образует замкнутый конус, который мы будем обозначать символом $T(x^0 \,|\, M)$ и называть *касательным конусом к множеству M в точке x^0*. (Конус $T(x^0 \,|\, M)$ называют также *контингентным конусом* или *конусом Булигана* к множеству M в точке x^0.)

Вектор $w \in X$ называется (см., напр., [3; 8–11; 29–32]) *касательным вектором второго порядка* к множеству $M \subset X$ в точке $x^0 \in \mathrm{cl}M$ по направлению $h \in X$ (или просто в $(x^0, h) \in \mathrm{cl}M \times X$), если существуют последовательности $(t_n) \in S(0)$ и $(x_n) \in U_M(x^0)$ такие, что

$$\frac{x_n - x^0 - t_n h}{\frac{1}{2}t_n^2} \to w.$$

Множество всех касательных векторов второго порядка к множеству $M \subset X$ в точке $x^0 \in \mathrm{cl}M$ по направлению $h \in X$ будем обозначать символом $T^2(x^0, h \,|\, M)$.

Известно [9], что $T^2(x^0, h \,|\, M)$ является замкнутым (возможно, пустым) подмножеством в X.

Говорят [11; 31; 32], что множество $M \subset X$ удовлетворяет *условию регулярности второго порядка* в точке $x^0 \in \mathrm{cl}M$ по направлению $h \in X$, если для любых последовательностей $(x_n) \in U_M(x^0)$ и $(t_n) \in S(0)$ таких, что $\dfrac{x_n - x^0}{t_n} \to h$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}\left(\frac{x_n - x^0 - t_n h}{\frac{1}{2}t_n^2}, T^2(x^0, h \,|\, M)\right) = 0,$$

где $\operatorname{dist}(z, M) := \inf\limits_{u\in M} \|z - u\|$ – расстояние от точки z до множества M.

Перейдем к обсуждению локальных аппроксимаций отображений.

Отображение $F : X \to Y$ из нормированного пространства X в нормированное пространство Y называется [1; 23; 29; 30; 33] *дифференцируемым в точке $x^0 \in X$ по направлению $h \in X$*, если существует предел

$$F'(x^0 \,|\, h) := \lim_{t\to 0, t>0} \frac{F(x^0 + th) - F(x^0)}{t}.$$

Если $F'(x^0 \,|\, h)$ существует для любого $h \in X$, то отображение $F'(x^0 \,|\, \cdot) : h \to F'(x^0 \,|\, h)$ называется *производной по направлениям отображения F в точке x^0*.

Говорят [23;32], что отображение $F : X \to Y$ *дифференцируемо по направлениям в смысле Адамара* (кратко, *$H-$дифференцируемо по направлениям*) в точке $x^0 \in X$, если оно дифференцируемо по направлениям в точке x^0 и при этом для всех $h \in X$ справедливо равенство

$$F'(x^0 \,|\, h) = \lim_{\substack{t\to 0, t>0 \\ z\to h}} \frac{F(x^0 + tz) - F(x^0)}{t}. \tag{11}$$

Равенство (11) эквивалентно следующему условию: для любых последовательностей $(t_n) \in S(0)$ и $(x_n) \in U_X(x^0)$ таких, что $\dfrac{x_n - x^0}{t_n} \to h$ при $n \to +\infty$ выполняется равенство

$$F'(x^0 \,|\, h) = \lim_{n\to+\infty} \frac{F(x_n) - F(x^0)}{t_n}. \tag{12}$$

Если отображение $F : X \to Y$ H-дифференцируемо по направлениям в точке $x^0 \in X$, то производная по направлениям $F'(x^0 \,|\, \cdot) : X \to Y$, как функция направления, непрерывна на всем пространстве X.

Отображение $F : X \to Y$ называется [27; 34] *дифференцируемым по Фреше* в точке $x^0 \in X$, если существует непрерывное линейное отображение $F'(x^0) : X \to Y$ такое, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x^0+h) - F(x^0) - F'(x^0)h}{\|h\|} = 0,$$

при этом отображение $F'(x^0) : X \to Y$ называется *производной Фреше* отображения F в точке x^0.

Очевидно, что дифференцируемое по Фреше отображение является H-дифференцируемым по направлениям, причем $F'(x^0\,|\,h) = F'(x^0)h$ для всех $h \in X$.

Отображение $F : X \to Y$ называется [1; 23] *квазидифференцируемым* (*H-квазидифференцируемым*) в смысле Демьянова–Рубинова в точке $x^0 \in X$, если F дифференцируемо (H-дифференцируемо) по направлениям в точке x^0 и его производная по направлениям $F'(x^0\,|\,\cdot) : X \to Y$ является разностно сублинейным отображением, т. е. такова, что при каждом $y^* \in Y^*$ композиция $h \to y^*(F'(x^0\,|\,h))$ является разностно сублинейной функцией.

Напомним сейчас необходимые понятия производных второго порядка для отображений.

Следуя [35; 36] (см. также [1; 32]), отображение $F : X \to Y$ будем называть *дважды параболически дифференцируемым в точке x^0 по направлению $h \in X$ с отклонением $w \in X$*, если F дифференцируемо в точке x^0 по направлению h и, кроме того, существует предел

$$F''(x^0\,|\,h,w) := \lim_{t\to 0^+} \frac{F(x^0+th+\frac{1}{2}t^2w) - F(x^0) - tF'(x^0\,|\,h)}{\frac{1}{2}t^2}.$$

Если предел $F''(x^0\,|\,h,w)$ существует и, кроме того,

$$F''(x^0\,|\,h,w) = \lim_{(t,z)\to(0^+,w)} \frac{F(x^0+th+\frac{1}{2}t^2z) - F(x^0) - tF'(x^0\,|\,h)}{\frac{1}{2}t^2},$$

то будем говорить [9; 32], что отображение F *дважды параболически H-дифференцируемо в точке* x^0 по направлению h с отклонением w.

В том случае, когда $F''(x^0\,|\,h,w)$ существует для всех $h \in X$ и $w \in X$, отображение $F''(x^0\,|\,\cdot,\cdot) : (h,w) \to F''(x^0\,|\,h,w)$ называется *второй параболической производной* (или, если выполняется (12), *второй параболической H-производной*) отображения F в точке x^0.

Нетрудно убедиться, что сужение второй параболической производной $F''(x^0\,|\,\cdot,\cdot) : X \times X \to$ $\to Y$ на $\{0\} \times X$ совпадает с первой производной по направлениям, т. е. имеет место равенство $F''(x^0\,|0,w) = F'(x^0\,|w)$ для всех $w \in X$.

Отображение $F : X \to Y$ называют [34] *дважды дифференцируемым по Фреше–Тэйлору* в точке $x^0 \in X$, если оно дифференцируемо по Фреше в этой точке и, кроме того, существует непрерывное симметричное билинейное отображение $F''(x^0) : X \times X \to Y$ такое, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x^0+h) - F(x^0) - F'(x^0)h - \frac{1}{2}F''(x^0)[h,h]}{\|h\|^2} = 0,$$

при этом соответствующее квадратичное отображение $h \to F''(x^0)[h,h]$ будем называть *второй производной Фреше–Тэйлора* отображения F в точке x^0.

Очевидно, что дважды дифференцируемое по Фреше–Тэйлору отображение является дважды параболически H-дифференцируемым по направлениям с отклонениями, причем

$$F''(x^0\,|\,h,w) = F'(x^0)w + F''(x^0)[h,h] \text{ для всех } h \in X \text{ и } w \in X.$$

Заметим, что понятие второй производной Фреше–Тэйлора слабее классического понятия второй производной Фреше, которая, как известно, вводится как производная первой производной Фреше и в этом смысле является последовательной. В данном выше определении понятия производной Фреше–Тэйлора, фактически, пастулируется лишь одно из свойств второй производной Фреше, связанное с формулой Тэйлора.

4. Условия локальной гарантированной $\mathcal{P}$-максимальности первого порядка

Рассматривая далее задачу $\mathcal{P}$-максимизации отображения $F : X \to Y$ на множестве $Q \subset X$, будем предполагать в этом параграфе, что отображение $F : X \to Y$ является, по крайней мере, H-дифференцируемым по направлениям в исследуемой точке x^0. Относительно семейства отношений предпочтения $\mathcal{P}$ будем предполагать всюду далее, что оно удовлетворяет условиям (i)–(iii) и пусть $p : Y \to \mathbb{R}$ – произвольная разностно сублинейная функция, удовлетворяющая равенствам (7) и (8).

Используя стандартные методы дифференциального анализа, непосредственно из теоремы о скаляризации приходим к следующим условиям $\mathcal{P}$-максимальности первого порядка.

Теорема 4.1 (прямые условия первого порядка для точек гарантированного $\mathcal{P}$-максимума). *Пусть $x^0 \in Q$ и пусть отображение $F : X \to Y$ является H-дифференцируемым по направлениям в точке x^0. Тогда*

а) для того чтобы точка x^0 доставляла отображению $F : X \to Y$ локальный гарантированный слабый $\mathcal{P}$-максимум на множестве Q, необходимо, чтобы

$$p(F'(x^0 \,|\, h)) \geqslant 0 \text{ для всех } h \in T(x^0 \,|\, Q) \tag{13}$$

или, эквивалентно, чтобы

$$SK_F(x^0) \cap T(x^0 \,|\, Q) = \varnothing, \tag{14}$$

где $SK_F(x^0) := \{h \in X \,|\, p(F'(x^0 \,|\, h)) < 0\}$;

б) если оба нормированные пространства X и Y конечномерны, то для того чтобы точка x^0 доставляла отображению $F : X \to Y$ локальный гарантированный сильный $\mathcal{P}$-максимум на множестве Q, достаточно, чтобы

$$p(F'(x^0 \,|\, h)) > 0 \text{ для всех } h \in T(x^0 \,|\, Q),\ h \neq 0 \tag{15}$$

или, эквивалентно, чтобы

$$K_F(x^0) \cap T(x^0 \,|\, Q) = \{0\}, \tag{16}$$

где $K_F(x^0) := \{h \in X \,|\, p(F'(x^0 \,|\, h)) \leqslant 0\}$.

Доказательство. *а)* Пусть $h \in T(x^0|Q)$ и пусть последовательности $(t_n) \in S(0)$ и $(x_n) \in U_Q(x^0)$ таковы, что $\dfrac{x_n - x^0}{t_n} \to h$ при $n \to +\infty$. Если точка x^0 доставляет отображению $F : X \to Y$ локальный гарантированный слабый $\mathcal{P}$-максимум на множестве Q, то в силу утверждения *а)* теоремы 2.5 (теоремы о скаляризации) существует окрестность $\mathcal{N}(x^0)$ точки x^0 такая, что для всех $x \in Q \cap \mathcal{N}(x^0)$ выполняется неравенство $p(F(x) - F(x^0)) \geqslant 0$. Так как $x_n \to x^0$, то, начиная с некоторого номера, элементы последовательности (x_n) принадлежат окрестности $\mathcal{N}(x^0)$. Не ограничивая общности, можем считать, что $x_n \in \mathcal{N}(x^0)$ при всех n. Следовательно, $p(F(x_n) - F(x^0)) \geqslant 0$ для всех n. Поскольку функция p положительно однородна, то $p\left(\dfrac{F(x_n) - F(x^0)}{t_n}\right) \geqslant 0$ для всех n. Учитывая равенство (12) и непрерывность разностно сублинейной функции p, получаем, переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to +\infty$, требуемое неравенство $p(F'(x^0|h)) \geqslant 0$. В силу произвольного выбора вектора $h \in T(x^0|Q)$ справедливость утверждения *а)* доказана. Эквивалентность (13) и (14) очевидна.

б) Будем рассуждать от противного. Предположим, что условие (15) выполнено, а точка $x^0 \in Q$ не доставляет отображению $F : X \to Y$ локальный гарантированный сильный $\mathcal{P}$-максимум на множестве Q. Тогда в силу утверждения *б)* из теоремы о скаляризации (теоремы 2.5) существует последовательность $(x_n) \in U_Q(x^0)$ такая, что $F(x_n) \neq F(x^0)$ и $p(F(x_n) - F(x^0)) \leqslant 0$ при всех n. Заметим, что из $F(x_n) \neq F(x^0)$ следует, что $x_n \neq x^0$. Рассмотрим последовательность $h_n := \dfrac{x_n - x^0}{\|x_n - x^0\|}$. Так как в конечномерном нормированном пространстве X единичная сфера компактна, то из последовательности (h_n) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности можем считать, что сама последовательность (h_n) является сходящейся и пусть $h := \lim\limits_{n \to +\infty} h_n$. Очевидно, что $h \in T(x^0|Q)$ и $h \neq 0$, поскольку $\|h\| = 1$. Пусть $t_n := \|x_n - x^0\|$. Так как $x_n \to x^0$, то $(t_n) \in S(0)$.

Вследствие положительной однородности функции p из неравенств $p(F(x_n)-F(x^0)) \leqslant 0 \,\forall\, n$ получаем, что при всех n выполняется неравенство $p\left(\dfrac{F(x_n)-F(x^0)}{t_n}\right) \leqslant 0$. Устремляя в последнем неравенстве n к бесконечности, придем, учитывая (12) и непрерывность функции p, к неравенству $p(F'(x^0|h)) \leqslant 0$, которое противоречит (15), поскольку $h \in T(x^0|Q)$ и $h \neq 0$. Эквивалентность (15) и (16) очевидна. □

Теорема 4.2 (двойственные условия первого порядка для точек гарантированного $\mathcal{P}$-максимума). *Пусть $x^0 \in Q$ и пусть отображение $F : X \to Y$ является H-квазидифференцируемым в точке x^0. Тогда*

а) для того чтобы точка x^0 доставляла отображению $F : X \to Y$ локальный гарантированный слабый $\mathcal{P}$-максимум на всем пространстве X, необходимо, чтобы

$$\overline{\partial}(p \circ F)(x^0) \subset \underline{\partial}(p \circ F)(x^0);$$

б) если оба нормированные пространства X и Y конечномерны, то для того чтобы точка x^0 доставляла отображению $F : X \to Y$ локальный гарантированный сильный $\mathcal{P}$-максимум на всем пространстве X, достаточно, чтобы для некоторого $\delta > 0$ выполнялось включение

$$\overline{\partial}(p \circ F)(x^0) + \delta B_{X^*} \subset \underline{\partial}(p \circ F)(x^0),$$

где B^* – единичный шар с центром в нулевой точке в пространстве X^*.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу предложения 2.2 композиция разностно сублинейной функции $p : Y \to \mathbb{R}$ и разностно сублинейного отображения $F'(x^0 \,|\, \cdot) : X \to Y$ также является разностно сублинейной функцией, определенной на X. Учитывая это замечание, легко видеть, что утверждения *а*) и *б*) данной теоремы являются следствиями соответствующих утверждений предыдущей теоремы и предложения 2.1. □

5. Условия локальной гарантированной $\mathcal{P}$-максимальности второго порядка.

При выводе условий гарантированной $\mathcal{P}$-максимальности второго порядка мы будем исходить, также как и при выводе условий $\mathcal{P}$-максимальности первого порядка, из теоремы скаляризации, а точнее, из условий (9) и (10), используя для анализа входящих в них множеств и отображений локальные аппроксимации второго порядка.

Теорема 5.1 (необходимое условие второго порядка для точек локального гарантированного слабого $\mathcal{P}$-максимума). *Пусть отображение $F : X \to Y$ является дважды параболически H-дифференцируемым по направлениям с отклонениями в точке $x^0 \in Q$. Тогда для того чтобы точка $x^0 \in Q$ доставляла отображению $F : X \to Y$ локальный гарантированный слабый $\mathcal{P}$-максимум на множестве Q, необходимо, чтобы для любого $h \in T(x^0 \,|\, Q)$ такого, что $p(F'(x^0 \,|\, h)) = 0$, выполнялось неравенство*

$$\inf_{w \in T^2(x^0, h \,|\, Q)} p'(F'(x^0 \,|\, h) | F''(x^0 \,|\, h, w)) \geqslant 0. \tag{17}$$

Доказательство. Прежде всего отметим (см., напр., [33, теорема 13.5]), что так как Y является конечномерным нормированным пространством, то разностно-сублинейная функция $p : Y \to \mathbb{R}$ является H-дифференцируемой по направлениям в любой точке пространства Y.

Рассмотрим произвольный вектор $h \in T(x^0 \,|\, Q)$, удовлетворяющий равенству $p(F'(x^0 \,|\, h)) = 0$, и произвольный вектор $w \in T^2(x^0, h \,|\, Q)$. Выберем последовательности $(x_n) \in U_Q(x^0)$ и $(t_n) \in S(0)$ такие, что $\dfrac{x_n - x^0 - t_n h}{\frac{1}{2}t_n^2} \to w$. Положим $w_n := \dfrac{x_n - x^0 - t_n h}{\frac{1}{2}t_n^2}$. Тогда $x_n = x^0 + t_n h + \frac{1}{2}t^2 w_n$. Так как $x_n \in Q$ для всех n и $x_n \to x^0$, то из утверждения *а*) теоремы 2.5 заключаем, что $p_{\prec}(F(x_n) - F(x^0)) \geqslant 0$ при достаточно больших n. Воспользовавшись тем, что отображение F дважды параболически H-дифференцируемо в точке x^0 и $p(F'(x^0 \,|\, h)) = 0$, получим

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p(F(x_n) - F(x^0))}{\frac{1}{2}t_n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{p\left(F'(x^0\,|\,h) + \frac{1}{2}t_n\left(F''(x^0\,|\,h, w_n) + \dfrac{o(t_n, w_n)}{t_n^2}\right)\right) - p_{\prec}(F'(x^0\,|\,h))}{\frac{1}{2}t_n} =$$

$$= p'_{\prec}(F'(x^0\,|\,h)\,|\,F''(x^0\,|\,h, w)) \geqslant 0.$$

Последнее равенство в предыдущих соотношениях следует из H-дифференцируемости по направлениям функции p в любой точке $y \in Y$ и равенства $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{o(t_n, w_n)}{t_n^2} \to 0$, которое выполняется, поскольку отображение F дважды параболически H-дифференцируемо в точке x^0.

Так как вектор $w \in T^2(x^0, h\,|\,Q)$ был выбран произвольным, то из доказанного неравенства следует (16). □

Заметим, что при выполнении предположений теоремы 5.1 условие (17) содержит в себе необходимое условие первого порядка (13). Действительно, так как $p'(0\,|\,y) = p(y)$ для любого $y \in Y$ и $F'(x^0|0) = 0$, то, положив в (17) $h = 0$, получим (13).

Достаточное условие второго порядка для точек локального гарантированного сильного $\mathcal{P}$-максимума будет доказано ниже при дополнительных предположениях, что семейство отношений предпочтения $\mathcal{P}$ является конечным, отображение F дважды дифференцируемо по Фреше–Тейлору в точке x^0, а множество Q удовлетворяет условию регулярности второго порядка в точке x^0.

Пусть I – конечное множество индексов и пусть $\mathcal{P} = \{\prec_i \,|\, i \in I\}$, где $\prec_i$ – определенные на Y отношения предпочтения, удовлетворяющие условию $\mathrm{int}P_{\prec_i} \neq \varnothing$ при любом $i \in I$. Здесь $P_{\prec_i}$ – конус положительных элементов отношения предпочтения $\prec_i$. Так как семейство $\mathcal{P}$ конечно, то $\mathrm{int}(\cup\{P_{\prec_i}\,|\,i = 1,2,\ldots,k\}) = \cup\{\mathrm{int}P_{\prec_i}\,|\,i = 1,2,\ldots,k\}$. Дополнительно будем предполагать, что $\cup\{P_{\prec_i}\,|\,i \in I\} \neq Y$, тогда семейство $\mathcal{P} = \{\prec_i \,|\, i \in I\}$ удовлетворяет всем трем условиям (i)–(iii) и, следовательно, для него существует разностно сублинейная функция $p : Y \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая равенствам (7) и (8). Покажем, что в этом случае такая функция p может быть построена конструктивно. Вследствие замечания 2.4 для каждого $P_{\prec_i}$ можно указать конкретную сублинейную функцию $\varphi_i : Y \to \mathbb{R}$ такую, что $\mathrm{int}P_{\prec_i} = \{y \in Y \,|\, \varphi_i(y) < 0\}$ и $\mathrm{cl}P_{\prec_i} = \{y \in Y \,|\, \varphi_i(y) \leqslant 0\}$. Нетрудно видеть, что функция $p(y) := \min\limits_{i=\overline{1,k}} \varphi_i(y)$ является разностно сублинейной и удовлетворяет равенствам $\mathrm{int}(\cup\{P_{\prec_i}\,|\,i \in I\}) = \{y \in Y \,|\, p(y) < 0\}$ и $\mathrm{cl}(\cup(\{P_{\prec_i}\,|\,i \in I\}) = \{y \in Y \,|\, p(y) \leqslant 0\}$. Заметим, что функция $p(y) := \min\limits_{i\in I} \varphi_i(y)$ (см., напр., [33]) дифференцируема по направлениям в любой точке $\bar{y} \in Y$, причем $p'(\bar{y}\,|\,y) = \min\limits_{i\in I_a(\bar{y})} \varphi'_i(\bar{y}\,|\,y) = \min\limits_{i\in I_a(\bar{y})} \max\limits_{y^*\in\partial\varphi_i(\bar{y})} y^*(y)$, $y \in Y$, где $I_a(\bar{y}) = \{i \in I \,|\, p(\bar{y}) = \varphi_i(\bar{y})\}$, $\partial\varphi_i(\bar{y}) = \{y^* \in \partial\varphi_i \,|\, y^*(\bar{y}) = \varphi_i(\bar{y})\}$.

Теорема 5.2 (достаточное условие второго порядка для точек локального гарантированного сильного $\mathcal{P}$-максимума). *Предположим, что оба нормированные пространства X и Y конечномерны и пусть в точке $x^0 \in Q$ отображение $F : X \to Y$ является дважды дифференцируемым по Фреше–Тэйлору, а семейство отношений предпочтения $\mathcal{P} = \{\prec_i \,|\, i \in I\}$ является конечным, причем* $\mathrm{int}P_{\prec_i} \neq \varnothing$ *для всех $i \in I$.*

Тогда, для того чтобы точка $x^0 \in Q$ доставляла отображению $F : X \to Y$ локальный сильный $\mathcal{P}$-максимум на множестве Q, достаточно, чтобы для разностно сублинейной функции $p(y) := \min\limits_{i\in I} \varphi_i(y)$, где $\varphi_i : Y \to \mathbb{R}$ – сублинейные функции такие, что $\mathrm{int}P_{\prec_i} = \{y \in Y \,|\, \varphi_i(y) < 0\}$ *и* $\mathrm{cl}P_{\prec_i} = \{y \in Y \,|\, \varphi_i(y) \leqslant 0\}$, *выполнялись следующие условия:*

1) *было справедливо неравенство*

$$p(F'(x^0)h) \geqslant 0 \text{ для всех } h \in T(x^0\,|\,Q); \tag{18}$$

2) *для любого $h \in C(x^0) := \{h \in T(x^0\,|\,Q) \,|\, p(F'(x^0)h) = 0\}$, $h \neq 0$, имело место неравенство*

$$\inf_{w\in T^2(x^0,h\,|\,Q)} p'(F'(x^0)h\,|\,F'(x^0)w + F''(x^0)[h,h]) > 0; \tag{19}$$

3) *множество Q удовлетворяло условию регулярности второго порядка в точке x^0 по любому направлению $h \in C(x^0)$, $h \neq 0$.*

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Предположим, что условия 1)–3) выполнены, а x^0 не является локально сильно $\mathcal{P}$-максимальной точкой отображения F на множестве Q.

Тогда в силу утверждения б) из теоремы 2.5 найдется последовательность $(x_n) \in U_Q(x^0)$, $F(x_n) \neq \neq F(x^0)$, такая, что $p(F(x_n) - F(x^0)) \leqslant 0$ для всех n или, учитывая конкретный вид функции p, такая, что $\min\limits_{i\in I} \varphi_i(F(x_n) - F(x^0)) \leqslant 0$ для всех n. Покажем, что существование такой последовательности противоречит условиям 1)–3).

Без ограничения общности можем считать, что последовательность (x_n) такова, что соответствующая ей последовательность $h_n = \dfrac{x_n - x^0}{t_n}$, где $t_n = \|x_n - x^0\|$, сходится к некоторому вектору h, $\|h\| = 1$, который, как это следует непосредственно из определения касательного конуса первого порядка, принадлежит $T(x^0 \,|\, Q)$. Так как отображение F дифференцируемо по Фреше в точке x^0, то из условия $p\left(\dfrac{F(x_n) - F(x^0)}{t_n}\right) \leqslant 0$, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $p(F'(x^0)h) \leqslant 0$. С другой стороны, поскольку $h \in T(x^0 \,|\, Q)$, то в силу условия (18) имеем $p(F'(x^0)h) \geqslant 0$ и, значит, $p(F'(x^0)h) = 0$. Таким образом, $h \in C(x^0)$, причем $h \neq 0$.

Из равенства

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_i(F(x_n) - F(x^0))}{t_n} = \varphi_i(F'(x^0)h),$$

справедливого для любой сублинейной функции φ_i, а также из неравенства

$$\varphi_i(F'(x^0)h) > 0 \text{ для всех } i \in I \setminus I_a(F'(x^0)h),$$

которое следует из условия (18) и определения подсемейства $I_a(F'(x^0)h) = \{i \in I \,|\, p(F'(x^0)h) = = \varphi_i(F'(x^0)h)\}$, приходим к заключению, что для любого $i \in I \setminus I_a(F'(x^0)h)$ можно указать номер $n_i \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\varphi_i(F(x_n) - F(x^0)) > 0 \text{ для всех } n \geqslant n_i. \tag{20}$$

Так как множество индексов I конечно, то для любого $n \in \mathbb{N}$ можно указать такой индекс $i_n \in I$, что $\min\limits_{i\in I} \varphi_i(F(x_n) - F(x^0)) = \varphi_{i_n}(F(x_n) - F(x^0))$. Вследствие конечности множества индексов I найдется индекс $m \in I$ такой, что $\varphi_m = \varphi_{i_n}$ для бесконечно многих номеров n. Выберем из последовательности (x_n) подпоследовательность, соответствующую таким номерам, перенумеруем ее натуральными числами и отождествим с исходной последовательностью (x_n). В результате получим, что последовательность (x_n) удовлетворяет условиям

$$p(F(x_n) - F(x^0)) = \min_{i\in I} \varphi_i(F(x_n) - F(x^0)) = \varphi_m(F(x_n) - F(x^0)) \leqslant 0 \text{ для всех } n \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Сравнивая (21) с (20), заключаем, что $m \in I_a(F'(x^0)h)$.

Положим $w_n = \dfrac{x_n - x^0 - t_n h}{\frac{1}{2}t_n^2}$. Поскольку в силу условия 3) множество Q удовлетворяет условию регулярности второго порядка в точке x^0 по любому направлению $h \in C(x^0), h \neq 0$, то найдется последовательность $(u_n) \in T^2(x^0, h \,|\, Q)$ такая, что $w_n - u_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Выберем из множества $\partial\varphi_m(F'(x^0)h) := \{y^* \in \partial\varphi_m \,|\, y^*(F'(x^0)h) = 0\}$ последовательность $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что

$$\max_{y^*\in\partial\varphi_m(F'(x^0)h)} y^*(F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h,h]) = y_n^*(F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h,h]). \tag{22}$$

Существование таких y_n^* следует из компактности множества $\partial\varphi_m(F'(x^0)h)$ и непрерывности линейной функции $y^* \to y^*(F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h,h])$. Заметим, что так как $\partial\varphi_m(F'(x^0)h)$ – компакт, то последовательность $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Кроме того, из (22) и равенства

$$p'(F'(x^0)h \,|\, F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h,h]) = \max_{y^*\in\partial\varphi_m(F'(x^0)h)} y^*(F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h,h])$$

следует, что для всех n выполняется равенство

$$p'(F'(x^0)h \,|\, F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h,h]) = y_n^*(F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h,h]). \tag{23}$$

Воспользовавшись далее тем, что отображение $F : X \to Y$ дважды дифференцируемо по Фреше–Тэйлору в точке x^0, получим

$$F(x_n) - F(x^0) = t_n F'(x^0)h + \frac{1}{2}t_n^2\left(F'(x^0)w_n + F''(x^0)[h,h]\right) + o(t_n^2) =$$

$$= t_n F'(x^0)h + \frac{1}{2}t_n^2\left(F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h,h]\right) + \frac{1}{2}t_n^2 F'(x^0)(w_n - u_n) + o(t_n^2),$$

откуда, учитывая (23) и равенство $y_n^*(F'(x^0)h) = 0$, приходим к неравенству

$$y_n^*(F(x_n) - F(x^0)) = \frac{1}{2}t_n^2 y_n^*(F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h,h]) + y_n^*\left(\frac{1}{2}t_n^2 F'(x^0)(w_n - u_n) + o(t_n^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}t_n^2 p'(F'(x^0)h \,|\, F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h,h]) + y_n^*\left(\frac{1}{2}t_n^2 F'(x^0)(w_n - u_n) + o(t_n^2)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}t_n^2\left(\inf_{w \in T^2(x^0,h\,|\,Q)} p'(F'(x^0)h \,|\, F'(x^0)w + F''(x^0)[h,h]) + y_n^*(F'(x^0)(w_n - u_n)) + 2\frac{y_n^*(o(t_n^2))}{t_n^2}\right).$$

Заметим, что поскольку последовательность (y_n^*) ограничена, то $y_n^*(F'(x^0)(w_n - u_n)) + 2\dfrac{y_n^*(o(t_n^2))}{t_n^2} \to$ $\to 0$ при $n \to +\infty$. Кроме того, $t_n = \|x_n - x^0\| > 0$ для всех n. Учитывая эти факты и условие (19), из предыдущего неравенства заключаем, что $y_n^*(F(x_n) - F(x^0)) > 0$ при достаточно больших n.

Поскольку $y_n^* \in \partial\varphi_m$, то $\varphi_m(F(x_n) - F(x^0)) = \max\limits_{y^* \in \partial\varphi_m} y^*(F(x_n) - F(x^0)) > 0$ для достаточно больших n, что противоречит (21).

Полученное противоречие доказывает теорему. □

Работа поддержана Институтом математики НАН Беларуси в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция–2030».

Литература

1. *Гороховик В. В.* Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации. Минск: Наука и техника, 1990. 239 с.

2. *Jahn J.* Vector Optimization. Theory, Applications, and Extensions, 2ed. Berlin; Heidelberg: Springer, 2011.

3. *Гороховик В. В.* Условия минимальности в задачах векторной оптимизации с нетелесным конусом положительных элементов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52, № 7. С. 1192–1214.

4. *Jameson G.* Ordered Linear Spaces. Berlin: Springer, 1970. 194 p.

5. *Peressini A. L.* Ordered Topological Vector Spaces. New York: Harper and Row, 1067. 228 p.

6. *Куржанский, А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 390 с.

7. *Куржанский А. Б.* Задача идентификации – теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С. 3–26.

8. *Гороховик В. В.* К условиям локального минимума второго порядка в гладких задачах оптимизации с абстрактными ограничениями // Известия НАН Беларуси, Сер. физ.-мат. наук. 2005. № 3. С. 5–12.

9. *Гороховик В. В.* Асимптотически касательный конус второго порядка к множествам и условия локального минимума в задаче оптимизации с ограничениями // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Серия «Информатика и теория управления». 2006. Вып. 1. С. 34–41.

10. *Гороховик В. В.* Касательные векторы второго порядка к множествам и условия минимальности для точек подмножеств упорядоченных нормированных пространств // Тр. Ин-та математики. 2006. Т. 14, № 2. С. 35–47.

11. *Бахтин В. И., Гороховик В. В.* Условия оптимальности первого и второго порядков в задачах векторной оптимизации на метрических пространствах // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 32–43.

12. *Gorokhovik V. V., Gorokhovik S. Ya., Marinkovic B.* Necessary optimality conditions for a smooth discrete optimal control problem with vector-valued objective function // Positivity. 2013. Vol. 17. P. 483–500.

13. *Penot J. P.* Second order conditions for optimization problems with constraints // SIAM J. Control and Optimization. 1998. Vol. 37, N 1. P. 303–318.

14. *Jiménez B.* Strict efficiency in vector optimization // J. Math. Anal. Appl. 2002. Vol. 265. P. 264–284.

15. *Jiménez B., Novo V.* Second-order necessary conditions in set constrained differentiable vector optimization // Math. Methods Oper. Res. 2003. Vol. 58. P. 299–317.

16. *Jiménez B., Novo V.* Optimality conditions in differentiable vector optimization via second-order tangent sets // Appl. Math. Optim. 2004. Vol. 49. P. 123–144.

17. *Gfrerer H.* Second-order optimality conditions for scalar and vector optimization problems in Banach spaces // SIAM J. Control Optim. 2006. Vol. 45, N 3. P. 972–997.

18. *Gfrerer H.* Second-order necessary conditions for nonlinear optimization problems with abstract constraints: The degenerate case // SIAM J. Optimization. 2007. Vol. 18, N 2. P. 589–612.

19. *Gutiérrez C., Jiménez B., Novo V.* On second-order Fritz John type optimality conditions in nonsmooth multiobjective programming // Math. Program., Ser. B. 2010. Vol. 123. P. 199–223.

20. *Shapiro A.* Quasidufferential calculus and first-order optimality conditions in nonsmooth optimization // Mathematical Programming Study. 1986. Vol. 29. P. 56–68.

21. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* О квазидифференцируемых функционалах // Доклады АН СССР. 1980. Т. 250, № 1. С. 21–25.

22. *Gorokhovik V. V.* ε–Quasidufferentiability of real-valued functions and optimality conditions in extremal problems // Mathematical Programming Study. 1986. Vol. 29. P. 203–218.

23. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 479 с.

24. *Hiriart-Urruty J. B.* Tangent cones, generalized gradients, and mathematical programming in Banach spaces // Math. Oper. Research. 1979. Vol. 4, N 1. P. 79–97.

25. *Hiriart-Urruty J. B.* New concepts in nondifferentiable programming // Bull. Soc. Math. France Mém. 1979. Vol. 60. P. 57–85.

26. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Приближенные методы решения экстремальных задач. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1968. 180 с.

27. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 430 с.

28. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1965. Т. 5, № 3. С. 395–453.

29. *Rockafellar R. T., Wets R. J-B.* Variational Analysis. Berlin: Springer Verlag, 1998. 717 p.

30. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-Valued Analysis. Boston: Birkhauser, 1990. 461 p.

31. *Bonnans J. F., Cominetti R., Shapiro A.* Second order optimality conditions based on parabolic second order tangent sets // SIAM J. Optimization. 1999. Vol. 9, N 2. P. 466–492.

32. *Bonnans J. F., Shapiro A.* Perturbation Analysis of Optimization Problems. Berlin: Springer, 2000. 601 p.

33. *Гороховик В. В.* Конечномерные задачи оптимизации. Минск: Изд. центр БГУ, 2007. 239 с.

34. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. А., Рутицкий Я. Б. и др.* Приближенные решения операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.

35. *Ben-Tal A.* Second order and related extremality conditions in nonlinear programming // J. Optim. Theory and Appl. 1980. Vol. 31, N 2. P. 143–165.

36. *Ben-Tal A., Zowe J.* A unified theory of first and second order conditions for extremum problems in topological vector spaces // Math. Programming Study. 1982. Vol. 19. P. 39–76.

References

1. Gorokhovik V. V. *Convex and Nonsmooth Problems of Vector Optimization.* Minsk: Nawuka i Tekhnika, 1990. 239 p. (in Russian).

2. Jahn J. *Vector Optimization. Theory, Applications, and Extensions, 2 ed.* Berlin, Heidelberg, Springer, 2011.

3. Gorokhovik V. V. Optimality conditions in vector optimization problems withh non-solid cone of positive elements. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics,* 2012, vol. 52, no. 7, pp. 1192–1214 (in Russian).

4. Jameson G. *Ordered Linear Spaces.* Berlin, Springer, 1970. 194 p.

5. Peressini A. L. *Ordered Topological Vector Spaces.* New York, Harper and Row, 1067. 228 p.

6. Kurzhanski A. B. *Control and Observation under Uncertainty*. Moscow, Nauka, 1977. 390 p. (in Russian).

7. Kurzhanski A. B. The identification problem: the theory of guaranteed estimates. *Automation and Remote Control*, 1991, no. 4, pp. 3–26 (in Russian).

8. Gorokhovik V. V. On second-order local minimum conditions in smooth optimization problems with abstract constraints. *Proceedings of National Academy of Sciences of Belarus, Ser. Phiz.-Math. nawuk,* 2005, no. 3, pp. 5–12 (in Russian).

9. Gorokhovik V. V. Second-order asymptotically tangent cone to sets and local minimum conditions for an optimization problem with constraints. *Vestnik St.-Pitersburg University. Ser. 'Informatika and control theory'*, 2006, iss. 1, pp. 34–41 (in Russian).

10. Gorokhovik V. V. Second-order tangent vectors to sets and minimality conditions for points of subsets of ordered normed spaces. *Trudy Instituta Matematiki*, 2006, vol. 14, no. 2, pp. 35–47 (in Russian).

11. Bakhtin V. I., Gorokhovik V. V. First- and second-order optimality conditions in vector optimization problems on metric spaces. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2009, vol. 15, no. 4, pp. 32–43 (in Russian).

12. Gorokhovik V. V., Gorokhovik S. Ya., Marinkovic B. Necessary optimality conditions for a smooth discrete optimal control problem with vector-valued objective function. *Positivity*, 2013, vol. 17, pp. 483–500.

13. Penot J. P. Second order conditions for optimization problems with constraints. *SIAM J. Control and Optimization*, 1998, vol. 37, no. 1, pp. 303–318.

14. Jiménez B. Strict efficiency in vector optimization. *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, vol. 265. pp. 264–284.

15. Jiménez B., Novo V. Second-order necessary conditions in set constrained differentiable vector optimization. *Math. Methods Oper. Res.*, 2003, vol. 58, pp. 299–317.

16. Jiménez B., Novo V. Optimality conditions in differentiable vector optimization via second-order tangent sets. *Appl. Math. Optim.*, 2004, vol. 49, pp. 123–144.

17. Gfrerer H. Second-order optimality conditions for scalar and vector optimization problems in Banach spaces. *SIAM J. Control Optim.*, 2006, vol. 45, no. 3, pp. 972–997.

18. Gfrerer H. Second-order necessary conditions for nonlinear optimization problems with abstract constraints: The degenerate case. *SIAM J. Optimization*, 2007, vol. 18, no. 2, pp. 589–612.

19. Gutiérrez C., Jiménez B., Novo V. On second-order Fritz John type optimality conditions in nonsmooth multiobjective programming. *Math. Program., Ser. B.*, 2010, vol. 123. pp. 199–223.

20. Shapiro A. Quasidufferential calculus and first-order optimality conditions in nonsmooth optimization. *Mathematical Programming Study*, 1986, vol. 29, pp. 56–68.

21. Demyanov V. F., Rubinov A. M. On quasidifferentiable functionals. *Doklady of the Academy of Sci. of USSR,* 1980, vol. 250, no. 1, pp. 21–25 (in Russian).

22. Gorokhovik V. V. ε-Quasidufferentiability of real-valued functions and optimality conditions in extremal problems. *Mathematical Programming Study*, 1986, vol. 29, pp. 203–218.

23. Demyanov V. F., Rubinov A. M. *Fundamentals of Nonsmooth Analysis and Quasidifferential Calculus*. Moscow, Nauka, 1990. 479 p. (in Russian).

24. Hiriart-Urruty J. B. Tangent cones, generalized gradients, and mathematical programming in Banach spaces. *Math. Oper. Research*, 1979, vol. 4, no. 1, pp. 79–97.

25. *Hiriart-Urruty J. B.* New concepts in nondifferentiable programming. *Bull. Soc. Math. France Mém.*, 1979, vol. 60, pp. 57–85.

26. Demyanov V. F., Rubinov A. M. *Approximate Methods for Solving Extremal Problems*. Leningrad, Leningrad University Press, 1968. 180 p. (in Russian).

27. Alekseev V. M., Tikhomirov V. M., Fomin S. V. *Optimal Control*. Moscow, Nauka, 1979. 430 p. (in Russian).

28. Dubovitskii A. Ya., Milyutin A. A. Extremum problems under constraints. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1965, vol. 5, no. 3, pp. 395–453 (in Russian).

29. Rockafellar R. T., Wets R. J-B. *Variational Analysis*. Berlin, Springer Verlag, 1998. 717 p.

30. Aubin J.-P., Frankowska H. *Set-Valued Analysis*. Boston, Birkhauser, 1990. 461 p.

31. Bonnans J. F., Cominetti R., Shapiro A. Second order optimality conditions based on parabolic second order tangent sets. *SIAM J. Optimization*, 1999, vol. 9, no. 2, pp. 466–492.

32. Bonnans J. F., Shapiro A. *Perturbation Analysis of Optimization Problems*. Berlin, Springer, 2000. 601 p.

33. Gorokhovik V. V. *Finite-dimensional Optimization Problems*. Minsk, Press Center of BSU, 2007. 239 p. (in Russian).

34. Krasnoselski M. A., Vajnikko G. M., Zabreiko P. P., Rutitski Ya. B. et al. *Approximate Solutions of Operator Equations*. Moscow, Nauka, 1969. 456 p. (in Russian).

35. Ben-Tal A. Second order and related extremality conditions in nonlinear programming. *J. Optim. Theory and Appl.*, 1980. vol. 31, no. 2, pp. 143–165.

36. Ben-Tal A., Zowe J. A unified theory of first and second order conditions for extremum problems in topological vector spaces. *Math. Programming Study*, 1982, vol. 19, pp. 39–76.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 98–110

УДК 517.925 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-98–110
EDN: CBCNWF

ЛОКАЛЬНЫЕ ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ В ОКРЕСТНОСТИ СЛОЖНОЙ ТОЧКИ ПОКОЯ

Л. В. Детченя, А. А. Гринь, А. В. Кузьмич, Э. В. Мусафиров

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
e-mail: detchenya_lv@grsu.by, grin@grsu.by, kuzmich_av@grsu.by, musafirov_ev@grsu.by

Поступила: 07.09.2026 **Исправлена:** 08.10.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: метод Фроммера, диаграмма Ньютона, траектория, сложная точка покоя, мера кривизны, порядок кривизны, локальный фазовый портрет

Аннотация. Объектом исследования выступает двумерная автономная дифференциальная система, правые части которой представляют собой однородные многочлены четвертой степени. Предметом исследования являются локальные фазовые портреты такого вида систем. Кратко изложен используемый в исследовании метод Фроммера как один из эффективных инструментов расщепления сложных точек покоя, и приводится краткий обзор известных результатов для нелинейных систем. Целью исследования является получение не только локальных фазовых портретов исследуемых систем, но и коэффициентных условий, при которых такие фазовые портреты существуют. Актуальность работы обоснована незавершенностью получения такого вида коэффициентных критериев в виду сложностей решения алгебраического уравнения пятой степени, возникающего при нахождении возможных конечных мер кривизны O^+-кривых исследуемой системы. В основной части статьи для некоторых случаев получены локальные фазовые портреты исследуемой системы и указаны коэффициентные критерии их реализации. В заключении подведены итоги проведенных исследований. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейшем исследовании двумерных автономных систем.

LOCAL PHASE PORTRAITS OF A DIFFERENTIAL SYSTEM WITH FOURTH-DEGREE NONLINEARITIES IN THE NEIGHBORHOOD OF MULTIPLE EQUILIBRIUM POINT

L. V. Detchenya, A. A. Grin, A. V. Kuzmich, E. V. Musafirov

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus
e-mail: detchenya_lv@grsu.by, grin@grsu.by, kuzmich_av@grsu.by, musafirov_ev@grsu.by

Received: 07.09.2026 **Revised:** 08.10.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: Frommer method, Newton diagram, trajectory, multiple equilibrium point, measure of curvature, order of curvature, local phase portrait

Abstract. The object of the investigation is a two-dimensional autonomous differential system whose right-hand sides are homogeneous polynomials of the fourth degree. The subject of the study is local phase portraits of this type of systems. The Frommer method used in the study is briefly described as one of the effective tools for splitting multiple equilibrium points, and a brief review of the known results for nonlinear systems is provided. The goal of the study is to obtain not only the local phase portraits of the systems under investigation but also the coefficient conditions under which such phase portraits exist. The relevance of the work is justified by the incompleteness of obtaining this type of coefficient criteria due to the difficulties in solving an algebraic equation of the fifth degree, which arises when finding possible finite measures of curvature of the O^+-curves of the system under study. In the main part of the paper, local phase portraits of the system under study are obtained for some cases and coefficient criteria for their implementation are indicated. The results of the research are summarized in the conclusion. The obtained results can be used in further research of two-dimensional autonomous systems.

1. Введение

Одна из фундаментальных задач качественной теории дифференциальных уравнений состоит в исследовании поведения траекторий автономной полиномиальной дифференциальной системы

$$\dot{x} = X(x,y) \equiv \sum_{i+j=1}^{n} a_{ij} x^i y^j, \quad \dot{y} = Y(x,y) \equiv \sum_{i+j=1}^{n} b_{ij} x^i y^j \tag{1}$$

с действительными коэффициентами в окрестности сложной точки покоя [1, стр. 86], расположенной в начале координат. Для линейных систем такая задача была решена А. Пуанкаре [2]. Далее указанной задачей для нелинейных систем занимались А. Н. Берлинский [3], И. С. Куклес [4], В. В. Потлов [5], Э. В. Вдовина [6], А. Ф. Андреев [7; 8] и многие другие авторы. Наиболее полные исследования автономных систем с приведенными типами расположения траекторий в окрестности сложной точки покоя были опубликованы в работах М. Е. Сагаловича [9] и Л. Н. Лебедевой [10]. Полная классификация локальных фазовых портретов двумерных аналитических систем с ненулевыми квадратичными частями и коэффициентные критерии их реализации были получены в диссертации первого автора [11]. В работе [11] также представлен и более подробный обзор результатов исследований, проведенных ранее другими авторами в данном направлении.

Исследование поведения автономных систем с более высокими нелинейностями столкнулось с рядом сложностей. Так, для систем с нелинейностями третьей степени изучение O^+-кривых с заданными характеристиками сводится к решению уравнения четвертой степени, которое может не иметь действительных корней. В этом случае начало координат системы (1) является монодромной точкой покоя, для которой возникает проблема различения центра и сложного фокуса, и большинство исследований, как правило, посвящены именно этой проблеме. Классические результаты, посвященные проблеме различения центра и фокуса, хорошо представлены в известной монографии [12]. В работах первого автора [13; 14] приведены исследования кубических систем (1) в частных случаях, получены локальные фазовые портреты, их коэффициентные критерии и указаны условия монодромности начала координат как сложной точки покоя. Изучение поведения траекторий системы (1) в случае $n = 4$, т. е. с нелинейностями четвертой степени значительно усложняется необходимостью решения алгебраического уравнения пятой степени.

Целью нашей работы является получение коэффициентных критериев реализации каждого из локальных фазовых портретов в окрестности сложной точки покоя для автономных систем с однородными многочленами четвертой степени в правой части, в зависимости от вида коэффициентов такой системы. Некоторые первичные результаты исследования этих систем, полученные первым автором, представлены в работах [14; 15]. В статье [16] получены коэффициентные критерии реализации нескольких случаев локальных фазовых портретов системы (1) при $n = 4$, в настоящей работе мы представляем результаты изучения других случаев этой системы. Проведенное нами здесь исследование использует один из эффективных способов расщепления сложных особых точек – метод Фроммера, который впервые был предложен в работах [17; 18], затем был дополнен И. С. Куклесом [4] и получил дальнейшее развитие в работах А. Ф. Андреева, А. П. Садовского [7; 8; 19]. В нашем исследовании метод Фроммера, суть которого будет кратко изложена ниже, использован, опираясь именно на работы [7; 8; 19]. Описание других методов исследования сложных точек покоя можно найти в монографии [20].

Идея получения полной классификации локальных фазовых портретов для двумерных автономных систем с нулевыми линейными и ненулевыми квадратичными частями была предложена профессором А. П. Садовским. Под его руководством первым автором были исследованы двумерные аналитические системы с ненулевыми квадратичными частями, и сформулирована их полная классификация [11; 21]. Данная статья содержит результаты, полученные под влиянием и при содействии профессора Антона Павловича Садовского.

2. Предварительные сведения

Рассмотрим систему вида (1) при $n = 4$ с нулевыми коэффициентами при младших степенях:

$$\dot{x} = a_1x^4 + b_1x^3y + c_1x^2y^2 + d_1xy^3 + e_1y^4, \quad \dot{y} = a_2x^4 + b_2x^3y + c_2x^2y^2 + d_2xy^3 + e_2y^4. \tag{2}$$

В случае, если в (2) $e_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, то с помощью преобразования $x \mapsto \frac{x}{\sqrt[15]{e_1a_2^4}}, y \mapsto \frac{y}{\sqrt[15]{e_1^4a_2}}$ можно уменьшить количество произвольных параметров этой системы, приведя (2) к виду

$$\dot{x} = ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + y^4, \quad \dot{y} = x^4 + \beta x^3y + \gamma x^2y^2 + \delta xy^3 + \varepsilon y^4. \tag{3}$$

Поведение системы (3) исследуем при помощи метода Фроммера [7; 8; 19], представляющего собой классический инструмент для изучения сложных точек покоя, который также называют «прямым геометрическим методом». Далее приведем определения используемых терминов и кратко изложим алгоритм применения метода, суть которого заключается в исследовании порядков μ и мер ρ кривизны O^+-кривых системы (3).

Определение 2.1 [8, с. 7; 19, с. 4]. Полутраекторию $l = \varphi(t)$, где $\varphi : [\alpha; +\infty) \to R^2$ решение системы (1) с $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$, будем называть O^+-кривой системы (1).

Если для полутраектории $l = \varphi(t)$, $\varphi : (-\infty; \alpha] \to R^2$, выполнено $\lim\limits_{t\to-\infty} \varphi(t) = 0$, то такая траектория называется O^--кривой системы (1) [8, стр. 7]. O^+- и O^--кривые называют O-кривыми системы (1).

Определение 2.2 [8, с. 28]. Если существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to+0} \frac{\ln y(x)}{\ln x} = \mu$, то он называется порядком кривизны O^+-кривой $y = y(x)$ в точке O.

Определение 2.3 [19, с. 27]. Если O^+-кривая $y = y(x)$ имеет порядок кривизны μ и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to+0} \frac{y(x)}{x^\mu} = \rho$, то он называется мерой кривизны O^+-кривой $y = y(x)$.

Таким образом, если система (1) имеет O-кривую с порядком кривизны μ и мерой ρ, то эту кривую можно задать в виде $y(x) = \rho x^\mu + o(x^\mu)$, где $o(x^\mu)$ – бесконечно малая более высокого порядка при $x \to +0$.

Идея метода состоит в нахождении всех возможных O-кривых системы (3) с заданными характеристиками. В случае, когда в (1) $X(0, y) \equiv 0$, система (1) имеет O-кривые с порядком кривизны $\mu = 0$ и с порядком $\mu = +\infty$ – в случае, если в (1) $Y(x, 0) \equiv 0$. В (3) эти условия не выполнены, поэтому система не имеет O-кривых с указанными порядками. Для определения возможных конечных порядков кривизны, по степеням переменных x, y, входящих в правые части (1), строится ломаная (диаграмма) Ньютона [7; 17–19], по правилу: слагаемому вида $a_{ij}x^i y^j$ в первом уравнении системы ставится в соответствие точка с координатами $(j+1; i-1)$, а каждому слагаемому вида $b_{ij}x^i y^j$ второго уравнения – соответственно точка $(j; i)$ [19, с. 27], и тогда числа $\mu_p = -k_p$, где k_p – угловые коэффициенты звеньев ломаной, и только они будут возможными конечными порядками кривизны O-кривых системы (1), кроме того, если ломаная Ньютона имеет кратные (двойные) вершины, выделяют особые порядки кривизны. Для исследования O^+-кривых системы (1) с обыкновенными порядками кривизны μ_p, $p = \overline{1, m}$, используют замену $y = ux^{\mu_p}$. Указанная замена и исключение времени приводит (1) к дифференциальному уравнению вида

$$\frac{du}{dx}x^l = \frac{B_{\mu_p}(u) + B(x, u)}{A_{\mu_p}(u) + A(x, u)}.$$

Возможными конечными мерами кривизны O-кривых с заданным порядком μ_p могут быть вещественные корни уравнения $B_{\mu_p}(u) = 0$ и только они. Пусть $u = u_p$ – действительные корни этого уравнения. Для исследования характера O^+-кривых с порядком $\mu = \mu_p$ и мерами $\rho = u_p$ в последнем дифференциальном уравнении делают замены переменных вида $u = v + u_p$. Преобразованные уравнения приобретают вид

$$\frac{dv}{dx}x^l = \frac{cv^m + c_1v^{m+1} + \ldots + c_{n-m}v^n + B_1(x, v)}{d + d_1v + \ldots + d_nv^n + A_1(x, v)},$$

где $c \neq 0$, $n \geqslant m$. Если $d \neq 0$, то последнее уравнение приводится к виду

$$\frac{dv}{dx}x^l = av^m + a_1v^{m+1} + \ldots + V(x, v), \text{ где } a = \frac{c}{d}. \tag{4}$$

В работах [7; 8; 19] был получен следующий результат

Теорема 2.4. *Если*

1) $l = 1$, m *– нечетное,* $g < 0$, *то существует единственная* O^+*-кривая с порядком кривизны* $\mu = \mu_p$ *и мерой* $\rho = u_p$, *которую можно записать в виде* $y(x) = u_px^{\mu_p} + o(x^{\mu_p})$.

2) $l = 1$, m *– нечетное,* $g > 0$ *либо* m *– четное, то существует бесконечное множество (открытых, либо полуоткрытых пучков) таких* O^+*-кривых.*

3) $l>1$, $m=1$, $g<0$, *то существует единственная* O^+*-кривая с порядком кривизны* $\mu=\mu_p$ *и мерой* $\rho=u_p$.

4) $l>1$, $m=1$, $g>0$, *то существует открытый пучок таких* O^+*-кривых.*

В случае $d=0$ *либо* $d\neq 0$, $l>1$, $m>1$ *к уравнению* (4) *следует еще раз применить метод Фроммера.*

Для удобства рассуждений, можно применять метод Фроммера в каждой четверти отдельно. Так, полагая, что $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$ проверяем наличие O^+-кривых с заданными характеристиками в первой четверти, рассматривая только положительные корни уравнения $B_{\mu_p}(u)=0$. Исследования в остальных четвертях сводятся к исследованию в первой посредством замен $x\mapsto -x$, $y\mapsto y$ для второй, и $x\mapsto -x$, $y\mapsto -y$ и $x\mapsto x$, $y\mapsto -y$ соответственно для третьей и четвертой четвертей.

Совокупность O-кривых системы разбивается на конечное число попарно непересекающихся пучков, каждый их которых открыт (П), либо состоит из единственной O-кривой (К). Два соседних пучка вида К образовывают H-сектор (гиперболический), вида П – соответственно E-сектор (эллиптический), и соседние пучки разных типов образуют P-сектор Бендиксона (параболический). Например, если вспомнить виды локальных фазовых портретов для линейных систем, то седло выражается портретом $HHHH$, либо HH в вырожденном случае, а узел – выражается портретом P. Однако в случае сложной особой точки зависимость более сложная, и количество элементарных секторов Бендиксона намного больше. Будем считать, что нам известен локальный фазовый портрет особой точки $O(0;0)$, если известно разбиение окрестности точки $O(0;0)$ на секторы Бендиксона, их количество и циклический порядок следования по окружности достаточно малого радиуса.

В определениях и методике исследования использовались ссылки на систему (1), все изложенные сведения справедливы и для (3), как частного вида (1).

3. Основная часть

Исследуем поведение системы (3) в окрестности сложной точки покоя $O(0;\,0)$. Построим диаграмму Ньютона. Действуя по изложенному выше правилу, получаем, что членам первого уравнения системы (3) соответствуют точки с координатами $(1;\,3)$, $(2;\,2)$, $(3;\,1)$, $(4;\,0)$ и $(5;\,-1)$, а членам второго уравнения системы (3) соответственно точки $(0;\,4)$, $(2;\,2)$, $(3;\,1)$ и $(4;\,0)$. Учитывая выпуклость ломаной Ньютона, получаем, что она имеет одно ребро с угловым коэффициентом $k=-1$, значит $\mu=1$ – единственный возможный конечный порядок кривизны O^+-кривых системы (3). Выполнив в (3) замену $y=ux$ и исключая время, приходим к уравнению

$$\frac{du}{dx}x=\frac{-u^5+(\varepsilon-d)u^4+(\delta-c)u^3+(\gamma-b)u^2+(\beta-a)u+1}{a+bu+cu^2+du^3+u^4}. \tag{5}$$

Возможными конечными мерами кривизны O^+-кривых системы (3) будут вещественные корни уравнения и только они

$$u^5-(\varepsilon-d)u^4-(\delta-c)u^3-(\gamma-b)u^2-(\beta-a)u-1=0. \tag{6}$$

Пусть $\Delta=1+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$. При выполнении условия

$$a+b+c+d=\Delta-1, \tag{7}$$

число $u=1$ является корнем уравнения (6). В дальнейшем предполагаем, что условие (7) выполнено и $\Delta\neq 0$. Случай $\Delta=0$ требует повторного применения метода Фроммера и в настоящей работе не рассматривается. При выполнении (7) уравнение (6) можно представить в виде

$$(u-1)(u^2+p_1u+q_1)(u^2+p_2u+q_2)=0, \tag{8}$$

где $p_1,p_2,q_1,q_2\in R$, $q_1q_2=1$. В этом случае коэффициенты системы (3) будут удовлетворять соотношениям

$$a=\beta+q_1q_2-p_1q_2-p_2q_1,\ b=\gamma+p_1q_2+p_2q_1-p_1p_2-q_2-q_1,$$
$$c=\delta+p_1p_2-p_1-p_2+q_1+q_2,\ d=\varepsilon+p_1+p_2-1.$$

А уравнение (5) перепишется в виде

$$xdu/dx = \big((1-u)(u^2+p_1u+q_1)(u^2+p_2u+q_2)\big) \,/\, \big(u^4+p_1u^3+p_2u^3+\varepsilon u^3-u^3+q_1u^2+ \\ +q_2u^2+p_1p_2u^2+\delta u^2-p_1u^2-p_2u^2+p_1q_2u+p_2q_1u+\gamma u-q_1u-q_2u-p_1p_2u+q_1q_2+\beta- \\ -p_1q_2-p_2q_1\big). \qquad (9)$$

Наличие конечных мер кривизны O^+-кривых системы (3) зависит от количества вещественных корней уравнения (8).

Нас интересует наличие корней уравнения (8), отличных от единицы, что зависит от значений параметров $p_1, p_2, q_1, q_2 \in R$. Учитывая, что $q_1q_2 = 1$, разобьем исследование на три случая, в зависимости от значений параметров q_1 и q_2: два частных случая: $q_1 = q_2 = 1$ и $q_1 = q_2 = -1$, и общий случай $q_1 = \frac{1}{q_2}$, $|q_1| \neq 1$.

Первый случай: $q_1 = q_2 = 1$.

Для удобства рассуждений разобьем исследование на части, придавая следующие значения оставшимся параметрам p_1, p_2:

1. $|p_i| < 2, i = 1,2$;
2. $p_i = 2, |p_k| < 2, i,k = 1,2$, или $p_i = -2, |p_k| < 2, i,k = 1,2$;
3. $|p_i| = 2, i = 1,2$;
4. $|p_i| > 2, |p_k| < 2, i,k = 1,2$;
5. $|p_i| = 2, |p_k| > 2, i,k = 1,2$, или $|p_i| > 2, i = 1,2$.

В первом случае уравнение (8) имеет только один вещественный корень $u_1 = 1$, и, следовательно, возможной конечной мерой кривизны O^+-кривых системы (3) с порядком $\mu = 1$ может быть только число $\rho = 1$. Следуя [19, с. 47], выполним в (9) замену $u = v+1$, получим $\frac{dv}{dx}x = -\frac{(p_1+2)(p_2+2)}{\Delta}v + V(x,v)$, и, согласно теореме 2.4, при $\Delta(p_1+2)(p_2+2) > 0$ система (3) имеет единственную O^+-кривую с порядком $\mu = 1$ и мерой $\rho = 1$, а в случае $\Delta(p_1+2)(p_2+2) < 0$ – открытый пучок таких O^+-кривых. O^+-кривых с другими порядками в этом случае система (3) не имеет. Во второй четверти уравнение (9) примет вид

$$xdu/dx = -\big((u+1)(u^2-p_1u+1)(u^2-p_2u+1)\big) \,/\, \big(u^4-(\varepsilon+p_1+p_2+1)u^3+ \\ +(\delta+p_1p_2-p_1-p_2+2)u^2+(p_1p_2-p_1-p_2+2-\gamma)u+\beta-p_1-p_2+1\big),$$

это значит, что уравнение (8) не имеет положительных действительных корней, и система (3) не имеет O^+-кривых во второй четверти. Уравнения вида (9) для системы (3) в третьей и четвертой четвертях соответствуют аналогичным в первой и второй четвертях. Значит, для полного исследования достаточно рассматривать наличие O^+-кривых с заданными характеристиками в первых двух четвертях. Итак, в случае, $|p_i| < 2$, $i = 1,2$, получаем, что при $\Delta > 0$ система (3) представится локальным фазовым портретом HH (рис. 1) и соответственно $PEPE$ (рис. 2) при $\Delta < 0$.

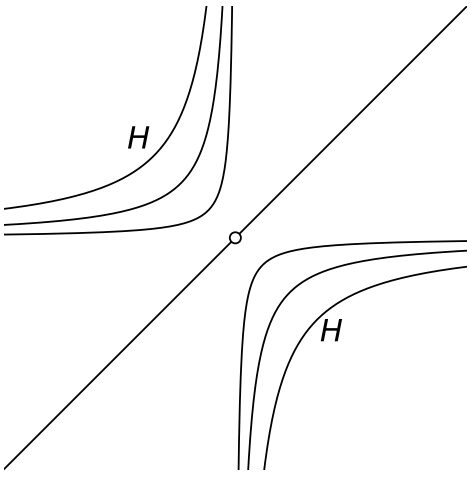


Рис. 1. Локальный портрет HH

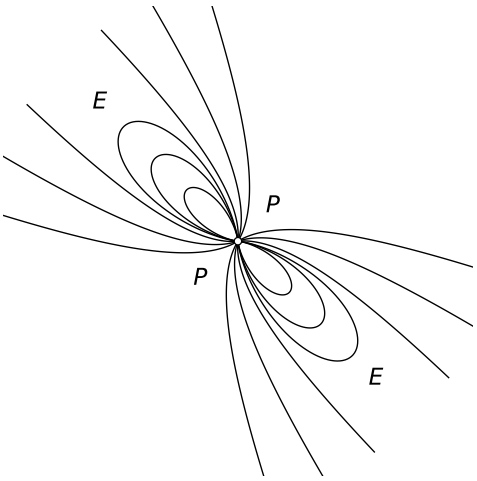


Рис. 2. Локальный портрет $PEPE$

Во втором случае, если $p_i = -2$, $|p_k| < 2$, $i,k = 1,2$, поведение системы (3) в окрестности сложной точки покоя абсолютно такое же, так как в этом случае уравнение (8) приобретает вид $(u-1)^3(u^2+p_ku+1)=0$, кратность корня $u_1=1$ равна трем, согласно теореме 2.4 будем иметь единственную O^+-кривую с порядком $\mu=1$ и мерой $\rho=1$ при $\Delta>0$ и открытый пучок таких O^+-кривых при $\Delta<0$. Если же $p_i=2$, $|p_k|<2$, $i,k=1,2$, то в первой четверти уравнение (9) запишется в виде

$$\frac{du}{dx}x = -\frac{(u-1)(u+1)^2(u^2+p_ku+1)}{u^4+(\varepsilon+p_k+1)u^3+(\delta+p_k)u^2+(\gamma-p_k)u+\beta-p_k-1}. \tag{10}$$

Выполняя в (10) замену $u=v+1$, получаем, что система (3) имеет единственную O^+-кривую с порядком $\mu=1$ и мерой $\rho=1$, если $\Delta>0$, и открытый пучок таких O^+-кривых, если $\Delta<0$. А во второй четверти уравнение (9) примет вид

$$\frac{du}{dx}x = -\frac{(u+1)(u-1)^2(u^2-p_ku+1)}{u^4-(\varepsilon+p_k+1)u^3+(\delta+p_k)u^2-(\gamma-p_k)u+\beta-p_k-1}, \tag{11}$$

уравнение (8) имеет корень $u_1=1$ кратности 2. Выполняя замену $u=v+1$ в уравнении (11), получаем $\frac{dv}{dx}x = Av^2+V(x,v)$, что соответствует случаю 2 теоремы 2.4, следовательно, система (3) имеет полуоткрытый пучок O^+-кривых с порядком кривизны $\mu=1$ и мерой $\rho=1$. Это значит, что при $\Delta>0$ система (3) имеет локальный фазовый портрет $PHPH$ и $PEPE$ при $\Delta<0$ (рис. 3 и 4 соответственно).

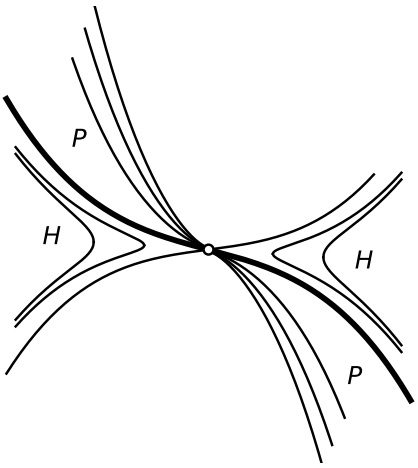


Рис. 3. Локальный портрет $PHPH$

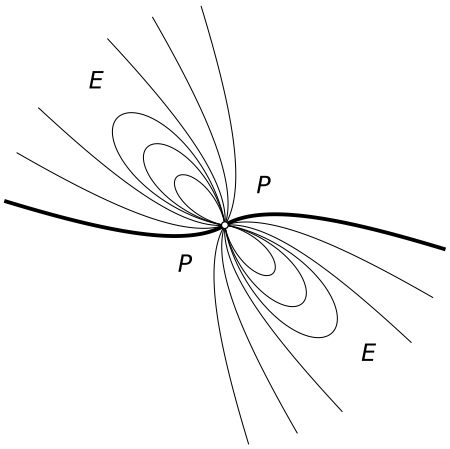


Рис. 4. Локальный портрет $PEPE$

На рис. 3, 4 и далее более жирным выделена граничная O^+-кривая соответствующего полуоткрытого пучка.

В третьем случае, при $p_1=p_2=-2$, получаем, что уравнение (8) имеет один вещественный корень $u_1=1$ кратности пять в первой и третьей четвертях, и этот случай соответствует случаю 1. Если же $p_1=p_2=2$ либо $p_i=-2$, $p_k=2$, $i,k=1,2$, то в одной четверти будем иметь корень $u_1=1$ нечетной кратности, а в другой – этот же корень четной кратности, что соответствует уже рассмотренному случаю 2.

Рассмотрим четвертый случай. Будем считать, для определенности, что $|p_1|>2$, $|p_2|<2$. Уравнение (8) при $p_1>2$ в первой четверти имеет положительный корень $u_1=1$, исследование которого аналогично случаю 1. Во второй четверти уравнение вида (8) имеет два положительных корня $u_{2,3}=\frac{p_1\pm\sqrt{p_1^2-4}}{2}$. Обозначим $m^2=p_1^2-4$, тогда корни можно переписать в виде $u_{2,3}=\frac{p_1\pm m}{2}$, при этом $u^2=\frac{p_1+m}{2}>1$ и $u^3=\frac{p_1-m}{2}=\frac{2}{p_1+m}<1$. Выполнив в (9) замены $u=v+\frac{p_1+m}{2}$, $u=v+\frac{p_1-m}{2}$ соответственно получим

$$\frac{dv}{dx}x = \frac{0,5m(p_1+m+2)(p_1^2+m(p_1-p_2)-p_1p_2)}{(1+\varepsilon(1+m^2)+\gamma-\delta m)(p_1+m)+2(\varepsilon m-\beta-\delta-m)}v+V(x,v),$$

$$\frac{dv}{dx}x = \frac{-0,5m(p_1-m+2)(p_1^2-m(p_1-p_2)-p_1p_2)}{(1+\varepsilon(1+m^2)+\gamma+\delta m)(p_1-m)-2(\varepsilon m+\beta+\delta-m)}v+V(x,v).$$

Введем обозначения $A = 1+\varepsilon(1+m^2)+\gamma$, $B = 2+\delta p_1 - 2\varepsilon - A$, $C = 2\beta + 2\delta + \delta m^2 - Ap_1$. Тогда знаменатели последних двух уравнений преобразуются соответственно в выражения $-C-Bm$ и $-C+Bm$, учитывая, что $p_1 \pm m + 2 > 0$, и полагая

$$I_{11} = (p_1^2 + m(p_1-p_2) - p_1p_2)(C+Bm), \quad I_{12} = (p_1^2 - m(p_1-p_2) - p_1p_2)(C-Bm)$$

получаем, что в случае $I_{11} > 0$, $I_{12} < 0$, $p_1 > 2$ система (3) имеет единственные O^+-кривые с $\mu = 1$, $\rho = \frac{p_1+m}{2}$ и $\mu = 1$, $\rho = \frac{2}{p_1+m}$, и открытые пучки таких O^+-кривых при $p_1 > 2$, $I_{11} < 0$, $I_{12} > 0$. Если же $p_1 < -2$, то уравнение (8) имеет в первой четверти три положительных корня $u_1 = 1$, $u_{2,3} = \frac{-p_1 \pm \sqrt{p_1^2-4}}{2}$. Рассуждая аналогично для каждого из полученных корней и учитывая введенные выше обозначения, получаем, что в случае $p_1 < -2$ при $I_{11} > 0$, $I_{12} > 0$ система (3) имеет единственные O^+-кривые с $\mu = 1$, $\rho = \frac{-p_1+m}{2}$ и $\mu = 1$, $\rho = \frac{2}{-p_1+m}$ соответственно, а при $I_{11} < 0$, $I_{12} < 0$ открытые пучки таких O^+-кривых.

Если же $|p_1| < 2$, $|p_2| > 2$, то, в зависимости от знака p_2 в первой либо второй четверти, уравнение (8) кроме корня $u_1 = 1$ имеет корни $u_{2,3} = \frac{-p_2 \pm \sqrt{p-2^2-4}}{2}$ (указаны корни в первой четверти в случае $p_2 < -2$). Полагая $D = 1+\varepsilon(1+n^2)+\gamma$, $E = 2+\delta p_2 - 2\varepsilon - D$, $F = 2\beta + 2\delta + \delta n^2 - Cp_2$, где $n^2 = p_2^2 - 4$, и обозначив

$$I_{21} = (p_2^2 - n(p_1-p_2) - p_1p_2)(F+En), \quad I_{22} = (p_2^2 + n(p_1-p_2) - p_1p_2)(F-En),$$

получаем, что в случае $I_{21} > 0$, $I_{22} < 0$, $p_2 > 2$ либо $I_{21} > 0$, $I_{22} > 0$, $p_2 < -2$ – у системы (3) единственные O^+-кривые с $\mu = 1$, $\rho = \frac{|p_2|+n}{2}$ и $\mu = 1$, $\rho = \frac{2}{|p_2|+n}$ соответственно, и открытые пучки соответствующих O^+-кривых при $p_2 > 2$, $I_{21} < 0$, $I_{22} > 0$ и $p_2 < -2$, $I_{21} < 0$, $I_{22} < 0$.

В пятом случае наиболее интересным является случай, когда $|p_i| = 2$, $|p_k| > 2$, $i,k = 1,2$. Для определенности, далее будем считать, что $p_1 > 2$, $p_2 = 2$. В этом случае в первой четверти уравнение (9) запишется в виде (10), и с учетом введенных ограничений получаем, что в первой (и третьей) четверти система (3) имеет единственную O^+-кривую с порядком $\mu = 1$ и мерой $\rho = 1$, если $\Delta > 0$, и открытый пучок таких O^+-кривых, если $\Delta < 0$. А во второй четверти уравнение (9) примет вид (11), и согласно теореме 2.4, система (3) имеет во второй (и четвертой) четверти полуоткрытый пучок O^+-кривых с порядком кривизны $\mu = 1$ и мерой $\rho = 1$.

Рассмотрим наличие O^+-кривых с мерами, отличными от единицы. Во второй четверти это $u_{2,3} = \frac{p_1 \pm m}{2}$, с учетом введенных выше обозначений. Выполняя в (9) замены $u = v + \frac{p_1+m}{2}$, $u = v + \frac{p_1-m}{2}$ соответственно получим

$$\frac{dv}{dx}x = \frac{0,25m(p_1+m+2)(p_1+m-2)^2}{(1+\varepsilon(1+m^2)+\gamma-\delta m)(p_1+m)+2(\varepsilon m-\beta-\delta-m)}v + V(x,v),$$

$$\frac{dv}{dx}x = \frac{-0,25m(p_1-m+2)(p_1-m-2)^2}{(1+\varepsilon(1+m^2)+\gamma+\delta m)(p_1-m)-2(\varepsilon m+\beta+\delta-m)}v + V(x,v),$$

и с учетом того, что выражения, стоящие в числителях последних уравнений, имеют определенный знак, количество O^+-кривых с указанными мерами зависит только от выражений, стоящих в знаменателе, т. е. от выражений $-C-Bm$ и $-C+Bm$ соответственно. В этом случае система (3) будет иметь единственные O^+-кривые $\mu = 1$, $\rho = \frac{p_1+m}{2}$ и $\mu = 1$, $\rho = \frac{2}{p_1+m}$ соответственно при $C+Bm > 0$ и $-C+Bm > 0$ и открытые пучки таких O^+-кривых, если указанные выражения отрицательны. Остальные случаи для $|p_i| = 2$, $|p_k| > 2$, $i,k = 1,2$, рассматриваются аналогичным образом. Если же $|p_i| \geqslant 2$, $i = 1,2$, то уравнение (8) имеет 5 различных вещественных корней, знаки которых зависят от знаков параметров p_i, $i = 1,2$. Корнями будут числа $u_1 = 1$, $u_{2,3} = \frac{|p_1| \pm m}{2}$, $u_{4,5} = \frac{|p_2| \pm n}{2}$. Условия существования O^+-кривых с заданными характеристиками приведены выше. Таким образом, получены следующие результаты.

Теорема 3.1. *В случае, когда либо $|p_1| \leqslant 2$, либо $|p_2| \leqslant 2$, начало координат $O(0,0)$ системы* (3) *представится следующими локальными фазовыми портретами:*

1) *НН при $\Delta > 0$, при $p_1 = p_2 = -2$ или $|p_i| < 2$, $i = \overline{1,2}$, или $p_i = -2$, $|p_k| < 2$, $i,k = \overline{1,2}$;*

2) *РЕРЕ при $\Delta < 0$, $|p_i| \leqslant 2$, $i = \overline{1,2}$; при $p_i > 2$, $|p_k| < 2$ в случае $\Delta < 0$, $I_{i1}I_{i2} > 0$ или $\Delta > 0$, $I_{i1} < 0$, $I_{i2} > 0$; при $p_i < -2$, $|p_k| < 2$ в случае $\Delta > 0$, $I_{i1}I_{i2} < 0$ или $\Delta < 0$, $I_{i1} < 0$, $I_{i2} < 0$, $i,k = \overline{1,2}$;*

3) $(HH)_3$ *при* $\Delta(p_i+2)>0$, $I_{i1}>0$ *в случае* $I_{i2}<0$, $p_i>2$ *или* $I_{i2}>0$, $p_i<-2$, $i=\overline{1,2}$;

4) $PHPH$ *при* $\Delta>0$, $p_i=2$, $|p_k|\leqslant 2$, $i,k=\overline{1,2}$, *при* $\Delta(p_i+2)<0$, $I_{i1}>0$ *в случае* $I_{i2}<0$, $p_i>2$ *или* $I_{i2}>0$, $p_i<-2$; *при* $\Delta(p_i+2)>0$, $I_{i1}I_{i2}>0$, $p_i>2$ *или* $I_{i1}I_{i2}<0$, $p_i<-2$, $i=\overline{1,2}$;

5) $(PE)_6$ *при* $\Delta(p_i+2)<0$, $I_{i1}<0$ *в случае* $I_{i2}>0$, $p_i>2$ *или* $I_{i2}<0$, $p_i<-2$, $i=\overline{1,2}$.

Замечание 3.2. *Здесь и далее запись* $(\ldots)_k$ *обозначает, что секторы Бендиксона, указанные в скобках, повторяются циклически k раз при обходе по окружности достаточно малого радиуса.*

Теорема 3.3. *В случае* $|p_1|>2$, $|p_2|=2$ *начало координат* $O(0,0)$ *системы* (3) *имеет следующие локальные фазовые портреты:*

1) $(PHHH)_2$ *при* $\Delta>0$, $C+Bm>0$, $p_1(C-Bm)<0$;

2) $PHPH$ *при* $\Delta>0$, $\Delta_1>0$, $C+Bm>0$, $p_1(C-Bm)>0$ *или* $\Delta>0$, $\Delta_1<0$, $C+Bm>0$, $p_1(C-Bm)<0$ *или* $\Delta<0$, $C+Bm>0$, $p_1(C-Bm)<0$;

3) $(PEPHH)_2$ *при* $\Delta>0$, $\Delta_1(C+Bm)<0$, $p_1(C-Bm)>0$;

4) $(PEPEPH)_2$ *при* $\Delta<0$, $\Delta_1(C+Bm)<0$, $\Delta_1 p_1(C-Bm)<0$;

5) $PEPE$ *при* $\Delta>0$, $C+Bm<0$, $p_1(C-Bm)>0$, *или при* $\Delta<0$, $\Delta_1(C+Bm)>0$, $\Delta_1 p_1(C-Bm)>0$;

6) $(PE)_6$ *при* $\Delta<0$, $C+Bm<0$, $p_1(C-Bm)>0$.

Здесь и далее $\Delta_1=-1+\beta-\gamma+\delta-\varepsilon$.

Замечание 3.4. *В случае* $|p_2|>2$, $|p_1|=2$ *начало координат* $O(0,0)$ *системы* (3) *имеет локальные фазовые портреты* $(PHHH)_2$, $PHPH$, $(PEPHH)_2$, $(PEPEPH)_2$, $PEPE$ *и* $(PE)_6$, *коэффициентные критерии реализации которых аналогичны приведенным в теореме* 3.3. *(Для этого достаточно заменить* $m\mapsto n$, $C\mapsto F$, $B\mapsto E$, $p_1\mapsto p_2$.*)*

Теорема 3.5. *В случае* $|p_i|>2$, $i=\overline{1,2}$, *начало координат* $O(0,0)$ *системы* (3) *представится следующими локальными фазовыми портретами:*

1) $(HH)_5$ *при* $\Delta>0$, $I_{ki}<0$, $p_i<-2$, $i,k=\overline{1,2}$, *или* $I_{k1}>0$, $I_{k2}<0$, $p_k>2$, $k=\overline{1,2}$;

2) $(PHHH)_2$ *при* $\Delta>0$, $I_{ki}<0$, $I_{lm}>0$, $p_i<-2$, *где* $i,k,l,m=1,2$, $\overline{ik}\neq\overline{lm}$;

3) $PHPH$ *при* $I_{i1}I_{i2}<0$, $p_i<-2$ *или* $I_{k1}I_{k2}>0$, $p_k>2$ *или* $I_{i1}<0$, $I_{k2}>0$, $p_i<-2$, $i,k=\overline{1,2}$ *в случае* $\Delta>0$;

4) $(PEPHH)_2$ *при* $\Delta>0$, $p_i>2$, $I_{i1}I_{i2}<0$ *или* $\Delta<0$, $p_i>2$ *в случае* $I_{21}<0$, $I_{ik}>0$, $\overline{ik}\neq 21$, *или* $I_{21}<0$, $I_{ik}>0$, $\overline{ik}\neq 12$; *при* $p_i<-2$, $\Delta>0$, $\forall I_{ik}>0$ *или* $\forall I_{ik}<0$; *при* $\Delta<0$, $p_i<-2$, $I_{11}>0$, $I_{ik}<0$, $\overline{ik}\neq 11$ *или* $I_{22}<0$, $I_{ik}>0$, $\overline{ik}\neq 22$;

5) $(PEPEPH)_2$ *при* $\Delta>0$, $p_i>2$, $I_{12}>0$, $I_{ik}<0$, $\overline{ik}\neq 12$ *или* $I_{21}>0$, $I_{ik}<0$, $\overline{ik}\neq 21$; *при* $\Delta<0$, $p_i>2$, $I_{11}I_{21}>0$, $I_{12}I_{22}>0$;

6) $PEPE$ *при* $\Delta>0$, $p_i>2$, $I_{11}>0$, $I_{ik}<0$, $\overline{ik}\neq 11$ *или* $I_{22}<0$, $I_{ik}>0$, $\overline{ik}\neq 22$; *при* $\Delta<0$, $p_i>2$, $I_{11}I_{21}>0$, $I_{12}I_{22}>0$;

7) $(PE)_6$ *при* $\Delta>0$, $p_i>2$, $\forall I_{ik}<0$, *или* $\Delta>0$, $p_i<-2$, $I_{k1}<0$, $I_{i2}>0$, $i,k=\overline{1,2}$ *или* $\Delta<0$, $p_i>2$, $\forall I_{ki}<0$, $\forall I_{lm}<0$, *где* $i,k,l,m=1,2$, $\overline{ik}\neq\overline{lm}$;

8) $(PE)_{10}$ *при* $\Delta<0$, $p_i>2$, $\forall I_{ik}<0$, *или при* $p_i<-2$, $I_{k1}<0$, $I_{k2}>0$.

Замечание 3.6. *Первый случай был рассмотрен в* [15]. *Были получены локальные фазовые портреты системы* (3), *указанные в теоремах* 3.1, 3.3, 3.5, *однако не для всех случаев были приведены коэффициентные критерии. Не были рассмотрены случаи кратных корней.*

На рис. 1–10 представлены некоторые из локальных фазовых портретов, указанные в теоремах 2.4, 3.1, 3.3, 3.5, рис. 5 и 8 соответствуют теоремам 3.1 и 3.3, а именно случаю $|p_i|=2$, $|p_k|>2$, $i,k=1,2$.

Второй случай: $q_1=q_2=-1$.

В этом случае уравнение (8) всегда имеет пять вещественных корней. При $\Delta p_1p_2>0$ система (3) имеет единственную O^+-кривую с порядком $\mu=1$ и мерой $\rho=1$, а в случае $\Delta p_1p_2<0$ – открытый пучок таких O^+-кривых. Проводя рассуждения, аналогичные первому случаю, и обозначая

$$A_1=-1+\varepsilon(m^2-1)+\gamma,\quad B_1=2-\delta p_1-2\varepsilon+A_1,\quad C_1=2\beta-2\delta+\delta m^2-A_1p_1,$$

$$D_1=-1+\varepsilon(n^2-1)+\gamma,\quad E_1=2-\delta p_2-2\varepsilon+D_1,\quad F_1=2\beta-2\delta+\delta n^2-C_1p_2,$$

$$\tilde I_{11}=(p_1-p_2)(m-p_1-2)(C_1+B_1m),\quad \tilde I_{12}=(p_1-p_2)(B_1m-C_1),$$

$$\tilde I_{21}=(p_2-p_1)(n-p_2-2)(F_1+E_1n),\quad \tilde I_{22}=(p_2-p_1)(E_1n-F_1),$$

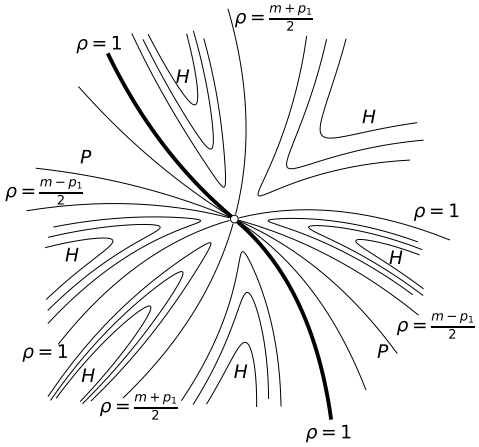


Рис. 5. Локальный портрет $(PHHH)_2$

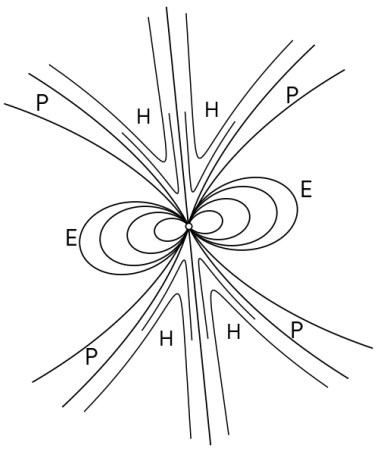


Рис. 6. Локальный портрет $(PEPHH)_2$

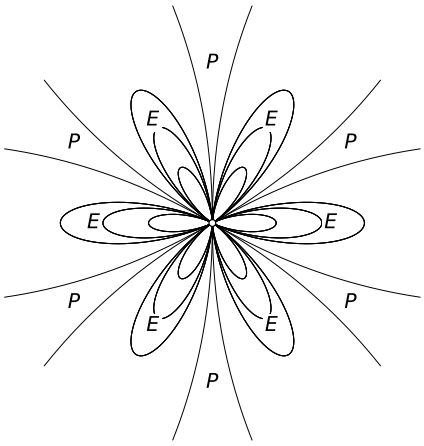


Рис. 7. Локальный портрет $(PE)_6$

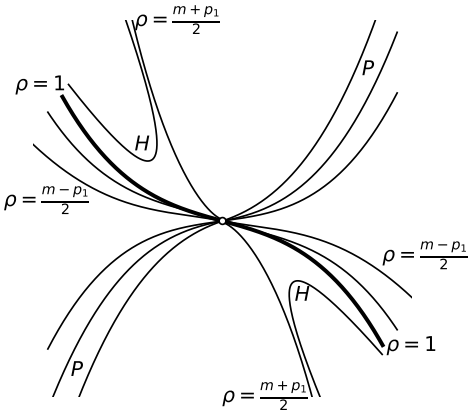


Рис. 8. Локальный портрет $PHPH$

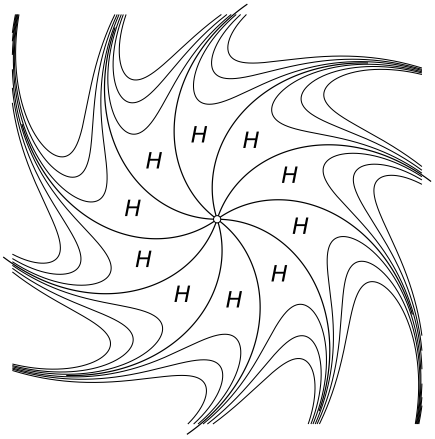


Рис. 9. Локальный портрет $(HH)_5$

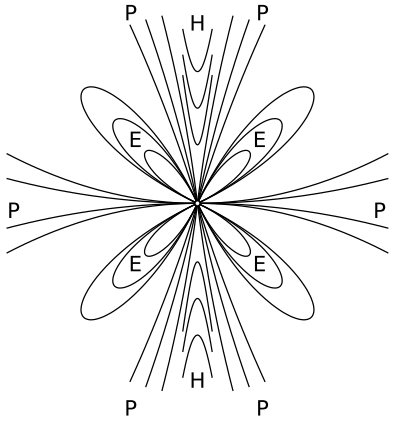


Рис. 10. Локальный портрет $(PEPEPH)_2$

где $m^2 = p_1^2 + 4$, $n^2 = p_2^2 + 4$ получаем, что в случае $\tilde{I}_{11} < 0$ система (3) имеет O^+-кривую с порядком $\mu = 1$ и мерой $\rho = \frac{m-p_1}{2}$ и при $\tilde{I}_{11}$ – открытый пучок таких O^+-кривых. Если $\tilde{I}_{12} < 0$ система (3) имеет единственную O^+-кривую с $\mu = 1$, $\rho = \frac{m+p_1}{2}$, а при $\tilde{I}_{12}$ – открытый пучок таких O^+-кривых. Кроме того, при $\tilde{I}_{21}, \tilde{I}_{22}$ – единственные O^+-кривые с порядком $\mu = 1$ и мерами $\rho = \frac{n+p_2}{2}$ и $\rho = \frac{n-p_2}{2}$ соответственно.

Таким образом имеют место следующие утверждения.

Теорема 3.7. *В случае $p_1 = p_2 = 0$ начало координат $O(0,0)$ системы* (3) *представится такими локальными фазовыми портретами: HH при $\Delta_1 > 0$ и $PEPE$ при $\Delta_1 < 0$.*

Теорема 3.8. *При $p_2 = 0$, $p_1 \neq 0$ начало координат $O(0,0)$ системы* (3) *имеет следующие локальные фазовые портреты:*

1) $(PHHH)_2$ *при* $\Delta_1 > 0$, $|C_1| < B_1 m$;

2) $PHPH$ *при* $\Delta_1(C_1 - B_1 m) > 0$, $p_1 < 0$, $C_1 + B_1 m > 0$ *или* $\Delta_1(C_1 + B_1 m) < 0$, $p_1 > 0$, $C_1 - B_1 m < 0$;

3) $PEPE$ *при* $\Delta_1(C_1 + B_1 m) < 0$, $p_1 < 0$, $C_1 - B_1 m > 0$ *или* $\Delta_1(C_1 - B_1 m) > 0$, $p_1 > 0$, $C_1 + B_1 m < 0$;

4) $(PEPHH)_2$ *при* $\Delta_1 > 0$, $|B_1 m| < C_1$, $p_1 > 0$ *или* $\Delta_1 > 0$, $|B_1 m| > C_1$, $p_1 < 0$;

5) $(PEPEPH)_2$ *при* $\Delta_1 < 0$, $|B_1 m| < C_1$, $p_1 > 0$ *или* $\Delta_1 < 0$, $|B_1 m| > C_1$, $p_1 < 0$;

6) $(PE)_6$ *при* $\Delta_1 < 0$, $|C_1| > B_1 m$.

Замечание 3.9. *В случае $p_1 = 0$, $p_2 \neq 0$ начало координат $O(0,0)$ системы* (3) *имеет локальные фазовые портреты $(PHHH)_2$, $PHPH$, $PEPE$, $(PEPHH)_2$, $(PEPEPH)_2$ и $(PE)_6$, коэффициентные критерии реализации которых аналогичны приведенным в теореме* 3.8. *(Для этого достаточно заменить $m \mapsto n$, $C_1 \mapsto F_1$, $B_1 \mapsto E_1$, $p_1 \mapsto p_2$.)*

Теорема 3.10. *При $p_1 = p_2 \neq 0$ начало координат $O(0,0)$ системы* (3) *представится локальными фазовыми портретами: $PHPH$ и $(PEPHH)_2$ при $\Delta_1 > 0$; $PEPE$ и $(PEPEPH)_2$ в случае $\Delta_1 < 0$.*

Теорема 3.11. *При $p_1 \neq p_2$, начало координат $O(0,0)$ системы* (3) *имеет следующие локальные фазовые портреты:*

1) $(HH)_5$ *при* $\Delta_1 p_1 p_2 > 0$, $\forall \tilde{I}_{ki} < 0$, $i,k = \overline{1,2}$;

2) $(PHHH)_2$ *при* $\Delta_1 p_1 p_2 < 0$, $\forall \tilde{I}_{ki} < 0$, $i,k = \overline{1,2}$, *или* $\Delta_1 p_1 p_2 > 0$, $\tilde{I}_{ki} > 0$, $\tilde{I}_{ik} < 0$, $\tilde{I}_{lm} < 0$, $\tilde{I}_{ml} < 0$, $\overline{ik} \neq \overline{lm}$, $i,k,l,m = \overline{1,2}$;

3) $PHPH$ *при* $\Delta_1 p_1 p_2 > 0$, $\tilde{I}_{12}\tilde{I}_{22} < 0$, $\tilde{I}_{11}\tilde{I}_{21} < 0$ *или* $\Delta_1 p_1 p_2 < 0$ *в случае* $\tilde{I}_{11} > 0$, $\tilde{I}_{ik} < 0$, $\overline{ik} \neq 11$ *или* $\tilde{I}_{22} > 0$, $\tilde{I}_{ik} < 0$, $\overline{ik} \neq 22$;

4) $(PEPHH)_2$ *при* $\Delta_1 p_1 p_2 > 0$, $\tilde{I}_{21}\tilde{I}_{22} < 0$, $\tilde{I}_{11} > 0$, $\tilde{I}_{12} < 0$ *или* $\tilde{I}_{i1} < 0$, $\tilde{I}_{k2} > 0$, $i,k = \overline{1,2}$; *при* $\Delta_1 p_1 p_2 < 0$, $\tilde{I}_{21} > 0$, $\tilde{I}_{ik} < 0$, $\overline{ik} \neq 21$ *или* $\tilde{I}_{12} > 0$, $\tilde{I}_{ik} < 0$, $\overline{ik} \neq 12$;

5) $(PEPEPH)_2$ *при* $\Delta_1 p_1 p_2 < 0$, $\tilde{I}_{11}\tilde{I}_{12} < 0$, $\tilde{I}_{21} > 0$, $\tilde{I}_{22} < 0$ *или* $\tilde{I}_{i1} < 0$, $\tilde{I}_{k2} > 0$, $i,k = \overline{1,2}$; *при* $\Delta_1 p_1 p_2 > 0$, $\tilde{I}_{12}\tilde{I}_{21} < 0$, $\tilde{I}_{11} > 0$, $\tilde{I}_{22} > 0$;

6) $PEPE$ *при* $\Delta_1 p_1 p_2 > 0$, $\tilde{I}_{11} < 0$, $\tilde{I}_{ik} > 0$, $\overline{ik} \neq 11$ *или* $\tilde{I}_{22} < 0$, $\tilde{I}_{ik} > 0$, $\overline{ik} \neq 22$; *при* $\Delta_1 p_1 p_2 < 0$, $\tilde{I}_{1i} > 0$, $\tilde{I}_{2k} < 0$, *или* $\tilde{I}_{1i} < 0$, $\tilde{I}_{2k} > 0$ *или* $\tilde{I}_{ii} > 0$, $\tilde{I}_{kl} < 0$, $i,k,l = \overline{1,2}$, $k \neq l$;

7) $(PE)_6$ *при* $\Delta_1 p_1 p_2 > 0$, $\forall \tilde{I}_{ki} > 0$, $i,k = \overline{1,2}$, *или* $\Delta_1 p_1 p_2 < 0$, $\tilde{I}_{ki} < 0$, $\tilde{I}_{ik} > 0$, $\tilde{I}_{lm} > 0$, $\tilde{I}_{ml} > 0$, *где* $\overline{ik} \neq \overline{lm}$, $i,k,l,m = \overline{1,2}$;

8) $(PE)_{10}$ *при* $\Delta_1 p_1 p_2 < 0$, $\forall \tilde{I}_{ki} > 0$, $i,k = \overline{1,2}$.

Замечание 3.12. *Коэффициентные критерии в теореме* 3.11 *указаны для случая $p_1 > p_2 > 0$. При $p_2 > p_1 > 0$, либо $p_i < 0$, $i = \overline{1,2}$, начало координат $O(0,0)$ системы* (3) *представляется теми же локальными фазовыми портретами* 1)–8).

Третий случай: $q_1 = \frac{1}{q_2}$, $|q_1| \neq 1$.

В этом случае уравнение для определения возможных конечных мер кривизны O^+-кривых системы (3) имеет вид

$$(u-1)(u^2 + p_1 u + q_1)(q_1 u^2 + p_2 q_1 u + 1) = 0. \tag{12}$$

В зависимости от значений параметров p_1, p_2, q_1 уравнение (12) может иметь один, три или пять вещественных корней, а начало координат $O(0,0)$ системы (3) представится следующими локальными фазовыми портретами: $PEPE$, $(HH)_3$, $PHPH$, $(HH)_5$, $(PHHH)_2$, $(PEPEPH)_2$, $(PEPHH)_2$, $(PE)_6$ и $(PE)_{10}$.

Если в (3) не требовать выполнения условия (7), то уравнение для определения возможных мер кривизны O^+-кривых системы (3) можно записать в виде $(u - p_0)(u^2 + p_1 u + q_1)(u^2 + p_2 u + q_2) = 0$, где $p_0 q_1 q_2 = 1$. Анализ данного уравнения проводится аналогично рассмотренным выше случаям и показывает, что отказ от условия (7) не приводит к возникновению новых типов локальных фазовых портретов системы (3) в окрестности начала координат.

Для всех полученных случаев можно построить примеры систем с конкретными значениями параметров, так системы

$$\dot{x} = 3x^4 + 2x^3y - x^2y^2 + xy^3 + y^4, \quad \dot{y} = x^4 + x^3y + 3x^2y^2 - 2xy^3 + 3y^4; \tag{13}$$

$$\dot{x} = 3x^4 - 2x^3y - x^2y^2 - 2xy^3 + y^4, \quad \dot{y} = x^4 + x^3y - x^2y^2 - 2xy^3 \tag{14}$$

соответствуют первому случаю, пункту 2, а именно $p_i = -2$, $|p_k| < 2$, $i,k = 1,2$. Здесь $p_1 = -2$, $p_2 = q_1 = q_2 = 1$. При этом система (13) имеет локальный фазовый портрет HH (теорема 3.1, условие 1, $\Delta = 6 > 0$), а система (14) – $PEPE$ (теорема 3.1, условие 2, $\Delta = -1 < 0$).

Заключение. В работе исследовано поведение траекторий системы (3) в окрестности сложной точки покоя, расположенной в начале координат. Доказано, что в окрестности точки $O(0,0)$ система (3) имеет следующие локальные фазовые портреты: HH, $PEPE$, $(HH)_3$, $PHPH$, $(HH)_5$, $(PHHH)_2$, $(PEPEPH)_2$, $(PEPHH)_2$, $(PE)_6$ и $(PE)_{10}$, все коэффициентные критерии их реализации сформулированы в виде теорем 3.1, 3.3, 3.5, 3.7, 3.8, 3.10, 3.11.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф25КИ-087), а ее результаты были представлены на Китайско-белорусском семинаре по прикладной математике в Университете МГУ-ППИ в Шэньчжэне в апреле 2025 года.

Литература

1. *Баутин Н. Н.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 488 с.

2. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л.: ГИТТЛ, 1947. 392 с.

3. *Берлинский А. Н.* К вопросу о поведении фазовых кривых вблизи состояний равновесия дифференциальных систем алгебраического вида // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 5. С. 757–762.

4. *Куклес И. С.* О методе Фроммера // Известия Академии наук Узбекской ССР. Серия физико-математических наук. 1957. № 4. С. 32–49.

5. *Потлов В. В.* Поведения интегральных кривых однородного дифференциального уравнения // Ученые записки Рязанского государственного педагогического института. 1960. Т. 24. С. 127–137.

6. *Вдовина Э. В.* Классификация особых точек уравнения $y' = \frac{a_0x^2+a_1xy+a_2y^2}{b_0x^2+b_1xy+b_2y^2}$ методом Форстера // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20, № 10. С. 1809–1813.

7. *Андреев А. Ф.* О локальной схеме состояния равновесия // Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6, № 4. С. 677–686.

8. *Андреев А. Ф.* Особые точки дифференциальных уравнений. Мн.: Выш. школа, 1979. 136 с.

9. *Сагалович М. Е.* Некоторые классические задачи локальной качественной теории аналитических динамических систем второго порядка: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Ин-т физики НАН УССР. Киев, 1983. 102 с.

10. *Лебедева Л. Н.* Качественное исследование одного класса систем дифференциальных уравнений: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Ленинград. гос. ун-т. Л., 1986. 116 с.

11. *Детченя Л. В.* Локальные фазовые портреты двумерных аналитических систем с нулевыми линейными и ненулевыми квадратичными частями: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / ГрГУ им. Янки Купалы. Гродно, 2001. 118 с.

12. *Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П.* Нелинейные колебания в системах второго порядка. Мн.: Изд-во БГУ, 1982. 208 с.

13. *Детченя Л. В.* Условия монодромности одной дифференциальной системы // Актуальные проблемы анализа: тез. докл. Междунар. математической конф., Гродно, 7–10 апр. 2009 г. Гродно, 2009. С. 128–129.

14. *Детченя Л. В.* Локальные фазовые портреты одной полиноминальной системы // IX Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. конф., Гродно, 3–6 нояб. 2004 г. Гродно, 2004. Ч. 1. С. 120–121.

15. *Детченя Л. В.* Локальные фазовые портреты дифференциальной системы с нелинейностями четвертой степени // Еругинские чтения – 2011: тез. докл. XIV Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Новополоцк, 12–14 мая 2011 г. Новополоцк, 2011. С. 47–48.

16. *Детченя Л. В., Кузьмич А. В., Чжан Е, Чэнь Ян.* О качественном поведении траекторий дифференциальной системы с нелинейностями четвертой степени в окрестности сложной точки покоя // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2026. Т. 16, № 2. С. 28–38.

17. *Frommer M.* Uber das Auftreten von Wirbeln und Strudeln (geschlossener und spiraliger Integralkurven) in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen // Mathematische Annalen. 1934. Vol. 109, N 3. P. 395–424.

18. *Фроммер М.* Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер // Успехи математических наук. 1941. № 9. С. 212–253.

19. *Садовский А. П.* Локальная качественная теория дифференциальных уравнений на плоскости: учеб. пособие по спецкурсу. Гродно: ГрГУ, 1986. 98 с.

20. *Dumortier F., Libre J., Artes J. C.* Qualitative Theory of Planar Differential Systems. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.

21. *Detchenya L. V., Sadovskii A. P.* Local phase portraits of two-dimensional analytical systems principal parts of which do not contain parameters // Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica. 1998. N 1(26). P. 145–149.

References

1. Bautin N. N. *Methods and Techniques for the Qualitative Analysis of Dynamic Systems in the Plane*. Moscow, Science, 1990. 488 p. (in Russian).

2. Poincare A. *On curves determined by differential equations*. Moscow, Leningrad, State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1947. 392 p. (in Russian).

3. Berlinskiy A. N. On the behavior of phase curves near equilibrium states of differential systems of algebraic type. *Differential Equations*, 1986, vol. 22, no. 5, pp. 757–762 (in Russian).

4. Kukles I. S. About Frommer's method. *Bulletin of the Academy of Sciences of the Uzbek SSR. Series on Physical and Mathematical Sciences*, 1957, no. 4, pp. 32–49 (in Russian).

5. Potlov V. V. Behavior of integral curves of a homogeneous differential equation. *Scientific Notes of the Ryazan State Pedagogical Institute*, 1960, vol. 24, pp. 127–137 (in Russian).

6. Vdovina E. V. Classification of singular points of the equation $y' = \frac{a_0x^2+a_1xy+a_2y^2}{b_0x^2+b_1xy+b_2y^2}$ by Forster's method. *Differential Equations*, 1984, vol. 20, no. 10, pp. 1809–1813 (in Russian).

7. Andreev A. F. On the local equilibrium state scheme. *Differential Equations*, 1970, vol. 6, no. 4, pp. 677–686 (in Russian).

8. Andreev A. F. *Singular Points of Differential Equations*. Minsk, Higher School, 1979. 136 p. (in Russian).

9. Sagalovich M. E. *Some Classical Problems of Local Qualitative Theory of Second-order Analytical Dynamic Systems*. Ph. D. thesis. Kyiv, 1983, 102 p. (in Russian).

10. Lebedeva L. N. *A Qualitative Study of One Class of Systems of Differential Equations*. Ph. D. thesis. Leningrad, 1986, 116 p. (in Russian).

11. Detchenya L. V. *Local Phase Portraits of Two-dimensional Analytical Systems with Zero Linear and Non-zero Quadratic Parts*. Ph. D. thesis. Grodno, 2001, 118 p. (in Russian).

12. Amel'kin V. V., Lukashevich N. A., Sadovskii A. P. *Nonlinear Oscillations in Second-order Systems*. Minsk, BSU, 1982. 208 p. (in Russian).

13. Detchenya L. V. Monodromy conditions for one differential system. *Abstract of the Report of the International Mathematical Conference: Current issues of analysis (April 7–10, 2009, Grodno).* Grodno, 2009, pp. 128–129 (in Russian).

14. Detchenya L. V. Local phase portraits of one polynomial system. *Abstract of the Report of the International Conference: IX Belarusian Mathematical Conference (Nov. 3–6, 2004, Grodno).* Grodno, 2004, part 1, pp. 120–121 (in Russian).

15. Detchenya L. V. Local phase portraits of a differential system with fourth-degree nonlinearities. *Abstract of the Report of the XIV International Conference on Differential Equations: Erugin Readings – 2011 (May 12–14, 2011, Novopolotsk).* Novopolotsk, 2011, pp. 47–48 (in Russian).

16. Detchenya L. V., Kuzmich A. V., Zhang Ye, Chen Y. On the qualitative behavior of trajectories of a differential quartic system in the neighborhood of multiple equilibrium point. *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, computer technology and its control*, 2026, vol. 16, no. 2, pp. 28–38 (in Russian).

17. Frommer M. Uber das Auftreten von Wirbeln und Strudeln (geschlossener und spiraliger Integralkurven) in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen. *Mathematische Annalen*, 1934, vol. 109, no. 3, pp. 395–424.

18. Frommer M. Integral curves of an ordinary differential equation of the first order in the neighborhood of a singular point of rational character. *Advances in Mathematical Sciences*, 1941, no. 9, pp. 212–253 (in Russian).

19. Sadovskii A. P. *Local qualitative theory of differential equations on a plane: a textbook for a special course*. Grodno, GrSU, 1986. 98 p. (in Russian).

20. Dumortier F., Libre J., Artes J. C. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2006.

21. Detchenya L. V., Sadovskii A. P. Local phase portraits of an analytical system with a non-zero quadratic part in a special case. *Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica*, 1998, no. 1(26), pp. 145–149.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 111–127

УДК 517.977 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-111–127
EDN: CSIBWG

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ, СОПРОВОЖДАЮЩИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ

Н. М. Дмитрук

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: dmitrukn@bsu.by

Поступила: 03.08.2026 **Исправлена:** 27.08.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: линейная система, неопределенность, информационное множество, оптимальное наблюдение, гарантированное управление, линейное программирование

Аннотация. Исследованы два класса задач оптимального наблюдения, которые возникают в связи с задачей оптимального гарантированного управления линейными системами по неточным и неполным измерениям состояний. Линейные задачи оптимального наблюдения связаны с построением оптимальных гарантирующих программ и позволяют получать оценки информационных множеств, описывающих совместимые с записанными измерениями состояния. Задачи априорного оптимального наблюдения связаны с построением многократно замыкаемых стратегий управления и определением наихудших будущих информационных множеств. Эти задачи представляют собой специальные многоуровневые задачи математического программирования, для которых в работе разработана рекуррентная процедура их сведения к задачам линейного программирования большой размерности. Предложенные алгоритмы ориентированы на использование в системах оптимального гарантированного управления в реальном времени.

OPTIMAL OBSERVATION PROBLEMS ACCOMPANYING MEASUREMENT OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

N. M. Dmitruk

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: dmitrukn@bsu.by

Received: 03.08.2026 **Revised:** 27.08.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: linear system, uncertainty, information set, optimal observation, guaranteed control, linear programming

Abstract. Two classes of optimal observation problems arising in the context of optimal robust control of linear systems under inaccurate and incomplete state measurements are investigated. Linear optimal observation problems are associated with the construction of optimal guaranteed open-loop controls and provide estimates of information sets that describe states consistent with measurements obtained. A priori optimal observation problems are related to the synthesis of multiple-closable control strategies and the determination of the worst-case future information sets. These problems are formulated as specific multi-level mathematical programming problems, for which a recurrent procedure for their reduction to large-scale linear programming problems is developed. The proposed algorithms are oriented towards real-time applications in optimal guaranteed control systems.

1. Введение

Проблема управления динамическими системами в условиях неполной и неточной информации о текущем состоянии является одной из центральных в современной теории управления. В ситуациях, когда присутствующие в системе неопределенности, такие как неизвестные начальные состояния, внешние возмущения, ошибки измерений, имеют нестохастическую природу и известны лишь границы их изменения, наиболее адекватным является гарантированный подход к задачам оценивания и управления [1; 2]. В рамках этого подхода неопределенность состояния системы описывается информационным множеством – совокупностью всех векторов состояния, совместимых с записанными измерениями и заданными априорными ограничениями на неопределенные величины.

Задачи оптимального наблюдения в таких системах связаны с построением внешних или внутренних аппроксимаций информационного множества эллипсоидами, параллелотопами или

полиэдрами [1–4]. Однако в задачах оптимального управления по измерениям знать информационное множество или его аппроксимацию, как правило, не требуется, а формулировки задач оптимального наблюдения диктуются целями управления, а именно ограничениями на состояния и типом критерия качества [5–8]. При этом сложность решаемых задач наблюдения существенно зависит от используемого класса управлений.

В настоящей работе исследуются два типа задач оптимального наблюдения, сопровождающих задачи оптимального гарантированного управления по измерениям, для которых основные теоретические результаты были получены в работе [8]. Первый тип – линейные задачи наблюдения – связан с построением оптимальных гарантирующих программ, для которых требуется вычислять оценки информационного множества по реализовавшимся к текущему моменту времени измерениям [6; 9; 10]. Второй тип – задачи априорного наблюдения – возникает при синтезе многократно замыкаемых стратегий управления [7; 8], для которых требуется прогнозировать информационные множества в будущие моменты времени.

Основное внимание в статье уделено конструктивным методам решения указанных задач. Показано, что исходные многоуровневые постановки задач априорного наблюдения могут быть сведены к задачам линейного программирования или аппроксимированы ими. Разработанная рекуррентная процедура позволяет строить эффективные алгоритмы для систем управления, функционирующих в реальном времени, как в статье [8].

2. Система наблюдения и информационное множество

На промежутке времени $[0,t_f]$ рассмотрим линейную стационарную систему вида

$$\dot{x} = Ax + Bu + Mw, \;\; x(0) \in \mathscr{X}_0, \;\; t \in [0,t_f], \tag{1}$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние; $u = u(t) \in \mathbb{R}^r$ – управление; $w = w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ – возмущение в момент времени t; матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$; $M \in \mathbb{R}^{n\times n_w}$ заданы.

Предполагается, что управление $u(t), t \in [0,t_f]$, реализуется как известная дискретная функция с периодом квантования h ($h = t_f/\mathcal{N}$, $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$): $u(t) \equiv u(s)$, $t \in [s, s+h[$, $s \in \Delta = \{0,h,\ldots,t_f - h\}$, принимающая значения в множестве $U = \{u \in \mathbb{R}^r : u_{\min} \leqslant u \leqslant u_{\max}\}$, $u_{\min}, u_{\max} \in \mathbb{R}^r$, $u_{\min} < u_{\max}$. В разделе 3 для системы (1) будет сформулирована задача оптимального управления, по решению которой находятся управляющие воздействия для системы (1), однако для рассматриваемых в работе задач наблюдения конкретная реализация управления считается заданной.

Начальное состояние системы (1) известно с точностью до ограниченного множества $\mathscr{X}_0 \subset \subset \mathbb{R}^n$; будем считать, что оно имеет вид

$$\mathscr{X}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \; x = x_0 + Gz, \; z \in \mathscr{Z}\}, \tag{2}$$

где $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – заданный вектор; $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ – неизвестный вектор параметров начального состояния;

$$\mathscr{Z} = \{z \in \mathbb{R}^{n_z} : d_{\min} \leqslant z \leqslant d_{\max}\};$$

$d_{\min}, d_{\max} \in \mathbb{R}^{n_z}$; $d_{\min} \leqslant d_{\max}$; $G \in \mathbb{R}^{n\times n_z}$.

Относительно возмущений в системе (1) будем считать, что они реализуются в виде кусочно-непрерывной функции, принимающей значения в множестве W:

$$w(t) \in W = \{w \in \mathbb{R}^{n_w} : \|w\|_\infty \leqslant w_{\max}\}, \;\; t \in [0,t_f],$$

где $\|w\|_\infty = \max_i |w_i|$, $w_{\max} > 0$. В качестве частного случая будем обращаться к системам, в которых возмущение отсутствует, т. е. $M = 0$.

Будем вести наблюдение за поведением системы (1), обрабатывая записываемые в дискретные моменты времени $s \in \hat{\Delta} = \{h, 2h, \ldots, t_f\}$ сигналы линейного измерительного устройства

$$y(s) = Cx(s) + \xi(s), \; s \in \hat{\Delta}, \tag{3}$$

где $y(s) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – измерение; $\xi(s) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – ошибка измерения в момент времени s;

$$\xi(s) \in \Xi = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_y} : \; \|\xi\|_\infty \leqslant \xi_{\max}\}, \;\; s \in \hat{\Delta};$$

$C \in \mathbb{R}^{n_y\times n}$ – заданная матрица; $\xi_{\max} > 0$.

Таким образом, в системе (1), (3) источниками неопределенности являются возмущение $w(t)$, $t \in [0,t_f]$; вектор параметров начального состояния $z \in \mathscr{Z}$ и ошибки измерения $\xi(s) \in \Xi$, $s \in \hat{\Delta}$. Все перечисленные неопределенности имеют нестохастическую природу; такие неопределенности в теории управления называются множественными. Они порождают множественную неопределенность состояния системы (1) в каждый момент времени, которую можно описать с помощью *информационного множества* [1; 2; 11].

Далее при некотором фиксированном $\tau \in \hat{\Delta}$ используются следующие обозначения: $\hat{\mathcal{W}}(\tau)$ – совокупность всех возмущений $\hat{w}(\cdot) = (\hat{w}(t), t \in [0,\tau[)$, которые могут реализоваться на промежутке времени $[0,\tau[$; $\mathcal{W}(\tau)$ – совокупность всех «будущих» возмущений на промежутке $[\tau,t_f]$; $\hat{\Delta}(\tau) = \{h, 2h, \ldots, \tau\}$.

2.1. Информационное множество

Пусть в реальном процессе управления реализовался вектор параметров начального состояния z^*, а к моменту времени $\tau \in \hat{\Delta}$ – возмущения $w^*(\cdot) \in \hat{\mathcal{W}}(\tau)$ и ошибки $\xi^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}(\tau)$ (эти величины остаются неизвестными наблюдателю), на систему подано управление $u^*(t)$, $t \in [0,\tau[$.

Наряду с системой (1) будем рассматривать соответствующие ей детерминированную систему управления

$$\dot{x}^* = Ax^* + Bu^*(t), \;\; x^*(0) = x_0, \;\; t \in [0,\tau], \tag{4}$$

и содержащую неопределенности систему

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Mw, \;\; \hat{x}(0) = Gz, \;\; z \in \mathscr{Z}, \;\; w(t) \in W, \;\; t \in [0,t_f]. \tag{5}$$

Траекторию системы (4) будем обозначать $x^*(t)$, $t \in [0,\tau]$, – эта траектория может быть вычислена, поскольку заданы начальное состояние x_0 и управление $u^*(t)$, $t \in [0,\tau[$. Траекторию системы (5) при фиксированных z, $w(t)$, $t \in [0,t_f]$, обозначим через $\hat{x}(t|\,0,z,w)$, $t \in [0,t_f]$.

Тогда измерения, которые будут записаны в рассматриваемом процессе к моменту времени $\tau \in \hat{\Delta}$, можно представить в виде

$$y^*(s) = Cx^*(s) + C\hat{x}(s|\,0,z^*,w^*) + \xi^*(s), \;\; s \in \hat{\Delta}(\tau).$$

Определение 2.1. Будем говорить, что вектор параметров начального состояния $z \in \mathscr{Z}$ и возмущение $\hat{w}(\cdot) \in \hat{\mathcal{W}}(\tau)$ *совместимы* с управлением $u^*(t)$, $t \in [0,\tau[$, и измерениями $y^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}(\tau)$, если найдутся такие ошибки измерения $\xi(s) \in \Xi$, $s \in \hat{\Delta}(\tau)$, что

$$y^*(s) = Cx^*(s) + C\hat{x}(s|\,0,z,\hat{w}) + \xi(s), \;\; s \in \hat{\Delta}(\tau). \tag{6}$$

Пусть $\Omega^*(\tau)$ – множество всех пар $(z,\hat{w})$, совместимых с $y^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}(\tau)$. С учетом (6),

$$\Omega^*(\tau) := \big\{(z,\hat{w}) \in \mathscr{Z} \times \hat{\mathcal{W}}(\tau) : y^*(s) - Cx^*(s) - C\hat{x}(s|\,0,z,\hat{w}) \in \Xi, \; s \in \hat{\Delta}(\tau)\big\}.$$

Множество $\Omega^*(\tau)$ всегда непусто, поскольку пара из реализовавшихся в рассматриваемом процессе значений z^*, $w^*(t)$, $t \in [0,\tau[$, совместима с записанным сигналом $y^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}(\tau)$.

Положим

$$\hat{y}^*(s) := y^*(s) - Cx^*(s), \;\; s \in \hat{\Delta}(\tau),$$

и будем называть такой сигнал *очищенным*. Очищенный сигнал $\hat{y}^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}$, совпадает с сигналом, который был бы записан в системе наблюдения (5), (3) при реализовавшихся z^*, w^*, ξ^*. С помощью очищенного сигнала $\hat{y}^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}(\tau)$, установим, что $\Omega^*(\tau)$ не зависит от управления $u^*(t)$, $t \in [0,\tau[$:

$$\Omega^*(\tau) = \big\{(z,\hat{w}) \in \mathscr{Z} \times \hat{\mathcal{W}}(\tau) : \; \hat{y}^*(s) - C\hat{x}(s|\,0,z,\hat{w}) \in \Xi, \; s \in \hat{\Delta}(\tau)\big\}.$$

Определение 2.2. Множество $\mathscr{X}^*(\tau)$, $\tau \in \hat{\Delta}$, построенное по правилу

$$\mathscr{X}^*(\tau) := \big\{x^*(\tau) + \hat{x}(\tau|\,0,z,\hat{w}) : (z,\hat{w}) \in \Omega^*(\tau)\big\}, \tag{7}$$

будем называть *информационным множеством* системы (1), (3) в момент времени $\tau \in \hat{\Delta}$. Информационное множество в момент времени $\tau = 0$ есть $\mathscr{X}^*(0) = \mathscr{X}_0$.

По определению, $\mathscr{X}^*(\tau)$ получено сдвигом на вектор $x^*(\tau)$ множества

$$\hat{\mathscr{X}}^*(\tau) = \big\{\hat{x}(\tau|\,0,z,\hat{w}) : (z,\hat{w}) \in \Omega^*(\tau)\big\}, \tag{8}$$

которое можно трактовать как информационное множество системы наблюдения (5), (3) в момент τ. Нетрудно видеть, что множество $\hat{\mathscr{X}}^*(\tau)$, а следовательно, и информационное множество $\mathscr{X}^*(\tau)$, является выпуклым компактом [1; 2].

2.2. Динамика информационных множеств

Кроме информационного множества $\mathscr{X}^*(\tau)$ (или $\hat{\mathscr{X}}^*(\tau)$), которое вычисляется по записанным измерениям $y^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}(\tau)$, нас будет интересовать прогноз будущих информационных множеств на некоторой наперед заданной сетке моментов времени из $\hat{\Delta}$.

Пусть до начала процесса управления зафиксированы $N \geqslant 1$ моментов времени $t_1 < \ldots < t_N$, $t_j \in \hat{\Delta}$, $j = 1, \ldots, N$. Они разбивают интервал управления $[0, t_f]$ на $N+1$ промежуток $[t_j, t_{j+1}[$, $j = 0, 1, \ldots, N$, где считается, что $t_0 = 0$, $t_{N+1} = t_f$.

Для $j = 0, 1, \ldots, N$ обозначим: $\hat{\Delta}_j = \{t_j + h, \ldots, t_{j+1}\}$; $\mathcal{N}_j = |\hat{\Delta}_j|$; $w_j(\cdot) = (w_j(t), t \in [t_j, t_{j+1}[)$ – возмущение на $[t_j, t_{j+1}[$, $\mathcal{W}_j = \{w_j(\cdot) : w_j(t) \in W, t \in [t_j, t_{j+1}[\}$ – множество возмущений на $[t_j, t_{j+1}[$.

Пусть Ω_j – множество пар $(z, \hat{w}) \in \mathscr{Z} \times \hat{\mathcal{W}}(t_j)$, совместимых с некоторым очищенным сигналом $\hat{y}(s)$, $s \in \hat{\Delta}(t_j)$, записанным к моменту t_j:

$$\Omega_j = \Omega_j(\hat{y}) = \{(z, \hat{w}) \in \mathscr{Z} \times \hat{\mathcal{W}}(t_j) : \ \hat{y}(s) - C\hat{x}(s|0, z, \hat{w}) \in \Xi, \ s \in \hat{\Delta}(t_j)\}.$$

Нас будут интересовать сигналы $\hat{y}_j(\cdot) = (\hat{y}_j(s), s \in \hat{\Delta}_j)$, которые могут быть получены в системе наблюдения (5), (3) на $\hat{\Delta}_j$, если в момент t_j реализовалось множество Ω_j, а также множество Ω_{j+1} к моменту t_{j+1}, его связь с Ω_j и сигналом $\hat{y}_j(\cdot)$.

Множество всех возможных сигналов измерения в системе (5), (3) на $\hat{\Delta}_j$ обозначим $\mathcal{Y}_j$:

$$\mathcal{Y}_j := \{\hat{y}_j(\cdot) : \ \hat{y}_j(s) = C\hat{x}(s|0, z, (\hat{w}, w_j)) + \xi(s), \ \xi(s) \in \Xi, \ s \in \hat{\Delta}_j, \ \ (z, \hat{w}) \in \Omega_j, \ \ w_j(\cdot) \in \mathcal{W}_j\},$$

где $(\hat{w}, w_j) = (\hat{w}(\cdot), w_j(\cdot)) \in \hat{\mathcal{W}}(t_{j+1})$ – возмущение на промежутке $[0, t_{j+1}]$, разбито на $\hat{w}(\cdot) \in \hat{\mathcal{W}}(t_j)$ – возмущение на промежутке времени $[0, t_j[$, и $w_j(\cdot) \in \mathcal{W}_j$ – возмущение на $[t_j, t_{j+1}[$. Множество $\mathcal{Y}_j$, вообще говоря, зависит от Ω_j, однако для упрощения записи эту зависимость явно указывать не будем.

Если в момент времени t_j реализовалось множество Ω_j, а на $\hat{\Delta}_j$ получены измерения $\hat{y}_j(\cdot) \in \mathcal{Y}_j$, то в момент времени t_{j+1} будет реализовано множество

$$\Omega_{j+1} = \Omega(t_{j+1}|t_j, \Omega_j, \hat{y}_j(\cdot)) = \{(z, (\hat{w}, w_j)) \in \mathscr{Z} \times \hat{\mathcal{W}}(t_{j+1}) : \\ \hat{y}_j(s) - C\hat{x}(s|0, z, (\hat{w}, w_j)) \in \Xi, \ s \in \hat{\Delta}_j, (z, \hat{w}) \in \Omega_j, \ w_j(\cdot) \in \mathcal{W}_j\},$$

которое состоит из пар $(z, (\hat{w}, w_j))$ с $(z, \hat{w}) \in \Omega_j$ и совместимых с $\hat{y}_j(\cdot)$.

Пусть теперь $\hat{\mathscr{X}}_j = \{\hat{x}(t_j|0, z, w) : (z, w) \in \Omega_j\}$ – информационное множество системы наблюдения (5), (3) в момент времени t_j. По $\hat{\mathscr{X}}_j$ определим информационное множество этой системы в момент t_{j+1}:

$$\hat{\mathscr{X}}(t_{j+1}|t_j, \hat{\mathscr{X}}_j, \hat{y}_j) = \{\hat{x}(t_{j+1}|0, z, \hat{w}) : (z, \hat{w}) \in \Omega(t_{j+1}|t_j, \Omega_j, \hat{y}_j)\}. \tag{9}$$

Задачи оптимального наблюдения состоят в получении некоторых оценок текущих (в момент времени τ) информационных множеств $\mathscr{X}^*(\tau)$, $\hat{\mathscr{X}}^*(\tau)$, или оценки наихудшего (в некотором смысле) будущего информационного множества (9). Вид этих оценок зависит от целей использования информационных множеств на практике. В частности, в данной работе информационное множество – важный элемент задачи оптимального гарантированного управления по измерениям [8], и указанные оценки напрямую связаны с целями управления. В связи с этим в следующем разделе приведем постановку такой задачи управления и покажем, какие формулировки задач оптимального наблюдения согласуются с целями управления.

3. Оптимальное гарантированное управление линейными системами по измерениям

Рассмотрим задачу оптимального управления системой (1) по неточным дискретным измерениям выходного сигнала измерительного устройства (3).

Поставим задачу о нахождении на промежутке $[\tau,t_f]$ такого дискретного ограниченного управления, которое гарантированно переводит все состояния системы (1) из информационного множества (7) в момент времени τ при всех возмущениях $w(\cdot)\in\mathcal{W}(\tau)$ на терминальное множество $X_f=\{x\in\mathbb{R}^n : Hx\leqslant g\}$, при минимуме гарантированного значения линейного терминального критерия качества $c^\top x(t_f)$. Здесь $H\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $g\in\mathbb{R}^m$, $c\in\mathbb{R}^n$ – заданные матрица и векторы.

Эту задачу будем называть задачей оптимального гарантированного управления системой (1) по измерениям (3). Далее рассмотрим поставленную задачу в двух классах управлений: 1) в классе гарантирующих программ; 2) в классе многократно замыкаемых стратегий управления.

3.1. Оптимальное управление в классе гарантирующих программ

Простейший класс управлений в теории оптимального гарантированного управления составляют гарантирующие программы. Программное управление на промежутке $[\tau,t_f]$ – это функция времени $u(t)$, $t\in[\tau,t_f]$, одна для всех возможных возмущений, планируется до начала процесса управления и по его ходу не корректируется. При вычислении программы не используется информация о возможном поступлении измерений состояний системы в будущем.

Задача построения оптимальной гарантирующей программы в момент времени τ, в который реализовалось информационное множество (7), имеет вид [8]

$$\begin{gathered}\min_{u}\ \max_{\varkappa\in\hat{\mathscr{X}}^*(\tau),w\in\mathcal{W}(\tau)}\ c^\top x(t_f),\\ \dot{x}=Ax+Bu+Mw,\ \ x(\tau)=x^*(\tau)+\varkappa,\ \ u(t)\in U,\ \ t\in[\tau,t_f],\\ x(t_f)\in X_f\ \ \forall\,\varkappa\in\hat{\mathscr{X}}^*(\tau),\ \ \forall\,w(\cdot)\in\mathcal{W}(\tau).\end{gathered}\tag{10}$$

Линейность системы (1), терминальных ограничений и критерия качества позволяют свести минимаксную задачу (10), содержащую неопределенности, к детерминированной задаче оптимального управления. Для этого следует оценить наихудшие реализации неопределенностей в ограничениях и критерии качества. Например, i-е терминальное ограничение, $i=1,\dots,m$, выполняется при всех возмущениях $w(\cdot)\in\mathcal{W}(\tau)$ тогда и только тогда, когда

$$\max_{\varkappa\in\hat{\mathscr{X}}^*(\tau),w\in\mathcal{W}(\tau)} h_i^\top\left[e^{A(t_f-\tau)}\big(x^*(\tau)+\varkappa\big)+\int_\tau^{t_f}e^{A(t_f-t)}\big(Bu(t)+Mw(t)\big)\,dt\right]\leqslant g_i,$$

где $h_i^\top$ – i-я строка матрицы H; g_i – i-я компонента вектора g.

В неравенстве выше выделяется задача максимизации

$$\max_{\varkappa\in\hat{\mathscr{X}}^*(\tau),w\in\mathcal{W}(\tau)} h_i^\top\left[e^{A(t_f-\tau)}\varkappa+\int_\tau^{t_f}e^{A(t_f-t)}Mw(t)\,dt\right],$$

которую с учетом вида (8) информационного множества $\hat{\mathscr{X}}^*(\tau)$ можно представить в виде

$$\hat{\mu}_i\big(\tau,\Omega^*(\tau)\big):=\max_{(z,\hat{w})\in\Omega^*(\tau),w\in\mathcal{W}(\tau)} h_i^\top\hat{x}\big(t_f|\,0,z,(\hat{w},w)\big).\tag{11}$$

Полагая $h_{m+1}:=c$, задачу оценки наихудшего значения критерия качества в (10) также можно представить в виде (11).

Таким образом, задача (10) построения оптимальной гарантирующей программы на промежутке $[\tau,t_f]$ в задаче оптимального гарантированного управления по измерениям эквивалентна следующей детерминированной задаче оптимального управления:

$$\begin{gathered}\min_{u}\ c^\top x(t_f)+\hat{\mu}_{m+1}\big(\tau,\Omega^*(\tau)\big),\\ \dot{x}=Ax+Bu,\ \ x(\tau)=x^*(\tau),\ \ u(t)\in U,\ \ t\in[\tau,t_f],\\ h_i^\top x(t_f)\leqslant g_i-\hat{\mu}_i\big(\tau,\Omega^*(\tau)\big),\ \ i=1,\dots,m.\end{gathered}\tag{12}$$

Оценка вида (11) порождает первый тип задач оптимального наблюдения – линейные задачи оптимального наблюдения, которые исследуются в настоящей работе в разделе 4.

3.2. Оптимальное управление в классе многократно замыкаемых стратегий управления

Второй тип задач оптимального наблюдения, которые будем называть задачами априорного оптимального наблюдения, возникает в связи с задачами построения оптимальных многократно замыкаемых стратегий управления [7; 8; 12] в задаче оптимального гарантированного управления по измерениям. В отличие от программных управлений из подраздела 3.1, стратегии управления учитывают поступление информации о поведении системы в будущем и позволяют корректировать управление в зависимости от этой информации. В частности, в работах [7; 8; 12] предполагается, что в моменты $t_1, \ldots, t_N$, которые называются моментами замыкания, будет оцениваться информационное множество и выбираться новое управление для системы (1). Приведем необходимые определения и предположения из [8].

Для $j = 0, 1, \ldots, N$ обозначим: $\Delta_j = \{t_j, t_j + h, \ldots, t_{j+1} - h\}$; $u_j(\cdot) = (u_j(t), t \in [t_j, t_{j+1}[)$ – управление, $\mathcal{U}_j = \{u_j(\cdot) : u_j(t) \in U, t \in [t_j, t_{j+1}[\}$ – множество доступных управлений на $[t_j, t_{j+1}[$; $\mathscr{X}_j = x_j + \hat{\mathscr{X}}_j$ – информационное множество состояний системы (1) в момент t_j, $x_j \in \mathbb{R}^n$;

$$\mathbb{X}(t_{j+1} | t_j, \mathscr{X}_j, u_j) = \left\{ \mathscr{X}(t_{j+1} | t_j, \mathscr{X}_j, u_j, \hat{y}_j) : \hat{y}_j \in \mathcal{Y}_j \right\}$$

– совокупность всех возможных информационных множеств в момент времени t_{j+1}, если в момент t_j информационное множество было $\mathscr{X}_j$ и на промежутке $[t_j, t_{j+1}[$ к системе (1) применялось управление $u_j(\cdot)$:

$$\mathscr{X}(t_{j+1} | t_j, \mathscr{X}_j, u_j, \hat{y}_j) = e^{A(t_{j+1} - t_j)} x_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{A(t_{j+1} - t)} B u_j(t)\, dt + \hat{\mathscr{X}}(t_{j+1} | t_j, \hat{\mathscr{X}}_j, \hat{y}_j).$$

Предположение 3.1. Предположим, что в каждый момент t_j, $j = 1, \ldots, N$, в зависимости от реализовавшегося в процессе управления информационного множества $\mathscr{X}^*(t_j)$ можно выбрать новое управление $u_j\big(t | \mathscr{X}^*(t_j)\big) \in U$, $t \in [t_j, t_{j+1}[$, и применить его к системе (1) до момента t_{j+1}.

Поскольку информационные множества $\mathscr{X}^*(t_j)$, $j = 1, \ldots, N$, заранее (до начала процесса управления) не известны, то решение задачи оптимального гарантированного управления системой (1) по неточным измерениям (3) будем искать в виде *стратегии управления* с моментами замыкания $t_1, \ldots, t_N$ как функции произвольных позиций $(t_j, \mathscr{X}_j)$, $j = N - 1, \ldots, 0$.

Определение 3.1. Для позиции $(t_j, \mathscr{X}_j)$, $j = N - 1, \ldots, 0$, стратегией управления с $N - j$ моментами замыкания t_{j+1}, …, t_N на промежутке $[t_j, t_f]$ назовем совокупность

$$\pi_{N-j}(t_j, \mathscr{X}_j) = \left\{ u_j(\cdot | \mathscr{X}_j);\ \pi_{N-j-1}(t_{j+1}, \mathscr{X}_{j+1}), \mathscr{X}_{j+1} \in \mathbb{X}(t_{j+1} | t_j, \mathscr{X}_j, u_j) \right\},$$

состоящую из управления $u_j(\cdot | \mathscr{X}_j) \in \mathcal{U}_j$ на $[t_j, t_{j+1}[$ и семейства стратегий $\pi_{N-j-1}(t_{j+1}, \mathscr{X}_{j+1})$ с $N - j - 1$ моментами замыкания, определенных для всех возможных позиций $(t_{j+1}, \mathscr{X}_{j+1})$ процесса управления в момент замыкания t_{j+1}. При $j = N$ считаем, что стратегия $\pi_0(t_N, \mathscr{X}_N)$ совпадает с управлением $u_N(\cdot | \mathscr{X}_N) \in \mathcal{U}_N$.

Аналогично определяется стратегия с $N - j$ моментами замыкания t_{j+1}, …, t_N для позиции $\big(\tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big)$ при $\tau \in \Delta_j$:

$$\pi_{N-j}(\tau, \mathscr{X}^*(\tau)) = \left\{ u_j\big(\cdot \,|\, \tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big);\ \pi_{N-j-1}(t_{j+1}, \mathscr{X}_{j+1}), \mathscr{X}_{j+1} \in \mathbb{X}\big(t_{j+1} | \tau, \mathscr{X}^*(\tau), u_j\big) \right\},$$

где управление $u_j\big(\cdot \,|\, \tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big)$ определено на промежутке $[\tau, t_{j+1}[$; $\mathbb{X}\big(t_{j+1} | \tau, \mathscr{X}^*(\tau), u_j\big)$ – совокупность всех возможных информационных множеств в момент времени t_{j+1}, если в момент τ информационное множество было $\mathscr{X}^*(\tau)$ и на промежутке $[\tau, t_{j+1}[$ к системе (1) применялось управление $u_j\big(\cdot \,|\, \tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big)$.

Траекторию системы (1) на промежутке $[\tau, t_f]$, $\tau \in \Delta_j$, соответствующую начальному состоянию $x(\tau) = \varkappa \in \mathscr{X}^*(\tau)$, стратегии $\pi_{N-j}\big(\tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big)$ и возмущению $w(\cdot) = \big(w_j(\cdot), \ldots, w_N(\cdot)\big)$, будем обозначать

$$x(\cdot | \tau, \varkappa, \pi_{N-j}, w) = \big(x(t | \tau, \varkappa, \pi_{N-j}, w), t \in [\tau, t_f]\big)$$

и определять (в соответствии с предположением 3.1) как последовательное непрерывное решение систем

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_j\big(t | \tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big) + Mw_j(t),\ x(\tau) = \varkappa,\ t \in [\tau, t_{j+1}[,$$
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_k\big(t | \mathscr{X}(t_k)\big) + Mw_k(t),\ \ t \in [t_k, t_{k+1}[,\ k = j+1, \ldots, N.$$

Определение 3.2. Для позиции $\big(\tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big)$, $\tau \in \Delta_j$, стратегия управления $\pi_{N-j}\big(\tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big)$ называется допустимой, если выполняется включение

$$x(t_f|\,\tau, \varkappa, \pi_{N-j}, w) \in X_f \;\; \forall \varkappa \in \mathscr{X}^*(\tau), \forall w(\cdot) \in \mathcal{W}(\tau).$$

Определение 3.3. Для позиции $\big(\tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big)$, $\tau \in \Delta_j$, допустимая стратегия $\pi^0_{N-j}\big(\tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big)$ оптимальна, если она является решением задачи

$$\min_{\pi_{N-j}} \max_{\varkappa \in \mathscr{X}^*(\tau), w \in \mathcal{W}(\tau)} c^\top x(t_f|\,\tau, \varkappa, \pi_{N-j}, w).$$

В работе [8] показано, что управление $u^0_j\big(\cdot\,|\,\tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big)$ в составе оптимальной стратегии $\pi^0_{N-j}\big(\tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{gathered} \min_{\alpha, u_j} \alpha, \\ \dot{x} = Ax + Bu_j, \;\; x(\tau) = x^*(\tau), \;\; u_j(t) \in U, \;\; t \in [\tau, t_{j+1}], \\ \Phi_{j+1} x(t_{j+1}) - \lambda_{j+1}\alpha \leqslant g_{j+1} - \mu_j\big(\tau, \Omega^*(\tau)\big), \end{gathered} \tag{13}$$

где $\Phi_{j+1} \in \mathbb{R}^{m_{j+1} \times n}$, λ_{j+1}, g_{j+1} – некоторые матрица и векторы (см. правила построения в [8]); оценки $\mu_j\big(\tau, \Omega^*(\tau)\big) = \big(\mu_{ji}\big(\tau, \Omega^*(\tau)\big), i = 1, \ldots, m_{j+1}\big)^\top$ определяются рекуррентно по формулам

$$\mu_{ji}\big(\tau, \Omega^*(\tau)\big) = \max_{\hat{y}_j \in \mathcal{Y}_j(\tau)} p^\top_{j+1,i} \mu_{j+1}\big(t_{j+1}, \Omega(t_{j+1}|\,\tau, \Omega^*(\tau), \hat{y}_j)\big), \;\; i = 1, \ldots, m_{j+1}; \tag{14}$$

$$\begin{gathered} \mu_{ki}\big(t_k, \Omega_k\big) = \max_{\hat{y}_k \in \mathcal{Y}_k} p^\top_{k+1,i} \mu_{k+1}\big(t_{k+1}, \Omega(t_{k+1}|\,t_k, \Omega_k, \hat{y}_k)\big), \;\; i = 1, \ldots, m_{k+1}, \\ k = N-1, \ldots, j+1; \end{gathered} \tag{15}$$

$$\mu_{Ni}(t_N, \Omega_N) := \hat{\mu}_i(t_N, \Omega_N) = \max_{(z,w) \in \Omega_N, w_N \in \mathcal{W}_N} h_i^\top \hat{x}\big(t_f|\,0, z, (w, w_N)\big), \;\; i = 1, \ldots, m+1; \tag{16}$$

$\mathcal{Y}_j(\tau)$ – сужение $\mathcal{Y}_j$ на промежуток $[\tau, t_{j+1}[$; векторы $p^\top_{ki}$ – строки матриц P_k с неотрицательными элементами, связанных с матрицами Φ_k соотношениями

$$\Phi_k = P_k \Phi_{k+1} e^{A(t_{k+1} - t_k)}, \;\; k = 1, \ldots, N, \;\; \Phi_{N+1} := \begin{pmatrix} H \\ c^\top \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times n}.$$

Задачи вида (14), (15) будем называть задачами априорного оптимального наблюдения. Их исследование продолжится в разделе 5.

Дальнейшее исследование сосредоточено на разработке конструктивных методов решения задач оптимального наблюдения (11) и (14), (15), необходимых для практической реализации методов построения оптимальных гарантирующих программ и оптимальных стратегий управления, которые обоснованы в работах [6; 8].

4. Линейная задача оптимального наблюдения

Как отмечалось в подразделе 3.1, первый тип задач наблюдения, рассматриваемых в работе в связи с проблемой оптимального гарантированного управления по измерениям, направлен на получение линейных оценок информационного множества $\mathscr{X}^*(\tau)$ в заданном направлении. В общем виде такие оценки можно определить как результат решения задачи на максимум

$$\gamma^*(\tau, \phi) = \max \;\; \phi^\top \hat{x}, \;\; \hat{x} \in \hat{\mathscr{X}}^*(\tau), \tag{17}$$

где $\phi \in \mathbb{R}^n$ – заданный вектор. Задачи вида (17) будем называть линейными задачами оптимального наблюдения.

Нетрудно видеть, что задача (11) связана с задачей (17) следующим образом:

$$\hat{\mu}_i\big(\tau, \Omega^*(\tau)\big) = \gamma^*\big(\tau, \phi_i(\tau)\big) + \gamma_i(\tau), \tag{18}$$

где $\phi_i(t)^\top = h_i^\top e^{A(t_f - t)}$; $\gamma_i(\tau) = w_{\max} \int_\tau^{t_f} ||\phi_i(t)^\top M||_1 \, dt$ – оценка наихудшей реализации возмущения на промежутке $[\tau, t_f]$. При отсутствии в системе (1) возмущения имеем $\hat{\mu}_i\big(\tau, \Omega^*(\tau)\big) = \gamma^*\big(\tau, \phi_i(\tau)\big)$.

Действительно, записывая формулу Коши для терминального состояния $\hat{x}\big(t_f|\,0,z,(\hat{w},w)\big)$ в (11) и учитывая независимость переменных оптимизации $(z,\hat{w})\in\Omega^*(\tau), w\in\mathcal{W}(\tau)$, получим

$$\hat{\mu}_i\big(\tau,\Omega^*(\tau)\big)=\max_{(z,\hat{w})\in\Omega^*(\tau),w\in\mathcal{W}(\tau)} h_i^\top\Big[e^{At_f}Gz+\int_0^\tau e^{A(t_f-t)}M\hat{w}(t)dt+\int_\tau^{t_f}e^{A(t_f-t)}Mw(t)dt\Big]=$$

$$=\max_{(z,\hat{w})\in\Omega^*(\tau)} h_i^\top e^{A(t_f-\tau)}\Big[e^{A\tau}Gz+\int_0^\tau e^{A(\tau-t)}M\hat{w}(t)dt\Big]+\max_{w\in\mathcal{W}(\tau)}\int_\tau^{t_f}h_i^\top e^{A(t_f-t)}Mw(t)dt=$$

$$=\max_{(z,\hat{w})\in\Omega^*(\tau)}\phi_i(\tau)^\top\hat{x}(\tau|\,0,z,\hat{w})+\int_\tau^{t_f}\max_{w\in W}\phi_i(t)^\top Mw\,dt=\gamma^*\big(\tau,\phi_i(\tau)\big)+w_{\max}\int_\tau^{t_f}||\phi_i(t)^\top M||_1\,dt.$$

Рассмотрим линейную задачу оптимального наблюдения (17) в простейшем случае, когда возмущения в системе отсутствуют, и неопределенность содержится только в параметрах начального состояния и ошибках измерения [9]. В этом случае обозначим через $\hat{x}(t|\,0,z)$ – состояние в момент времени t системы $\dot{\hat{x}}=A\hat{x}$, $\hat{x}(0)=Gz$, $t\in[0,t_f]$, и определим множество параметров начального состояния, совместимых с измерениями $\hat{y}^*(s)$, $s\in\hat{\Delta}(\tau)$:

$$\Omega^*(\tau)=\big\{z\in\mathscr{Z}:\ \hat{y}^*(s)-C\hat{x}(s|\,0,z)\in\Xi,\ s\in\hat{\Delta}(\tau)\big\}. \tag{19}$$

Задачу (17) с учетом (19) можно представить в виде

$$\begin{gathered}\gamma^*(\tau,\phi)=\max_z\ \phi^\top\hat{x}(\tau),\\ \dot{\hat{x}}=A\hat{x},\ \ \hat{x}(0)=Gz,\ \ t\in[0,\tau],\\ \hat{y}^*(s)-C\hat{x}(s)\in\Xi,\ s\in\hat{\Delta}(\tau),\\ z\in\mathscr{Z}.\end{gathered} \tag{20}$$

Явная формула для вычисления траектории $\hat{x}(t|\,0,z)=e^{At}Gz$, $t\in[0,t_f]$, позволяет записать (20) как задачу линейного программирования:

$$\begin{gathered}\gamma^*(\tau,\phi)=\max_z\ q^\top z,\\ \underline{\xi}(s)\leqslant -D(s)z\leqslant\bar{\xi}(s),\ \ s\in\hat{\Delta}(\tau),\\ d_{\min}\leqslant z\leqslant d_{\max},\end{gathered} \tag{21}$$

где $q^\top:=\phi^\top e^{A\tau}G$, $D(s):=Ce^{As}G$, $\underline{\xi}(s):=-\mathbb{1}\xi_{\max}-\hat{y}^*(s)$, $\bar{\xi}(s):=\mathbb{1}\xi_{\max}-\hat{y}^*(s)$, $s\in\hat{\Delta}$, $\mathbb{1}=(1,\dots,1)^\top$.

При $\phi=\phi_i(\tau)$, как в (18), получим, что $q^\top=h_i^\top e^{At_f}G$ не зависит от момента времени τ.

В работах [9; 10] разработаны специальные методы решения задач линейного программирования вида (21) с учетом их структуры, следующей из динамики системы в постановке (20). Методы представляют собой модификацию двойственного адаптивного метода решения задач линейного программирования [13].

Далее рассмотрим линейную задачу оптимального наблюдения (17) при наличии возмущений. В подробной записи эта задача имеет вид

$$\begin{gathered}\gamma^*(\tau,\phi)=\max\ \phi^\top\hat{x}(\tau),\\ \dot{\hat{x}}=A\hat{x}+Mw,\ \ \hat{x}(0)=Gz,\ \ w(t)\in W,\ \ t\in[0,\tau],\\ \hat{y}^*(s)-C\hat{x}(s)\in\Xi,\ s\in\hat{\Delta}(\tau),\\ z\in\mathscr{Z},\end{gathered} \tag{22}$$

и может трактоваться как задача оптимального управления системой (5), в которой в качестве управления выступает возмущение $w(\cdot)$ с подвижным левым концом траектории и промежуточными фазовыми ограничениями.

Следуя работе [14], предложим для (22) аппроксимирующую задачу линейного программирования, оптимальное значение которой будет доставлять верхнюю оценку значения $\gamma^*(\tau,\phi)$.

Для состояния $\hat{x}(s|\,0,z,w)$ системы (5) запишем

$$\hat{x}(s|\,0,z,w)=e^{As}Gz+\int_0^s e^{A(s-t)}Mw(t)dt=e^{As}Gz+\sum_{\theta\in\hat{\Delta}(s)}e^{A(s-\theta)}\upsilon(\theta),$$

где величины

$$\upsilon(\theta) := \int_{\theta-h}^{\theta} e^{A(\theta-t)} M w(t) dt \in \mathbb{R}^n, \ \ \theta \in \hat{\Delta}(\tau), \tag{23}$$

будем называть агрегированными переменными. Поскольку в задаче (22) нет необходимости в поиске функции $w(\cdot)$, а лишь в вычислении $\gamma^*(\tau,\phi)$, то переход к оптимизации по агрегированным переменным оправдан. Теперь вместо ограниченной функции $w(t)$, $t \in [0,\tau]$, требуется искать конечный набор агрегированных переменных $\upsilon(\theta)$, $\theta \in \hat{\Delta}(\tau)$.

Нетрудно видеть [2], что для возмущений $w(t) \in W$, $t \in [\theta-h,\theta]$, соответствующая агрегированная переменная (23) будет точкой множества достижимости системы (5) на промежутке $[\theta-h,\theta]$ с тривиальным начальным условием $\hat{x}(\theta-h)=0$. Поскольку исследуемая система наблюдения является стационарной, множество достижимости не зависит от момента времени θ и совпадает с множеством достижимости в момент времени $t=h$ системы (5) с начальным условием $\hat{x}(0)=0$. Обозначим это множество достижимости через Υ: $\Upsilon := \{\hat{x}(h|0,0,w) : w(t) \in W, t \in [0,h]\}$. Таким образом, для всех агрегированных переменных можно установить ограничение

$$\upsilon(\theta) \in \Upsilon, \ \ \theta \in \hat{\Delta}(\tau).$$

Известно [2;15], что множество достижимости линейной системы является выпуклым компактом. В силу выбора множества W, множество Υ симметрично относительно начала координат. Теперь задачу оптимального наблюдения (17) можно записать как задачу выпуклого программирования

$$\begin{gathered}
\gamma^*(\tau,\phi) = \max_{z,\upsilon} \ q^\top z + \sum_{\theta\in\hat{\Delta}(\tau)} \sigma(\theta)^\top \upsilon(\theta), \\
\underline{\xi}(s) \leqslant -D(s)z - \sum_{\theta\in\hat{\Delta}(s)} Q(s,\theta)\upsilon(\theta) \leqslant \bar{\xi}(s), \ \ s \in \hat{\Delta}(\tau), \\
\upsilon(\theta) \in \Upsilon, \ \ \theta \in \hat{\Delta}(\tau), \ \ d_{\min} \leqslant z \leqslant d_{\max},
\end{gathered} \tag{24}$$

где $\sigma(\theta)^\top := \phi^\top e^{A(\tau-\theta)}$, $Q(s,\theta) := Ce^{A(s-\theta)}$, $s,\theta \in \hat{\Delta}(\tau)$, $s \leqslant \tau$.

Поскольку точное описание множества достижимости Υ в общем случае не представляется возможным, большинство известных в литературе результатов получено для построения внешних или внутренних его аппроксимаций $\bar{\Upsilon}$ совокупностью эллипсоидов или полиэдров [2–4; 11]. Таким образом, для (24) может быть получена аппроксимирующая задача в виде задачи квадратичного программирования с квадратичными ограничениями [16] (в случае эллипсоидальных аппроксимаций множества достижимости) или в виде задачи линейного программирования (при полиэдральной аппроксимации). С целью построения гарантированной оценки информационного множества, необходимо использовать внешнюю аппроксимацию, $\Upsilon \subset \bar{\Upsilon}$, а с точки зрения использования линейных оценок при решении задач (14), (15), возникающих в связи с многократно замыкаемыми стратегиями управления, нам будет удобнее иметь аппроксимирующую задачу в виде задачи линейного программирования.

Внешняя полиэдральная аппроксимация множества достижимости Υ может быть построена следующим образом [2–4;11]. Для заданного набора векторов s_k, $k=1,\ldots,K$, вычисляются значения

$$b_k = \max_{\upsilon\in\Upsilon} \ s_k^\top \upsilon = w_{\max} \int_0^h \|s_k^\top e^{A(h-t)} M\|_1 \, dt, \ \ k=1,\ldots,K,$$

после чего внешняя аппроксимация задается в виде $\bar{\Upsilon} := \{\upsilon \in \mathbb{R}^n : \ -b \leqslant S\upsilon \leqslant b\}$, где строками матрицы S являются векторы $s_k^\top$, $k=1,\ldots,K$, $b=(b_k, k=1,\ldots,K)^\top$. Точность такой аппроксимации определяется выбором направлений s_k: при достаточно плотном их распределении в пространстве состояний полиэдр $\bar{\Upsilon}$ может приближать множество достижимости с высокой точностью.

Заменяя в задаче (24) включения $\upsilon(\theta) \in \Upsilon$, $\theta \in \hat{\Delta}(\tau)$, на ограничения $-b \leqslant S\upsilon(\theta) \leqslant b$, $\theta \in \hat{\Delta}(\tau)$, получим задачу линейного программирования, аппроксимирующую задачу (24):

$$\begin{gathered}\bar{\gamma}^*(\tau,\phi) = \max_{z,\upsilon} q^\top z + \sum_{\theta\in\hat{\Delta}(\tau)} \sigma(\theta)^\top \upsilon(\theta),\\ \underline{\xi}(s) \leqslant -D(s)z - \sum_{\theta\in\hat{\Delta}(s)} Q(s,\theta)\upsilon(\theta) \leqslant \bar{\xi}(s),\ \ s \in \hat{\Delta}(\tau),\\ -b \leqslant S\upsilon(\theta) \leqslant b,\ \ \theta \in \hat{\Delta}(\tau),\ \ d_{\min} \leqslant z \leqslant d_{\max}.\end{gathered}$$

В связи с внешней аппроксимацией $\Upsilon \subset \bar{\Upsilon}$, очевидно, имеет место неравенство $\bar{\gamma}^*(\tau,\phi) \geqslant \gamma^*(\tau,\phi)$. Для задачи оптимального управления (12) это означает, что при использовании аппроксимации $\bar{\mu}_i\big(\tau,\Omega^*(\tau)\big) := \bar{\gamma}^*\big(\tau,\phi_i(\tau)\big) + \gamma_i(\tau)$ вместо $\hat{\mu}_i\big(\tau,\Omega^*(\tau)\big)$ будет получено субоптимальное управление, для которого значение критерия качества не меньше оптимального значения задачи (12).

5. Задачи априорного оптимального наблюдения

Задачи априорного оптимального наблюдения (14), (15) существенно отличаются от линейных задач (17). В то время как линейная задача оптимального наблюдения оценивает информационное множество, порожденное измеренными (прошлыми) сигналами $y^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}(\tau)$, в априорных задачах оцениваются возможные будущие информационные множества, порождаемые возможными будущими измерениями. Эти задачи в исходной постановке являются достаточно сложными двух- и многоуровневыми задачами математического программирования.

С целью упрощения выкладок, начнем исследование с простейшего случая, когда в (1) возмущения отсутствуют ($M = 0$), система (1) замыкается только в один момент времени $t_1 \in \hat{\Delta}$. Для начала нас будет интересовать вычисление оценки $\mu_{0i}(0,\Omega_0)$ в момент времени $\tau = 0$ для множества $\Omega^*(0) = \Omega_0 := \mathscr{X} \times \{0\}$. Для сокращения записи опустим индекс i в μ_{0i} и индексы $1i$ – в векторе p_{1i}.

Таким образом, первая рассматриваемая задача имеет вид

$$\mu_0(0,\Omega_0) = \max_{\hat{y}_0\in\mathcal{Y}_0} p^\top \mu_1\big(t_1,\Omega(t_1|0,\Omega_0,\hat{y}_0)\big) = \max_{\hat{y}_0\in\mathcal{Y}_0} \sum_{l=1}^{m+1} p_l \hat{\mu}_l\big(t_1,\Omega(t_1|0,\Omega_0,\hat{y}_0)\big), \tag{25}$$

где p_l – l-я компонента вектора $p \in \mathbb{R}^{m+1}$, $p \geqslant 0$.

Задачу (25) можно трактовать как задачу оценивания протяженности в направлении p множества $M_1 := \big\{\hat{\mu}\big(t_1,\Omega(t_1|0,\Omega_0,\hat{y}_0)\big) : \hat{y}_0(\cdot) \in \mathcal{Y}_0\big\}$, составленного из всех линейных оценок, которые могут реализоваться в системе наблюдения (5), (3) к моменту времени t_1.

Таким образом, величина $\mu_0(0,\Omega_0)$ характеризует наихудший (с точки зрения критерия качества и ограничений задачи оптимального гарантированного управления) прогноз наблюдения, который может быть гарантирован в момент времени $\tau = 0$.

Как установлено в разделе 4, при каждом $l = 1,\dots,m+1$ оценка $\hat{\mu}_l\big(t_1,\Omega(t_1|0,\Omega_0,\hat{y}_0)\big)$ может быть найдена как решение задачи линейного программирования (21), которую удобно переписать в виде

$$\begin{gathered}\hat{\mu}_l\big(t_1,\Omega(t_1|0,\Omega_0,\hat{y}_0)\big) = \max_{z^{(l)}} q_l^\top z^{(l)},\\ -\mathbb{1}\xi_{\max} \leqslant \hat{y}_0(s) - D(s)z^{(l)} \leqslant \mathbb{1}\xi_{\max},\ \ s \in \hat{\Delta}_0,\\ d_{\min} \leqslant z^{(l)} \leqslant d_{\max},\end{gathered} \tag{26}$$

где $q_l^\top = h_l^\top e^{At_f} G$, $z^{(l)} \in \mathbb{R}^{n_z}$ – переменная оптимизации l-й задачи, что подчеркивает тот факт, что в каждой задаче параметр начального состояния будет различным.

Теперь задача (25) примет вид

$$\begin{gathered}\mu_0(0,\Omega_0) = \max_{\hat{y}_0\in\mathcal{Y}_0} \sum_{l=1}^{m+1} p_l \max_{z^{(l)}} q_l^\top z^{(l)},\\ -\mathbb{1}\xi_{\max} \leqslant \hat{y}_0(s) - D(s)z^{(l)} \leqslant \mathbb{1}\xi_{\max},\ \ s \in \hat{\Delta}_0,\\ d_{\min} \leqslant z^{(l)} \leqslant d_{\max},\ \ l = 1,\dots,m+1.\end{gathered} \tag{27}$$

Поскольку все внутренние задачи максимизации (26) независимы, а $p \geqslant 0$, в целевой функции задачи (27) можно проводить одновременную оптимизацию по переменным $\hat{y}_0$, $z^{(l)}$, $l = 1,\dots,m+1$:

$$\mu_0(0,\Omega_0) = \max_{\hat{y}_0 \in \mathcal{Y}_0, z^{(l)}} \sum_{l=1}^{m+1} p_l q_l^\top z^{(l)}.$$

Вспомним, что $\hat{y}_0(s) = C\hat{x}(s|\,0,z) + \xi(s) = D(s)z + \xi(s)$, $s \in \hat{\Delta}_0$, подставим это выражение в ограничения задачи (27) и окончательно получим

$$\begin{gathered}
\mu_0(0,\Omega_0) = \max_{z,\xi,z^{(l)}} \sum_{l=1}^{m+1} p_l q_l^\top z^{(l)}. \\
-\mathbb{1}\xi_{\max} \leqslant D(s)(z - z^{(l)}) + \xi(s) \leqslant \mathbb{1}\xi_{\max}, \\
-\mathbb{1}\xi_{\max} \leqslant \xi(s) \leqslant \mathbb{1}\xi_{\max}, \;\; s \in \hat{\Delta}_0, \\
d_{\min} \leqslant z \leqslant d_{\max}, \;\; d_{\min} \leqslant z^{(l)} \leqslant d_{\max}, \;\; l = 1,\dots,m+1.
\end{gathered} \tag{28}$$

Таким образом, двухуровневая задача (25) сведена к эквивалентной задаче линейного программирования (28). В (28) максимизация проводится по переменной $\omega := \big(z; \xi(s), s \in \hat{\Delta}_0; z^{(l)}, l = 1,\dots,m+1\big)$, где z, $\xi(s)$, $s \in \hat{\Delta}_0$, задают параметры наихудшего сигнала $\hat{y}_0(s)$, $s \in \hat{\Delta}_0$, а $z^{(l)}$, $l = 1,\dots,m+1$, – экстремальные (по отношению к направлениям h_l) параметры начального состояния в информационном множестве, совместимом с этим сигналом.

Очевидно, что задача линейного программирования (28) всегда имеет решение. Действительно, вектор $\omega = \big(z = z'; \xi(s) = 0, s \in \hat{\Delta}_0; z^{(l)} = z', l = 1,\dots,m+1\big)$, где z' – произвольный вектор из $\mathscr{Z}$, удовлетворяет всем ограничениям задачи. Следовательно, задача (28) допустима. Максимум в (28) достигается в силу ограниченности допустимого множества.

Учет возмущений не вносит принципиальных трудностей в вычисление априорной оценки $\mu_0(0,\Omega_0)$, так же как и вычисление оценки $\mu_0\big(\tau,\Omega^*(\tau)\big)$. Требуемые модификации рассматриваются далее при изучении общего случая $N > 1$.

Продолжим рассмотрение ситуации $M = 0$, но теперь рассмотрим случай $N > 1$. Произвольное информационное множество Ω_j в момент замыкания t_j, совместимое с измерениями $\hat{y}(\cdot) = \big(\hat{y}_0(\cdot),\dots,\hat{y}_{j-1}(\cdot)\big)$, записанными до момента t_j, является многогранником вида

$$\begin{aligned}
\Omega_j &= \big\{z \in \mathscr{Z} :\; \hat{y}_k(s) - D(s)z \in \Xi,\; s \in \hat{\Delta}_k,\; k = 0,1,\dots,j-1\big\} = \\
&= \big\{z \in \mathbb{R}^{n_z} :\; \underline{v}_k(\hat{y}_k) \leqslant -D_k z \leqslant \bar{v}_k(\hat{y}_k),\; k = 0,\dots,j-1,\;\; d_{\min} \leqslant z \leqslant d_{\max}\big\}.
\end{aligned}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$D_k = \begin{pmatrix} D(s) \\ s \in \hat{\Delta}_k \end{pmatrix},\; \bar{v}_k(\hat{y}_k) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}\xi_{\max} - \hat{y}_k(s) \\ s \in \hat{\Delta}_k \end{pmatrix},\; \underline{v}_k(\hat{y}_k) = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}\xi_{\max} - \hat{y}_k(s) \\ s \in \hat{\Delta}_k \end{pmatrix},\;\; k = 0,\dots,N. \tag{29}$$

Покажем, что задача вычисления оценки $\mu_{ji}(t_j,\Omega_j)$, $i = 1,\dots,m_{j+1}$, при любом $j = 0,1,\dots,N$ является задачей линейного программирования, которая в общем виде может быть записана как

$$\begin{gathered}
\mu_{ji}(t_j,\Omega_j) = \max\; q_{ji}^\top \omega, \\
\underline{d}_{jk}(\hat{y}_k) \leqslant Q_{jk}\omega \leqslant \bar{d}_{jk}(\hat{y}_k),\;\; k = 0,1,\dots,j-1, \\
\underline{b}_j \leqslant S_j \omega \leqslant \bar{b}_j,
\end{gathered} \tag{30}$$

где $\omega \in \mathbb{R}^{n_j}$; Q_{jk}, S_j – некоторые матрицы, правила построения которых будут получены ниже, $\underline{d}_{jk}(\hat{y}_k)$, $\bar{d}_{jk}(\hat{y}_k)$ зависят от $\hat{y}_k$ линейно, $k = 0,\,1,\,\dots,\,j-1$. Остальные элементы задачи от измерений $\hat{y}_0(\cdot),\dots,\hat{y}_{j-1}(\cdot)$ не зависят. Число переменных в задаче (30) выражается рекуррентно: $n_N := n_z$, $n_j := n_{j+1}m_{j+2} + n_z + \mathcal{N}_j$, $j = N-1,\dots,0$ ($m_{N+1} := m+1$).

При $j = N$ и фиксированном i имеем линейную задачу оптимального наблюдения (16), которую с учетом обозначений (29) перепишем как

$$\begin{gathered}
\mu_{Ni}(t_N,\Omega_N) = \max\; q_{Ni}^\top z, \\
\underline{v}_k(\hat{y}_k) \leqslant -D_k z \leqslant \bar{v}_k(\hat{y}_k),\;\; k = 0,\dots,N-1, \\
d_{\min} \leqslant z \leqslant d_{\max},
\end{gathered} \tag{31}$$

где $q_{Ni}^\top = h_i^\top e^{At_f} G$.

Очевидно, задача (31) имеет вид (30) при $\omega = z$,

$$Q_{Nk} = -D_k,\ \underline{d}_{Nk}(\hat{y}_k) = \underline{v}_k(\hat{y}_k),\ \bar{d}_{Nk}(\hat{y}_k) = \bar{v}_k(\hat{y}_k),\ k = 0,\dots,N-1;$$
$$S_N = E,\ \underline{b}_N = d_{\min},\ \bar{b}_N = d_{\max}.$$

Пусть вид задачи (30) верен для $N-1,\dots,j+1$. Для j запишем задачу (14) (при $\tau = t_j$, $\Omega^*(\tau) = \Omega_j$), подставляя в нее $\mu_{j+1}(t_{j+1},\Omega_{j+1}) = \big(\mu_{j+1\,l}(t_{j+1},\Omega_{j+1}), l = 1,\dots,m_{j+2}\big)$ в виде (30):

$$\mu_{ji}(t_j,\Omega_j) = \max_{\hat{y}_j\in\mathcal{Y}_j} \sum_{l=1}^{m_{j+2}} (p_{j+1\,i})_l \max_{\omega^{(l)}} q_{j+1\,l}^\top \omega^{(l)},$$
$$\underline{d}_{j+1\,k}(\hat{y}_k) \leqslant Q_{j+1\,k}\omega^{(l)} \leqslant \bar{d}_{j+1\,k}(\hat{y}_k),\ k = 0,\dots,j,$$
$$\underline{b}_{j+1} \leqslant S_{j+1}\omega^{(l)} \leqslant \bar{b}_{j+1},$$
$$l = 1,\dots,m_{j+2},$$

где $(p_{j+1\,i})_l$ – l-я компонента вектора $p_{j+1\,i}$, $l = 1,\dots,m_{j+2}$; $\omega^{(l)}$ – переменные оптимизации внутренних задач максимизации, каждая из которых удовлетворяет ограничениям (30).

Поскольку $p_{j+1\,i} \geqslant 0\ \forall\ i$ и все внутренние задачи максимизации независимы, полагая $q_{jil}^\top := (p_{j+1\,i})_l q_{j+1\,l}^\top$, получим следующую целевую функцию в последней задаче:

$$\mu_{ji}(t_j,\Omega_j) = \max_{\hat{y}_j(\cdot)\in\mathcal{Y}_j,\omega^{(l)}} \sum_{l=1}^{m_{j+2}} q_{jil}^\top \omega^{(l)},$$

где максимум требуется найти среди всех $\omega^{(l)}$, $l = 1,\dots,m_{j+2}$, и $\hat{y}_j(\cdot)$.

С учетом вида $\mathcal{Y}_j$ уточним задачу вычисления априорной оценки $\mu_{ji}(t_j,\Omega_j)$:

$$\begin{gathered}
\mu_{ji}(t_j,\Omega_j) = \max_{z,\xi,\omega^{(l)}} \sum_{l=1}^{m_{j+2}} q_{jil}^\top \omega^{(l)},\\
\underline{v}_k(\hat{y}_k) \leqslant -D_k z \leqslant \bar{v}_k(\hat{y}_k),\\
\underline{d}_{j+1\,k}(\hat{y}_k) \leqslant Q_{j+1\,k}\omega^{(l)} \leqslant \bar{d}_{j+1\,k}(\hat{y}_k),\\
k = 0,\dots,j-1,\ l = 1,\dots,m_{j+2},\\
\underline{d}_{j+1\,j}(\hat{y}_j) \leqslant Q_{j+1\,j}\omega^{(l)} \leqslant \bar{d}_{j+1\,j}(\hat{y}_j),\\
\hat{y}_j(s) = D(s)z + \xi(s),\ \xi(s)\in\Xi,\ s\in\hat{\Delta}_j,\\
d_{\min} \leqslant z \leqslant d_{\max},\ \underline{b}_{j+1} \leqslant S_{j+1}\omega^{(l)} \leqslant \bar{b}_{j+1},\ l = 1,\dots,m_{j+2}.
\end{gathered} \tag{32}$$

В задаче (32) переменной оптимизации является

$$\omega := \big(z;\xi(s), s\in\hat{\Delta}_j;\omega^{(l)}, l = 1,\dots,m_{j+2}\big).$$

Первые две группы ограничений зависят от $\hat{y}_0(\cdot),\dots,\hat{y}_{j-1}(\cdot)$, по ним для формулировки (30) строятся блочные матрицы Q_{jk} и векторы $\underline{d}_{jk}(\hat{y}_k)$, $\bar{d}_{jk}(\hat{y}_k)$:

$$Q_{jk} = \begin{pmatrix} -D_k & \mathbb{O}_{*\times\mathcal{N}_j} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}_{*\times\mathcal{N}_j} & \operatorname{diag}(Q_{j+1\,k};m_{j+2}) \end{pmatrix}, \tag{33}$$

где $\mathbb{O}_{*\times\mathcal{N}_j} \in \mathbb{R}^{*\times\mathcal{N}_j}$ – нулевая матрица, число строк которой согласуется с числом строк в матрицах соседних блоков, а число столбцов равно $\mathcal{N}_j$; $\mathbb{O}$ – нулевые матрицы, согласованные с соседними блоками как по числу строк, так и числу столбцов; $\operatorname{diag}(Q;m)$ – блочно-диагональная матрица, в которой блок Q повторяется m раз;

$$\underline{d}_{jk}(\hat{y}_k) = \begin{pmatrix} \underline{v}_k(\hat{y}_k) \\ \underline{d}_{j+1\,k}(\hat{y}_k) \\ \vdots \\ \underline{d}_{j+1\,k}(\hat{y}_k) \end{pmatrix},\ \bar{d}_{jk}(\hat{y}_k) = \begin{pmatrix} \bar{v}_k(\hat{y}_k) \\ \bar{d}_{j+1\,k}(\hat{y}_k) \\ \vdots \\ \bar{d}_{j+1\,k}(\hat{y}_k) \end{pmatrix},$$

$$k = 0, \dots, j-1,$$

и в этих векторах блоки повторяются по m_{j+2} раз.

Остальные группы ограничений задачи (32) не зависят от $\hat{y}_0(\cdot), \dots, \hat{y}_{j-1}(\cdot)$ и в силу линейной зависимости $\underline{d}_{j+1\,j}(\hat{y}_j)$, $\bar{d}_{j+1\,j}(\hat{y}_j)$ от $\hat{y}_j$, после исключения ограничения-равенства (подстановки выражения для $\hat{y}_j$ в интервальное ограничение), могут быть преобразованы к виду $\underline{b}_j \leqslant S_j\omega \leqslant \bar{b}_j$, где

$$S_j = \begin{pmatrix} E_{n_z+\mathcal{N}_j} & \mathbb{O}_* \\ R_{j+1} & \operatorname{diag}(Q_{j+1\,j}; m_{j+2}) \\ \mathbb{O}_* & \operatorname{diag}(S_{j+1}; m_{j+2}) \end{pmatrix}, \quad R_{j+1} = \begin{pmatrix} D_j & E_{\mathcal{N}_j} \\ \vdots & \vdots \\ D_j & E_{\mathcal{N}_j} \end{pmatrix}, \tag{34}$$

R_{j+1} по количеству блоков $(D_j\ E_{\mathcal{N}_j})$ согласуется с $\operatorname{diag}(Q_{j+1\,j}; m_{j+2})$;

$$\underline{b}_j = \begin{pmatrix} d_{\min} \\ -\mathbb{1}\xi_{\max} \\ \underline{b}_{j+1} \\ \vdots \\ \underline{b}_{j+1} \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_j = \begin{pmatrix} d_{\max} \\ \mathbb{1}\xi_{\max} \\ \bar{b}_{j+1} \\ \vdots \\ \bar{b}_{j+1} \end{pmatrix},$$

блоки $\underline{b}_{j+1}$, $\bar{b}_{j+1}$ повторяются m_{j+2} раз, размерность вектора $\mathbb{1}$ согласована с числом ограничений.

Перейдем к вычислению оценки $\mu_{ji}\big(\tau, \Omega^*(\tau)\big)$, которая находится как решение задачи (14). К моменту времени $\tau \in \hat{\Delta}_j$ будет получен очищенный сигнал измерений

$$\big(\hat{y}_0^*(\cdot), \hat{y}_1^*(\cdot), \dots, \hat{y}_{j-1}^*(\cdot); \hat{y}^*(s), s \in \hat{\Delta}_j(\tau)\big),$$

где $\hat{y}_k^*(\cdot) = (\hat{y}^*(s), s \in \hat{\Delta}_k)$, $k = 0, \dots, j-1$. Тогда для вычисления оценки $\mu_{ji}\big(\tau, \Omega^*(\tau)\big)$ достаточно просто модифицировать задачу (30). Во-первых, необходимо положить $\hat{y}_k(s) := \hat{y}_k^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}_k$, $k = 0, 1, \dots, j-1$, т. е. вычислить для первой группы ограничений значения верхней и нижней границы $\bar{d}_{jk}(\hat{y}_k^*)$, $\underline{d}_{jk}(\hat{y}_k^*)$. Во-вторых, нужно добавить условие совместимости для измерений $\hat{y}^*(s), s \in \hat{\Delta}_j(\tau)$ – это условие имеет вид $\hat{y}^*(s) = D(s)z + \xi(s)$, $s \in \hat{\Delta}_j(\tau)$. Таким образом, решаемую в момент времени τ задачу можно представить как

$$\begin{gathered} \mu_{ji}\big(\tau, \Omega^*(\tau)\big) = \max\ q_{ji}^\top \omega, \\ \underline{d}_{jk}(\hat{y}_k^*) \leqslant Q_{jk}\omega \leqslant \bar{d}_{jk}(\hat{y}_k^*), \ \ k = 0, \dots, j-1, \\ \underline{b}_j \leqslant S_j\omega \leqslant \bar{b}_j, \ \ S_{j\tau}\omega = b_{j\tau}, \end{gathered} \tag{35}$$

где

$$S_{j\tau} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} D(s) \\ s \in \hat{\Delta}_j(\tau) \end{pmatrix} & E & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad b_{j\tau} = \begin{pmatrix} \hat{y}^*(s) \\ s \in \hat{\Delta}_j(\tau) \end{pmatrix},$$

где нулевой блок имеет размер, согласующийся с размерностью вектора ω.

Кратко остановимся на ситуации, когда в системе присутствуют возмущения: $M \neq 0$. Имеем

$$\Omega_j = \big\{(z, \upsilon) \in \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n\mathcal{N}} : \ \underline{v}_k(\hat{y}_k) \leqslant -D_k z - R_k\upsilon \leqslant \bar{v}_k(\hat{y}_k), k = 0, \dots, j-1, d_{\min} \leqslant z \leqslant d_{\max}, \ \ \upsilon \in \Upsilon^{\mathcal{N}}\big\},$$

где $\upsilon = (\upsilon(\theta), \theta \in \hat{\Delta})$, $R_k = \begin{pmatrix} Q(s,\theta), & \theta \in \hat{\Delta} \\ s \in \hat{\Delta}_k & \end{pmatrix}$, $Q(s,\theta) = \mathbb{O}$, $\theta > s$, $Q(s,\theta)$ $\theta \leqslant s$, определены как в (24).

В задаче (30) при $j = N$ положим $\omega = (z, \upsilon)$,

$$q_{Ni}^\top = \big(h_i^\top e^{At_f} G, h_i^\top e^{A(t_f-\theta)}, \theta \in \hat{\Delta}\big), Q_{Nk} = \big(-D_k\ -R_k\big), k = 0, \dots, N-1;$$

$$S_N = \begin{pmatrix} E_{n_z} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \operatorname{diag}(S; \mathcal{N}) \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_N = \begin{pmatrix} d_{\min} \\ -b \\ \dots \\ -b \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_N = \begin{pmatrix} d_{\max} \\ b \\ \dots \\ b \end{pmatrix},$$

где число повторяющихся блоков в $\underline{b}_N$, $\bar{b}_N$ равно $\mathcal{N}$, а остальные элементы остаются как в задаче (31).

В задаче (30) для произвольного j полагаем

$$\omega := \big\{z; \upsilon; \xi(s), s \in \hat{\Delta}_j; \omega^{(l)}, l = 1, \dots, m_{j+2}\big\},$$

а при построении матриц и векторов ограничений по правилам (33), (34), в матрицах Q_{jk} верхний левый блок $-D_k$ заменим на $\begin{pmatrix} -D_k & -R_k \end{pmatrix}$, в матрице S_j заменим блок с единичной матрицей на матрицу S_N, в $\underline{b}_j$, $\bar{b}_j$ блоки $d_{\min}$, $d_{\max}$ заменены на $\underline{b}_N$, $\bar{b}_N$, матрицы R_{j+1} сформируем как

$$R_{j+1} = \begin{pmatrix} D_j & R_j & E_{\mathcal{N}_j} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_j & R_j & E_{\mathcal{N}_j} \end{pmatrix}.$$

Все модификации, необходимые для вычисления оценок $\mu_{ji}\big(\tau, \Omega^*(\tau)\big)$ следуют идее построения задачи (35). Окончательный вид задач в работе не приводится.

Таким образом, если возмущения в системе отсутствуют, задачи оптимального априорного наблюдения сводятся к задачам линейного программирования. При наличии возмущений они аппроксимируются задачами линейного программирования. Размер получаемых задач существенно зависит от числа ограничений в задаче (13) и быстро растет с увеличением числа моментов замыкания, что является проявлением «проклятия размерности» в задаче оптимального гарантированного управления.

6. Примеры

Преимущества использования задач оптимального априорного наблюдения при оптимальном гарантированном управлении по измерениям продемонстрируем рядом примеров.

Рассмотрим на промежутке времени $[0, t_f]$ систему без возмущения

$$\dot{x}_1 = x_2, \;\; \dot{x}_2 = -x_1 + u, \;\; t \in [0, t_f], \tag{36}$$

начальное состояние которой неизвестно:

$$x(0) = z, \;\; z \in \mathscr{Z} = \{z \in \mathbb{R}^2 : \; ||z||_\infty \leqslant d_{\max}\}.$$

Здесь в терминах (2): $x_0 = 0$, $G = E$, $\mathscr{X}_0 = \mathscr{Z}$.

Полное состояние системы (36) не доступно для измерений. В моменты времени $s \in \hat{\Delta}$ с ограниченной ошибкой $\xi(s)$ измеряется только первая компонента состояния:

$$y(s) = x_1(s) + \xi(s), \;\; |\xi(s)| \leqslant \xi_{\max}.$$

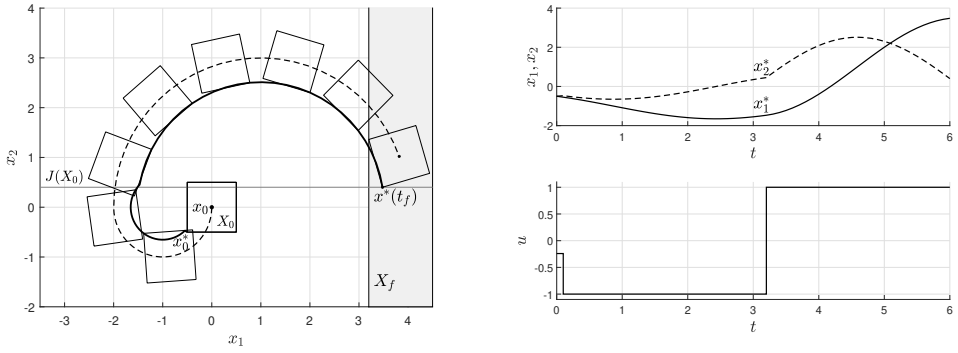
Целью управления является перевод системы (36) с гарантией на терминальное множество

$$X_f = \{x \in \mathbb{R}^2 : g_{\min} \leqslant x_1 \leqslant g_{\max}\}$$

и максимизация гарантированного значения второй компоненты состояния в терминальный момент времени $x_2(t_f)$.

Параметрам задачи присвоим следующие значения: $t_f = 6$; $d_{\max} = 0,5$; $\xi_{\max} = 0,2$; $g_{\min} = 3,2$; $g_{\max} = 4,5$; $h = 0,1$. Решение будем искать только для момента времени $\tau = 0$, для других моментов времени решение и выводы аналогичны.

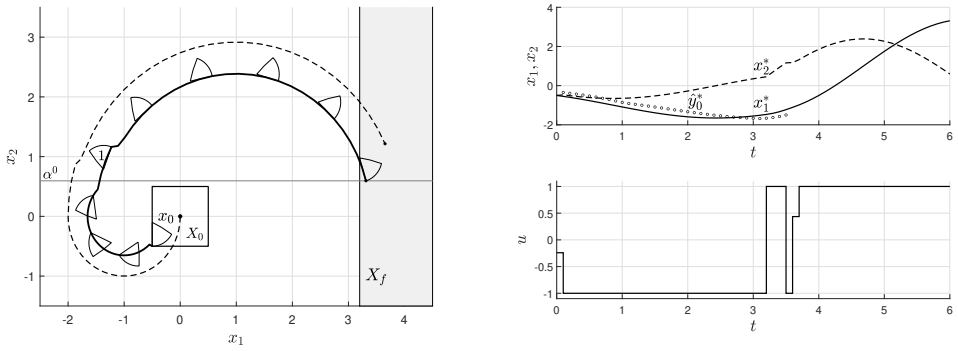
В рассматриваемом примере существует оптимальная гарантирующая программа, она доставляет критерию качества гарантированное значение, равное $0,401321$. Это значение достигается при реализации вектора параметров начального состояния $z^* = (-0,5; -0,5)$. На рис. 1, *а* на фазовой плоскости изображены: траектория системы управления (4) (штриховая линия, $x^*(0) = x_0 = 0$), траектория системы (1) при наихудшей реализации параметров, т. е. с начальным состоянием $x(0) = x_0^* = z^*$ (сплошная жирная линия), динамика множеств $x^*(t) + \{\hat{x}(t|0,z) : z \in \mathscr{Z}\}$ (тонкие линии, показано положение множеств в отдельные моменты времени $t \in [0, t_f]$). Последнее из этих множеств полностью лежит в терминальном множестве X_f (серая полоса), что демонстрирует выполнение терминальных ограничений при выбранном управлении. На рис. 1, *б* представлены траектории при наихудшей реализации начального состояния как функции времени и примененное к системе управление.



а *б*

Рис. 1. Результаты решения в классе гарантирующих программ

В рассматриваемой задаче выберем момент замыкания $t_1 = 3,5$ и построим оптимальную однократно замыкаемую стратегию по измерениям, для которой задачи оптимального априорного наблюдения имеют вид (25). Результаты изображены на рис. 2.



а *б*

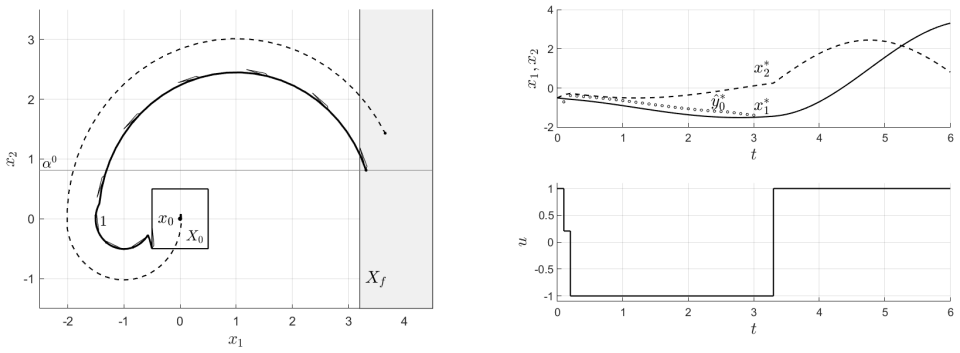
Рис. 2. Результаты решения в классе стратегий управления с моментом замыкания $t_1 = 3,5$

Как и ранее, на рис. 2, *а* штриховая линия соответствует системе управления (4) с начальным состоянием $x^*(0) = 0$; сплошная жирная – траектории системы (1), соответствующей наихудшей реализации параметров начального состояния, здесь $z^* = (-0,5;-0,5)$ и управлению, изображенному на рис. 2, *б*. Тонкие сплошные линии ограничивают множества вида $x^*(t) + \{\hat{x}(t|0,z) : z \in \in \Omega(t_1|0,\Omega_0,\hat{y}_0^*)\}$, $t = 0;1;2;3;3,5;4;4,5;5;5,5;6$. Первое из этих множеств есть $\Omega(t_1|0,\Omega_0,\hat{y}_0^*) \subset \mathscr{X}_0$. Множество, обозначенное цифрой 1, есть $\mathscr{X}(t_1|0,\mathscr{X}_0,u_0,\hat{y}_0^*)$ – это наихудшее прогнозное информационное множество, полученное в результате решения задачи априорного наблюдения (25). Последнее из указанных множеств целиком лежит в терминальном множестве X_f. Здесь $\hat{y}_0^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}_0$, – наихудший сигнал измерений. Под таким сигналом понимается $\hat{y}_0(\cdot) \in \mathcal{Y}_0$, доставляющий максимум в задаче (25) для направления $p = p_{1i}$, которое входит в активные ограничения задачи (13). Всего в задаче (13) 29 ограничений на состояние $x(t_1)$ (строк матрицы Φ_1). Упомянутый сигнал измерений изображен на верхнем рис. 2, *б*.

Оптимальное значение критерия качества, соответствующее оптимальной стратегии с моментом замыкания $t_1 = 3,5$ равно $V_0(X_0) = 0,594911$.

Выбор любого момента замыкания от $t_1 = 1,6$ до $t_1 = 3$ обеспечивает оптимальное значение критерия качества, равное $0,813016$. Это максимальное значение, которого можно достичь выбором момента замыкания. Соответствующие результаты, полученные при $t_1 = 3$, представлены на рис. 3.

Полученные результаты демонстрируют эффективность использования задач априорного наблюдения в задачах оптимального гарантированного управления по измерениям. Учет прогноза информационных множеств при построении оптимальных стратегий управления позволил более чем в два раза повысить гарантированное значение критерия качества по сравнению с программным управлением.



а *б*

Рис. 3. Результаты решения в классе стратегий управления с моментом замыкания $t_1 = 3$

Работа выполнена при поддержке Государственной программы научных исследований «Конвергенция-2030» (НИР 1.07.2).

Литература

1. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.

2. *Черноусько Ф. Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 320 с.

3. *Костоусова Е. К.* О полиэдральном оценивании областей достижимости линейных многошаговых систем // Автоматика и телемеханика. 1997. № 3. С. 57–68.

4. *Kostousova E. K.* State estimation for dynamic systems via parallelotopes: optimization and parallel computations // Optimiz. Methods & Software. 1998. Vol. 9, N 14. P. 269–306.

5. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Союзные задачи управления, наблюдения и идентификации // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34, № 9. С. 777–780.

6. *Габасов Р., Дмитрук Н. М., Кириллова Ф. М.* Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2004. Т. 10, № 2. С. 33–57.

7. *Дмитрук Н. М.* Оптимальное робастное управление линейными системами по неточным измерениям выходных сигналов // Проблемы управления и информатики. 2011. № 6. С. 25–42.

8. *Дмитрук Н. М.* Оптимальные замыкаемые обратные связи по измерениям в линейной задаче оптимального управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2025. Т. 31, № 2. С. 108–124.

9. *Габасов Р., Дмитрук Н. М., Кириллова Ф. М.* Оптимальное наблюдение за нестационарными системами // Известия РАН. Теория и системы управления. 2002. № 3. С. 35–46.

10. *Габасов Р., Дмитрук Н. М., Кириллова Ф. М.* Оптимальное условно-относительное наблюдение нестационарных линейных систем // Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68, № 4. С. 586–601.

11. *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* On reachability under uncertainty // SIAM Journal on Control and Optimization. 2002. Vol. 41, N 1. P. 181–216.

12. *Дмитрук Н. М.* Многократно замыкаемая стратегия управления в линейной терминальной задаче оптимального гарантированного управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 3. С. 66–82.

13. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Задачи управления. Минск: Изд-во «Университетское», 1984. 207 с.

14. *Габасов Р., Дмитрук Н. М., Кириллова Ф. М.* Оптимальное наблюдение при постоянно действующих возмущениях // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 52–68.

15. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Оптимизация линейных систем. Минск: БГУ, 1973. 246 с.

16. *Boyd S. P., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge: Cambridge University Press, 2023. 716 p.

References

1. Kurzhanski A. B. *Control and Observation under Uncertainty*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 392 p. (in Russian).

2. Chernousko F. L. *State Estimation for Dynamic Systems. The Ellipsoid Method*. Moscow, Nauka Publ., 1988. 320 p. (in Russian).

3. Kostousova E. K. On polyhedral estimation of reachability sets of linear multistep systems. *Automation and Remote Control*, 1997, vol. 58, iss. 3, pp. 374–382.

4. Kostousova E. K. State estimation for dynamic systems via parallelotopes: optimization and parallel computations. *Optimization Methods & Software*, 1998, vol. 9, no. 14, pp. 269–306 (in Russian).

5. Gabasov R., Kirillova F. M. Dual problems of control, observation and identification. *Doklady Akademii Nauk BSSR*, 1990, vol. 34, no. 9, pp. 777–780 (in Russian).

6. Gabasov R., Dmitruk N. M., Kirillova F. M. Optimal control of multidimensional systems from inaccurate measurements of their output signals. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2004, suppl. 2, pp. S52–S75.

7. Dmitruk N. M. Optimal robust control of linear systems from inaccurate measurements of output signals. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2011, vol. 43, iss. 11, pp. 30–47.

8. Dmitruk N. M. Optimal closed-loop measurement feedback in a linear optimal control problem. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2025, vol. 329, pp. S77–S92.

9. Gabasov R., Dmitruk N. M., Kirillova F. M. Optimal observation of nonstationary systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2002, vol. 41, no. 2, pp. 195–206.

10. Gabasov R., Dmitruk N. M., Kirillova F. M. Optimal conditional relative observation of non-stationary linear systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, vol. 68, no. 4, pp. 523–536.

11. Kurzhanski A. B., Varaiya P. On reachability under uncertainty. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2002, vol. 41, no. 1, pp. 181–216.

12. Dmitruk N. M. Multiply closed control strategy in a linear terminal problem of optimal guaranteed control. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2022, vol. 319, suppl. 1, pp. S112–S128.

13. Gabasov R., Kirillova F. M. *Constructive Methods of Optimization. Part 2. Control Problems*. Minsk, Universitetskoe, 1984. 207 p. (in Russian).

14. Gabasov R., Dmitruk N. M., Kirillova F. M. Optimal control under persistent disturbances. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. S52–S75.

15. Gabasov R., Kirillova F. M. *Optimization of Linear Systems*. Minsk, BSU, 1973. 246 p. (in Russian).

16. Boyd S. P., Vandenberghe L. *Convex Optimization*. Cambridge, Cambridge University Press, 2023. 716 p.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 128–142

УДК 517.977 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-128–142
EDN: EPOORT

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ УПРАВЛЕНИИ С МИНИМАЛЬНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ЛИНЕЙНОЙ ТРЕХТЕМПОВОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ

А. И. Калинин, Л. И. Лавринович

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: kalininai@bsu.by, lavrinovich@bsu.by

Поступила: 26.08.2026 **Исправлена:** 14.09.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: малый параметр, сингулярно возмущенная система, оптимальное управление, асимптотические приближения, минимальная интенсивность управления

Аннотация. Рассматривается задача оптимизации переходного процесса в линейной сингулярно возмущенной системе с двумя группами быстрых переменных, которая состоит в нахождении многомерного управления с минимальной интенсивностью. Показано, что для построения приближенного (в асимптотическом смысле) решения этой задачи достаточно решить три невозмущенные задачи оптимального управления меньшей размерности.

ASYMPTOTICS OF SOLVING CONTROL PROBLEM WITH MINIMUM INTENSITY OF LINEAR THREE-TEMPO SINGULARLY PERTURBED SYSTEM

A. I. Kalinin, L. I. Lavrinovich

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: kalininai@bsu.by, lavrinovich@bsu.by

Received: 26.08.2026 **Revised:** 14.09.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: small parameter, singularly perturbed system, optimal control, asymptotic approximations, minimum control intensity

Abstract. The problem of optimizing the transient process in a linear singularly perturbed system with two groups of fast variables is considered, which consists in finding multidimensional control with minimal intensity. It is shown that to construct an approximate (in the asymptotic sense) solution to this problem, it is sufficient to solve three unperturbed optimal control problems of a smaller dimension.

1. Введение

В математической теории оптимальных процессов значительное внимание уделяется задачам оптимизации сингулярно возмущенных систем, содержащих малые параметры при части производных. Это вызвано эффективностью асимптотических методов решения таких задач, при применении которых исходная задача распадается на задачи оптимального управления меньшей размерности. Кроме того, асимптотический подход позволяет избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, которые являются жесткими. При интегрировании таких систем возникают серьезные трудности, выражающиеся в недопустимо большом времени счета и неизбежном накоплении вычислительных ошибок. В первых работах, посвященных задачам оптимального управления с сингулярными возмущениями, рассматривались динамические системы, содержащие только две группы переменных с существенно различными скоростями изменения, которые были названы медленными и быстрыми переменными (см. обзоры [1–4]). В дальнейшем в связи с потребностями приложений появились работы по оптимизации систем с несколькими группами быстрых переменных, которые содержали при производных параметры различных порядков малости. Их обзор содержится в [5].

Настоящая статья посвящена построению асимптотического приближения к решению задачи оптимизации переходного процесса в линейной трехтемповой сингулярно возмущенной системе с многомерными управлениями. Эта задача состоит в нахождении управления с минимальной интенсивностью. Под интенсивностью в данном случае понимается максимум евклидовой нормы значений управляющего воздействия. В прикладных задачах управление зачастую имеет смысл обобщенной силы, а интенсивность оценивает тогда наибольшее значение этой силы. Поэтому

рассматриваемую задачу называют задачей об управлении минимальной силой [6]. Подобные задачи занимают особое место среди типичных задач оптимизации динамических систем вследствие негладкости функционала качества. Они возникают в приложениях, когда большие значения управляющих воздействий либо технически нереализуемы, либо нежелательны из-за чрезмерных перегрузок, вызванных ускорениями.

Следует отметить, что аналогичная задача для двухтемповой системы была исследована в [7;8]. Подход к построению асимптотических приближений к решению в этих работах используется и в данном случае. Его суть состоит в построении асимптотических разложений оптимальной интенсивности и начальных значений (в конечный момент времени) сопряженных переменных. Принципиальное отличие состоит в том, что в указанных задачах используется классический вариант метода пограничных функций для двухтемповой сингулярно возмущенной системы [9], а в настоящей статье – метод пограничных функций для систем с несколькими группами быстрых переменных [10]. При этом старшие коэффициенты разложений оптимальной интенсивности и начальных значений сопряженных переменных формируются путем решения трех невозмущенных задач оптимального управления, а не двух, как это имело место в работах [7; 8].

2. Постановка задачи

В классе r-мерных управляющих воздействий $u(t) = (u_1(t), ..., u_r(t))$, $t \in T = [0, t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимального управления линейной стационарной системой:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 u,\ x(0) = x_* \neq 0, \\ \mu\dot{y} &= A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 u,\ y(0) = y_* \neq 0, \\ \mu^2\dot{z} &= A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 u,\ z(0) = z_* \neq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$x(t^*) = 0,\ y(t^*) = 0,\ z(t^*) = 0, \tag{2}$$

$$J(u) = \sup_{t \in T} \|u(t)\| \to \min, \tag{3}$$

где μ – малый положительный параметр; t^* – заданный конечный момент времени ($t^* > 0$); x – n_1-вектор медленных переменных; y, z – векторы быстрых переменных размерности n_2 и n_3 соответственно. Остальные элементы задачи имеют соответствующие размеры, $\|u\| = (u_1^2 + u_2^2 + \\ + ... + u_r^2)^{1/2}$ – евклидова норма вектора u.

Предположение 1. Матрицы C_3 и $B = B_2 - C_2 C_3^{-1} B_3$ устойчивые, т. е. действительные части всех их собственных значений отрицательны.

Уточним, что будем понимать под асимптотическими приближениями к решению рассмотренной задачи.

Определение 2.1. Управление $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in T$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка ($N = 0, 1, 2, \dots$), если оно переводит динамическую систему (1) в состояние $O(\mu^{N+1})$ и отклоняется по критерию качества (3) от оптимального управления на величину того же порядка малости.

В настоящей статье излагается и обосновывается алгоритм, с помощью которого для заданного числа N можно построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в рассмотренной задаче. Алгоритм опирается на конструктивное доказательство теоремы о существовании гладкого оптимального управления и его асимптотических свойствах. В работе также показывается, как можно использовать построенные асимптотические приближения для решения задачи (1)–(3) при заданном значении малого параметра.

В дальнейшем для сокращения записи будем использовать следующие обозначения:

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2/\mu & B_2/\mu & C_2/\mu \\ A_3/\mu^2 & B_3/\mu^2 & C_3/\mu^2 \end{pmatrix},\ D(\mu) = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2/\mu \\ D_3/\mu^2 \end{pmatrix}, X_* = \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \\ z_* \end{pmatrix}.$$

3. Первая базовая задача

Суть предлагаемого подхода к построению асимптотически субоптимальных управлений состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений (в момент t^*) сопряженных переменных. Старшие коэффициенты этих разложений определяются начальными значениями сопряженных переменных в трех невозмущенных задачах оптимального управления меньшей размерности.

Вычисления при построении асимптотических субоптимальных управлений начинается с решения вырожденной задачи

$$\begin{gathered} \dot{x} = A_0 x + D_0 u,\ x(0) = x_*,\ x(t^*) = 0, \\ J_1(u) = \sup_{t \in T} \|u(t)\| \to \min, \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} A_0 = A_1 - C_1 C_3^{-1} A_3 - (B_1 - C_1 C_3^{-1} B_3) B^{-1} (A_2 - C_2 C_3^{-1} A_3), \\ D_0 = D_1 - C_1 C_3^{-1} D_3 - (B_1 - C_1 C_3^{-1} B_3) B^{-1} D_4,\ D_4 = D_2 - C_2 C_3^{-1} D_3. \end{gathered} \tag{5}$$

В дальнейшем эту задачу будем называть *первой базовой*.

Предположение 2. Динамическая система в задаче (4) является вполне управляемой [6], т. е.

$$\operatorname{rank} \left(D_0,\ A_0 D_0,\ A_0^2 D_0,\ \ldots,\ A_0^{n_1 - 1} D_0 \right) = n_1.$$

Согласно полученным в [6, с. 161] результатам при выполнении предположения 2 в задаче (4) существует оптимальное управление $u_0(t)$, $t \in T$, причем евклидова норма его значений постоянна: $\|u_0(t)\| = L_0$, $t \in T$, и выполняется условие максимума

$$\Delta^{0\mathrm{T}}(t) u_0(t) = \max_{\|u\| \leqslant L_0} \Delta^{0\mathrm{T}}(t) u,\ t \in T, \tag{6}$$

где $\Delta^0(t) = D_0^{\mathrm{T}} \psi^0(t)$, а $\psi^0(t)$, $t \in T$, – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A_0^{\mathrm{T}} \psi,$$

стесненное краевым условием

$$\psi^{0\mathrm{T}}(t^*) F_0(0) x_* = -1. \tag{7}$$

Здесь $F_0(t)$, $t \in T$, – $(n_1 \times n_1)$-матричная функция, являющаяся решением начальной задачи

$$\dot{F}_0 = -F_0 A_0,\ F_0(t^*) = E_{n_1}. \tag{8}$$

При выполнении предположения 2 оптимальному управлению в первой базовой задаче соответствует, в силу принципа максимума, единственный вектор сопряженных переменных.

Предположение 3. Имеет место $\Delta^0(t) \neq 0$, $t \in T$.

Пусть $\lambda_0 = \psi^0(t^*)$, тогда $\Delta^0(t) = \Phi_0(t) \lambda_0$, где

$$\Delta^0(t) = \Phi_0^{\mathrm{T}}(t) \lambda_0, \tag{9}$$

где

$$\Phi_0(t) = F_0(t) D_0,\ t \in T. \tag{10}$$

Из (6) следует, что

$$u^0(t) = L_0 \Delta^0(t) / \|\Delta^0(t)\|,\ t \in T. \tag{11}$$

Обозначим через $x^0(t)$, $t \in T$, траекторию системы (4), порожденную управлением (11).

4. Вторая базовая задача

На втором этапе вычислений решается задача оптимального управления с бесконечной длительностью процесса:

$$\frac{dy}{ds} = By + D_4 u,\ y(0) = 0,\ \|u(s)\| \leqslant 1,\ s \leqslant 0,$$
$$y(-\infty) = -B^{-1}D_4\Delta^0(t^*)/\|\Delta^0(t^*)\|, \tag{12}$$
$$J_2(u) = \int_{-\infty}^{0} (\|\Delta^0(t^*)\| - \Delta^{0\mathrm{T}}(t^*)u(s))ds \to \min,$$

которую будем называть *второй базовой*.

Предположение 4. Динамическая система в задаче (12) является вполне управляемой [6], т. е.

$$\operatorname{rank}\left(D_4, BD_4, B^2D_4, \ldots, B^{n_2-1}D_4\right) = n_2.$$

Задача (12) обладает следующей особенностью: точка $(-B^{-1}D_4\Delta^0(t^*)/\|\Delta^0(t^*)\|)$ является положением равновесия динамической системы при управлении $u(s) \equiv \Delta^0(t^*)/\|\Delta^0(t^*)\|$, $s \leqslant 0$, которое обращает в нуль подынтегральное выражение в критерии качества. Отмеченное свойство вместе с предположениями 1 и 4 гарантирует существование допустимых управлений во второй базовой задаче. Отсюда, в свою очередь, следует, что эта задача имеет решение [11, теорема 4.7] и является нормальной. Последнее означает, что принцип максимума [12] можно сформулировать для задачи (12) следующим образом: пусть $u^*(s)$, $s \leqslant 0$, – оптимальное управление во второй базовой задаче, тогда

$$\Pi\Delta^{\mathrm{T}}(s)u^*(s) = \max_{|u|\leqslant 1} \Pi\Delta^{\mathrm{T}}(s)u,\ s \leqslant 0, \tag{13}$$

где $\Pi\Delta(s) = D_4^{\mathrm{T}}\Pi\psi(s) + \Delta^0(t^*)$, а $\Pi\psi(s)$, $s \leqslant 0$, – решение сопряженной системы

$$\frac{d\Pi\psi}{ds} = -B^{\mathrm{T}}\Pi\psi.$$

Пусть $\sigma_0 = \Pi\psi(0)$, тогда

$$\Pi\Delta(s) = \Pi\Phi^{\mathrm{T}}(s)\sigma_0 + \Delta^0(t^*), s \leqslant 0, \tag{14}$$

где

$$\Pi\Phi(s) = G(s)D_4, s \leqslant 0, \tag{15}$$

а $G(s)$, $s \leqslant 0$, – $(n_2 \times n_2)$-матричная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{dG}{ds} = -GB,\ G(0) = E_{n_2}. \tag{16}$$

Предположение 5. Выполняется условия $\Pi\Delta(s) \neq 0$, $s \leqslant 0$.

Тогда из (13) следует, что

$$u^*(s) = \Pi\Delta(s)/\|\Pi\Delta(s)\|,\ s \leqslant 0. \tag{17}$$

Обозначим через $y^*(s)$, $s \leqslant 0$, траекторию системы (12), порожденную управлением (17).

5. Третья базовая задача

Третья базовая задача имеет вид

$$\frac{dz}{d\tau} = C_3 z + D_3 u,\ z(0) = 0,\ z(-\infty) = -C_3^{-1}D_3\frac{\Pi\Delta(0)}{\|\Pi\Delta(0)\|},$$
$$J_3(u) = \int_{-\infty}^{0} (\|\Pi\Delta(0)\| - \Pi\Delta^{\mathrm{T}}(0)u)d\tau \to \min. \tag{18}$$

Предположение 6. Выполнено условие управляемости

$$\operatorname{rank}\left(D_3, C_3D_3, C_3^2D_3, \ldots, C_3^{n_3-1}D_3\right) = n_3.$$

В задаче (18) точка $(-C_3^{-1}D_3\Pi\Delta(0)/\|\Pi\Delta(0)\|)$ является положением равновесия динамической системы при управлении $u(\tau) \equiv \Pi\Delta(0)/\|\Pi\Delta(0)\|$, $\tau \leqslant 0$, которое обращает в нуль подынтегральное

выражение в критерии качества. Отмеченное свойство вместе с предположениями 1 и 6 гарантирует существование допустимых управлений в третьей базовой задаче. Отсюда, в свою очередь, следует, что эта задача имеет решение [11, теорема 4.7] и является нормальной. Последнее означает, что принцип максимума [12] можно сформулировать для задачи (18) следующим образом: пусть $u_*(\tau)$, $\tau \leqslant 0$, – оптимальное управление в третьей базовой задаче, тогда

$$\mathrm{Q}\Delta^{\mathrm{T}}(\tau)u_*(\tau) = \max_{|u|\leqslant 1} \mathrm{Q}\Delta^{\mathrm{T}}(\tau)u,\ \tau \leqslant 0, \tag{19}$$

где $\mathrm{Q}\Delta(\tau) = D_3^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}\psi(\tau) + \Pi\Delta(0)$, а $\mathrm{Q}\psi(\tau)$, $\tau \leqslant 0$, – решение сопряженной системы

$$\frac{d\mathrm{Q}\psi}{d\tau} = -C_3^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}\psi.$$

Пусть $\chi_0 = \mathrm{Q}\psi(0)$, тогда

$$\mathrm{Q}\Delta(\tau) = \mathrm{Q}\Phi^{\mathrm{T}}(\tau)\chi_0 + \Pi\Delta(0),\ \tau \leqslant 0, \tag{20}$$

где

$$\mathrm{Q}\Phi(\tau) = G_1(\tau)D_3, \tau \leqslant 0, \tag{21}$$

а $G_1(\tau)$, $\tau \leqslant 0$, – $(n_3 \times n_3)$-матричная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{dG_1}{d\tau} = -G_1C_3,\ G_1(0) = E_{n_3}. \tag{22}$$

Предположение 7. Выполняется условия $\mathrm{Q}\Delta(\tau) \neq 0$, $\tau \leqslant 0$.

Тогда из (19) следует, что

$$u_*(\tau) = \mathrm{Q}\Delta(\tau)/\|\mathrm{Q}\Delta(\tau)\|,\ \tau \leqslant 0. \tag{23}$$

Обозначим через $z_*(\tau)$, $\tau \leqslant 0$, траекторию системы (5), порожденную управлением (23).

Подчеркнем, что единственная информация о решении второй и третьей базовых задач, которая используется при построении асимптотически субоптимального управления, – это начальные значения η_0, ν_0 векторов сопряженных переменных. Нет необходимости строить оптимальные управления $u^*(s)$, $s \leqslant 0$, $u_*(\tau)$, $\tau \leqslant 0$, что, впрочем, и невозможно, если задача решается численно. Во второй и третьей базовых задачах гамильтониан вдоль оптимального управления равен нулю. Воспользовавшись этим свойством при $s = 0$ и $\tau = 0$, получаем условия, которым удовлетворяют векторы σ_0 и χ_0:

$$\|D_4^{\mathrm{T}}\sigma_0 + \Delta_0(t^*)\| = \|\Delta_0(t^*)\|,\ \|D_3^{\mathrm{T}}\chi_0 + \Pi\Delta(0)\| = \|\Pi\Delta(0)\|.$$

После решения базовых задач найдем векторы

$$\nu_0 = \sigma_0 - \left((B_1 - C_1C_3^{-1}B_3)B^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\lambda_0, \eta_0 = \chi_0 - \left(C_1C_3^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\lambda_0 - \left(C_2C_3^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\nu_0 \tag{24}$$

и сформируем матрицу

$$I_0 = \begin{pmatrix} S_1 & 0_{n_1\times n_2} & 0_{n_1\times n_3} & c_1 \\ S_2 & S_3 & 0_{n_2\times n_3} & c_2 \\ S_4 & S_5 & S_6 & c_3 \\ c_4^{\mathrm{T}} & 0_{n_2}^{\mathrm{T}} & 0_{n_3}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

размеров $(n_1 + n_2 + n_3 + 1) \times (n_1 + n_2 + n_3 + 1)$, блоки которой определяются формулами

$$S_1 = L_0 \int_0^{t^*} \frac{\Phi_0(t)(\|\Delta^0(t)\|^2E_r - \Delta^0(t)\Delta^{0\mathrm{T}}(t))\Phi_0^{\mathrm{T}}(t)}{\|\Delta^0(t)\|^3}dt,$$

$$S_2 = KS_1 + L_0 \int_{-\infty}^{0} \frac{\Pi\Phi(s)(\|\Pi\Delta(s)\|^2E_r - \Pi\Delta(s)\Pi\Delta^{\mathrm{T}}(s))(-P\Pi\Phi^{\mathrm{T}}(s) + D_0)^{\mathrm{T}}}{\|\Pi\Delta(s)\|^3}ds,$$

$$S_3 = L_0 \int_{-\infty}^{0} \frac{\Pi\Phi(s)(\|\Pi\Delta(s)\|^2E_r - \Pi\Delta(s)\Pi\Delta^{\mathrm{T}}(s))\Pi\Phi^{\mathrm{T}}(s)}{\|\Pi\Delta(s)\|^3}ds,$$

$$S_4 = MS_1 - C_3^{-1}B_3(S_2 - KS_1) +$$
$$+L_0\int_{-\infty}^{0}\frac{Q\Phi(\tau)\left(\|Q\Delta(\tau)\|^2E_r - Q\Delta(\tau)Q\Delta^{\mathrm{T}}(\tau)\right)\left(D_0^{\mathrm{T}} - \Pi\Phi^{\mathrm{T}}(0)P^{\mathrm{T}} + Q\Phi^{\mathrm{T}}(\tau)(C_1C_3^{-1})^{\mathrm{T}}\right)}{\|Q\Delta(\tau)\|^3}\,d\tau,$$

$$S_5 = -C_3^{-1}B_3S_3 + L_0\int_{-\infty}^{0}\frac{Q\Phi(\tau)\left(\|Q\Delta(\tau)\|^2E_r - Q\Delta(\tau)Q\Delta^{\mathrm{T}}(\tau)\right)\left(\Pi\Phi^{\mathrm{T}}(0) + Q\Phi^{\mathrm{T}}(\tau)(C_2C_3^{-1})^{\mathrm{T}}\right)}{\|Q\Delta(\tau)\|^3}\,d\tau,$$

$$S_6 = L_0\int_{-\infty}^{0}\frac{Q\Phi(\tau)(\|Q\Delta(\tau)\|^2E_r - Q\Delta(\tau)Q\Delta^{\mathrm{T}}(\tau))Q\Phi^{\mathrm{T}}(\tau)}{\|Q\Delta(\tau)\|^3}d\tau,$$

$$c_1 = \int_0^{t^*}\frac{\Phi_0(t)\Delta^0(t)}{\|\Delta^0(t)\|}dt = -F_0(0)x_*/L_0,$$

$$c_2 = Kc_1,\ c_3 = Mc_1,\ c_4 = F_0(0)x_*.$$

Здесь $K = -B^{-1}(A_2 - C_2C_3^{-1}A_3)$, $M = -C_3^{-1}(A_3 - B_3K)$, $P = -(B_1 - C_1C_3^{-1}B_3)B^{-1}$.

6. Асимптотический анализ решения исходной задачи

Прежде чем продолжить изложение алгоритма построения асимптотически субоптимальных управлений, сформулируем и докажем теорему, которая позволяет установить вид и асимптотические свойства решения задачи (1)–(3).

Обозначим через $\psi(t,\lambda,\nu,\eta,\mu)$, $t\in T$, $\lambda\in R^{n_1}$, $\nu\in R^{n_2}$, $\eta\in R^{n_3}$, решение сопряженной системы

$$\dot\psi = -A^{\mathrm{T}}(\mu)\psi,\ \psi(t^*) = (\lambda,\mu\nu,\mu^2\eta) \tag{26}$$

и введем в рассмотрение вектор-функцию

$$\Delta(t,\lambda,\nu,\eta,\mu) = D^{\mathrm{T}}(\mu)\psi(t,\lambda,\nu,\eta,\mu), \tag{27}$$

которую называют коуправлением.

Теорема 6.1. *При выполнении предположений* 1–7 *в задаче* (1)–(3) *с достаточно малым положительным* μ *существует оптимальное управление, которое представимо в виде*

$$u(t,\mu) = L(\mu)\Delta(t,\lambda,\nu,\eta,\mu)/\|\Delta(t,\lambda,\nu,\eta,\mu)\|,\ t\in T. \tag{28}$$

Для начальных значений сопряженных переменных и оптимальной интенсивности имеют место асимптотические разложения

$$\lambda(\mu)\sim\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\lambda_k,\ \nu(\mu)\sim\nu_0+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\nu_k,\ \eta(\mu)\sim\eta_0+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\eta_k,\ L(\mu)\sim L_0+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^kL_k. \tag{29}$$

Доказательство. Прежде чем перейти к доказательству теоремы, обратим внимание на то, что в разложениях (29) λ_0, L_0 суть начальное значение сопряженной переменной и оптимальная интенсивность в первой базовой задаче, а векторы ν_0, η_0 вычисляются по формулам (24).

В первую очередь убедимся, что при достаточно малом μ и векторах λ, ν, η, достаточно близких к λ_0, ν_0, η_0 соответственно, коуправление (27), рассматриваемое как функция временного аргумента t, не обращается в нуль на отрезке T. Заметим, что в силу (26) оно представимо в виде

$$\Delta^{\mathrm{T}}(t,\lambda,\nu,\eta,\mu) = (\lambda^{\mathrm{T}},\mu\nu^{\mathrm{T}},\mu^2\eta^{\mathrm{T}})F(t,\mu)D(\mu), \tag{30}$$

где $F(t,\mu)$, $t\in T$, – матричная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\dot F = -FA(\mu),\ F(t^*) = E_{n_1+n_2+n_3}. \tag{31}$$

Решение этого сингулярно возмущенного уравнения удобно представлять в блочном виде

$$F(t,\mu)=\begin{pmatrix} F_1(t,\mu) & F_2(t,\mu) & F_3(t,\mu)\\ F_4(t,\mu) & F_5(t,\mu) & F_6(t,\mu)\\ F_7(t,\mu) & F_8(t,\mu) & F_9(t,\mu)\end{pmatrix}, \tag{32}$$

где F_i, $i=\overline{1,9}$, – матрицы размеров $n_1\times n_1$, $n_1\times n_2$, $n_1\times n_3$, $n_2\times n_1$, $n_2\times n_2$, $n_2\times n_3$, $n_3\times n_1$, $n_3\times n_2$, $n_3\times n_3$ соответственно. С помощью метода пограничных функций [10] они могут быть разложены в асимптотические ряды:

$$\begin{gathered} F_i(t,\mu)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(F_{ik}(t)+\Pi_kF_i(s)+\mathrm{Q}_kF_i(\tau)),\\ s=(t-t^*)/\mu,\ \tau=(t-t^*)/\mu^2,\ t\in T,\ i=\overline{1,9}. \end{gathered} \tag{33}$$

Подчеркнем, что (33) – равномерные по $t\in T$ асимптотические разложения. Отметим как существенный факт также то, что для матричных функций $\Pi_kF_i(s)$, $s\leqslant 0$, $Q_kF_i(\tau)$, $\tau\leqslant 0$, называемых пограничными членами, имеют место оценки

$$\|\Pi_kF_i(s)\|\leqslant\beta_{1k}\exp(\gamma_{1k}s),\ \|\mathrm{Q}_kF_i(\tau)\|\leqslant\beta_{2k}\exp(\gamma_{2k}\tau) \tag{34}$$

для всех $i=\overline{1,9}$, $k=0,1,\ldots$, где β_{1k}, β_{2k}, γ_{1k}, γ_{2k} – положительные постоянные. Приведем несколько старших коэффициентов разложений (33), которые понадобятся при доказательстве теоремы:

$$\begin{gathered} F_{10}=F_0,\ F_{40}=KF_0,F_{70}=MF_0,\ F_{i0}=0,\ i=2,3,5,6,8,9,\\ F_{21}=F_0P,\ F_{51}=KF_0P,\ F_{81}=MF_0P,\ F_{i1}=0,\ i=3,6,9,\\ F_{32}=-F_0(C_1+PC_2)C_3^{-1},\ F_{62}=-KF_0(C_1+PC_2)C_3^{-1},\\ F_{92}=-MF_0(C_1+PC_2)C_3^{-1},\\ \Pi_0F_4=-GK,\Pi_0F_5=G,\ \Pi_0F_7=C_3^{-1}B_3GK,\ \Pi_0F_8=-C_3^{-1}B_3G,\\ \Pi_0F_i=0,\ i=1,2,3,6,9,\ \Pi_1F_2=-PG,\\ \Pi_1F_3=0,\ \Pi_1F_6=-GC_2C_3^{-1},\ \Pi_1F_9=C_3^{-1}B_3GC_2C_3^{-1},\ \Pi_2F_3=PGC_2C_3^{-1},\\ \mathrm{Q}_0F_i=0,\ i=\overline{1,6},\ \mathrm{Q}_0F_7=G_1C_3^{-1}A_3,\ \mathrm{Q}_0F_8=G_1C_3^{-1}B_3,\ \mathrm{Q}_0F_9=G_1,\\ \mathrm{Q}_1F_2=0,\mathrm{Q}_1F_3=0,\ \mathrm{Q}_1F_5=C_2C_3^{-1}G_1C_3^{-1}B_3,\\ \mathrm{Q}_1F_6=C_2C_3^{-1}G_1,\ \mathrm{Q}_2F_3=C_1C_3^{-1}G_1. \end{gathered} \tag{35}$$

Здесь F_0, G, G_1 – соответственно решения уравнений (8), (16), (22).

Введем в рассмотрение матричную функцию

$$\Phi(t,\mu)=F(t,\mu)D(\mu)=\begin{pmatrix} F_1(t,\mu)D_1+F_2(t,\mu)D_2/\mu+F_3(t,\mu)D_3/\mu^2\\ F_4(t,\mu)D_1+F_5(t,\mu)D_2/\mu+F_6(t,\mu)D_3/\mu^2\\ F_7(t,\mu)D_1+F_8(t,\mu)D_2/\mu+F_9(t,\mu)D_3/\mu^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Phi_1(t,\mu)\\ \Phi_2(t,\mu)\\ \Phi_3(t,\mu)\end{pmatrix}, \tag{36}$$

определенную на отрезке T. Из (15), (21) (32), (33), (35) следует, что имеют место равномерные по $t\in T$ асимптотические разложения

$$\begin{gathered} \Phi_1(t,\mu)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(\Phi_{1k}(t)+\Pi_k\Phi_1(s)+\mathrm{Q}_k\Phi_1(\tau)),\\ \Phi_2(t,\mu)-\Pi\Phi(s)/\mu\sim\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(\Phi_{2k}(t)+\Pi_k\Phi_2(s)+\mathrm{Q}_k\Phi_2(\tau)),\\ \Phi_3(t,\mu)-\mathrm{Q}\Phi(\tau)/\mu^2\sim\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(\Phi_{3k}(t)+\Pi_k\Phi_3(s)+\mathrm{Q}_k\Phi_3(\tau)), \end{gathered} \tag{37}$$

в которой

$$\begin{gathered} \Phi_{1k}=F_{1k}D_1+F_{2,k+1}D_2+F_{3,k+2}D_3,\ \Pi_k\Phi_1=\Pi_kF_1D_1+\Pi_{k+1}F_2D_2+\Pi_{k+2}F_3D_3,\\ \mathrm{Q}_k\Phi_1=\mathrm{Q}_kF_1D_1+\mathrm{Q}_{k+1}F_2D_2+\mathrm{Q}_{k+2}F_3D_3, \end{gathered}$$

$$\Phi_{2k} = F_{4k}D_1 + F_{5,k+1}D_2 + F_{6,k+2}D_3,\ \Pi_k\Phi_2 = \Pi_k F_4 D_1 + \Pi_{k+1}F_5 D_2 + \Pi_{k+2}F_6 D_3,$$
$$\mathrm{Q}_k\Phi_2 = \mathrm{Q}_k F_4 D_1 + \mathrm{Q}_{k+1}F_5 D_2 + \mathrm{Q}_{k+2}F_6 D_3,$$
$$\Phi_{3k} = F_{7k}D_1 + F_{8,k+1}D_2 + F_{9,k+2}D_3,\ \Pi_k\Phi_3 = \Pi_k F_7 D_1 + \Pi_{k+1}F_8 D_2 + \Pi_{k+2}F_9 D_3,$$
$$\mathrm{Q}_k\Phi_3 = \mathrm{Q}_k F_7 D_1 + \mathrm{Q}_{k+1}F_8 D_2 + \mathrm{Q}_{k+2}F_9 D_3.$$

Заметим, что в силу (10), (15), (21), (35) имеем

$$\begin{gathered}\Phi_{10}(t) = \Phi_0(t), \Phi_{20}(t) = K\Phi_0(t), \Phi_{30}(t) = M\Phi_0(t), t \in T,\\ \Pi_0\Phi_1(s) = -P\Pi\Phi(s),\ s \leqslant 0,\ \mathrm{Q}_0\Phi_1(\tau) = C_1C_3^{-1}\mathrm{Q}\Phi(\tau),\ \mathrm{Q}_1\Phi_2(\tau) = C_2C_3^{-1}\mathrm{Q}\Phi(\tau),\ \tau \leqslant 0.\end{gathered} \tag{38}$$

Как видно из (30), (36), коуправление представимо в виде

$$\Delta^{\mathrm{T}}(t,\lambda,\nu,\eta,\mu) = \lambda^{\mathrm{T}}\Phi_1(t,\mu) + \mu\nu^{\mathrm{T}}\Phi_2(t,\mu) + \mu^2\eta^{\mathrm{T}}\Phi_3(t,\mu),\ t \in T,$$

и, следовательно, разлагается в асимптотический ряд

$$\begin{gathered}\Delta(t,\lambda,\nu,\eta,\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(\Delta_k(t,\lambda,\nu,\eta) + \Pi_k\Delta(s,\lambda,\nu,\eta) + \mathrm{Q}_k\Delta(\tau,\lambda,\nu,\eta)),\\ s = (t-t^*)/\mu,\ \tau = (t-t^*)/\mu^2,\end{gathered} \tag{39}$$

где

$$\Delta_0^{\mathrm{T}}(t) = \lambda^{\mathrm{T}}\Phi_{10},\ \Pi_0\Delta^{\mathrm{T}}(s) = \lambda^{\mathrm{T}}\Pi_0\Phi_1(s) + \nu^{\mathrm{T}}\Pi\Phi(s),$$
$$\mathrm{Q}_0\Delta^{\mathrm{T}}(\tau) = \lambda^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}_0\Phi_1(\tau) + \nu^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}_1\Phi_2(\tau) + \eta^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}\Phi(\tau).$$

Разложение (39) будет равномерным в области $t \in T$, $\|(\lambda,\nu,\eta) - (\lambda_0,\nu_0,\eta_0)\| < \epsilon$, где ϵ – некоторое положительное число. Заметим, что из (9), (24), (38) следуют соотношения

$$\begin{gathered}\Delta_0(t,\lambda_0,\nu_0,\eta_0) = \Delta^0(t),\ t \in T,\ \Pi_0\Delta(s,\lambda_0,\nu_0,\eta_0) = \Pi\Phi^{\mathrm{T}}(s)\sigma_0,\ s \leqslant 0,\\ \mathrm{Q}_0\Delta(\tau) = \mathrm{Q}\Phi^{\mathrm{T}}(\tau)\chi_0, \tau \leqslant 0.\end{gathered} \tag{40}$$

Используя предположения 1, 3, 5, 7 с учетом равенств (14), (20) легко убедиться в том, что при достаточно малом μ выполнено условие $\Delta^0(t) + \Pi\Phi^{\mathrm{T}}((t-t^*)/\mu)\sigma_0 + \mathrm{Q}\Phi^{\mathrm{T}}((t-t^*)/\mu^2)\chi_0 \neq$ $\neq 0$, $t \in T$. Тогда, как видно из (39), (40), вектор-функция (27) отлична от нуля в области $t \in T$, $\|(\lambda,\nu,\eta) - (\lambda_0,\nu_0,\eta_0)\| < \epsilon_0$, $0 < \mu < \mu_0$, где ϵ_0, μ_0 – достаточно малые положительные числа.

В дальнейшем для сокращения записи будем использовать обозначения $\theta = (\lambda,\nu,\eta,L)$, $\theta_0 = (\lambda_0,\nu_0,\eta_0,L_0)$, где L – положительное число.

Рассмотрим управление $u(t,\theta,\mu) = L\Delta(t,\lambda,\nu,\eta,\mu)/\|\Delta(t,\lambda,\nu,\eta,\mu)\|$, $t \in T$, $\|(\lambda,\nu,\eta) -$ $-(\lambda_0,\nu_0,\eta_0)\| < \epsilon_0$, $0 < \mu < \mu_0$, $L > 0$, и обозначим через $X(t,\theta,\mu) = (x(t,\theta,\mu), y(t,\theta,\mu), z(t,\theta,\mu))$, $t \in T$, траекторию системы (1), им порожденную. Ниже будет показано, что вопрос о существовании оптимального управления в исходной задаче и о его асимптотических свойствах тесно связан с разрешимостью системы конечных уравнений

$$X(t^*,\theta,\mu) = 0,\ (\lambda,\mu\nu,\mu^2\eta)F_0(0,\mu)X_* + 1 = 0 \tag{41}$$

относительно неизвестных λ, ν, η, L при достаточно малом положительном μ. Для этого прежде всего убедимся, что левые части уравнений (41) допускают асимптотические разложения по целым степеням малого параметра, и получим формулы для коэффициентов разложений.

Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$R(\theta,\mu) = \begin{pmatrix} X(t^*,\theta,\mu) \\ (\lambda,\mu\nu,\mu^2\eta)F(0,\mu)X_* + 1 \end{pmatrix} \tag{42}$$

размерности $n_1 + n_2 + n_3 + 1$, что позволяет записать систему уравнений (41) в виде

$$R(\theta,\mu) = 0. \tag{43}$$

В силу формулы Коши и (31), (36) имеем

$$X(t^*,\theta,\mu) = F(0,\mu)X_* + \int_0^{t^*}\frac{\Phi(t,\mu)\Delta(t,\lambda,\nu,\eta,\mu)}{\|\Delta(t,\lambda,\nu,\eta,\mu)\|}dt.$$

Как было показано, блоки матриц $F(t,\mu)$, $\Phi(t,\mu)$ и вектор-функция $\Delta(t,\lambda,\nu,\mu)$ разлагаются в асимптотические ряды (см. (33), (37), (39)). Отсюда и из формул (34), (35) следует, что справедливо асимптотическое разложение

$$x(t^*,\theta,\mu)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k x_k(\theta),\ y(t^*,\theta,\mu)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k y_k(\theta),\ z(t^*,\theta,\mu)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k z_k(\theta), \tag{44}$$

в котором

$$x_0(\theta)=F_0(0)x_*+L\int_0^{t^*}\frac{\Phi_0(t)\Delta_0(t,\lambda)}{\|\Delta_0(t,\lambda)\|}\,dt,$$

$$y_0(\theta)=Kx_0(\theta)+L\int_{-\infty}^{0}\frac{\Pi\Phi(s)\delta_0(s)}{\|\delta_0(s)\|}\,ds, \tag{45}$$

$$z_0(\theta)=Mx_0(\theta)-C_3^{-1}B_3\big(y_0(\theta)-Kx_0(\theta)\big)+L\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{Q}\Phi(\tau)\delta_0^*(\tau)}{\|\delta_0^*(\tau)\|}\,d\tau,$$

$$\begin{gathered}x_1(\theta)=F_{11}(0)x_*+F_{21}(0)y_*+F_{31}(0)z_*+\\ +L\int_0^{t^*}\left(\frac{\Phi_{11}(t)\Delta_0(t,\lambda)}{\|\Delta_0(t,\lambda)\|}+\Phi_{10}(t)\left[\frac{\Delta_1(t,\lambda,\nu)}{\|\Delta_0(t,\lambda)\|}-\frac{\Delta_0(t,\lambda)\Delta_0^{\mathrm{T}}(t,\lambda)\Delta_1(t,\lambda,\nu)}{\|\Delta_0(t,\lambda)\|^3}\right]\right)dt+\\ +L\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{\big(\Phi_{10}(t^*)+\Pi_0\Phi_1(s)\big)\delta_0(s)}{\|\delta_0(s)\|}-\frac{\Phi_{10}(t^*)\Delta_0(t^*,\lambda)}{\|\Delta_0(t^*,\lambda)\|}\right)ds,\end{gathered} \tag{46}$$

$$\begin{gathered}y_1(\theta)=Kx_1(\theta)+B^{-1}KA_0x_0(\theta)+\\ +L\int_{-\infty}^{0}\Pi_0\Phi_2(s)\left[\frac{\delta_1(s)}{\|\delta_0(s)\|}-\frac{\delta_0(s)\delta_0^{\mathrm{T}}(s)\delta_1(s)}{\|\delta_0(s)\|^3}\right]ds-\\ -LC_2C_3^{-1}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{Q}\Phi(\tau)\left(\frac{\delta_0^*(\tau)}{\|\delta_0^*(\tau)\|}-\frac{\delta_0(0)}{\|\delta_0(0)\|}\right)d\tau,\end{gathered} \tag{47}$$

$$z_1(\theta)=-C_3^{-1}\big(A_3x_1(\theta)+B_3y_1(\theta)\big)+L\int_{-\infty}^{0}\mathrm{Q}\Phi(\tau)\left(\frac{\delta_0^*(\tau)}{\|\delta_0^*(\tau)\|}-\frac{\delta_0(0)}{\|\delta_0(0)\|}\right)d\tau. \tag{48}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\delta_0(s)=\Delta_0(t^*,\lambda)+\Pi_0\Delta(s,\lambda,\nu),\\ \delta_0^*(\tau)=\delta_0(0)+\mathrm{Q}_0\Delta(\tau,\lambda,\nu,\eta)=\Delta_0(t^*,\lambda)+\Pi_0\Delta(0,\lambda,\nu)+\mathrm{Q}_0\Delta(\tau,\lambda,\nu,\eta),\\ \delta_1(s)=\Delta_1(t^*,\lambda,\nu)+s\dot\Delta_0(t^*,\lambda)+\Pi_1\Delta(s,\lambda,\nu).\end{gathered} \tag{49}$$

Как видно из (33)–(35), (42), (44), имеет место асимптотическое разложение

$$R(\theta,\mu)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k R_k(\theta), \tag{50}$$

в котором

$$\begin{gathered}R_k(\theta)=\begin{pmatrix}X_k(t^*,\theta)\\ f_k(\theta)\end{pmatrix},\\ f_0(\theta)=\lambda^{\mathrm{T}}F_0(0)x_*+1,\ f_1(\theta)=\lambda^{\mathrm{T}}(F_{11}(0)x_*+F_0(0)Py_*)+\nu^{\mathrm{T}}KF_0(0)x_*,\\ f_k(\theta)=\lambda^{\mathrm{T}}(F_{1k}(0)x_*+F_{2k}(0)y_*+F_{3k}(0)z_*)+\nu^{\mathrm{T}}(F_{4,k-1}(0)x_*+F_{5,k-1}(0)y_*+F_{6,k-1}(0)z_*)+\\ +\eta^{\mathrm{T}}(F_{7,k-2}(0)x_*+F_{8,k-2}(0)y_*+F_{9,k-2}(0)z_*),\ k=2,3,4,\ldots.\end{gathered} \tag{51}$$

Положим $R(\theta,0)=R_0(\theta)$. Тогда вектор-функция $R(\theta,\mu)$ будет непрерывной вместе со своими частными производными по компонентам вектора θ в области $\|\theta-\theta_0\|<\epsilon_0$, $0\leqslant\mu<\mu_0$.

Из формул (7), (8), (10) (11), (14)–(17), (20)–(23), (38), (40), (45), (49) и (51) следует, что

$$x_0(\theta_0) = F_0(0)x_* + \int_0^{t^*} \Phi_0(t)u^0(t)dt = x(t^*) = 0,$$

$$y_0(\theta_0) = Kx_0(t^*) + L_0 \int_{-\infty}^{0} \Pi\Phi(s)u^*(s)ds = y^*(0) = 0,$$

$$z_0(\theta_0) = Mx^0(t^*) - C_3^{-1}B_3y^*(0) + L_0 \int_{-\infty}^{0} Q\Phi(\tau)u_*(\tau)\,d\tau = z_*(0) = 0,$$

$$f_0(\theta_0) = \psi^{0\mathrm{T}}(t^*)F_0(0)x_* + 1 = 0.$$

Тогда, как видно из (51), $R(\theta_0,0) = R_0(\theta_0) = 0$.

Непосредственным дифференцированием (45), (51), учитывая (38), (40), убеждаемся, что $\partial R(\theta_0,0)/\partial\theta = \partial R_0(\theta_0)/\partial\theta = I_0$ (см. (25)). Покажем, что эта матрица Якоби является невырожденной.

Сначала убедимся, что первые $n_1+n_2+n_3$ столбцов матрицы I_0 линейно независимы. Предположим противное. Тогда существуют такие векторы $\lambda \in R^{n_1}$, $\nu \in R^{n_2}$, $\eta \in R^{n_3}$, $(\lambda,\nu,\eta) \neq 0$, что

$$S_1\lambda = 0, S_2\lambda + S_3\nu = 0, S_4\lambda + S_5\nu + S_6\eta = 0, \tag{52}$$

$$\lambda^{\mathrm{T}}F_0(0)x_* = 0. \tag{53}$$

Пусть $\lambda \neq 0$, тогда имеем

$$\lambda^{\mathrm{T}}S_1\lambda = L_0 \int_0^{t^*} \frac{\|\Delta^0(t)\|^2\|\Delta(t,\lambda)\|^2 - (\Delta^{0\mathrm{T}}(t)\Delta(t,\lambda))^2}{\|\Delta^0(t)\|^3}dt,$$

где $\Delta(t,\lambda) = \Phi_0^{\mathrm{T}}(t)\lambda = D_0^{\mathrm{T}}F_0^{\mathrm{T}}(t)\lambda$, $t \in T$. В силу неравенства Коши–Буняковского–Шварца, подынтегральное выражение в этой формуле в любой момент времени неотрицательно, а интеграл равен нулю лишь в том случае, когда $\Delta(t,\lambda) = k(t)\Delta_0(t)$, $t \in T$, где $k(t)$ – скаляр. Однако при выполнении предположения 3 этот случай реализоваться не может, поскольку тогда для управления $u^0(t)$, $t \in T$, будет выполняться принцип максимума с вектором сопряженных переменных $\psi(t)$, $t \in T$, принимающим в момент t^* значение $\lambda_0 + \epsilon\lambda$, где ϵ – достаточно малое (по модулю) число. Действительно, коуправление, построенное по этому вектору, представимо в виде $\Delta(t) = D_0^{\mathrm{T}}\psi(t) = (1+\epsilon k(t))\Delta_0(t)$, $t \in T$, и вместе с тем, в силу (7), (53),

$$\psi^{\mathrm{T}}(t^*)F_0(0)x_* = (\lambda_0 + \epsilon\lambda)F_0(0)x_* = \psi^{0\mathrm{T}}(t^*)F_0(0)x_* = -1.$$

Таким образом, первое из равенств (52) влечет за собой $\lambda = 0$ и второе можно записать в виде $S_3\nu = 0$. Поскольку вторая базовая задача является нормальной, такое равенство имеет место лишь для $\nu = 0$. В этом можно убедиться с помощью рассуждений, аналогичных только что приведенным. Аналогично из третьего равенства в (52) следует, что $\eta = 0$. Итак, предположение о существовании ненулевого вектора (λ,ν,η), для которого справедливы равенства (52), (53), оказалось неверным. Поэтому первые $n_1+n_2+n_3$ столбцов матрицы (25) линейно независимы. Поскольку выполняется равенство $S_1\lambda_0 = 0$, то можно утверждать, что первые $n_1+n_2+n_3$ столбцов матрицы (25) ортогональны вектору $(\lambda_0,0)$ размерности $n_1+n_2+n_3+1$. Вместе с тем последний столбец этому вектору неортогонален, так как, в силу (7),

$$\lambda_0^{\mathrm{T}}c_1 = -\lambda_0^{\mathrm{T}}F_0(0)x_*/L_0 = -\psi^{0\mathrm{T}}(t^*)F_0(0)x_*/L_0 = 1/L_0 \neq 0.$$

Тогда все столбцы матрицы I_0 линейно независимы, что означает ее невырожденность.

Таким образом, для системы (43) или, что то же самое, (41) выполнены условия теоремы о неявной функции. Согласно этой теореме, в некоторой правосторонней окрестности нуля $0 \leqslant \leqslant \mu < \mu_1$ однозначно определены непрерывные функции $\lambda(\mu)$, $\nu(\mu)$, $\eta(\mu)$, $L(\mu)$, удовлетворяющие уравнениям (41) и условиям $\lambda(0) = \lambda_0$, $\nu(0) = \nu_0$, $\eta(0) = \eta_0$, $L(0) = L_0$.

Разложение (50) является равномерным в области $\|\theta - \theta_0\| < \epsilon_0$, причем его коэффициенты – бесконечно дифференцируемые функции. Тогда, для решения $\theta(\mu) = (\lambda(\mu),\nu(\mu),\eta(\mu),L(\mu))$ системы (43) будут иметь место асимптотические разложения (29).

Рассмотрим управление (28). Оно будет допустимым в исходной задаче с $\mu < \mu_1$, поскольку для порожденной им траектории $X(t,\theta(\mu),\mu) = (x(t,\theta(\mu),\mu),y(t,\theta(\mu),\mu),z(t,\theta(\mu),\mu))$, $t \in T$, системы (1) выполнено условие $X(t,\theta(\mu),\mu) = 0$. Это управление удовлетворяет принципу максимума

(см. [6]) с вектором сопряженных переменных $\psi(t,\lambda(\mu),\nu(\mu),\eta(\mu),\mu)$, $t \in T$, и, следовательно, является оптимальным. Теорема доказана. □

Заметим, что решение (28) задачи (1)–(3) с достаточно малым μ будет гладкой функцией времени, так как $\Delta(t,\lambda(\mu),\nu(\mu),\eta(\mu),\mu) \neq 0$, $t \in T$, $\mu < \mu_1$.

7. Построение асимптотически субоптимальных управлений

Вернемся к алгоритму построения асимптотически субоптимальных управлений в исходной задаче. Вектор-функция

$$u^0(t,\mu) = L_0\Delta(t,\lambda_0,\nu_0,\eta_0,\mu)/\|\Delta(t,\lambda_0,\nu_0,\eta_0,\mu)\|,\ t \in T,$$

построенная по формуле (27) путем интегрирования сопряженной системы (26) с $\lambda = \lambda_0$, $\nu = \nu_0$, $\eta = \eta_0$ будет асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка в задаче (1)–(3). Заметим, что ее можно сформировать непосредственно после решения базовых задач. Асимптотически субоптимальное управление N-го порядка ($N \geqslant 1$) имеет вид

$$u^{(N)}(t,\mu) = L^{(N)}(\mu)\frac{\Delta(t,\lambda^{(N)}(\mu),\nu^{(N)}(\mu),\eta^{(N)}(\mu),\mu)}{\|\Delta(t,\lambda^{(N)}(\mu),\nu^{(N)}(\mu),\eta^{(N)}(\mu),\mu)\|},\ t \in T, \tag{54}$$

где

$$\lambda^{(N)}(\mu) = \sum_{k=0}^{N}\mu^k\lambda_k,\ \nu^{(N)}(\mu) = \sum_{k=0}^{N}\mu^k\nu_k,\ \eta^{(N)}(\mu) = \sum_{k=0}^{N}\mu^k\eta_k,\ L^{(N)}(\mu) = \sum_{k=0}^{N}\mu^k L_k. \tag{55}$$

Для построения управления (54) нужно найти коэффициенты λ_k, ν_k, η_k L_k, $k = 1,2,\ldots,N$, разложений (29). Это можно сделать методом неопределенных коэффициентов, который описывается ниже.

Пусть $\theta_k = (\lambda_k,\nu_k,\eta_k,L_k)$, $k = 1,2,\ldots,N$, $\theta(N)(\mu) = \sum_{k=0}^{N}\mu^k\theta_k$. Разложим с помощью формулы Тейлора вектор-функцию по степеням μ до порядка N включительно и приравняем коэффициенты разложения к нулю (начиная с коэффициента при μ). В результате получим невырожденные системы линейных уравнений для вычисления векторов h_k, $k = 1,2,\ldots,N$:

$$\begin{gathered} I_0\theta_1 = -R_1(\theta_0), \\ I_0\theta_2 = -R_2(\theta_0) - \frac{\partial R_1(\theta_0)}{\partial\theta}\theta_1 - \frac{1}{2}\theta_1^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 R_0(\theta_0)}{\partial\theta}\theta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{56}$$

Матрица I_0 имеет вид (25). При вычислении правых частей систем (56) по формулам (45)–(49), (51) следует учитывать равенства (40).

Последовательно решая системы (56), находим векторы $\theta_k = (\lambda_k,\nu_k,\eta_k,L_k)$, $k = 1,2,\ldots,N$, и составляем полиномы (55). Это дает возможность путем интегрирования сопряженной системы (26) с $\lambda = \lambda^{(N)}(\mu)$, $\nu = \nu^{(N)}(\mu)$, $\eta = \eta^{(N)}(\mu)$ построить по формуле (27) управление (54). Сопряженная система является сингулярно возмущенной и, следовательно, жесткой. Чтобы избежать интегрирования жестких систем, вместо вектор-функции $\Delta(t,\lambda^{(N)}(\mu),\nu^{(N)}(\mu),\eta^{(N)}(\mu),\mu)$ можно воспользоваться ее асимптотическим приближением

$$\begin{gathered} \Delta^{(N)}(t,\mu) = \sum_{k=0}^{N}\mu^k(\Delta_k(t,\lambda^{(N)}(\mu),\nu^{(N)}(\mu),\eta^{(N)}(\mu)) + \Pi_k\Delta(s,\lambda^{(N)}(\mu),\nu^{(N)}(\mu),\eta^{(N)}(\mu)) + \\ +\mathrm{Q}_k\Delta(\tau,\lambda^{(N)}(\mu),\nu^{(N)}(\mu),\eta^{(N)}(\mu))), \\ s = (t-t^*)/\mu,\ \tau = (t-t^*)/\mu^2, t \in T. \end{gathered}$$

Вектор-функция $\overline{u}^{(N)}(t,\mu) = L^{(N)}(\mu)\Delta^{(N)}(t,\mu)/\|\Delta^{(N)}(t,\mu)\|$, $t \in T$, наряду с (54) будет асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка в исходной задаче. В частности, как следует из (14), (20), (40), асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка имеет вид

$$\overline{u}^{(0)}(t,\mu) = L_0 \frac{\Delta^0(t) + D_4^{\mathrm{T}}\Pi\psi((t-t^*)/\mu) + D_3^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}\psi((t-t^*)/\mu^2)}{\|\Delta^0(t) + D_4^{\mathrm{T}}\Pi\psi((t-t^*)/\mu) + D_3^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}\psi((t-t^*)/\mu^2)\|},\ t \in T. \tag{57}$$

В силу предположения 1, вектор-функции $\Pi\psi(s)$, $s \leqslant 0$, $\mathrm{Q}\psi(\tau)$, $\tau \leqslant 0$, экспоненциально стремятся к нулю соответственно при $s \to -\infty$, $\tau \to -\infty$. Поэтому при малом μ управление (57) будет существенно отличаться от решения (11) первой базовой задачи лишь в пограничном слое, т. е. в некоторой левосторонней окрестности точки t^*.

Построенные асимптотические приближения корней системы уравнений (43) можно использовать для точного решения этой системы, а значит, и рассмотренной задачи при заданном значении μ. Для этого нужно применить процедуру доводки (см. [13]), т. е. найти с помощью метода Ньютона корни уравнения (43), взяв в качестве начального приближения $\theta^{(N)}(\mu)$. Чтобы упростить вычисления, вместо матрицы $\partial R(\theta,\mu)/\partial\theta$ можно воспользоваться ее приближением I_0.

8. Пример

В качестве примера рассмотрим задачу, которая является моделью процесса управления горизонтальным прямолинейным движением двух тел с существенно различными малыми массами и упругой связью:

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1 = y,\ \dot{x}_2 = z, \\
\mu\dot{y} = -kx_1 + kx_2 - c_1 y + d_1 u_1,\ \mu^2\dot{z} = kx_1 - kx_2 - c_2 z + d_2 u_2, \\
x_1(0) = x_{*1},\ x_2(0) = x_{*2},\ y(0) = y_*,\ z(0) = z_*, \\
x_1(t^*) = x_2(t^*) = y(t^*) = z(t^*) = 0, \\
J(u) = \sup_{t\in[0,t^*]} (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} \to \min.
\end{gathered} \tag{58}$$

Все постоянные в этой задаче положительны, при этом $\mu \ll 1$. Предположение 1 в данном случае выполнено.

Построим асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка в задаче (58) при конкретных значениях малого параметра в случае, когда $k = 1$, $c_1 = 3$, $c_2 = 1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $t^* = 5$, $x_{*1} = 5$, $x_{*2} = 2$, $y_* = -3$, $z_* = 1$.

Первая базовая задача имеет вид

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}u_1,\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + 2u_2,\ x_1(0) = 5,\ x_2(0) = 2, \\
x_1(5) = x_2(5) = 0,\ J_1(u) = \sup_{t\in[0,5]} (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} \to \min.
\end{gathered} \tag{59}$$

Легко убедиться, что предположение 2 в задаче (59) выполнено. Вектор коуправления имеет вид

$$\Delta^0(t) = \begin{pmatrix} -0,058700 - 0,034981e^{-\frac{4}{3}(5-t)} \\ -0,117500 + 0,209886e^{-\frac{4}{3}(5-t)} \end{pmatrix}, \quad t \in [0,5].$$

Предположение 3 также выполнено.

Оптимальное управление в первой базовой задаче имеет вид

$$u_1^0(t) = -\frac{0,059995(e^{-\frac{4}{3}(5-t)} + 1,680914)}{\sqrt{0,017287 - 0,045251e^{-\frac{4}{3}(5-t)} + 0,045276e^{-\frac{8}{3}(5-t)}}},$$

$$u_2^0(t) = \frac{0,359970(e^{-\frac{4}{3}(5-t)} - 0,560305)}{\sqrt{0,017287 - 0,045251e^{-\frac{4}{3}(5-t)} + 0,045276e^{-\frac{8}{3}(5-t)}}}.$$

Оптимальная интенсивность управления $L_0 = 1,715078$. После решения задачи (59) формируется вторая базовая задача

$$\begin{gathered}\frac{dy}{ds} = -3y + u_1,\ y(0) = 0, \|u(s)\| \leqslant 1, s \leqslant 0,\\ y(-\infty) = 0,237340,\ J_2(u) = \int_{-\infty}^{0}((\|\Delta^0(5)\| - \Delta^{0\mathrm{T}}(5)u(s)))ds \to \min.\end{gathered} \tag{60}$$

Динамическая система во второй базовой задаче вполне управляема.

Вектор $\Pi\Delta(s)$ имеет вид

$$\Pi\Delta(s) = \begin{pmatrix} 0,187362e^{3s} - 0,093681 \\ 0,092386 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, предположение 5 выполняется.

Оптимальное управление в задаче (60) представимо в виде

$$u_1^*(s) = \frac{0,187362e^{3s} - 0,093681}{\sqrt{(0,187362e^{3s} - 0,093681)^2 + 0,008535}},$$
$$u_2^*(s) = \frac{0,092386}{\sqrt{(0,187362e^{3s} - 0,093681)^2 + 0,008535}}.$$

Третья базовая задача имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{dz}{d\tau} = -z + 2u_2,\ z(0) = 0, \|u(\tau)\| \leqslant 1, \tau \leqslant 0,\\ z(-\infty) = 1,40434,\ J_3(u) = \int_{-\infty}^{0}(\|\Pi\Delta(0)\| - \Pi\Delta(0)^{\mathrm{T}}u)d\tau \to \min.\end{gathered} \tag{61}$$

Динамическая система в ней также является вполне управляемой. Вектор $\mathrm{Q}\Delta(\tau)$ имеет вид

$$\mathrm{Q}\Delta(\tau) = \begin{pmatrix} 0,093681 \\ -0,092386(2e^{\tau} - 1) \end{pmatrix}, \quad \tau \leqslant 0.$$

Следовательно, предположение 7 выполняется. Оптимальное управление в задаче (61) представимо в виде

$$u_{*1}(\tau) = \frac{0,093681}{\sqrt{0,008776 + 0,008535(2e^{\tau} - 1)^2}},$$
$$u_{*2}(\tau) = \frac{-0,092386(2e^{\tau} - 1)}{\sqrt{0,008776 + 0,008535(2e^{\tau} - 1)^2}}, \quad \tau \leqslant 0.$$

Согласно (57) управление

$$\begin{aligned}\overline{u}_1^{(0)}(t) &= 1,715078\frac{-0,058700 - 0,034981e^{-\frac{4}{3}(5-t)} + 0,187362e^{\frac{3(t-5)}{\mu}}}{\|N(t,\mu)\|},\\ \overline{u}_2^{(0)}(t) &= 1,715078\frac{-0,117500 + 0,209886e^{-\frac{4}{3}(5-t)} - 0,184772e^{\frac{t-5}{\mu^2}}}{\|N(t,\mu)\|},\end{aligned} \tag{62}$$

где

$$\|N(t,\mu)\|^2 = 0,017252 - 0,045216e^{-\frac{4}{3}(5-t)} + 0,045276e^{-\frac{8}{3}(5-t)} - 0,021996e^{\frac{3(t-5)}{\mu}} +$$
$$+0,043421e^{\frac{t-5}{\mu^2}} + 0,035105e^{\frac{6(t-5)}{\mu}} + 0,034141e^{\frac{2(t-5)}{\mu^2}} - 0,013108e^{-\frac{4}{3}(5-t)+\frac{3(t-5)}{\mu}} - 0,077562e^{-\frac{4}{3}(5-t)+\frac{t-5}{\mu^2}}$$

будет асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка в задаче (58).

Для оценки качества построенных асимптотических приближений к решению задачи (58) были найдены состояния $x_1(t^*,\mu)$, $x_2(t^*,\mu)$, $y(t^*,\mu)$, $z(t^*,\mu)$, в которые управление (62) переводит динамическую систему при конкретных значениях малого параметра. В частности, оказалось, что

$$\begin{array}{lll} x_1(5,\ 0,1) = -0,054552 & x_1(5,\ 0,025) = -0,013983 & x_1(5,\ 0,01) = -0,000257 \\ x_2(5,\ 0,1) = -0,026138 & x_2(5,\ 0,025) = 0,000876 & x_2(5,\ 0,01) = 0,001988 \\ y(5,\ 0,1) = 0,035885 & y(5,\ 0,025) = 0,015468 & y(5,\ 0,01) = 0,001140 \\ z(5,\ 0,1) = 0,342795 & z(5,\ 0,025) = 0,111720 & z(5,\ 0,01) = 0,002810. \end{array}$$

Результаты вычислений приведены с точностью до 10^{-6}.

9. Заключение

В статье предложены вычислительные процедуры построения асимптотических приближений к решению рассмотренной задачи, которые не требуют интегрирования сингулярно возмущенных систем. При реализации предложенных алгоритмов исходная задача оптимального управления распадается на три невозмущенные задачи меньшей размерности. Такая декомпозиция позволяет эффективно решать задачи оптимизации динамических систем с большим числом фазовых переменных. В статье также показывается, как можно использовать построенные асимптотические приближения для решения рассмотренной задачи при заданных значениях малого параметра.

Применяемая методика позволяет исследовать задачи, в которых имеется несколько групп быстрых переменных с иерархией скоростей по целым степеням малого параметра. При этом число задач, на которые распадается исходная задача, равно количеству групп разнотемповых переменных. Такое обобщение вносит в алгоритм непринципиальные изменения, которые легко прослеживаются на примере рассмотренной задачи. В то же время это приводит к громоздким формулам. Следует также отметить, что развитие полученных результатов на нестационарные системы с достаточно гладкими коэффициентами не вызывает принципиальных трудностей.

Заметим, что если в задаче (1)–(3) положить $n_3 = 0$, то при построении асимптотически субоптимальных управлений решаются только первая и вторая базовые задачи. Эти управления совпадают с теми, что построены в [7; 8].

Литература

1. *Дмитриев М. Г., Курина Г. А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // Автомат. и телемех. 2006. № 1. С. 3–51.

2. *Калинин А. И.* Асимптотика решений возмущенных задач оптимального управления // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 104–114.

3. *Zhang Y., Naidu D. S., Cai C., Zou Y.* Singular perturbation and time scales in control theories and applications. An overview 2002–2012 // Int. J. Information and Systems Sciences. 2014. Vol. 9, N 1. P. 1–36.

4. *Kokotovic P. V., Khalil H. K.* Singular Perturbations in Systems and Control. New York: IEEE Press, 1986.

5. *Курина Г. А., Калашникова М. А.* Сингулярно возмущенные задачи с разнотемповыми быстрыми переменными // Автомат. и телемех. 2022. № 11. С. 3–61.

6. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

7. *Калинин А. И.* Построение субоптимального решения сингулярно возмущенной задачи об управлении с минимальной интенсивностью // Автомат. и телемех. 2013. № 1. С. 47–58.

8. *Калинин А. И.* Асимптотический метод решения квазилинейной задачи об управлении минимальной силой // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С. 414–424.

9. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

10. *Васильева А. Б.* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1963. Т. 3, № 4. С. 611–642.

11. *Carlson D. A., Haurie F.* Infinite horizon optimal control // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Vol. 290. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

12. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.

13. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Конструктивные методы оптимизации. Минск: Университетское, 1984. Ч. 2.

References

1. Dmitriev M. G., Kurina G. A. Singular perturbations in control problems. *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 1, pp. 1–43.

2. Kalinin A. I. Asymptotics of solutions to perturbed optimal control problems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 1994, vol. 33, no. 6, pp. 102–111.

3. Zhang Y., Naidu D. S., Cai C., Zou Y. Singular perturbation and time scales in control theories and applications. An overview 2002–2012. *International Journal of Information and Systems Sciences*, 2014, vol. 9, no. 1, pp. 1–36.

4. Kokotovic P. V., Khalil H. K. *Singular Perturbations in Systems and Control*. New York, IEEE Press, 1986.

5. Kurina G. A., Kalashnikova M. A. Singularly perturbed problems with multi-rate fast variables. *Automation and Remote Control*, 2022, vol. 83, no. 11, pp. 1651–1695.

6. Krasovskii N. N. *Theory of Control of Motion*. Moscow, Nauka Publ., 1968 (in Russian).

7. Kalinin A. I. Construction of a suboptimal solution of a singularly perturbed minimum-intensity control problem. *Automation and Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 1, pp. 38–48.

8. Kalinin A. I. Asymptotic method of solving a quasilinear minimum-force control problem. *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 3, pp. 407–417.

9. Vasil'eva A. B., Butuzov V. F. *Asymptotic Expansions of Solutions of Singularly Perturbed Equations*. Moscow, Nauka Publ., 1973 (in Russian).

10. Vasil'eva A. B. Asymptotic methods in the theory of ordinary differential equations with small parameters multiplying the highest derivatives. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1963, vol. 3, no. 4, pp. 811–853.

11. Carlson D. A., Haurie F. *Infinite Horizon Optimal Control*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 290, Berlin, Springer-Verlag, 1987.

12. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York, Pergamon Press, 1964.

13. Gabasov R., Kirillova F. M. *Constructive Methods of Optimization*. Part 2. Minsk, Universitetskoe Publ., 1984 (in Russian).

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 143–147

УДК 517.934 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-143–147
EDN: FLJSJT

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО СОСТОЯНИЮ И ЕЕ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА

В. В. Крахотко, Г. П. Размыслович

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: Krakhotko46@bk.ru, razmysl@bsu.by

Поступила: 14.09.2026 **Исправлена:** 07.10.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: управляемость, линейные системы, системы с запаздыванием по состоянию, дискретные системы

Аннотация. Доказан критерий относительной управляемости линейной стационарной системы с постоянным запаздыванием по состоянию и ее дискретного аналога при помощи предельного перехода от дискретной системы к непрерывной. Указаны отличия определяющих уравнений непрерывной и дискретной систем.

RELATIVE CONTROLABILITY OF A CONTINUOUS SYSTEM WITH STATE DELAY AND ITS DISCRETE ANALOGUE

V. V. Krakhotko, G. P. Razmyslovich

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: Krakhotko46@bk.ru, razmysl@bsu.by

Received: 14.09.2026 **Revised:** 07.10.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: controllability, linear systems, systems with delay on state, discrete systems

Abstract. A criterion for the relative controllability of a linear time-invariant system with constant delay as well as its discrete-time analog is established by means of a limiting transition from the discrete-time system to the continuous-time one. The differences between the governing equations for the continuous-time and discrete-time systems are identified.

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + bu(t),\ t \geqslant 0, \tag{1}$$
$$x_0(\cdot) = \{x(t) = \varphi(t),\ t \in [-h,0]\},$$

где x, b – n-векторы; u – скаляр; A, A_1 – матрицы соответствующих размерностей; $h > 0$ – число (запаздывание); $\varphi(t)$ – кусочно-непрерывная n-вектор-функция.

Ясно, что при каждом кусочно-непрерывном управлении $u(t)$, $|u(t)| \leqslant L$, $L > 0$, и при заданном начальном условии $x_0(\cdot)$ решение системы (1) определяется однозначным образом.

Система (1) относительно управляема [1], если для любого n-вектора c и любой n-вектор-функции $\varphi(t)$, $t \in [-h,0]$, найдутся момент времени T, $(n-1)h \leqslant T < +\infty$, и число L, $0 \leqslant L < +\infty$, и кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $|u(t)| \leqslant L$ такие, что решения системы (1), порожденные этим управлением, удовлетворяют условиям $x(t) = \varphi(t)$ при $t \in [-h,0]$ и $x(T) = c$.

Для решения задачи относительной управляемости системы (1) рассмотрим дискретную систему

$$x(t_{k+1}) = (E_n + \varepsilon A)x(t_k) + \varepsilon A_1 x(t_{k-m_\varepsilon}) + \varepsilon bu(t_k), \tag{2}$$

где $k = \overline{0,N}$; $\varepsilon = T/N$ – период (интервал) квантования; $m_\varepsilon = \left[\frac{h}{\varepsilon}\right]$ ($[a]$ – антье числа a); $t_{k+1} = t_k + \varepsilon$, $t_0 = 0$. Будем считать, что начальные условия для системы (2) таковы: $x(t_k) = \varphi(t_k)$, $k = 0, -1, \ldots, -m_\varepsilon$.

Непосредственно подстановкой убеждаемся, что решение системы (2) имеет вид

$$x(t_k) = F(t_{k-1}, t_{-1})\varphi(0) + \sum_{j=-m_\varepsilon}^{-1} F(t_{k-1}, t_{j+m_\varepsilon})A_1\varphi(t_j)\varepsilon + \sum_{j=0}^{k-1} F(t_{k-1}, t_j)bu(t_j)\varepsilon,\ k = \overline{0,N}. \tag{3}$$

Матричная функция $F(t_k,t_j)$ является решением рекуррентного уравнения

$$F(t_k,t_j)=F(t_k,t_{j+1})(E_n+\varepsilon A)+F(t_k,t_{j+1+m_\varepsilon})A_1\varepsilon,$$
$$F(t_k,t_k)=E_n,\ F(t_k,t_j)=0,\ j>k.$$

В работе [2] показано, что дискретная система (2) относительно управляема тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\operatorname{rank}\{X(t_k),\ k=1,2,\ldots,n(m_\varepsilon+1)\}=n,$$

где $X(t_k)$ – решение определяющего уравнения системы (2)

$$X(t_{k+1})=(E_n+\varepsilon A)X(t_k)+\varepsilon A_1X(t_{k-m_\varepsilon})+\varepsilon bU(t_k),\ k\geqslant 0,$$
$$X(t_k)=0,\ k\leqslant 0;\ U(0)=1,\ U(t_k)=0,\ k\neq 0.$$

Будем считать, что $T=n(m_\varepsilon+1)\varepsilon$. Для получения основного результата, докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Для любого k, $k=\overline{1,N}$ верна следующая формула:*

$$X(t_k)=\sum_{i=0}^{d_k}\sum_{j=i}^{k-1-im_\varepsilon}C^j_{k-1-im_\varepsilon}\varepsilon^jX_{j+1}(ih)\varepsilon. \tag{4}$$

Здесь $d_k=\big[\dfrac{k-1}{m_\varepsilon+1}\big]$; $C^j_{k-1-im_\varepsilon}$ – биномиальные коэффициенты; $X_{j+1}(ih)$ – решение определяющего уравнения непрерывной системы (1)

$$X_{j+1}(ih)=AX_j(ih)+A_1X_j((i-1)h)+bU_j(ih), \tag{5}$$

при условиях $X_j(ih)=0,\ j\leqslant 0\vee i\leqslant 0;\ U_0(0)=1,\ U_j(ih)=0,\ j\neq 0\vee i\neq 0$.

Доказательство. Действительно, пусть $k=1$, тогда

$$X(t_1)=X_1(0)=b\varepsilon,$$

т. е. формула (4) справедлива.

Пусть $k>1$. Предположим, что формула (4) верна для $k=p$. Докажем, что она будет верна при $k=p+1$. Имеем

$$X(t_{p+1})=(E_n+\varepsilon A)X(t_p)+\varepsilon A_1X(t_{p-m_\varepsilon})=(E_n+\varepsilon A)\sum_{i=0}^{d_p}\sum_{j=i}^{p-1-im_\varepsilon}C^j_{p-1-im_\varepsilon}\varepsilon^jX_{j+1}(ih)\varepsilon+$$
$$+\varepsilon A_1\sum_{i=0}^{d_{p-m_\varepsilon}}\sum_{j=i}^{p-m_\varepsilon-1-im_\varepsilon}C^j_{p-1-(i+1)m_\varepsilon}\varepsilon^jX_{j+1}(ih)\varepsilon.$$

Отсюда с учетом (5) получаем, что

$$X(t_{p+1})=\sum_{i=0}^{d_{p+1}}\sum_{j=i}^{p-im_\varepsilon}C^j_{p-im_\varepsilon}\varepsilon^jX_{j+1}(ih)\varepsilon.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2. *Для того чтобы при любом ε, $0<\varepsilon\leqslant\frac{h}{n}$, выполнялось равенство*

$$\operatorname{rank}\Big\{X(t_k)=\sum_{i=0}^{d_k}\sum_{j=i}^{k-1-im_\varepsilon}C^j_{k-1-im_\varepsilon}\varepsilon^jX_{j+1}(ih)\varepsilon;\ k=\overline{1,n(m_\varepsilon+1)}\Big\}=n, \tag{6}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rank}\big\{X_{j+1}(ih),\ i=\overline{0,n-1};\ j=\overline{i,n-1}\big\}=n. \tag{7}$$

Доказательство. Необходимость. Заметим, что при любом ε, $0<\varepsilon\leqslant\frac{h}{n}$, в левой части (4) при изменении k будут присутствовать векторы $X_{j+1}(ih)$, $j=\overline{i,l}$; $l\geqslant n-1$; $i=\overline{0,n-1}$.

Пусть выполняется условие (6). Допустим от противного, что условие (7) не выполняется. Это означает, что существует вектор g_0, $||g_0||\neq 0$, такой, что

$$g_0'X_{j+1}(ih)=0,\ j=\overline{i,n-1};\ i=\overline{0,n-1}. \tag{8}$$

В силу результатов работы [3] имеем

$$X_{j+1}(ih)=\sum_{\beta=0}^{i}\sum_{s=\beta}^{n-1}\mu_{s\beta}^{ji}X_{s+1}(\beta h),\ i=\overline{0,n-1},\ j=\overline{0,n-1},$$
$$\mu_{s\beta}^{ji}=1,\ \text{при } j=s,\ i=\beta,\ j\leqslant n-1,\ \mu_{s\beta}^{ji}=0,\ \text{при } j\neq s\vee i\neq\beta,\ j\leqslant n-1. \tag{9}$$

Тогда из (6) получаем

$$X(t_k)=\sum_{i=0}^{d_k}\sum_{j=i}^{k-1-im_\varepsilon}C_{k-1-im_\varepsilon}^{j}\varepsilon^{j}X_{j+1}(ih)\varepsilon=\sum_{i=0}^{d_k}\sum_{j=i}^{n-1}X_{j+1}(ih)\Big(\sum_{s=i}^{d_k}\sum_{\beta=s}^{k-1-sm_\varepsilon}C_{k-1-sm_\varepsilon}^{\beta}\varepsilon^{\beta}\mu_{ji}^{\beta s}\Big)\varepsilon=$$
$$=\sum_{i=0}^{d_k}\sum_{j=i}^{n-1}X_{j+1}(ih)a_{ij}^{k}\varepsilon, \tag{10}$$

где $a_{ji}^{k}=\sum\limits_{s=i}^{d_k}\sum\limits_{\beta=s}^{k-1-sm_\varepsilon}C_{k-1-sm_\varepsilon}^{\beta}\varepsilon^{\beta}\mu_{ji}^{\beta s}$.

Следовательно, для вектора g_0 в силу (8) справедливы следующие равенства:

$$g_0'X(t_k)=g_0'\sum_{i=0}^{d_k}\sum_{j=i}^{n-1}X_{j+1}(ih)a_{ij}^{k}\varepsilon=\sum_{i=0}^{d_k}\sum_{j=i}^{n-1}g_0'X_{j+1}(ih)a_{ij}^{k}\varepsilon=0$$

при $k=\overline{1,n(m_\varepsilon+1)}$.

Последние равенства возможны лишь при нулевом векторе g_0. Что противоречит предположению, что вектор g_0 ненулевой. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполняется условие (7). От противного предположим, что (6) не выполняется. Тогда существует n-вектор g_0, $||g_0||\neq 0$, такой, что

$$g_0'\sum_{i=0}^{d_k}\sum_{j=i}^{n-1}X_{j+1}(ih)a_{ij}^{k}\varepsilon=0,\ k=\overline{1,n(m_\varepsilon+1)}. \tag{11}$$

Таким образом, имеем систему алгебраических уравнений относительно $\dfrac{n(n+1)}{2}$ неизвестных

$$g_0'X_{j+i}(ih),\ j=\overline{i,n-1};\ i=\overline{0,n-1}.$$

Введем в рассмотрение вектор Y длины $\dfrac{n(n+1)}{2}$ вида

$$Y=\big(g_0'X_1(0),\dots,g_0'X_n(0),g_0'X_2(h),\dots,g_0'X_n(h),\dots,g_0'X_n((n-1)h)\big).$$

Тогда система (11) запишется в виде

$$MY=0, \tag{12}$$

где $M-$ матрица размерностей $n(m_\varepsilon+1)\times\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Далее из системы (12) выделяем подсистему, которая получается при k, $pm_\varepsilon+p+1\leqslant k\leqslant pm_\varepsilon+n$; $p=0,1,\dots,n-1$. Обозначим полученную подсистему

$$\overline{M}Y=0.$$

Здесь $\overline{M}-$ квадратная матрица размерностей $\dfrac{n(n+1)}{2}\times\dfrac{n(n+1)}{2}$. В силу (9), (10) определитель этой подсистемы отличен от нуля.

Действительно, матрица $\overline{M}$ является нижней блочно-треугольной матрицей, где на главной диагонали блоки $(M_{11},M_{22},\dots,M_{nn})$ и каждый блок M_{ii} имеет размерность $(n-i+1)\times(n-i+1)$, причем

$$M_{11}=\begin{bmatrix}\varepsilon & 0 & \dots & 0\\ C_1^0\varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ C_{n-1}^0\varepsilon & C_{n-1}^1\varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^n\end{bmatrix},\ M_{22}=\begin{bmatrix}\varepsilon^2 & 0 & \dots & 0\\ C_2^1\varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ C_{n-1}^1\varepsilon^2 & C_{n-1}^2\varepsilon^3 & \dots & \varepsilon^n\end{bmatrix},\dots,M_{nn}=[\varepsilon^n].$$

Значит, что $\det(\bar{M}) \neq 0$. Тогда система (12) имеет только нулевое решение $Y = 0$, т. е. $g_0' X_{j+1}(ih) = 0$, $j = \overline{i, n-1}$, $i = \overline{0, n-1}$.

Последние равенства противоречат равенству (7). Лемма доказана. □

Таким образом, из лемм следует, что дискретная система (2) относительно управляема для любых ε, $0 < \varepsilon \leqslant \frac{h}{n}$, тогда и только тогда, когда выполняется условие (7).

Допустим дискретная система (2) относительно управляема при любых ε, $0 < \varepsilon \leqslant \frac{h}{n}$. Тогда выполняется условие (7). Пусть в (7) ранг набирается на векторах

$$X_{j_s^\nu}(\nu h),\ s = 1, 2, \ldots, p_\nu;\ p_\nu \leqslant n - \nu;\ \nu = 0, 1, \ldots, n-1;\ \sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu = n. \tag{13}$$

Из формул (3), (10) имеем, что задача относительной управляемости дискретной системы (2) сводится к задаче разрешимости системы алгебраических уравнений относительно $u(t_k)$, $k = \overline{0, n(m_\varepsilon + 1) - 1}$:

$$\sum_{k=1}^{n(m_\varepsilon+1)} \sum_{i=0}^{d_{n(m_\varepsilon+1)-k+1}} \sum_{j=i}^{n-1} X_{j+1}(ih) a_{ij}^{n(m_\varepsilon+1)-k+1} u(t_{k-1})\varepsilon = c(\varepsilon), \tag{14}$$

где $c(\varepsilon) = c - F(t_{n(m_\varepsilon+1)-1}, t_{-1})\varphi(t_0) - \sum_{k=-m_\varepsilon}^{-1} F(t_{n(m_\varepsilon+1)-1}, t_{k+m_\varepsilon}) A_1 \varphi(t_k)\varepsilon$, c – любой n-вектор.

В зависимости от того, на каких векторах (13) набирается ранг в (7), фиксируем на отрезке $[0, T]$ n точек $\tau_1, \ldots, \tau_n$, $(\tau_n = T)$.

Таким образом, на отрезке $[T-h, T]$ выбирается в соответствии с (13), p_0 точек, а на отрезке $[T-2h, T-h] - p_1$ точек и т. д. Заметим, что p_0 – степень минимального многочлена матрицы A.

Пусть $\alpha_q = \dfrac{\tau_q}{\varepsilon}$, тогда положим $u(t_k) = u(t_{\alpha_q})$, $k = \alpha_{q-1} + 1, \alpha_{q-1} + 2, \ldots, \alpha_q$; $q = \overline{1, n}$.

Значит, из (14) имеем

$$c(\varepsilon) = \sum_{q=1}^{n} \sum_{k=\alpha_{q-1}+1}^{\alpha_q} \sum_{i=0}^{d_{n(m_\varepsilon+1)-k+1}} \sum_{j=i}^{n-1} X_{j+i}(ih) a_{ij}^{n(m_\varepsilon+1)-k+1} u(t_{\alpha_q})\varepsilon.$$

В силу (13) последняя система алгебраических уравнений при любых ε, $0 < \varepsilon \leqslant \frac{h}{n}$, имеет решение относительно $u(t_{\alpha_q})$, $q = \overline{1, n}$.

Среди этих решений выберем решение $u_\varepsilon(t_{\alpha_q})$, $|u_\varepsilon(t_{\alpha_q})| \leqslant L$ (для каждой n-вектор функции $\varphi(t)$, $t \in [-h, 0)$ и каждого n-вектора c найдется L [4]).

Последовательность значений ε выбираем таким образом, чтобы последовательность $\{t_k, k \geqslant 0\}$ содержала фиксированные точки τ_q, $q = \overline{1, n}$.

Последовательность $\{u_\varepsilon(t_{\alpha_q}), q = \overline{1, n}\}$, $0 < \varepsilon \leqslant \frac{h}{n}$, ограничена, т. е. из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, не ограничивая общности считаем, что

$$u_\varepsilon(t_{\alpha_q}) \text{ стремится к } u(\tau_q),\ q = \overline{1, n},$$

при ε стремящемся к нулю.

Тогда из последовательности $\{x_\varepsilon(t_k), k = \overline{1, n}\}$ можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность, т. е. $x_\varepsilon(t_k)$ равномерно стремится к $x(t)$ при $\varepsilon \to 0$, и следовательно, подпоследовательность $x_\varepsilon(t_{n(m_\varepsilon+1)})$ равномерно стремится к $x(T) = c$.

Таким образом, если выполняется условие (7), то непрерывная система (1) относительно управляема.

Наоборот, пусть непрерывная система (1) относительно управляема, но условие (7) не выполняется. Это означает, что дискретная система (2) не является управляемой при любом ε, $0 < \varepsilon \leqslant \frac{h}{n}$. Так как критерий (7) не выполняется, то существует n-вектор q_0, $||q_0|| \neq 0$, такой, что

$$q_0' X_{j+i}(ih) = 0,\ j = \overline{i, n-1},\ i = \overline{0, n-1}.$$

Следовательно, для вектора q_0' выполняется условие

$$q_0'F(t_{N-1},t_k)b = q_0' \sum_{i=0}^{d_{N-k}} \sum_{j=i}^{N-k-im_\varepsilon} C_{N-k-im_\varepsilon}^{j} \varepsilon^j X_{j+i}(ih) = 0,\ k = \overline{0,N-1}.$$

Переходим в последних равенствах к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$q_0'F(T,t)b \equiv 0,\ t \in [0,T],$$

что противоречит предположению об относительной управляемости системы (1). Здесь $F(T,t)$ – решение уравнения

$$d(F(T,t))/dt = -F(T,t)A - F(T,t+h)A_1,$$
$$F(T,T-0) = E_n, F(T,t) \equiv 0,\ t \geqslant T-0.$$

Таким образом верна теорема.

Теорема 1. *Для относительной управляемости непрерывной системы* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (7).

Следовательно, исходя из полученных выше результатов непрерывная система (1) относительно управляема тогда и только тогда, когда для любого ε, $0 < \varepsilon \leqslant \dfrac{h}{n}$, дискретная система (2) относительно управляема.

Отметим следующее.

Замечание 1. *При любом* ε, $0 < \varepsilon \leqslant \frac{h}{n}$, *дискретная система* (2) *относительно управляема вместе с непрерывной системой* (1).

Замечание 2. *Описанный подход к задаче относительной управляемости системы* (1) *позволяет выяснить вопрос, в силу каких причин определяющее уравнение для системы с запаздыванием отличается от определяющего уравнения дискретной системы.*

Для дискретной системы (2) *решения определяющего уравнения распределяются на отрезке* $[0,T]$ *обычным образом. При уменьшении* ε *оказывается, что все линейно-независимые векторы* $\{X(t_k)\}$ *будут лежать на отрезках длины* h. *Следовательно, при* $\varepsilon \to 0$ *получаем, что линейно-независимые векторы будут концентрироваться около точек* ih, $i \geqslant 0$. *Таким образом, в определенных точках* ih, $i \geqslant 0$, *соберутся все линейно-независимые векторы. Отсюда следует, что определяющее уравнение для системы с запаздыванием должно учитывать этот факт, т. е. у решений определяющего уравнения появляется второй индекс, а именно* $X_j(ih)$, *где* i *характеризует точки* ih, $i \geqslant 0$.

Литература

1. *Крахотко В. В., Игнатенко В. В.* Об одном доказательстве критерия относительной управляемости для систем с запаздыванием // Вестник БГУ. Сер. 1. 1977. № 3. С. 64–65.

2. *Крахотко В. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М., Минюк С. А.* Теория управляемости линейных дискретных систем. III. Системы с последействием //Дифференц. уравн. 1972. Т. 8, № 7. С. 1284–1291.

3. *Шкляр Б. Ш.* К проблеме относительной управляемости систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа. // Дифференц. уравн. 1974. Т. X, № 8. С. 1443–1450.

4. *Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М.* Оптимизация линейных систем. Мн.: БГУ, 1973. 248 с.

References

1. Krakhotko V. V., Ignatenko V, V. On a proof of the criterion relative controllability systems with delay. *Vestnik BSU*, 1977, vol. 1, no. 3, pp. 64–65 (in Russian).

2. Krakhotko V. V., Gabasov R. F., Kirillova F. M., Minyik S. A. Theory controllability linear discrete systems. III Systems with consequence. *Differen. equations*, 1972, vol. 8, no. 7, pp. 1284–1291 (in Russian).

3. Shklyar B. Sh. On problem of relative controllability systems with deviating argument of neutral type. *Differen. equations*, 1974, vol. X, no. 8, pp. 1443–1450 (in Russian).

4. Gabasov R. F., Kirillova F. M. *Optimization Linears System.* Minsk, BSU, 1973. 248 p. (in Russian).

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 148–154

УДК 517.925.42 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-148–154
EDN: GVUZFF

ИЗОХРОНЫ СИСТЕМ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ, НЕ ЗАВИСЯЩИЕ ОТ НЕГО

А. Е. Руденок, М. Н. Василевич

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: roudenok@bsu.by, vasilevich.m@gmail.com

Поступила: 16.09.2026 **Исправлена:** 05.10.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: система с малым параметром, центр, фокус, изохронность, изохроны, система с квадратичными нелинейностями

Аннотация. Рассматривается автономная система на плоскости с параметром λ, обычно называемым малым, и особой точкой центр либо фокус в начале координат. Предполагается, что в этой особой точке система изохронная. Также предполагается, что ее изохроны, т. е. прообразы радиальных прямых при переходе от рассматриваемой системы к системе с равномерной изохронностью, не зависят от параметра λ. Таким образом, в настоящей статье параметр λ может принимать любые действительные значения и, в этом смысле, не является малым.

Строятся системы с квадратичными нелинейностями в правой части, удовлетворяющие этим требованиям. Найдены изохроны этих систем. Строятся фазовые портреты полученных изохронных фокусов и их изохрон.

ISOCHRONES OF SYSTEMS WITH A SMALL PARAMETER THAT ARE INDEPENDENT OF IT

A. E. Roudenok, M. N. Vasilevich

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: roudenok@bsu.by, vasilevich.m@gmail.com

Received: 16.09.2026 **Revised:** 05.10.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: system with a small parameter, center, focus, isochronicity, isochrones, system with quadratic nonlinearities.

Abstract. We consider an autonomous system on the plane involving a parameter λ, commonly referred to as a small parameter, and with a singular point (either a center or a focus) at the origin. It is assumed that the system is isochronous at this singular point. We also assume that its isochrones – defined as the pre-images of radial lines under the transformation from the system under consideration to a system with uniform isochronicity – are independent of the parameter λ. Thus, in this paper, the parameter λ may take on any real value and, in that sense, is not actually small.

We construct systems with quadratic nonlinearities in the right-hand side that satisfy these requirements and determine their isochrones. Phase portraits of the resulting isochronous foci and their isochrones are also constructed.

1. Введение

Рассматриваем систему

$$\dot{x} = -y + \lambda x + f(x,y) + \lambda g(x,y), \quad \dot{y} = x + \lambda y + p(x,y) + \lambda q(x,y), \tag{1}$$

где f, g, p, q – голоморфные в окрестности особой точки $O(0,0)$ функции, начинающиеся со степеней $\geqslant 2$. Система (1) имеет грубый фокус, устойчивый, если $\lambda < 0$, неустойчивый, если $\lambda > 0$, и центр или негрубый фокус, если $\lambda = 0$.

Систему (1) можно рассматривать как систему, полученную возмущением системы

$$\dot{x} = -y + f(x,y), \quad \dot{y} = x + p(x,y), \tag{2}$$

если $|\lambda|$ достаточно мал и параметр λ при этом называется малым параметром. Для систем (1) обычно рассматривается задача: найти оценку на параметры системы, при которых она имеет в окрестности особой точки предельные циклы, рождающиеся из траекторий системы (2). Эта задача решается методом функции Мельникова [1].

Рассмотрим случай, когда система (1) изохронная.

Определение 1. Система (1) изохронная, если существует преобразование вида

$$u = x + U(x,y), \quad v = y + V(x,y), \tag{3}$$

где $V(x,y), U(x,y)$ – голоморфные в окрестности начала координат функции, начинающиеся со степеней $\geqslant 2$, переводящее систему (1) в систему с равномерной изохронностью.

Определение 2. Система

$$du/dt = -v + \lambda u + P(u,v), \quad dv/dt = u + \lambda v + Q(u,v) \tag{4}$$

равномерно изохронная, если выполняется условие

$$vP(u,v) - uQ(u,v) = 0. \tag{5}$$

Определение 3 [2–7]. Изохронами изохронной системы (1) называются прообразы радиальных прямых при замене (3), переводящей систему (1) в систему (4) с условием (5), т. е. семейство кривых

$$\Gamma_k : \{y + V(x,y) = k(x + U(x,y)),\ k \in (-\infty,\infty)\} \bigcup \{x + U(x,y) = 0\}. \tag{6}$$

Рассматриваем случай, когда преобразование (3) не зависит от параметра λ, или, что тоже, уравнения изохрон (6) не зависят от устойчивости или неустойчивости особой точки $O(0,0)$ системы, включая случай $\lambda = 0$, когда особая точка системы (1) может быть центром, а также от отсутствия или наличия предельного цикла [6], рождающегося из траекторий системы (2). На практике, когда нужно смоделировать изохронную систему (1), смещение параметра λ от истинного влияет как на траектории системы, так и на изохроны, которые ограничивают временные отрезки на траекториях. Если изохроны не зависят от значений λ, то и временные отрезки на траекториях не зависят от λ. В этом состоит практический смысл таких систем.

2. Изохроны систем с однородными нелинейностями, не зависящие от параметра λ

Рассмотрим систему (1) для которой предполагаем, что f, g, p, q – многочлены степени n, начинающиеся со степеней $\geqslant 2$, λ – параметр, не обязательно малый.

Теорема 1. *Для того чтобы система* (1) *была изохронной и ее изохроны не зависели от параметра* λ*, необходимо и достаточно, чтобы функции* $p(x,y), q(x,y), f(x,y), g(x,y)$ *были связаны равенствами*

$$p(x,y) = -x + \left(1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2 + (y - f(x,y))\left(\frac{v}{u}\right)'_x\right) / \left(\frac{v}{u}\right)'_y,$$

$$q(x,y) = -y - \left((x + g(x,y))\left(\frac{v}{u}\right)'_x\right) / \left(\frac{v}{u}\right)'_y, \tag{7}$$

где функции u, v *имеют вид* (3).

Следствие 1. *Семейство изохрон системы* (1)

$$\frac{v(x,y)}{u(x,y)} = k, \quad k \in R$$

является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + q(x,y)}{x + g(x,y)}. \tag{8}$$

Доказательство. *Необходимость.* Потребуем, чтобы (3) было нормализующим преобразованием, т. е. чтобы выполнялось условие

$$S = vP - uQ = 0, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} P &= u'_x(-y + \lambda x + f(x,y) + \lambda g(x,y)) + u'_y(x + \lambda y + p(x,y) + \lambda q(x,y)) + v, \\ Q &= v'_x(-y + \lambda x + f(x,y) + \lambda g(x,y)) + v'_y(x + \lambda y + p(x,y) + \lambda q(x,y)) - u \end{aligned} \tag{10}$$

– производные от функций (3) в силу системы (1). Так как уравнения изохрон не зависят от λ, то выражение S при подстановке (10) в (9), также не зависит от λ, и поэтому коэффициенты S при степенях λ равны нулю. Получим систему

$$yf - xp + xU - pU + U^2 + yV + fV + V^2 + xyU'_y + ypU'_y + xVU'_y + pVU'_y - x^2V'_y -$$
$$-xpV'_y - xUV'_y - pUV'_y - y^2U'_x + yfU'_x - yVU'_x + fVU'_x + xyV'_x - xfV'_x + yUV'_x - fUV'_x = 0,$$
$$yg - xq - yU - qU + xV + gV + y^2U'_y + yqU'_y + yVU'_y + qVU'_y - xyV'_y - xqV'_y -$$
$$-yUV'_y - qUV'_y + xyU'_x + ygU'_x + xVU'_x + gVU'_x - x^2V'_x - xgV'_x - xUV'_x - gUV'_x = 0.$$

Из этой системы выразим

$$p(x,y) = \frac{(x+U)\left(U - xV'_y + yV'_x - fV'_x\right) + (y+V)\left(V + xU'_y - yU'_x + f\left(1+U'_x\right)\right)}{(x+U)\left(1+V'_y\right) - (y+V)U'_y},$$

$$q(x,y) = \frac{(x+U)\left(V - yV'_y - xV'_x - gV'_x\right) + (y+V)\left(-U + yU'_y + xU'_x + g\left(1+U'_x\right)\right)}{(x+U)\left(1+V'_y\right) - (y+V)U'_y}.$$

Нетрудно показать, учитывая (3), что эти функции можно представить в виде (7).

Достаточность. Пусть выполняются условия (7). Тогда, если подставить (7) в (1) и вычислить производные от функций (3) в силу полученной системы, то для полученных при этом функций P, Q, как легко показать, будет выполняться условие (5).

Докажем теперь следствие теоремы. Из формул (7) следует, что справедливы следующие равенства:

$$\left(\frac{v}{u}\right)'_x \Big/ \left(1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2\right) = -\frac{y+q}{(x+g)(x+p) + (y-f)(y+q)},$$
$$\left(\frac{v}{u}\right)'_y \Big/ \left(1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2\right) = \frac{x+g}{(x+g)(x+p) + (y-f)(y+q)}.$$

Отсюда получим

$$\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{v}{u}\right)\right)'_x = -\frac{y+q}{(x+g)(x+p) + (y-f)(y+q)},$$
$$\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{v}{u}\right)\right)'_y = \frac{x+g}{(x+g)(x+p) + (y-f)(y+q)},$$
$$\left(\operatorname{arctg}\left[\frac{v}{u}\right]\right)'_x \Big/ \left(-\left(\operatorname{arctg}\left[\frac{v}{u}\right]\right)'_y\right) = \frac{y+q}{x+g}.$$

Очевидно, что последнее равенство доказывает справедливость следствия. □

Замечание 1. *В статье* [2] *показано, что при построении изохронных систем с фокусом целесообразно строить их по изохронам с заданными свойствами, так как условие быть изохронной накладывает на систему с фокусом слабые ограничения.*

Поэтому логичным будет следующее условие.

Условие 1. *Условимся всюду в дальнейшем, что для изохронных систем* (1) *с полиномами в правых частях нормализующее преобразование* (3) *полиномиальное.*

Теорема 2. *Предположим, что полиномиальная система* (1) *изохронная, уравнение ее изохрон не зависит от* λ *и нормализующее преобразование* (3) *полиномиальное. Тогда выполняются условия*

$$q(x,y) = -y + vu'_x - uv'_x,$$
$$g(x,y) = -x - vu'_y + uv'_y, \tag{11}$$
$$(x + p(x,y))(x + g(x,y)) - (-y + f(x,y))(y + q(x,y)) = u^2 + v^2. \tag{12}$$

Доказательство. Запишем дифференциальное уравнение изохрон $\frac{v(x,y)}{u(x,y)} = k$, где k – произвольная постоянная

$$\frac{dy}{dx} = \frac{vu'_x - uv'_x}{-vu'_y + uv'_y}. \tag{13}$$

Приравнивая правые части (8) и (13) и учитывая, что это несократимые рациональные дроби, получим равенства (11). Из равенств (7) и (11) легко получить, как следствие, равенство (12). □

Следствие 2. *При выполнении условия* 1 *функции* $u(x,y), v(x,y)$ *в* (3) *являются многочленами степени* $\leqslant n$.

Доказательство. Доказательство следует из равенства (12), т. к. если предположить, что хотя бы одна из функций, u или v, имеет степень больше n, то в (12) в левой части получим функцию степени $\leqslant n$, а в правой части функцию степени больше n. □

Замечание 2. *Под степенью функции* $h(x,y)$ *мы здесь понимаем степень функции* $h(x,z\,x)$ *по переменной* x.

3. Изохроны систем с квадратичными нелинейностями, не зависящие от параметра λ

Теорема 3. *Для того чтобы при выполнении условия* 1 *уравнение изохрон системы* (1) *с квадратичными в правой части нелинейностями не зависело от* λ, *необходимо и достаточно, чтобы системы и их полиномиальные нормализующие преобразования* (3) *представлялись в одном из видов*

$$1)\ \frac{dx}{dt} = -y + x\lambda + Ax^2 + Mxy - \frac{1}{2}Mx^2\lambda, \frac{dy}{dt} = x + y\lambda - \frac{Mx^2}{2} + 4Axy + 2My^2 - x\left(Ax + My\right)\lambda;$$
$$u = x - \frac{Mx^2}{2},\ \ v = y + Ax^2;$$

$$2)\ \frac{dx}{dt} = -y + x\lambda + Kx^2 - \frac{Ky^2}{4} + \frac{1}{2}Kxy\lambda, \frac{dy}{dt} = x + y\lambda + \frac{Kxy}{2} + \frac{1}{4}Ky^2\lambda;\quad u = x,\ \ v = y + \frac{Ky^2}{4};$$

$$3)\ \frac{dx}{dt} = -y + x\lambda + \frac{\left(4A^2 + M^2\right)x^2}{4A} + Mxy - \frac{M^2y^2}{16A} + \frac{Mx\left(-4Ax + My\right)\lambda}{8A},$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y\lambda + \frac{Mx^2}{2} + \frac{\left(32A^2 + M^2\right)xy}{8A} - \frac{\left(4Ax - My\right)\left(4Ax + My\right)\lambda}{16A};\ \ u = x,\ v = y + \frac{\left(4Ax - My\right)^2}{16A};$$

$$4)\ \frac{dx}{dt} = -y + x\lambda + \frac{B\left(b^2 + 16c^2\right)x^2}{4bc} - \frac{\left(b^2 + 4Bc + 8c^2\right)xy}{2c} +$$
$$+ \frac{\left(b^2 - Bc\right)y^2}{b} + \frac{\left(bx + 2cy\right)\left(b^2x + 4Bcx - 2bcy\right)\lambda}{4bc},$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y\lambda - \frac{\left(-b^2 + 4Bc\right)x^2}{4c} + \frac{\left(b^2B + 2b^2c + 2Bc^2\right)xy}{bc} -$$
$$- \frac{\left(b^2 + c^2\right)y^2}{c} + \frac{\left(bx + 2cy\right)\left(-bBx + 2b^2y + 2Bcy\right)\lambda}{4bc};$$
$$u = x + \frac{\left(bx + 2cy\right)^2}{4c},\ \ v = y + \frac{B\left(bx + 2cy\right)^2}{4bc};$$

$$5)\ \frac{dx}{dt} = -y + x\lambda + Cx^2 - 2cxy - Cy^2 + \left(cx^2 + 2Cxy - cy^2\right)\lambda,$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y\lambda + cx^2 + 2Cxy - cy^2 - \left(Cx^2 - 2cxy - Cy^2\right)\lambda;\ \ u = x + c\left(x^2 + y^2\right),\ v = y + C\left(x^2 + y^2\right).$$

Здесь a, b, c, A, B, C, K, M – параметры системы.

Доказательство. Пусть

$$u(x,y) = x + ax^2 + bxy + cy^2, v(x,y) = y + Ax^2 + Bxy + Cy^2. \tag{14}$$

Подставляя эти функции в равенства (11) и требуя, чтобы полученные функции g и q были однородными многочленами второй степени, получим, условия

$$b - C - N = 0,\ \ 2a - 2B - 3c - M + n = 0,\ \ -3A - 2b + 2C - K + m = 0,\ \ -a + B + k = 0, \tag{15}$$

и функции

$$g(x,y) = -cy^2 + x^2(a+B) + 2Cxy, \quad q(x,y) = (b+C)y^2 - Ax^2 + 2axy. \tag{16}$$

Пусть

$$p(x,y) = kx^2 + mxy + ny^2, \quad f(x,y) = Kx^2 + Mxy + Ny^2. \tag{17}$$

Подставляя эти функции в (12) и требуя выполнения условий (15), получим идеал

$$j = \{-b^2 + 2ac - 2Bc - 4c^2 - cM,\ -2ab - 3Ac - 4bc - 2aC + 2BC + 8cC - cK - bM + CM,$$
$$-2a^2 + Ab - b^2 + B^2 + 4Bc + 3AC + 4bC - 4C^2 - bK + CK - aM + BM,$$
$$3aA + AB + 2bB - 4BC - aK + BK + AM,$$
$$-A^2 - B^2 + AK,\ (-Ab + aB),\ (-Bc + bC),\ (-Ac + aC)\}.$$

Для того чтобы вычислить базис Гребнера этого идеала, рассмотрим два случая:
Случай 1. $c = 0,\ \ b = 0$. Базис Гребнера идеала j в этом случае есть

$$g1 = \{A(A-K)K\left(4A^2 - 4AK + M^2\right), A(A-K)\left(4A^2 - 4AK + M^2\right)\left(A^2 + 9AK + 5K^2 + M^2\right),$$
$$A(A-K)K(2B+M), A(A-K)\left(6A^2B + 6ABK + 6BK^2 + 7A^2M - AKM + 3K^2M + M^3\right),$$
$$-AK\left(2A^2 - 2AK - BM\right), -A\left(2A^3 + 2A^2K - 4AK^2 - 3ABM - AM^2 + KM^2\right),$$
$$-A\left(2A^2B - 2BK^2 + 3A^2M - 2AKM - K^2M - BM^2\right), A^2 + B^2 - AK,$$
$$-A\left(A^2 - 4AC + 4CK - K^2 - BM\right), A(AB - BK + AM + 2CM - KM), A^3 - AK^2 - ABM + CM^2,$$
$$C(2B+M), -\left((A-C)(A+4C-K)K^2\right), -A(A+4C-K)K(A-4C+3K),$$
$$A^2B + ABK - A^2M + 8C^2M + AKM - 2CKM, -A^3 - 12AC^2 + 16C^3 - 4C^2K + AK^2 + ABM,$$
$$K(4AB + 2aK - 2BK + AM - 4CM), 3aA + AB - aK + BK + AM + 2CM,$$
$$-17A^3 - 144AC^2 + 48A^2K + 108ACK + 48C^2K - 31AK^2 - 12CK^2 + 21ABM + 8aKM -$$
$$-8BKM + 4AM^2, aB, aC, 2a^2 + A^2 - 3AC + 4C^2 - AK - CK + aM - BM\}.$$

Многообразие этого идеала, совместно с условием $b = c = 0$:

$$w1 = \{\{c=0,\ b=0,\ a=0,\ A=0,\ B=0,\ C=0\},$$
$$\left\{c=0,\ b=0,\ a=-\frac{M}{2},\ B=0,\ C=0,\ K=A\right\},$$
$$\left\{c=0,\ b=0,\ a=0,\ A=0,\ B=0,\ C=\frac{K}{4},\ M=0\right\},$$
$$\left\{c=0,\ b=0,\ a=0,\ B=-\frac{M}{2},\ C=\frac{M^2}{16A},\ K=\frac{4A^2+M^2}{4A}\right\},$$
$$\{c=0,\ b=0,\ a=0,\ B=0,\ C=A,\ K=A,\ M=0\}\}.$$

Случай 2. $M = \frac{-b^2+2ac-2Bc-4c^2}{c}$. Базис Гребнера идеала J в этом случае есть

$$g2 = \{A^2 + B^2 - AK,\ \ cC(A+4C-K)\left(2AC - C^2 - AK\right),$$
$$c(2A-7C)(A+4C-K)\left(2AC - C^2 - AK\right),\ \ Bc(A+4C-K)\left(2AC - C^2 - AK\right), \ldots\}.$$

Мы не приводим полностью этот базис из-за его громоздкости.
Многообразие этого идеала, совместно с условием этого случая:

$$w2 = \left\{\left\{M = -\frac{b^2+4Bc+8c^2}{2c},\ a = \frac{b^2}{4c},\ A = \frac{bB}{4c},\ C = \frac{Bc}{b},\ K = \frac{B\left(b^2+16c^2\right)}{4bc}\right\},\right.$$

$$\left\{M=-\frac{b^2+8c^2}{2c},\ A=0,\ a=\frac{b^2}{4c},\ B=0,\ \ C=0,\ K=0\right\},$$

$$\{M=-2c,\ a=c,\ A=C,\ b=0,\ B=0,\ K=C\}\}.$$

Подставляя многообразия w_1, w_2 в систему (1) с функциями (16), (17) и нормализующее преобразование (14), получим системы 1)–5) теоремы вместе с их нормализующими преобразованиями.

Ниже приведены траектории систем 1), 2) теоремы 3 и графики ее изохрон.

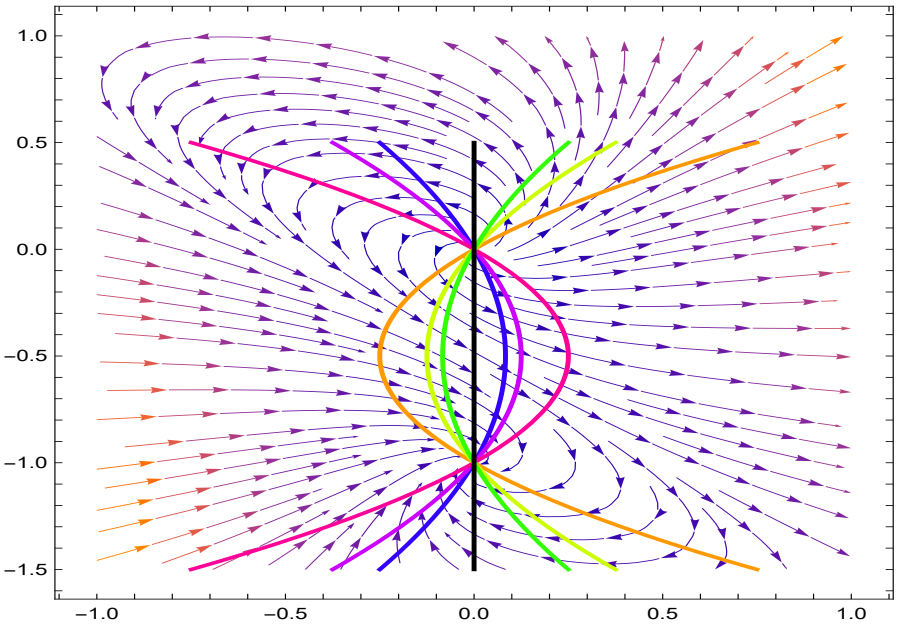


Рис. 1. Траектории и изохроны системы 1)

На рис. 1 кроме особой точки изохронного фокуса $O(0,0)$ имеется еще одна особая точка $O_1(1/10,1/100)$, для которых изохронами являются те же изохроны, что и для $O(0,0)$.

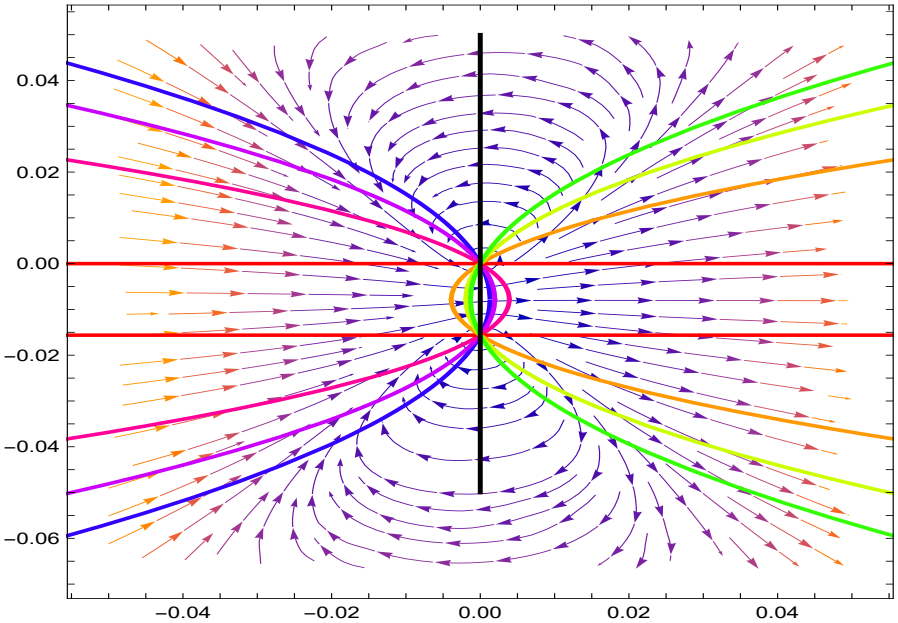


Рис. 2. Траектории и изохроны системы 2)

На рис. 2 кроме особой точки сильно изохронного фокуса $O(0,0)$ четвертого порядка, т. е., изохронами этой системы являются оси координат [5], имеется еще один сильно изохронный фокус $O_2(0,-1/64)$ четвертого порядка, для которого изохронами, кроме горизонтальной изохроны, являются те же изохроны, что и для $O(0,0)$.

Литература

1. *Zoladek H.* Quadratic systems with center and their perturbations // Differential Equations. 1994. Vol. 109. P. 223–273.

2. *Руденок А. Е., Василевич М. Н.* Об изохронах грубого фокуса // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2025. № 2. С. 16–29.

3. *Руденок А. Е., Василевич М. Н.* О сильной изохронности грубого фокуса // XIV Белорусская математическая конференция, посвященная 65-летию института математики НАН Беларуси: материалы Международной научной конференции, Минск, 28 октября – 1 ноября 2024 г.: в 3 ч. Минск: Беларуская навука, 2024. Ч. 2. С. 70–71.

4. *Руденок А. Е., Василевич М. Н.* О сильной изохронности негрубого фокуса // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: материалы V Международной научной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения чл.-кор. АН БССР Е. А. Иванова и доц. Н. И. Бриша. Минск, 17–19 декабря 2024 г. Минск: БГУ, 2025. С. 30–32.

5. *Василевич М. Н.* О существовании трех сильно изохронных четвертого порядка центров // XXI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2023): материалы Международной конференции, Могилев, 23–27 мая 2023 г. Могилев, 2023. Ч. 1. С. 71–73.

6. *Руденок А. Е.* О предельных циклах, рождающихся из траекторий центра // XXII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2026): материалы Международной конференции, Гродно, 18–22 мая 2026 г. Гродно, 2026. Ч. 1. С. 77–79.

7. *Руденок А. Е., Василевич М. Н.* Изохронные системы с нелинейностями третьей степени, изохроны которых не зависят от параметра, определяющего устойчивость особой точки // XXII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2026): материалы Международной конференции, Гродно, 18–22 мая 2026 г. Гродно, 2026. Ч. 1. С. 79–81.

References

1. Zoladek H. Quadratic systems with center and their perturbations. *Differential Equations*, 1994, vol. 109, pp. 223–273.

2. Rudenok A. E., Vasilevich M. N. On isochrones of a rough focus. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics. Informatics*, 2025, no. 2, pp. 16–29 (in Russian).

3. Rudenok A. E., Vasilevich M. N. On strong isochronicity of a rough focus. *XIV Belarusian Mathematical Conference dedicated to the 65th anniversary of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus: proceedings of the international scientific conference*, Minsk, October 28 – November 1, 2024. In three parts. Part 2. Minsk, Belaruskaya Navuka, 2024, pp. 70–71 (in Russian).

4. Rudenok A. E., Vasilevich M. N. On strong isochronicity of a non-rough focus. *Mathematical Modeling and Differential Equations: proceedings of the V International Scientific Conference dedicated to the 100th anniversary of the birth of Corresponding Member of the Academy of Sciences of the BSSR E. A. Ivanov and Assoc. Prof. N. I. Brish.* Minsk, December 17–19, 2024. Minsk, BSU, 2025, pp. 30–32 (in Russian).

5. Vasilevich M. N. On the existence of three strongly isochronous fourth-order centers. *XXI International Scientific Conference on Differential Equations (Erugin Readings – 2023): Proceedings of the international conference*. Mogilev, May 23–27, 2023. Part 1. Mogilev, 2023, pp. 71–73 (in Russian).

6. Rudenok A. E. On limit cycles born from trajectories of a center. *XXII International Scientific Conference on Differential Equations (Erugin Readings – 2026): Proceedings of the international conference.* Grodno, May 18–22, 2026. Part 1. Grodno, 2026, pp. 77–79 (in Russian).

7. Rudenok A. E., Vasilevich M. N. Isochronous systems with third-degree nonlinearities whose isochrones do not depend on the parameter determining the stability of the singular point. *XXII International Scientific Conference on Differential Equations (Erugin Readings – 2026): Proceedings of the international conference*. Grodno, May 18–22, 2026. Part 1. Grodno, 2026, pp. 79–81 (in Russian).

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 155–166

УДК 517.977 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-155–166
EDN: JHUQCK

ЗАДАЧА НАЗНАЧЕНИЯ КОНЕЧНОГО СПЕКТРА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ТИПА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ВЫХОДУ

В. Е. Хартовский, О. М. Китурко

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
e-mail: hartovskij@grsu.by, kiturko.om@gmail.com

Поступила: 07.09.2026 **Исправлена:** 24.09.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: линейная автономная система нейтрального типа с запаздыванием, наблюдаемый сигнал, конечный спектр, регулятор, обратная связь по состоянию, обратная связь по выходу, наблюдатель, принцип разделения

Аннотация. Для линейных автономных систем нейтрального типа исследована задача назначения конечного спектра при помощи регуляторов с сосредоточенными запаздываниями и обратной связью по выходу. Установлена связь между разрешимостью этой задачи в классе регуляторов с обратной связью по состоянию и в классе регуляторов с обратной связью по выходу. Рассмотрен регулятор на основе наблюдателя, для которого в рамках задачи назначения конечного спектра обоснован принцип разделения.

FINITE SPECTRUM ASSIGNMENT PROBLEM FOR LINEAR NEUTRAL-TYPE SYSTEMS IN THE CLASS OF DIFFERENTIAL-DIFFERENCE OUTPUT-FEEDBACK CONTROLLERS

V. E. Khartovskii, O. M. Kiturko

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus
e-mail: hartovskij@grsu.by, kiturko.om@gmail.com

Received: 07.09.2026 **Revised:** 24.09.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: linear autonomous neutral-type systems with delay, observed signal, finite spectrum, controller, state feedback, output feedback, observer, separation principle

Abstract. We investigate the finite spectrum assignment problem for linear autonomous neutral-type systems using output-feedback controllers with lumped delays. We establish a connection between the solvability of this problem in the class of state feedback controllers and in the class of output feedback controllers. Finally, we consider an observer-based controller and validate the separation principle within the framework of the finite spectrum assignment problem.

1. Введение

Классическая задача модального управления (размещения полюсов) для конечномерных линейных систем вида $\dot{x} = Ax + Bu$ решается выбором обратной связи $u = Kx$ такой, что спектр матрицы $A + BK$ совпадает с заданным набором чисел. При условии полной управляемости пары (A, B) это возможно для любого наперед заданного множества корней характеристического уравнения [1]. Этот результат является одним из фундаментальных инструментов в теории управления.

Для систем с запаздыванием ситуация существенно сложнее [2–14]. Это связано с тем, что характеристическая функция является квазиполиномом, который имеет счетное множество корней. Поэтому задача модального управления формулируется как задача управления коэффициентами характеристического квазиполинома [2–6].

Параллельно широкое распространение получил метод стабилизации, основанный на задаче назначения конечного спектра (finite spectrum assignment) [7–10]. Суть ее – за счет обратной связи наделить систему наперед заданным конечным спектром, состоящим, как правило, из чисел с отрицательными действительными частями.

Известно [6], что система с запаздыванием в общем случае может содержать конечное число корней характеристического уравнения, исключить из спектра которые возможно только при

помощи распределенных запаздываний в обратной связи. Поэтому при использовании методов модального управления или назначения конечного спектра в общем случае привлекаются интегральные регуляторы. При практической реализации интегральных регуляторов замена распределенных запаздываний численными квадратурами может вызвать появление нежелательных неустойчивых полюсов, и, как следствие, потерю устойчивости [15; 16]. Этот феномен, описанный, например, в [16], требует использования специальных методов дискретизации для сохранения робастности замкнутой системы. Некоторые подходы к решению указанной проблемы можно найти в [15–17].

Избежать трудностей реализации распределенных запаздываний позволяет использование дифференциально-разностных регуляторов. Эффективные методы проектирования таких регуляторов на базе канонических форм развиты в статьях [2; 3] и впоследствии модифицированы в работах [5; 14] (см. также библиографию в цитируемых [2; 3; 5; 14]). К недостаткам этих работ следует отнести необходимость наличия полной информации о состоянии системы, которая в приложениях не всегда доступна. В связи с этим представляет интерес развитие методов построения дифференциально-разностных регуляторов с обратной связью по выходу [18].

В представленной работе для линейных систем нейтрального типа предложен подход к решению задачи назначения конечного спектра дифференциально-разностными регуляторами с обратной связью, формируемой на основании наблюдаемого выхода, что принципиально отличает ее от цитированных ранее [2–5; 14].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 даются основные определения и обосновывается корректность поставленной задачи. В разделе 3 формулируются необходимые и достаточные условия разрешимости задачи назначения системе любого наперед заданного спектра регулятором с обратной связью по состоянию. В разделе 4 приводится основной результат, позволяющий построить дифференциально-разностные регуляторы с обратной связью по выходу. В разделе 5 описывается конструкция регулятора на основе наблюдателя и формулируется принцип разделения.

Работа поддержана в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция–2030».

2. Постановка задачи

Исследуемый объект управления описывается линейной автономной дифференциально-разностной системой нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} D_i \dot{x}(t-ih) = \sum_{i=0}^{m} \Big(A_i x(t-ih) + B_i u(t-ih) \Big), \tag{1}$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{m} C_i x(t-ih), \quad t > 0, \tag{2}$$

где x – решение этой системы; u – управление; y – наблюдаемый выходной сигнал (выход); $h = \mathrm{const} > 0$; $D_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $C_i \in \mathbb{R}^{l\times n}$.

Определим для системы (1) начальное условие

$$x(t) = \eta(t), \quad u(t) \equiv 0, \quad t \in [-mh, 0]. \tag{3}$$

Здесь $\eta \in \widetilde{\mathbf{C}}^1\big([-mh,0],\mathbb{R}^n\big)$, где $\widetilde{\mathbf{C}}^1(\cdot)$ – класс непрерывных функций, имеющих кусочно-непрерывную производную. Для уравнения (1) при заданных управлении $u(t), t > 0$, и начальном условии (3) существует единственное непрерывное решение, имеющее кусочно-непрерывную производную.

Пусть $\mathbb{R}^{r\times m}[\lambda]$ – множество матриц размера $r \times m$, элементы которых суть полиномы переменной λ с действительными коэффициентами; λ_h – оператор сдвига, т. е. $\lambda_h^j f(t) = f(t-jh)$ (f – функция, $j \geqslant 0$ – целое число); $I_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ – единичная матрица.

Введем полиномиальные матрицы

$$D(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i D_i, \quad A(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i, \quad C(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i C_i, \quad B(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i B_i$$

и перепишем уравнения (1), (2) в операторном виде

$$\big(I_n - D(\lambda_h)\big)\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + B(\lambda_h)u(t), \tag{4}$$

$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t > 0. \tag{5}$$

В дальнейшем будем использовать запись исходной системы (1), (2) в виде (4), (5).

Обозначим $W(p,\lambda) = p\big(I_n - D(\lambda)\big) - A(\lambda)$, $W(p,e^{-ph})$ – характеристическая матрица однородной ($u \equiv 0$) системы (4). Спектр системы (4) состоит из счетного числа корней характеристического уравнения $\det W(p,e^{-ph}) = 0$. Квазиполином $\det W(p,e^{-ph})$ представим в виде $\det W(p,e^{-ph}) = \sum_{i=0}^{n} p^i q_i(e^{-ph})$, где $q_i(\cdot)$ – некоторые полиномы, причем $q_n(0) = 1$. Если $q_n(\lambda) \equiv 1$, то квазиполином $\det W(p,e^{-ph})$ называют квазиполиномом запаздывающего типа, в противном случае – нейтрального типа. Понятно, что квазиполином запаздывающего типа соответствует линейной автономной системе запаздывающего типа. Такая система получается, например, если в (4) матрица $D(\lambda)$ является нулевой (обратим внимание, что это условие не является необходимым для того, чтобы у системы вида (4) характеристический квазиполином имел запаздывающий тип). Наиболее простому случаю системы (4) с точки зрения ее анализа соответствует ситуация, когда все $q_i(\lambda) = \text{const}$, т. е. характеристическая функция $\det W(p,e^{-ph})$ является полиномом. Кроме того, для возможных приложений желательно, чтобы корни полинома $\det W(p,e^{-ph})$ имели наперед заданные отрицательные действительные части, что обеспечит не только асимптотическую устойчивость, но и заданную скорость сходимости решения к нулю.

В настоящей работе исследуется задача выбора для системы (4), (5) управления u в виде такого дифференциально-разностного регулятора с обратной связью, который имеет сугубо сосредоточенные запаздывания, а характеристическая функция замкнутой системы является наперед заданным полиномом. При этом обратная связь входит в регулятор в виде наблюдаемого выхода (5).

Введем два класса динамических дифференциально-разностных регуляторов с обратной связью по состоянию и по выходу:

1) класс динамических дифференциально-разностных регуляторов с обратной связью по состоянию

$$\begin{aligned} u(t) &= \big(R_{11}(\lambda_h) + p_D Q_{11}(\lambda_h)\big)x(t) + \big(R_{12}(\lambda_h) + p_D Q_{12}(\lambda_h)\big)z_1(t), \\ \dot{z}_1(t) &= \big(R_{21}(\lambda_h) + p_D Q_{21}(\lambda_h)\big)x(t) + \big(R_{22}(\lambda_h) + p_D Q_{22}(\lambda_h)\big)z_1(t), \quad t > \widehat{t}_1, \end{aligned} \tag{6}$$

где $z_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ – вспомогательная переменная; $p_D = d/(dt)$ – оператор дифференцирования по переменной t; $R_{11}(\lambda), Q_{11}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times n}[\lambda]$, $R_{12}(\lambda), Q_{12}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times n_1}[\lambda]$, $R_{21}(\lambda), Q_{21}(\lambda) \in \in \mathbb{R}^{n_1\times n}[\lambda]$, $R_{22}(\lambda), Q_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}[\lambda]$;

$$\widehat{t}_1 = h\max\big\{m, \deg B(\lambda)R_{11}(\lambda), \deg B(\lambda)Q_{11}(\lambda), \deg R_{21}(\lambda), \deg Q_{21}(\lambda)\big\};$$

2) класс динамических дифференциально-разностных регуляторов с обратной связью по выходу

$$\begin{aligned} u(t) &= \big(L_{12}(\lambda_h) + p_D K_{12}(\lambda_h)\big)z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) &= \big(L_{21}(\lambda_h) + p_D K_{21}(\lambda_h)\big)y(t) + \big(L_{22}(\lambda_h) + p_D K_{22}(\lambda_h)\big)z_2(t), \quad t > \widehat{t}_2, \end{aligned} \tag{7}$$

где $z_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ – вспомогательная переменная, $L_{12}(\lambda), K_{12}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times n_2}[\lambda]$, $L_{21}(\lambda), K_{21}(\lambda) \in \in \mathbb{R}^{n_2\times l}[\lambda]$, $L_{22}(\lambda), K_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}[\lambda]$;

$$\widehat{t}_2 = h\Big(\max\big\{\deg L_{21}(\lambda), \deg K_{21}(\lambda)\big\} + m\Big).$$

Определим отрезки последействия для замкнутых систем (4), (6) и (4), (5), (7) соответственно:

$$\widehat{h}_1 = h\max\big\{m, \deg B(\lambda)R_{1j}(\lambda), \deg B(\lambda)Q_{1j}(\lambda), \deg R_{2j}(\lambda), \deg Q_{2j}(\lambda),\ j = 1,2\big\},$$

$$\widehat{h}_2 = h\max\big\{m, \deg B(\lambda)K_{12}(\lambda), \deg B(\lambda)L_{12}(\lambda), \deg K_{2j}(\lambda), \deg L_{2j}(\lambda),\ j = 1,2\big\}.$$

Для существования единственного решения системы (4), (6) при $t > \widehat{t}_1$ и системы (4) , (5), (7) при $t > \widehat{t}_2$ добавим начальные условия соответственно:

$$z_1(t) = \widehat{z}_1(t), \quad t \in [\widehat{t}_1 - \widehat{h}_1, \widehat{t}_1], \tag{8}$$

$$z_2(t) = \widehat{z}_2(t), \quad t \in [\widehat{t}_2 - \widehat{h}_2, \widehat{t}_2], \tag{9}$$

при этом считаем, что $u(t) \equiv 0$, $t \leqslant \widehat{t}_1$, в случае регулятора (6) и $u(t) \equiv 0$, $t \leqslant \widehat{t}_2$, в случае регулятора (7). Функции $\widehat{z}_1(t), \widehat{z}_2(t)$ в соотношениях (8) и (9) выбираются любыми непрерывными, имеющими кусочно-непрерывную производную.

Далее для краткости описанные классы регуляторов вида (6) и (7) будем соответственно называть классом регуляторов I и классом регуляторов II.

Замечание 2.1. *Для того чтобы объяснить использование термина «обратная связь по состоянию» поясним, что в контексте настоящей статьи под состоянием системы нейтрального типа понимаем непрерывную функцию, определенную на отрезке, равном длине последействия системы, и имеющую кусочно-непрерывную производную. В частности, для однородной ($u = 0$) системы* (4) *это элемент класса* $\widetilde{\mathbf{C}}^1([-mh, 0], \mathbb{R}^n)$, *для замкнутых систем* (4), (6) *и* (4), (5), (7) *это элементы классов* $\widetilde{\mathbf{C}}^1([-\widehat{h}_1, 0], \mathbb{R}^{n+n_1})$ *и* $\widetilde{\mathbf{C}}^1([-\widehat{h}_2, 0], \mathbb{R}^{n+n_2})$ *соответственно.*

Рассмотрим регуляторы (6) и (7). Определим характеристические матрицы $W_1(p, e^{-ph})$ и $W_2(p, e^{-ph})$ замкнутых систем (4), (6) и (4), (5), (7) соответственно, где

$$W_1(p,\lambda) = \begin{bmatrix} W(p,\lambda) - B(\lambda)\big(pQ_{11}(\lambda) + R_{11}(\lambda)\big) & -B(\lambda)\big(pQ_{12}(\lambda) + R_{12}(\lambda)\big) \\ -pQ_{21}(\lambda) - R_{21}(\lambda) & p\big(I_{n_1} - Q_{22}(\lambda)\big) - R_{22}(\lambda) \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$W_2(p,\lambda) = \begin{bmatrix} W(p,\lambda) & -B(\lambda)\big(pK_{12}(\lambda) + L_{12}(\lambda)\big) \\ -\big(pK_{21}(\lambda) + L_{21}(\lambda)\big)C(\lambda) & p\big(I_{n_2} - K_{22}(\lambda)\big) - L_{22}(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Пусть $\mathbb{R}^0_\alpha[p]$ ($\alpha \in \mathbb{N}$) – множество приведенных полиномов с действительными коэффициентами, степени которых равны α.

Определение 2.2. Систему (4) (систему (4), (5)) назовем точно спектрально приводимой в классе регуляторов I (в классе регуляторов II) если существует $k_1 \in \mathbb{N}$ (существует $k_2 \in \mathbb{N}$) такое, что для любого полинома $d(p) \in \mathbb{R}^0_\alpha[p]$, $\alpha \geqslant k_1$ ($\alpha \geqslant k_2$), найдется регулятор вида (6), где $n_1 = \alpha - n$ (вида (7), где $n_2 = \alpha - n$) такой, что $\det W_1(p,\lambda) = d(p)$ $\Big(\det W_2(p,\lambda) = d(p)\Big)$.

Определим матрицы

$$\widetilde{D}_1(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) - B(\lambda)Q_{11}(\lambda) & -B(\lambda)Q_{12}(\lambda) \\ -Q_{21}(\lambda) & I_{n_1} - Q_{22}(\lambda) \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{D}_2(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) & -B(\lambda)K_{12}(\lambda) \\ -K_{21}(\lambda)C(\lambda) & I_{n_2} - K_{22}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим регулятор (6). Если найдутся $i, j \in \{1, 2\}$ такие, что $Q_{ij}(0) \neq 0$, то в общем случае замкнутая система (4), (6) может оказаться дифференциально-алгебраической (по-другому, вырожденной или гибридной) системой. То же самое относится и к регулятору (7). Однако если регуляторы (6) и (7) те, о которых говорится в определении 2.2, то за счет условия $n_1 = \alpha - n$ и $n_2 = \alpha - n$ замкнутые системы (4), (6) и (4), (7) будут линейными автономными системами нейтрального типа с конечным спектром, т. е. будут выполняться условия

$$\det \widetilde{D}_1(0) \neq 0, \det \widetilde{D}_2(0) \neq 0. \tag{12}$$

Лемма 2.3. *Пусть существует* $\alpha \in \mathbb{N}$ *и регулятор* (6) *(регулятор* (7)*) такой, что* $W_1(p,\lambda) = d(p)$ $\big(W_2(p,\lambda) = d(p)\big)$, $d(p) \in \mathbb{R}^0_\alpha$. *Тогда имеют место соотношения* (12).

Доказательство. Докажем лемму 2.3 для случая регулятора (6). Запишем равенство $\det W_1(p,\lambda) = d(p)$ в виде

$$\det\big(p\widetilde{D}_1(\lambda) + \widetilde{A}_1(\lambda)\big) = p^{n+n_1} + \sum_{i=0}^{n+n_1-1} \widetilde{d}_i p^i, \tag{13}$$

где $\widetilde{A}(\lambda) = W_1(p,\lambda) - p\widetilde{D}_1(\lambda)$, $d(p) = p^{n+n_1} + \sum_{i=0}^{n+n_1-1} \widetilde{d}_i p^i$, $\widetilde{d}_i \in \mathbb{R}$.

Предположим, что $\det\widetilde{D}_1(0)=0$. Тогда найдутся невырожденные матрицы Ξ_1, Ξ_2 такие, что $\Xi_1\widetilde{D}_1(0)\Xi_2=\operatorname{diag}\left[\widehat{D},0_{\widehat{n}\times\widehat{n}}\right]$, где $0_{k_1\times k_2}$ – нулевой блок размера $k_1\times k_2$, $\widehat{n}=n+n_1-\operatorname{rank}\widetilde{D}_1(0)$. Полагая в равенстве (13) $\lambda=0$, выводим соотношение

$$\det\begin{bmatrix}p\widehat{D}-\widehat{A}_{11} & -\widehat{A}_{12}\\ -\widehat{A}_{21} & -\widehat{A}_{22}\end{bmatrix}=\det(\Xi_1\Xi_2)\Big(p^{n+n_1}+\sum_{i=0}^{n+n_1-1}\widetilde{d}_ip^i\Big),\tag{14}$$

где $\widehat{A}_{ij}$ – блоки матрицы $\Xi_1\widetilde{A}_1(0)\Xi_2$ подходящего размера, $\Xi_1\widetilde{A}_1(0)\Xi_2=\left[\widehat{A}_{ij}\right]_{i,j=1,2}$. Очевидно, что равенство (14) выполняться не может. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения леммы 2.3 для случая регулятора (6).

Доказательство леммы 2.3 в случае регулятора (7) проводится аналогично. □

3. Вспомогательные результаты

В статье [5] и монографии [14, с. 346] приводятся необходимые и достаточные условия модальной управляемости в классе дифференциально-разностных регуляторов, т. е. содержащих сугубо сосредоточенные запаздывания. Распространить эти условия на задачу назначения конечного спектра в классе регуляторов I не составляет сложностей. Поэтому доказательство следующих утверждений, ввиду отсутствия принципиальных трудностей, не приводится.

Теорема 3.1. *Если система* (4), (5) *точно спектрально приводима в классе регуляторов* I, *то выполняются два условия*

$$\operatorname{rank}\left[W(p,e^{-ph}),B(e^{-ph})\right]=n\quad\forall p\in\mathbb{C};\tag{15}$$

$$\operatorname{rank}\left[I_n-D(\lambda),B(\lambda)\right]=n\quad\forall\lambda\in\mathbb{C}.\tag{16}$$

Замечание 3.2. *Условия* (15), (16) *представляют собой критерий модальной управляемости в классе регуляторов с распределенным запаздыванием* [4].

В силу того, что выполняется условие (16), существует (в общем случае не единственная) $N(\lambda)\in\mathbb{R}^{(r+r_0)\times(n+r_0)}[\lambda]$ ($r_0\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ – некоторое число), обеспечивающая выполнение условия

$$\det\Gamma(\lambda)\equiv 1.\tag{17}$$

Здесь

$$\Gamma(\lambda)=\begin{bmatrix}I_n-D(\lambda)-B(\lambda)N_{11}(\lambda) & -B(\lambda)N_{12}(\lambda)\\ -N_{21}(\lambda) & I_{r_0}-N_{22}(\lambda)\end{bmatrix},$$

$N(\lambda)=\left[N_{ij}(\lambda)\right]_{i,j=1}^{2}$, $N_{11}(\lambda)\in\mathbb{R}^{r\times n}[\lambda]$, $N_{12}(\lambda)\in\mathbb{R}^{r\times r_0}[\lambda]$, $N_{21}(\lambda)\in\mathbb{R}^{r_0\times n}[\lambda]$, $N_{22}(\lambda)\in\mathbb{R}^{r_0\times r_0}[\lambda]$. Различные методы построения матрицы $N(\lambda)$ описаны в [14, с. 228].

Замечание 3.3. *Равенство* $r_0=0$ *означает, что матрица* (17) *имеет вид*

$$\Gamma(\lambda)=\left[I_n-D(\lambda)-B(\lambda)N(\lambda)\right].$$

Обозначим $\Pi(\lambda)=(\Gamma(\lambda))^{-1}$. Заметим, что на основании тождества (17) матрица $\Pi(\lambda)$ является полиномиальной. Разобьем эту матрицу на блоки: $\Pi(\lambda)=\left[\Pi_{ij}(\lambda)\right]_{i,j=1}^{2}$, $\Pi_{11}(\lambda)\in\mathbb{R}^{n\times n}[\lambda]$, $\Pi_{12}(\lambda)\in$ $\in\mathbb{R}^{n\times r_0}[\lambda]$, $\Pi_{21}(\lambda)\in\mathbb{R}^{r_0\times n}[\lambda]$, $\Pi_{22}(\lambda)\in\mathbb{R}^{r_0\times r_0}[\lambda]$.

Определим матрицы $F(\lambda)=A(\lambda)\Pi_{11}(\lambda)$, $G(\lambda)=\left[B(\lambda),A(\lambda)\Pi_{12}(\lambda)\right]$.

Теорема 3.4. *Пусть система* (4) *точно спектрально приводима в классе регуляторов* I. *Тогда, какова бы ни была полиномиальная матрица* $N(\lambda)$, *обеспечивающая тождество* (17), *выполняется условие*

$$\operatorname{rank}\left[G(\lambda),F(\lambda)G(\lambda),\ldots,F^{n-1}(\lambda)G(\lambda)\right]=n.\tag{18}$$

Рассмотрим матрицу, стоящую в левой части (18). Пусть $g_i(\lambda)$, $i=\overline{1,r+r_0}$, – i-й столбец матрицы $G(\lambda)$.

Теорема 3.5. *Для того чтобы система* (4) *была точно спектрально приводимой в классе регуляторов* I, *достаточно существования таких* $k_0 \in \mathbb{N}\,(k_0 \leqslant n)$, *вектор-столбцов* $g_{i_j}(\lambda)$, $j = \overline{1,k_0}$, *и чисел* $\theta_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,k_0}$, $\theta_1 + \ldots + \theta_{k_0} = n$, *что матрица*

$$\left[g_{i_1}(\lambda), F(\lambda)g_{i_1}(\lambda), \ldots, F^{\theta_1-1}(\lambda)g_{i_1}(\lambda), \ldots, g_{i_{k_0}}(\lambda), \ldots, F^{\theta_{k_0}-1}(\lambda)g_{i_{k_0}}(\lambda)\right] \tag{19}$$

является унимодулярной.

Замечание 3.6. *Напомним, что квадратная полиномиальная матрица называется унимодулярной, если она обратима над кольцом многочленов.*

Кратко поясним идею [14, с. 346] построения регулятора класса I, который обеспечит равенство характеристической функции замкнутой системы заданному полиному.

Определим регулятор в виде

$$\begin{aligned} u(t) &= N_{11}(\lambda_h)\dot{x}(t) + N_{12}(\lambda_h)\dot{x}_1(t) + v_1(t), \\ \dot{x}_1(t) &= N_{21}(\lambda_h)\dot{x}(t) + N_{22}(\lambda_h)\dot{x}_1(t) + v_2(t), \end{aligned} \tag{20}$$

где x_1 – вспомогательная переменная; $v = \operatorname{col}[v_1, v_2]$ – новое управление, подлежащее дальнейшему определению. Заметим, что в силу (17) однородная ($v = 0$) система (4), (20) имеет характеристический квазиполином запаздывающего типа. Далее в системе (4), (20) перейдем к новой переменной

$$X(t) = \Gamma(\lambda_h)\begin{bmatrix} x(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix}. \tag{21}$$

В силу (17) замена переменных (21) является обратимой.

Замечание 3.7. *Заметим, что обратимость оператора* $\Gamma(\lambda_h)$ *понимается в следующем смысле: если* $Y_1(t) = \Gamma(\lambda_h)Y_2(t)$, $t \geqslant \bar{t}$ ($Y_1(t), Y_2(t)$ – *произвольные непрерывные функции), то* $Y_2(t) = \Gamma^{-1}(\lambda_h)Y_1(t)$, $t \geqslant \bar{t} + h\deg\Gamma(\lambda)$.

После введения новой переменной согласно (21), получаем систему запаздывающего типа

$$\dot{X}(t) = A_\Pi(\lambda_h)X(t) + B_I(\lambda)v(t). \tag{22}$$

Здесь $A_\Pi(\lambda) = \operatorname{diag}\left[A(\lambda), 0_{r_0\times r_0}\right]\Pi(\lambda)$, $B_I(\lambda) = \operatorname{diag}\left[B(\lambda), I_{r_0}\right]$.

Дальнейший процесс синтеза регуляторов класса I для системы (22) заключается в приведении пары матриц $\big(A_\Pi(\lambda), B_I(\lambda)\big)$ к канонической форме из [3], а условие (19) представляют собой условие существования для этой канонической формы подходящего регулятора.

4. Редукция основной задачи

Введем вспомогательную линейную систему нейтрального типа

$$\big(I_n - \Psi_1(\lambda_h)\big)\dot{\chi}(t) = \Psi_0(\lambda_h)\chi(t) + \Upsilon_\omega(\lambda_h)\omega(t), \tag{23}$$

где χ – решение уравнения (23); ω – управление, $\Psi_1(\lambda) = \big(D(\lambda)\big)'$, $\Psi_0(\lambda) = \big(A(\lambda)\big)'$, $\Upsilon_\omega(\lambda) = \big(C(\lambda)\big)'$ (символ «$'$» (штрих) обозначает операцию транспонирования). Решение уравнения (23) однозначно определяется начальным условием

$$\chi(t) = \widetilde{\eta}(t), \quad \omega(t) \equiv 0, \quad t \in [-mh, 0],$$

где $\widetilde{\eta} \in \widetilde{\mathbf{C}}^1\big([-mh,0], \mathbb{R}^n\big)$.

Определим для системы (23) регулятор из класса регуляторов I

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \big(\widetilde{R}_{11}(\lambda_h) + p_D\widetilde{Q}_{11}(\lambda_h)\big)\chi(t) + \big(\widetilde{R}_{12}(\lambda_h) + p_D\widetilde{Q}_{12}(\lambda_h)\big)\chi_1(t), \\ \dot{\chi}_1(t) &= \big(\widetilde{R}_{21}(\lambda_h) + p_D\widetilde{Q}_{21}(\lambda_h)\big)\chi(t) + \big(\widetilde{R}_{22}(\lambda_h) + p_D\widetilde{Q}_{22}(\lambda_h)\big)\chi_1(t), \end{aligned} \tag{24}$$

где $\chi_1 \in \mathbb{R}^{\widetilde{n}_1}$ – вспомогательная переменная; $\widetilde{R}_{11}(\lambda), \widetilde{Q}_{11}(\lambda) \in \mathbb{R}^{l\times n}[\lambda]$, $\widetilde{R}_{12}(\lambda), \widetilde{Q}_{12}(\lambda) \in \mathbb{R}^{l\times\widetilde{n}_1}[\lambda]$, $\widetilde{R}_{21}(\lambda), \widetilde{Q}_{21}(\lambda) \in \mathbb{R}^{\widetilde{n}_1\times n}[\lambda]$, $\widetilde{R}_{22}(\lambda), \widetilde{Q}_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{\widetilde{n}_1\times\widetilde{n}_1}[\lambda]$. Обозначим

$$\widetilde{W}(p,\lambda) = p\big(I_n - \Psi_1(\lambda)\big) - \Psi_0(\lambda).$$

Пусть $\widetilde{W}_1(p,e^{-ph})$ – характеристическая матрица замкнутой системы (23), (24),

$$\widetilde{W}_1(p,\lambda)=\begin{bmatrix}\widetilde{W}(p,\lambda)-\Upsilon_\omega(\lambda)\big(p\widetilde{Q}_{11}(\lambda)+\widetilde{R}_{11}(\lambda)\big) & -\Upsilon_\omega(\lambda)\big(p\widetilde{Q}_{12}(\lambda)+\widetilde{R}_{12}(\lambda)\big)\\ -p\widetilde{Q}_{21}(\lambda)-\widetilde{R}_{21}(\lambda) & p\big(I_{\tilde{n}_1}-\widetilde{Q}_{22}(\lambda)\big)-\widetilde{R}_{22}(\lambda)\end{bmatrix}. \tag{25}$$

Теорема 4.1. *Для того чтобы система* (4), (5) *была точно спектрально приводима в классе регуляторов* II *необходимо и достаточно, чтобы системы* (4) *и* (23) *одновременно были точно спектрально приводимы в классе регуляторов* I.

Доказательство. Необходимость. Считаем, что система (4), (5) точно спектрально приводима в классе регуляторов II. Пусть регулятор (7) обеспечивает для матрицы (11) равенство $\det W_2(p,\lambda)=d(p)$, где $d(p)\in\mathbb{R}^0_\alpha[p,\lambda]$, $\alpha\geqslant k_2$, – произвольный, но фиксированный полином.

1) Заменим в регуляторе (7) функцию $y(t)$ выражением $C(\lambda_h)x(t)$. После такой замены регулятор (7) будет иметь вид регулятора (6), т. е. получили, что система (4) точно спектрально приводима в классе регуляторов I, а в определении свойства точной спектральной приводимости в классе регуляторов I можно положить (см. определение 2.2) $k_1=k_2$.

2) Используя регулятор (7) строим регулятор (24), полагая

$$\widetilde{Q}_{11}(\lambda)=\widetilde{R}_{11}(\lambda)=0,\quad \widetilde{Q}_{21}(\lambda)=\big(B(\lambda)K_{12}(\lambda)\big)',\quad \widetilde{R}_{21}(\lambda)=\big(B(\lambda)L_{12}(\lambda)'\big),$$
$$\widetilde{Q}_{12}(\lambda)=\big(K_{21}(\lambda)\big)',\quad \widetilde{R}_{12}(\lambda)=\big(L_{21}(\lambda)\big)',\quad \widetilde{Q}_{22}(\lambda)=\big(K_{22}(\lambda)\big)',\quad \widetilde{R}_{22}(\lambda)=\big(L_{22}(\lambda)\big)'.$$

Легко видеть, что в этом случае будет выполняться равенство $\Big(\widetilde{W}_1(p,\lambda)\Big)'=W_2(p,\lambda)$, откуда следует соотношение $\det\widetilde{W}_1(p,\lambda)=d(p)$. Это значит, что система (23) точно спектрально приводима в классе регуляторов I. Необходимость доказана.

Достаточность. Считаем, что системы (4) и (23) точно спектрально приводимы в классе регуляторов I . Пусть число k_1 из определения 2.2 для системы (4) равно k_{11}, а для системы (23) равно k_{12}. В определении свойства точной спектральной приводимости в классе регуляторов II положим $k_2=k_{11}+k_{12}$. Зафиксируем произвольный полином $d(p)\in\mathbb{R}^0_\alpha[p]$, где $\alpha\geqslant k_2$. Покажем, как для этого полинома построить регулятор (7), обеспечивающий равенство $\det W_2(p,\lambda)=d(p)$.

Представим полином $d(p)$ в виде произведения $d(p)=d_1(p)d_2(p)$, $d_i(p)\in\mathbb{R}^0_{\alpha_i}[p]$, $\alpha_i\geqslant k_{1i}$, $i=1,2$. В силу того, что системы (4) и (23) точно спектрально приводимы в классе регуляторов I, существуют регуляторы (6) и (24) такие, что выполняются следующие равенства:

$$\det W_1(p,\lambda)=d_1(p),\quad \det\widetilde{W}_1(p,\lambda)=d_2(p). \tag{26}$$

Для компактной записи последующих рассуждений в регуляторах (6) и (24) обозначим

$$P_{ij}(p,\lambda)=L_{ij}(\lambda)+pK_{ij}(\lambda),\quad \widetilde{P}_{ij}(p,\lambda)=\Big(\widetilde{L}_{ji}(\lambda)+p\widetilde{K}_{ji}(\lambda)\Big)'. \tag{27}$$

В этом случае матрицу (10) и матрицу, транспонированную по отношению к матрице (25), можем записать соответственно в следующем виде:

$$\begin{gathered}W_1(p,\lambda)=\begin{bmatrix}W(p,\lambda)-B(\lambda)P_{11}(p,\lambda) & -B(\lambda)P_{12}(p,\lambda)\\ -P_{21}(p,\lambda) & pI_{n_1}-P_{22}(p,\lambda)\end{bmatrix},\\ \big(\widetilde{W}_1(p,\lambda)\big)'=\begin{bmatrix}W(p,\lambda)-\widetilde{P}_{11}(p,\lambda)C(\lambda) & -\widetilde{P}_{12}(p,\lambda)\\ -\widetilde{P}_{21}(p,\lambda)C(\lambda) & pI_{\tilde{n}_1}-\widetilde{P}_{22}(p,\lambda)\end{bmatrix}.\end{gathered} \tag{28}$$

Определим регулятор

$$\begin{gathered}u(t)=P_{11}(p_D,\lambda_h)\varphi_2(t)+P_{12}(p_D,\lambda_h)\varphi_1(t),\\ \dot\varphi_1(t)=P_{21}(p_D,\lambda_h)\varphi_2(t)+P_{22}(p_D,\lambda_h)\varphi_1(t),\\ \dot\varphi_2(t)=\big(A(\lambda_h)+p_DD(\lambda_h)+\widetilde{P}_{11}(p_D,\lambda_h)C(\lambda_h)\big)\varphi_2(t)+\widetilde{P}_{12}(p_D,\lambda_h)\varphi_3(t)+\\ +B(\lambda_h)\big(P_{11}(p_D,\lambda_h)\varphi_2(t)+P_{12}(p_D,\lambda_h)\varphi_1(t)\big)-\widetilde{P}_{11}(p_D,\lambda_h)y(t),\\ \dot\varphi_3(t)=\widetilde{P}_{21}(p_D,\lambda_h)C(\lambda_h)\varphi_2(t)+\widetilde{P}_{22}(p_D,\lambda_h)\varphi_3(t)-\widetilde{P}_{21}(p_D,\lambda_h)y(t).\end{gathered} \tag{29}$$

Здесь φ_i – вспомогательные переменные. Обозначим:

$$\Phi_{12}(p,\lambda)=\left[P_{12}(p,\lambda),P_{11}(p,\lambda),0_{r\times\widetilde{n}_1}\right],$$

$$\Phi_{22}(p,\lambda)=\begin{bmatrix} P_{22}(p,\lambda) & P_{21}(p,\lambda) & 0_{n_1\times\widetilde{n}_1}\\ B(\lambda)P_{12}(p,\lambda) & A(\lambda)+p_D D(\lambda)+\widetilde{P}_{11}(p,\lambda)C(\lambda)+B(\lambda)P_{11}(p,\lambda) & \widetilde{P}_{12}(p,\lambda)\\ 0_{\widetilde{n}_1\times n_1} & \widetilde{P}_{21}(p,\lambda)C(\lambda) & \widetilde{P}_{22}(p,\lambda)\end{bmatrix},$$

$$\Phi_{21}(p,\lambda)=\begin{bmatrix}0_{n_1\times l}\\ \widetilde{P}_{11}(p,\lambda)\\ \widetilde{P}_{21}(p,\lambda)\end{bmatrix}.$$

В регуляторе (7) положим

$$z=\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix},\quad L_{ij}(\lambda)=\Phi_{ij}(0,\lambda),\quad K_{ij}(\lambda)=\frac{1}{p}\big(\Phi_{ij}(p,\lambda)-L_{ij}(\lambda)\big) \tag{30}$$

(напомним, что в силу (27) степени переменной p в матрицах $P_{ij}(p,\lambda)$ не превосходят единицы).

Покажем теперь, что регулятор (7) с матрицами из соотношений (30) действительно обеспечивает замкнутой системе (4), (7) равенство $\det W_2(p,\lambda)=d_1(p)d_2(p)$. Будем использовать запись регулятора (7) в виде (29). Тогда матрица (11) в данном случае примет следующий вид (ниже для того, чтобы уместить полиномиальные матрицы по ширине страницы, аргументы в блоках матриц опустим):

$$W_2(p,\lambda)=\begin{bmatrix} W & -BP_{12} & -BP_{11} & 0_{n\times\widetilde{n}_1}\\ 0_{n_1\times n} & pI_{n_1}-P_{22} & -P_{21} & 0_{n_1\times\widetilde{n}_1}\\ \widetilde{P}_{11}C & -BP_{12} & W-\widetilde{P}_{11}C-BP_{11} & -\widetilde{P}_{12}\\ \widetilde{P}_{21}C & 0_{\widetilde{n}_1\times n_1} & -\widetilde{P}_{21}C & pI_{\widetilde{n}_1}-\widetilde{P}_{22}\end{bmatrix}. \tag{31}$$

Определим матрицу

$$E=\begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times n_1} & 0_{n\times n} & 0_{n\times\widetilde{n}_1}\\ 0_{n_1\times n} & I_{n_1} & 0_{n_1\times n} & 0_{n_1\times\widetilde{n}_1}\\ -I_n & 0_{n\times n_1} & I_n & 0_{n\times\widetilde{n}_1}\\ 0_{\widetilde{n}_1\times n} & 0_{\widetilde{n}_1\times n_1} & 0_{\widetilde{n}_1\times n} & I_{\widetilde{n}_1}\end{bmatrix}.$$

Учитывая вид матриц (10), (28), непосредственным перемножением проверяем, что

$$\begin{aligned} EW_2(p,\lambda)E^{-1}&=\begin{bmatrix} W-BP_{11} & -BP_{12} & -BP_{11} & 0_{n\times\widetilde{n}_1}\\ -P_{21} & pI_{n_1}-P_{22} & -P_{21} & 0_{n\times\widetilde{n}_1}\\ 0_{n\times n} & 0_{n\times\widetilde{n}_1} & W-\widetilde{P}_{11}C & -\widetilde{P}_{12}\\ 0_{\widetilde{n}_1\times n} & 0_{\widetilde{n}_1\times n_1} & -\widetilde{P}_{21} & pI_{\widetilde{n}_1}-\widetilde{P}_{22}\end{bmatrix}=\\ &=\begin{bmatrix} W_1(p,\lambda) & \widehat{W}(p,\lambda)\\ 0_{(n+\widetilde{n}_1)\times(n+\widetilde{n}_1)} & \big(\widetilde{W}_1(p,\lambda)\big)'\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{32}$$

где

$$\widehat{W}(p,\lambda)=\begin{bmatrix}-B(\lambda)P_{11}(p,\lambda) & 0_{n\times\widetilde{n}_1}\\ -P_{21}(p,\lambda) & 0_{n\times\widetilde{n}_1}\end{bmatrix}.$$

Из соотношений (26), (32) и очевидного равенства $\det E=1$ следует, что $\det W_2(p,\lambda)=d_1(p)d_2(p)$. Теорема доказана. □

Таким образом, согласно доказательству теоремы 4.1, для построения регулятора (7), обеспечивающего замкнутой системе (4), (7) спектр, совпадающий с корнями полинома $d(p)=d_1(p)d_2(p)$ (а также и соответствующая кратность), достаточно решить две задачи построения регуляторов из класса регуляторов I, обеспечивающих замкнутым системам (4), (6) и (23), (24) спектр, определяемый корнями полиномов $d_1(p)$ и $d_2(p)$ соответственно. После этого регулятор (7) «собирается» в соответствии с формулами (29). Вопрос существования и построения регуляторов из класса регуляторов I обсуждался в разделе 3.

5. Принцип разделения

В статье [19] для систем нейтрального типа (4) при условии $\sum_{i=0}^{m}\|D_i\|<1$ и стабилизирующих регуляторов, не содержащих в обратной связи производную решения, доказан принцип разделения. Данный принцип утверждает, что задача синтеза динамического регулятора по выходу, стабилизирующего замкнутую систему, распадается на две независимые подзадачи: 1) стабилизация системы при наличии полной информации о состоянии (синтез регулятора с обратной связью по состоянию); 2) построение наблюдателя, дающего асимптотическую оценку текущего состояния (или его прогноза) по измеряемому выходу. При этом результирующий спектр замкнутой системы является объединением спектра, полученного в первой подзадаче, и спектра ошибки оценивания, что позволяет решать их последовательно и независимо. В приведенной ранее теореме 4.1 показано, что при проектировании регуляторов класса II ситуация значительно упрощается: задача синтеза динамического регулятора по выходу разбивается на две независимые подзадачи вида 1). При этом проектировать наблюдатель не требуется, хотя его можно синтезировать, как показано ниже, на основе части расчетов при построении регулятора вида (7). Тем не менее, принцип разделения в общепринятом варианте (например, как в [19]) допускает распространение также и на задачу назначения конечного спектра для системы (4). Его формулировка позволяет для назначения конечного спектра при помощи обратной связи, определяемой наблюдаемым выходом (5), использовать методы, отличные от изложенных в настоящей статье. Сформулируем его в общем случае и без предположения $\sum_{i=0}^{m}\|D_i\|<1$.

Начнем с задачи проектирования наблюдателя. Условия существования регулятора с обратной связью по состоянию из раздела 3 легко переносятся на задачу существования наблюдателя, описываемого системой нейтрального типа, которая содержит сугубо сосредоточенные запаздывания и имеет наперед заданный конечный спектр. Поясним это подробнее.

Предположим, что для заданного полинома $d_2(p)\in\mathbb{R}^0_\alpha[p]$ построен регулятор (24), обеспечивающий замкнутой системе (23), (24) конечный спектр, определяемый корнями полинома $d_2(p)$, т. е. $\det\widetilde{W}_1(p,\lambda)=d_2(p)$ (матрица $\widetilde{W}_1(p,\lambda)$ определяется формулой (25)). Считаем, что полином $d_2(p)$ имеет все корни с отрицательными действительными частями.

Используя матрицы регулятора (24), сформируем наблюдатель, определяемый следующей системой нейтрального типа:

$$\begin{aligned}\big(I_n-D(\lambda_h)\big)\dot\zeta_1(t)&=A(\lambda_h)\zeta_1(t)+\big(\widetilde{R}_{11}(\lambda_h)+p_D\widetilde{Q}_{11}(\lambda_h)\big)'C(\lambda_h)\zeta_1(t)+\\&+\big(\widetilde{R}_{21}(\lambda_h)+p_D\widetilde{Q}_{21}(\lambda_h)\big)'\zeta_2(t)-\big(\widetilde{R}_{11}(\lambda_h)+p_D\widetilde{Q}_{11}(\lambda_h)\big)'y(t)+B(\lambda_h)u(t),\\\dot\zeta_2(t)&=\big(\widetilde{R}_{12}(\lambda_h)+p_D\widetilde{Q}_{12}(\lambda_h)\big)'C(\lambda_h)\zeta_1(t)+\big(\widetilde{R}_{22}(\lambda_h)+p_D\widetilde{Q}_{22}(\lambda_h)\big)'\zeta_2(t)-\\&\quad-\big(\widetilde{R}_{12}(\lambda_h)+p_D\widetilde{Q}_{12}(\lambda_h)\big)'y(t),\quad t>t_0.\end{aligned}\tag{33}$$

Здесь $\zeta=\operatorname{col}[\zeta_1,\zeta_2]$ – решение системы (33), $t_0=\beta_0\widehat{h}$, $\beta_0=\max\big\{\deg\widetilde{R}_{1j}(\lambda),\deg\widetilde{Q}_{1j}(\lambda),\,j=1,2\big\}$, остальные обозначения описаны в доказательстве теоремы 4.1. Начальное условие для системы (33) имеет вид

$$\zeta(t)=\psi(t),\quad t\in[t_0-\beta_1\widehat{h},t_0],\tag{34}$$

где $\beta_1=\max\big\{\deg A(\lambda),\deg\widetilde{R}_{1i}(\lambda)C(\lambda),\deg\widetilde{Q}_{1i}(\lambda)C(\lambda),\deg\widetilde{R}_{2i}(\lambda),\deg\widetilde{Q}_{2i}(\lambda),\,i=1,2\big\}$, $\psi\in\widetilde{\mathbf{C}}^1\big([t_0-\beta_1\widehat{h},t_0],\mathbb{R}^{n+\tilde n_1}\big)$. Функция ψ в (34) может быть выбрана любой из указанного класса.

В качестве оценки решения x системы (4) возьмем векторную компоненту ζ_1 решения $\operatorname{col}[\zeta_1,\zeta_2]$ системы (33). Обозначим $\varepsilon=\zeta_1-x$. Легко видеть, что ошибка ε есть векторная компонента системы

$$\begin{aligned}\big(I_n-D(\lambda_h)\big)\dot\varepsilon(t)&=A(\lambda_h)\varepsilon(t)+\big(\widetilde{R}_{11}(\lambda_h)+p_D\widetilde{Q}_{11}(\lambda_h)\big)'C(\lambda_h)\varepsilon(t)+\\&\quad+\big(\widetilde{R}_{21}(\lambda_h)+p_D\widetilde{Q}_{21}(\lambda_h)\big)'\zeta_2(t),\\\dot\zeta_2(t)&=\big(\widetilde{R}_{12}(\lambda_h)+p_D\widetilde{Q}_{12}(\lambda_h)\big)'C(\lambda_h)\varepsilon(t)+\big(\widetilde{R}_{22}(\lambda_h)+p_D\widetilde{Q}_{22}(\lambda_h)\big)'\zeta_2(t),\quad t>t_0.\end{aligned}\tag{35}$$

Обозначим $W_3(p,e^{-ph})$ – характеристическая матрица наблюдателя (33) (системы (35)). Очевидно, что $W_3(p,\lambda) = \left(\widetilde{W}_1(p,\lambda)\right)'$.

Следствие 5.1. *Следующие два утверждения равносильны:*

1) *для системы* (23) *найдется* $k_3 \in \mathbb{N}$ *такое, что при любом заданном* $d_2(p) \in \mathbb{R}^0_\alpha[p]$, $\alpha \geqslant k_3$, *существует регулятор* (24), *обеспечивающий равенство* $\det \widetilde{W}_1(p,\lambda) = d_2(p)$;

2) *для системы* (4), (5) *найдется* $k_3 \in \mathbb{N}$ *такое, что при любом заданном* $d_2(p) \in \mathbb{R}^0_\alpha[p]$, $\alpha \geqslant k_3$, *существует наблюдатель* (33) *такой, что* $\det W_3(p,\lambda) = d_2(p)$.

Таким образом, если для системы (23) существует регулятор (24), обеспечивающий равенство $\widetilde{W}_1(p,\lambda) = d_2(p)$, то можно за счет выбора полинома $d_2(p)$ обеспечить системе (35) асимптотическую (а в силу конечности спектра и экспоненциальную) устойчивость и задать скорость стремления к нулю ошибки оценки ε. Необходимые и достаточные условия существования для любого полинома $d_2(p)$ наблюдателя (33) с условием $W_3(p,\lambda) = d_2(p)$ в силу следствия 5.1 следуют из раздела 3.

Предположим теперь, что имеются произвольные регулятор вида (6) и наблюдатель вида (33), для которых выполняются соотношения $\det W_1(p,\lambda) = d_1(p)$ и $\det \widetilde{W}_3(p,\lambda) = d_2(p)$ соответственно.

Перепишем регулятор (6) в виде

$$\begin{aligned} u(t) &= \big(R_{11}(\lambda_h) + p_D Q_{11}(\lambda_h)\big)\zeta_1(t) + \big(R_{12}(\lambda_h) + p_D Q_{12}(\lambda_h)\big)z_1(t), \\ \dot{z}_1(t) &= \big(R_{21}(\lambda_h) + p_D Q_{21}(\lambda_h)\big)\zeta_1(t) + \big(R_{22}(\lambda_h) + p_D Q_{22}(\lambda_h)\big)z_1(t). \end{aligned} \tag{36}$$

Связка (36), (33) называется регулятором на основе наблюдателя. Обобщим принцип разделения из работы [19] на случай системы (4) в виде следующего утверждения.

Следствие 5.2. *Система* (4), *замкнутая регулятором на основе наблюдателя* (36), (33), *имеет характеристический полином, равный* $d_1(p)d_2(p)$.

Для доказательства достаточно выписать характеристическую матрицу системы (4), (36), (33) и для характеристической матрицы такой расширенной системы провести те же рассуждения, что и для матрицы (31) из доказательства достаточности условий теоремы 4.1.

Замечание 5.3. *Утверждение следствия* 5.2 *не изменится, если полиномы* $d_1(p), d_2(p)$ *заменить на квазиполиномы* $d_1(p,e^{-ph}) = \sum_{i=0}^{n_1} p^i \upsilon_{1i}(e^{-ph})$, $d_2(p,e^{-ph}) = \sum_{i=0}^{\widetilde{n}_1} p^i \upsilon_{2i}(e^{-ph})$ ($\upsilon_{ij}(\lambda)$ – *полиномы, причем* $\upsilon_{1n_1}(0) = 1$, $\upsilon_{2\widetilde{n}_1}(0) = 1$) *с корнями, также имеющими отрицательные действительные части. Однако в этом случае следует иметь ввиду, что если* $\upsilon_{1n_1}(\lambda)$ *или* $\upsilon_{2\widetilde{n}_1}(\lambda)$ *не равны тождественно единице, то из асимптотической устойчивости полученной замкнутой системы нейтрального типа экспоненциальная устойчивость в общем случае не следует.*

6. Заключение

Для линейных автономных систем нейтрального типа предложено решение задачи назначения конечного спектра на основе неполных измерений, определяемых наблюдаемым выходным сигналом. При этом разработанные конструкции регуляторов не содержат распределенного запаздывания, что важно при их практической реализации. Разработанный метод синтеза основан на решении двух однотипных задач построения регуляторов с обратной связью по состоянию. Попутно в рамках исследуемой задачи сформулирован принцип разделения, позволяющий строить регуляторы на основе наблюдателей. Это позволяет привлекать для решения задач синтеза регуляторов с обратной связью по выходу другие известные в литературе методы конструирования регуляторов с обратной связью по состоянию и наблюдателей.

Регуляторы (6), (7) и наблюдатель (33) содержат операции дифференцирования переменных x, y исходной (разомкнутой) системы. Хорошо известно, что операция дифференцирования непрерывных функций, имеющих кусочно-непрерывную производную, является чувствительной к ошибкам. С другой стороны, можно показать [4], что оператор дифференцирования в регуляторах (6), (7) и наблюдателе (33) для класса систем нейтрального типа является структурно неустранимым. Поэтому актуальным остается вопрос разработки эффективной аппроксимации оператора дифференцирования в (6), (7) и (33) в рамках практической реализации регуляторов и наблюдателей.

Литература

1. *Wonham W. M.* Linear Multivariable Control. New York: Springer, 1974. https://doi.org/10.1007/978-3-662-22673-5

2. *Марченко В. М.* Управление системами с последействием в шкалах линейных регуляторов по типу обратной связи // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 1003–1017. https://doi.org/10.1134/s0012266111070111

3. *Марченко В. М., Якименко А. А.* О модальном управлении многовходных систем с запаздывающим аргументом нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 11. С. 1534–1543. https://doi.org/10.1134/S0012266108110116

4. *Метельский А. В., Хартовский В. Е.* Критерии модальной управляемости линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 11. С. 1506–1521. https://doi.org/10.1134/S0012266116110070

5. *Хартовский В. Е.* Модальная управляемость линейных систем нейтрального типа в классах дифференциально-разностных регуляторов // Автоматика и телемеханика. 2017. № 11. С. 3–19. https://doi.org/10.1134/S0005117917110017

6. *Метельский А. В.* Модальная управляемость дифференциальной системы с запаздыванием по неполному выходу // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 11. С. 1508–1517. https://doi.org/10.1134/S0012266118110095

7. *Manitius A. Z., Olbrot A. W.* Finite spectrum assignment problem for systems with delays // IEEE Transactions on Automatic Control. 1979. Vol. 24, N 4. P. 541–552. https://doi.org/10.1109/TAC.1979.1102124

8. *Watanabe K.* Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays // IEEE Trans. Autom. Control. 1986. Vol. AC–31, N 6. P. 543–550. https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104336

9. *Wang Q. G., Lee T. H., Tan K. K.* Finite Spectrum Assignment Controllers for Time Delay Systems. London: Springer, 1995.

10. *Bhat K., Koivo H.* Model characterizations of controllability and observability in time delay systems // IEEE Trans. Automatic Control. 1976. Vol. 21, N 2, P. 292–293.

11. *Pandolfi L.* Stabilization of neutral functional differential equations // J. Optim. Theory Appl. 1976. Vol. 20, N 2. P. 191–204. https://doi.org/10.1007/BF01767451

12. *Hao Z., Hu G.-D., Li H.* Controller based on spectral decomposition for neutral delay systems // Acta Automat. Sinica. 2010. Vol. 36, N 4. P. 615–619.

13. *Хартовский В. Е.* Финитная стабилизация и назначение конечного спектра единым регулятором по неполным измерениям для линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 5. С. 686–706. https://doi.org/ 10.31857/S0374064124050093

14. *Хартовский В. Е.* Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей. Гродно: ГрГУ, 2022. 500 с.

15. *Mirkin L.* On the approximation of distributed-delay control laws // Systems & Control Letters. 2004. Vol. 51, N 5. P. 331–342. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2003.09.010

16. *Mondié, S., Michiels W.* Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. Vol. 48, N 12. P. 2207–2212. https://doi.org/10.1109/TAC.2003.820147

17. *Lu, H., Di Loreto M., Eberard D., Simon J. P.* Approximation of distributed delays // Systems & Control Letters. 2014. Vol. 66. P. 16–21. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2014.01.001

18. *Хартовский В. Е.* Финитная стабилизация на основе неполных измерений не полностью управляемых систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2025. Т. 61, № 10. С. 1416–1440. https://doi.org/10.1134/S0012266125100118

19. *Hu G.-D.* An observer-based stabilizing controller for linear neutral delay systems // Siberian Mathematical Journal. 2022. Vol. 63, N 4. P. 789–800. https://doi.org/10.1134/S003744662204019X

References

1. Wonham W. M. *Linear Multivariable Control*. New York, Springer, 1974. https://doi.org/10.1007/978-3-662-22673-5

2. Marchenko V. M. Control of systems with aftereffect in scales of linear controllers with respect to the type of feedback. *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 7, pp. 1014–1028. https://doi.org/10.1134/s0012266111070111

3. Marchenko V. M., Yakimenko A. A. Modal control of multi-input systems of neutral type with retarded argument. *Differential Equations*, 2008, vol. 44, no. 11, pp. 1595–1604. https://doi.org/10.1134/S0012266108110116

4. Metel'skii A. V., Khartovskii V. E. Criteria for modal controllability of linear systems of neutral type. *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 11, pp. 1506–1521 (in Russian). https://doi.org/10.1134/S0012266116110070

5. Khartovskii V. E. Modal controllability of linear systems of neutral type in classes of difference-differential controllers. *Automation and Remote Control*, 2017, no. 11, pp. 3–19 (in Russian). https://doi.org/10.1134/S0005117917110017

6. Metel'skii A. V. Modal controllability of a differential system with delay with respect to incomplete output. *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 11, pp. 1508–1517 (in Russian). https://doi.org/10.1134/S0012266118110095

7. Manitius A. Z., Olbrot A. W. Finite spectrum assignment problem for systems with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, vol. 24, no. 4, pp. 541–552. https://doi.org/10.1109/TAC.1979.1102124

8. Watanabe K. Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1986, vol. AC-31, no. 6, pp. 543–550. https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104336

9. Wang Q. G., Lee T. H., Tan K. K. *Finite Spectrum Assignment Controllers for Time Delay Systems*. London, Springer, 1995.

10. Bhat K., Koivo H. Model characterizations of controllability and observability in time delay systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1976, vol. 21, no. 2, pp. 292–293.

11. Pandolfi L. Stabilization of neutral functional differential equations. *J. Optim. Theory Appl.*, 1976, vol. 20, no. 2, pp. 191–204. https://doi.org/10.1007/BF01767451

12. Hao Z., Hu G.-D., Li H. Controller based on spectral decomposition for neutral delay systems. *Acta Automat. Sinica*, 2010, vol. 36, no. 4, pp. 615–619.

13. Khartovskii V. E. Finite stabilization and finite spectrum assignment by a single controller with incomplete measurements for linear systems of neutral type. *Differential Equations*, 2024, vol. 60, no. 5, pp. 686–706 (in Russian). https://doi.org/10.1134/S0012266124050093

14. Khartovskii V. E. *Control of Linear Systems of Neutral Type: Qualitative Analysis and Implementation of Feedback*. Grodno, GrSU, 2022. 500 p. (in Russian).

15. Mirkin L. On the approximation of distributed-delay control laws. *Systems & Control Letters*, 2004, vol. 51, no. 5, pp. 331–342. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2003.09.010

16. Mondié S., Michiels W. Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, vol. 48, no. 12, pp. 2207–2212. https://doi.org/10.1109/TAC.2003.820147

17. Lu H., Di Loreto M., Eberard D., Simon J. P. Approximation of distributed delays. *Systems & Control Letters*, 2014, vol. 66, pp. 16–21. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2014.01.001

18. Khartovskii V. E. Finite stabilization based on incomplete measurements for not fully controllable systems of neutral type. *Differential Equations*, 2025, vol. 61, no. 10, pp. 1624–1647. https://doi.org/10.1134/S0012266125100118

19. Hu G.-D. An observer-based stabilizing controller for linear neutral delay systems. *Siberian Mathematical Journal*, 2022, vol. 63, no. 4, pp. 789–800. https://doi.org/10.1134/S003744662204019X

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 167–171

УДК 517.925.7 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-167–171
EDN: KFEKAM

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ТРЕХМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КУБИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В. В. Цегельник

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь
e-mail: tsegvv@bsuir.by

Поступила: 20.08.2026 **Исправлена: 08.09.2026** **Принята: 14.10.2026**

Ключевые слова: первый интеграл, обобщенная система Рабиновича–Фабриканта, тест Пенлеве, хаотическое поведение

Аннотация. Исследованы аналитические свойства решений обобщенной системы Рабиновича–Фабриканта, связанной с моделями нелинейной физики и обладающей определенными качественными свойствами при значениях входящих в нее параметров.

ANALYTICAL PROPERTIES OF SOLUTIONS OF THREE-DIMENSIONAL DYNAMICAL SYSTEM WITH CUBIC NONLINEARITIES

V. V. Tsegel'nik

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus
e-mail: tsegvv@bsuir.by

Received: 20.08.2026 **Revised: 08.09.2026** **Accepted: 14.10.2026**

Keywords: first integral, generalized Rabinovich–Fabrikant system, Painlevé test, chaotic behavior

Abstract. The analytical properties of solutions of the generalized Rabinovich–Fabrikant system related to models of nonlinear physics and possessing certain qualitative properties at the values of its parameters are investigated.

1. Введение

Система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \big[p(x^2+z)+q(-y^2+3z)-1\big]y+ax,\\ \dot{y} &= \big[p(-x^2+3z)+q(y^2+z)+1\big]x+ay,\\ \dot{z} &= -2z\big[b+(p+q)xy\big] \end{aligned} \tag{1}$$

(обобщенная система Рабиновича–Фабриканта [1] с неизвестными функциями x, y, z независимой переменной t; a, b, p, q – произвольные фиксированные параметры) моделирует процесс нелинейного взаимодействия волн в плазме. При стандартных значениях $a = 0,87$, $b = 1,1$ в модели (1) при $p = 1$, $q = 0$, известной как модель Рабиновича–Фабриканта [2], наблюдается детерминированный хаос, а ее притягивающее множество представляет собой странный аттрактор [3].

Новые качественные свойства решений системы (1) в случае $p = 1$, $q = 0$, т. е. системы Рабиновича–Фабриканта

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y(x^2+z-1)+ax,\\ \dot{y} &= x(-x^2+3z+1)+ay,\\ \dot{z} &= -2z(b+xy), \end{aligned} \tag{2}$$

получены в [4] с учетом новых подходов к исследованию динамических систем, изложенных в [5]. В частности, указано существование в (2) скрытых хаотических аттракторов при определенных значениях a и b.

На основании известной гипотезы [6] о несовместимости выполнения для системы свойства Пенлеве с хаотичностью ее поведения, актуальным является исследование аналитических свойств решений систем (1), (2). Под свойством Пенлеве (в предположении, что независимая переменная t является комплексной) будем понимать отсутствие у общего решения системы подвижных критических особых точек [7; 8], т. е. возможность наличия только подвижных полюсов.

2. Анализ решений системы (1)

Одним из алгоритмов, обеспечивающих проверку выполнения условий, необходимых для наличия у решений дифференциального уравнения (системы) свойства Пенлеве, является формальный тест Пенлеве [9; 10] (алгоритм Ковалевской [11]). Применительно к системам дифференциальных уравнений, представленным в полиномиальном виде

$$x_i' Q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \tau) = P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \tau), \qquad i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

где $\tau = t - t_0$, t_0 – произвольная точка области в $G \subset \mathbb{C}$, а P_i, Q_i – полиномы от x_1, $x_2, \ldots, x_n$ с аналитическими по τ коэффициентами; $' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$, тест представляет собой последовательное выполнение следующих шагов [12].

1. Определяются наименьшие возможные степени переменной в формальных разложениях i-х компонент решения системы уравнений (3) вида

$$x_i = \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} \tau^{j-p_i}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4}$$

С этой целью и для определения пар $(\mathbf{c_0}, \mathbf{p})$, $\mathbf{c_0} = (c_{10}, c_{20}, \ldots, c_{n0})$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, в систему (3) подставляются выражения (4). Если не все $c_{i0} = 0$ и полученные $p_i \in \mathbb{N}$, то первый шаг пройден и анализ системы может быть продолжен. Отметим, что случай целого отрицательного p_i заменой $x_i \to x_i^{-1}$, а случай $p_i = 0$ заменой $x_i = c_{i0} + x_i^{-1}$ сводится к предыдущему рассмотрением преобразованной системы (3).

2. Второй шаг теста связан с отысканием индексов Фукса для каждой пары значений $(\mathbf{c_0}, \mathbf{p})$. Индексами Фукса или резонансами называются номера j_r коэффициентов c_{ij} в разложениях i-х компонент решения (4), для которых коэффициенты c_{ij_r} содержат произвольный параметр.

Индексы Фукса определяются подстановкой выражений $x_i \sim c_{i0}\tau^{-p_i} + \beta_i \tau^{r-p_i}$, $i = \overline{1,n}$, в ведущие члены уравнений системы (3). Ведущими (доминантными) членами i-го уравнения системы (3) называются мономы системы (3), которые в результате подстановки (4) в (3) определяют в i-м уравнении наименьшие степени τ.

Приравнивая выражения, линейные относительно β_k ($k = \overline{1,n}$), нулю, получаем систему линейных алгебраических уравнений. Определитель матрицы коэффициентов этой системы, приравненный к нулю, определяет уравнение резонансов $Q(r) = 0$. В случае, когда для каждой пары $(\mathbf{c_0}, \mathbf{p})$ все корни уравнения резонансов являются целыми, а отличные от -1 и, возможно, от нуля, – положительными числами, второй шаг формального теста считается пройденным.

3. Если все коэффициенты в разложении (4) могут быть определены и число произвольных среди них коэффициентов равно $n-1$, то считается, что система дифференциальных уравнений проходит третий шаг, а вместе с ним проходит и весь формальный тест Пенлеве.

Применение к системе (1) формального теста Пенлеве приводит к следующему заключению.

Теорема 2.1. *Система* (1) *в случае* $q \neq 0$ *не проходит формальный тест Пенлеве и, следовательно, не обладает свойством Пенлеве.*

Теорема 2.2. *Система* (1) *при* $a = -b$ *имеет первый интеграл*

$$x^2 + y^2 + 4z = Ce^{2at}, \tag{5}$$

где C *– произвольная постоянная.*

Для доказательства достаточно исключить из (5) константу C, используя уравнения системы (1).

Следствие 2.3. *Система* (1) *в случае* $a = b = 0$ *имеет автономный интеграл*

$$x^2 + y^2 + 4z = C.$$

Теорема 2.4. *Система* (1) *при* $a = b = 0$ *не обладает хаотическим поведением.*

В силу следствия систему (1) можно свести к двумерной автономной системе. Но согласно [13] решения автономной системы с двумерным фазовым пространством не могут быть хаотическими.

Теорема 2.5. *Система* (1) *при* $p = -q$ *имеет* 2 *первых интеграла*

$$x^2 + y^2 = He^{2at}, \quad z = Ke^{-2bt}, \tag{6}$$

где H, K *– произвольные постоянные.*

Для доказательства достаточно в (6) исключить постоянную H с учетом первых двух уравнений системы (1) и проинтегрировать третье уравнение с учетом $p = -q$.

Замечание 2.6. *Система* (1) *обладает свойством симметрии относительно замены переменных* $x \to -x$, $y \to -y$, $z \to z$ [1].

3. Анализ решений системы (2)

Теорема 3.1. *Система* (2) *ни при каких значениях параметров* a, b *не проходит формальный тест Пенлеве.*

Теорема 3.2. *Система* (2) *при* $a = 0$ *имеет решения вида*

$$x = \frac{x_{-1}}{\tau^{1/2}} + x_1\tau^{1/2} + x_3\tau^{3/2} + \cdots, \tag{7}$$

$$y = \frac{ix_{-1}}{\tau^{1/2}} + y_1\tau^{1/2} + y_3\tau^{3/2} + \cdots, \tag{8}$$

$$z = z_0\tau + z_1\tau^2 + \cdots, \tag{9}$$

где $\tau = t - t_0$, $x_{-1}^2 = i/2$, $i^2 = -1$, t_0, z_0, x_1 (y_1) *– произвольные постоянные, причем* $\frac{3}{2}x_1 - \frac{iy_1}{2} = -ix_{-1}$. *Ряды* (7)–(9) *сходятся в области* $0 < |\tau| < \rho$, $\rho > 0$.

В том, что разложения (7)–(9) зависят от трех произвольных постоянных, легко убедиться непосредственной подстановкой рядов в уравнения системы (2). Для доказательства сходимости разложений (7)–(9) достаточно ввести преобразования

$$\tau = s^2, \quad x = \frac{1}{s}\big(x_{-1} + u_1(s)\big), \quad y = \frac{1}{s}\big(ix_{-1} + u_2(s)\big), \quad z = s^2\big(z_0 + u_3(s)\big),$$

переводящие систему (2) в систему Брио и Буке, и воспользоваться следующим результатом (см. [14, с. 272, теорема A12]).

Если система Брио и Буке

$$su_j' = f_j(s, u_1, u_2, \ldots, u_n), \qquad ' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s},$$

с аналитическими в некоторой окрестности точки $s = u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 0$ функциями f_j, $j = \overline{1,n}$, с условиями $f_j(0,0,\ldots,0) = 0$ допускает формальное решение

$$u_j(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk}s^k, \quad c_{jk} \in \mathbb{C}, \tag{10}$$

то разложение (10) сходится в области $0 < |s| < \rho_1$, $\rho_1 > 0$.

Замечание 3.3. *Система* (2) *в случае* $a = b = 0$ *сохраняет свой вид при следующих преобразованиях:*

а) $x(t) \to -x(-t)$, $y(t) \to y(-t)$, $z(t) \to z(-t)$,

б) $x(t) \to x(-t)$, $y(t) \to -y(-t)$, $z(t) \to z(-t)$.

4. Заключение

В работе исследованы некоторые аналитические свойства решений обобщенной системы дифференциальных уравнений Рабиновича–Фабриканта. Показано, что решения обобщенной системы Рабиновича–Фабриканта не удовлетворяют тесту на свойство Пенлеве. Указаны значения параметров, при которых как обобщенная система Рабиновича–Фабриканта, так и система Рабиновича–Фабриканта не обладают хаотическим поведением. Установлено, что решения системы Рабиновича–Фабриканта при значении параметра $a = 0$ удовлетворяют тесту на слабое свойство Пенлеве.

Литература

1. *Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В.* Обобщенная система Рабиновича–Фабриканта: уравнения и динамика // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 1. С. 7–29.

2. *Рабинович М. И., Фабрикант А. Л.* Стохастическая автомодуляция волн в неравновесных средах // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1979. Т. 77, № 2. С. 617–629.

3. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006.

4. *Danca M. F., Feskan M., Kuznetsov N., Chen G.* Looking more closely to the Rabinovich–Fabrikant system // Int. J. Bifurc. Chaos. 2016. Vol. 26, N 2. Art. 1650038.

5. *Леонов Г. А., Кузнецов Н. В.* Скрытые колебания в динамических системах: шестнадцатая проблема Гильберта, гипотезы Айзермана и Кальмана, скрытые аттракторы в контурах Чуа // Современная математика. Фундаментальные направления. 2012. Т. 45. С. 105–121.

6. *Гориэли А.* Интегрируемость и сингулярность. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006.

7. *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ГНТИУ, 1939.

8. *Громак В. И., Лукашевич Н. А.* Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Минск: Университетское, 1990.

9. *Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H.* A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. II // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21. P. 715–721.

10. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М.: Мир, 1987.

11. *Ковалевская С. В.* Научные работы. М.: АН СССР, 1948.

12. *Грищук Е. В., Громак В. И.* К теории нелинейных систем дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2010. № 3. С. 25–30.

13. *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.

14. *Gromak V. I., Laine I., Shimomura S.* Painlevé differential equations in the complex plane. Berlin: de Gruyter, 2002.

References

1. Kuznetsov S. P., Turukina L. V. Generalized Rabinovich–Fabrikant system: equations and its dynamics. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics*, 2022, vol. 30, no. 1, pp. 7–29 (in Russian).

2. Rabinovich M. I., Fabrikant A. L. Stochastic self-samomudulation of waves in nonequilibrium media. *Sov. Phys. JETP*, 1979, vol. 77, no. 2, pp. 617–629 (in Russian).

3. Kuznetsov S. P. *Dynamical Chaos*. Moscow, Fizmatlit, 2006 (in Russian).

4. Danca M. F., Feskan M., Kuznetsov N., Chen G. Looking more closely to the Rabinovich–Fabrikant system. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 2016, vol. 26, no. 2, art. 1650038.

5. Leonov G. A., Kuznetsov N. V. Hidden oscillations in dynamical systems. 16 Hilbert's problem, Aizerman's and Kalman's conjectures, hidden attractors in Chua's circuits. *Modern Mathematics. Fundamental Direction*, 2012, vol. 45, pp. 105–121 (in Russian).

6. Goriely A. *Integrability and Singularity*. Moscow, Izhevsk, Institute for Computer Research, 2006 (in Russian).

7. Ince E. L. *Ordinary differential equations*. Kharkov, GNTIU, 1939 (in Russian).

8. Gromak V. I., Lukashevich N. A. *The Analytic Solutions of the Painlevé Equations*. Minsk, Universitetskoye, 1990 (in Russian).

9. Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. II. *J. Math. Phys.*, 1980, vol. 21, pp. 715–721.

10. Ablowitz M. J., Segur H. *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. Moscow, Mir, 1987 (in Russian).

11. Kowalevskaya S. V. *Scientific Works*. Moscow, Academiya nauk SSSR, 1948 (in Russian).

12. Gritsuk E. V., Gromak V. I. On the theory of nonlinear systems of differential equations with the Painlevé property. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2010, no. 3, pp. 25–30 (in Russian).

13. Moon F. C. *Chaotic Vibrations*. Moscow, Mir, 1990 (in Russian).

14. Gromak V. I., Laine I., Shimomura S. *Painlevé Differential Equations in the Complex Plane*. Berlin, de Gruyter, 2002.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 172–186

УДК 517.977 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-172–186
EDN: MFZAZM

К ПОТОЧЕЧНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

О. Б. Цехан

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
e-mail: tsekhan@grsu.by

Поступила: 15.09.2026 **Исправлена:** 01.10.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: сингулярно возмущенные системы, системы с запаздыванием, поточечная управляемость, робастная управляемость, декомпозиция, малый параметр

Аннотация. Для линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием в состоянии вводятся, сопоставляются и анализируются различные понятия поточечной управляемости, различающиеся зависимостью финального момента времени и управления от малого параметра, ограниченностью управления и точностью попадания в заданные точки. Установлена иерархия введенных понятий. Выявлена структура оператора поточечной управляемости, которая обосновывает связь между робастной и равномерной по малому параметру μ управляемостью. Доказаны достаточные декомпозиционные условия робастной поточечной управляемости, выраженные через матрицы управляемости медленной и быстрой подсистем. Теоретические результаты проиллюстрированы примерами.

ON POINTWISE CONTROLLABILITY OF A LINEAR TIME-INVARIANT SINGULARLY PERTURBED SYSTEM WITH DELAY

O. B. Tsekhan

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus
e-mail: tsekhan@grsu.by

Received: 15.09.2026 **Revised:** 01.10.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: singularly perturbed systems, time-delay systems, pointwise controllability, robust controllability, defining equations, decomposition, small parameter

Abstract. Different notions of pointwise controllability are introduced, compared and analyzed for a linear time-invariant singularly perturbed system with state delay. These notions differ in the dependence of the terminal time and control on the small parameter, the boundedness of the control, and the accuracy of hitting prescribed points. A hierarchy of the introduced notions is established. The structure of the pointwise controllability operator is revealed, which justifies the relationship between robust and μ-uniform controllability. Sufficient decomposition conditions for robust controllability, expressed in terms of the controllability matrices of the slow and fast subsystems, are proved. The theoretical results are illustrated by examples.

1. Введение

Управляемость относится к важнейшим структурным свойствам динамических систем и выражает возможность регулирования динамики системы. Для систем с запаздыванием понятия управляемости оказываются более разнообразными, чем для систем без запаздывания, в связи с бесконечномерностью пространства состояний. Например, наряду с относительной (евклидовой) управляемостью [1; 2], обеспечивающей перевод траектории системы в заданную точку евклидова пространства, вводится поточечная управляемость [3], означающая способность управления обеспечить прохождение траектории системы через любой заданный набор точек фазового пространства в заданные моменты времени, отсчитываемые от некоторого конечного момента t_1. Эти два типа управляемости характеризуют управляемость по конечномерной проекции фазового состояния систем с запаздыванием. Для стационарной системы с одним запаздыванием условия поточечной управляемости в терминах решений определяющих уравнений получены в [3]. В работе [4] этот результат был распространен на системы с произвольным числом запаздываний. Там же получен

критерий поточечной управляемости в терминах классической матрицы управляемости Калмана для некоторой специальной параметризованной системы без запаздывания, что позволило свести бесконечномерную задачу управляемости к проверке конечномерного критерия. В работе [5] установлена эквивалентность поточечной управляемости и слабой модальной управляемости, что связало задачу управления траекторией с проблемой размещения спектра и создало основу для перехода к исследованию бесконечномерной управляемости систем с запаздыванием.

Системы дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных являются математическими моделями, отражающими наличие нескольких взаимосвязанных подпроцессов с существенно различными временными масштабами, и относятся к классу сингулярно возмущенных систем (СВС) [6–10]. В связи с наличием в динамике СВС разнотемповых движений, наряду с управляемостью по всем переменным, возникают задачи управляемости отдельно по медленным и быстрым переменным. Кроме того, при исследовании СВС стремятся к получению условий, гарантирующих наличие у системы тех или иных свойств для всех достаточно малых значений параметра сингулярности, что соответствует стандартному пониманию робастности по отношению к параметрам системы [11]. Отметим, что проблема робастности и исследования свойств в условиях параметрической неопределенности активно развивалось в работах И. В. Гайшуна и его школы [12; 13].

В работах исследователей школы Р. Ф. Габасова, Ф. М. Кирилловой предложен и развивается аппарат определяющих уравнений, который позволяет выразить ранговые условия управляемости в терминах решений рекуррентных матричных уравнений, строящихся непосредственно по параметрам исходной системы. Впервые такой подход предложен в [1] для стационарных систем с запаздыванием и распространен далее [2; 14] для исследования управляемости и наблюдаемости других систем, в том числе с запаздыванием и сингулярно возмущенных систем. В работе [15] методом определяющих уравнений получены необходимые и достаточные условия поточечной управляемости и поточечной наблюдаемости линейных стационарных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием при фиксированном значении малого параметра μ, а также достаточные условия, справедливые для всех достаточно малых μ. Однако систематический анализ различных понятий поточечной управляемости параметрического семейства сингулярно возмущенных систем ранее не проводился.

Настоящая работа развивает результаты [15]. Вводятся, сопоставляются и анализируются различные понятия поточечной управляемости параметрического семейства систем, учитывающие зависимость конечного момента времени и управления от μ, ограниченность управления, точность прохождения траектории через заданные точки. Установлена иерархия введенных понятий.

Развиваемый в настоящей работе подход к анализу поточечной управляемости дополняет исследования автора по построению асимптотических аппроксимаций решений сингулярно возмущенных систем с запаздыванием методом расщепляющего преобразования [16–18] и используется для получения независимых от малого параметра и справедливых для всех достаточно малых его значений условий поточечной управляемости как по всей совокупности переменных, так и отдельно по медленным переменным в терминах управляемости двух систем меньшей размерности, чем исходная. Теоретические результаты проиллюстрированы примерами.

2. Постановка задачи. Понятия поточечной управляемости

2.1. Система управления. Задачи

Рассматривается линейная стационарная сингулярно возмущенная система с запаздыванием в состоянии (ЛССВСЗ)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{10}x(t) + A_{11}x(t-h) + A_{20}y(t) + A_{21}y(t-h) + B_1u(t), \\ \mu\dot{y}(t) &= A_{30}x(t) + A_{31}x(t-h) + A_4y(t) + B_2u(t), \quad t \geqslant 0, \end{aligned} \tag{1}$$

с нулевыми начальными условиями

$$x(\theta) = 0, \quad y(\theta) = 0, \quad \theta \in [-h, 0), \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0. \tag{2}$$

Здесь $h = \text{const} > 0$ – запаздывание; μ – малый параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$; $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \in \mathbb{R}^{n_2}$, $u \in \mathbb{R}^r$; A_{ij} $(i = 1,2,3,\ j = 0,1)$, A_4, B_1, B_2 – постоянные матрицы подходящих размеров; $u(t)$ – кусочно-непрерывная на $T = [0, t_1], t_1 > 0$, r-вектор-функция управления. Через $PC([0,t_1], \mathbb{R}^r)$ обозначим пространство таких функций, снабженное супремум-нормой $\|u\|_{PC} = \sup_{t\in[0,t_1]} \|u(t)\|$.

Для целей исследования нам понадобятся другие представления ЛССВСЗ (1). Определим оператор запаздывания e^{-ph}, где p – оператор дифференцирования, и введем матричные операторы

$$\mathbf{A}_1(e^{-ph}) = A_{10} + A_{11}e^{-ph}, \quad \mathbf{A}_2(e^{-ph}) = A_{20} + A_{21}e^{-ph}, \quad \mathbf{A}_3(e^{-ph}) = A_{30} + A_{31}e^{-ph}. \tag{3}$$

Тогда систему (1) можно записать в компактной форме:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}_1(e^{-ph})x(t) + \mathbf{A}_2(e^{-ph})y(t) + B_1u(t), \\ \mu\dot{y}(t) &= \mathbf{A}_3(e^{-ph})x(t) + A_4y(t) + B_2u(t),\ t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4}$$

При фиксированном $\mu > 0$ наряду с (3) введем матричные операторы

$$\mathbf{A}(\mu, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1(e^{-ph}) & \mathbf{A}_2(e^{-ph}) \\ \mu^{-1}\mathbf{A}_3(e^{-ph}) & \mu^{-1}A_4 \end{pmatrix}, \quad B(\mu) = \begin{pmatrix} B_1 \\ \mu^{-1}B_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $n = n_1 + n_2$, $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $M(\mu) = \text{diag}\{E_{n_1},\ \mu^{-1}E_{n_2}\}$. Введем матрицы $A^0(\mu) = M(\mu)A^0, A^1(\mu) = M(\mu)A^1, B(\mu) = M(\mu)B,$ где

$$A^0 = \begin{pmatrix} A_{10} & A_{20} \\ A_{30} & A_4 \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{31} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда задачу (1), (2) можно записать в виде

$$\begin{gathered} \dot{z}(t) = A^0(\mu)z(t) + A^1(\mu)z(t-h) + B(\mu)u(t), \\ z(\theta) = 0, \quad \theta \in [-h, 0), \quad z(0) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Если малый параметр μ принимает всевозможные значения из интервала $(0, \mu^0]$, то получаем μ-*параметрическое семейство систем управления* (5), которое однозначно определяется матрицами A^0, A^1, B и границей μ^0 интервала значений малого параметра. Обозначим семейство через $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^0}$.

С исходной ЛССВСЗ (1) связаны вырожденная (медленная) подсистема и система пограничного слоя (быстрая подсистема). Определим их.

Предположим, что матрица A_4 обратима. Положим $u(t) = 0, t < 0$. Тогда для ЛССВСЗ (1) с нулевыми начальными условиями (2) вырожденная подсистема имеет вид

$$\begin{gathered} \dot{x}_s(t) = A_{s0}x_s(t) + A_{s1}x_s(t-h) + B_{s0}u(t) + B_{s1}u(t-h), t \geqslant 0, \\ x_s(\theta) = 0, \quad \theta \in [-h, 0], \end{gathered} \tag{6}$$

где $A_{si} = A_{1i} - A_{20}A_4^{-1}A_{3i}, L_i = A_4^{-1}A_{3i}, i = 0,1, B_{s0} = B_1 - A_{20}A_4^{-1}B_2, B_{s1} = -A_{21}A_4^{-1}B_2$.

Система пограничного слоя (быстрая подсистема) в растянутой шкале времени $\tau = t/\mu$ имеет вид

$$\frac{d}{d\tau}y_f(\tau) = A_4y_f(\tau) + B_2u(\mu\tau), \quad y_f(0) = 0, \quad \tau \geqslant 0. \tag{7}$$

Медленная подсистема (6) является n_1-мерной системой с запаздыванием в состоянии и управлении; быстрая подсистема (7) является n_2-мерной системой без запаздывания.

Задачи. Для линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием в состоянии (1) ввести и установить связи между различными понятиями поточечной управляемости, различающиеся тем, зависит ли финальный момент времени t_1 от μ, ограничена ли норма управления, зависит ли само управление от μ и является ли попадание управляемой траектории в заданные точки точным или приближенным; вывести декомпозиционные условия, сводящие проверку управляемости всей системы к проверке управляемости ее медленной (6) и быстрой (7) подсистем.

2.2. Понятия поточечной управляемости

Пусть γ – фиксированное натуральное число. Для системы (1) при фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ следуя работам [4; 15; 19] введем определение.

Определение 2.1 [15]. При фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ ЛССВСЗ (1) называется μ-*поточечно* $\{x, y\}$-*управляемой*, если для любого конечного набора точек $Z = \{(x_j \in \mathbb{R}^{n_1}, y_j \in \mathbb{R}^{n_2}),\ j = \overline{0,\gamma}\}$ и любых неотрицательных чисел $\beta_j : 0 = \beta_0 < \cdots < \beta_\gamma$ существуют $t_1 \in [\beta_\gamma, +\infty)$ и кусочно-непрерывное управление $u_\mu(t;Z)$, $t \geqslant 0$, такие, что соответствующее решение $(x(t;\mu,u_\mu(t;Z)), y(t;\mu,u_\mu(t;Z)))$, $t \geqslant 0$, системы (1) с нулевыми начальными условиями (2) удовлетворяет равенствам

$$\begin{pmatrix} x(t_1 - \beta_j;\mu,u_\mu) \\ y(t_1 - \beta_j;\mu,u_\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}, \quad j = \overline{0,\gamma}. \tag{8}$$

Продемонстрируем зависимость μ-поточечной $\{x, y\}$-управляемости от значений параметра μ. Заметим, что система без запаздывания (частный случай системы (1) при $A_{i1} = 0$, $i = 1,2,3$) поточечно управляема тогда и только тогда, когда она полностью управляема по Калману.

Пример 2.2. Для системы $\dot{x}_1(t) = x_2(t) + u(t), \dot{x}_2(t) = 2u(t), \mu\dot{y}(t) = x_1(t) - y(t) + 0{,}08\,u(t), t \geqslant 0$, матрица управляемости имеет вид $P(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0{,}08/\mu & 1/\mu - 0{,}08/\mu^2 & 2/\mu - 1/\mu^2 + 0{,}08/\mu^3 \end{pmatrix}$. Непосредственное вычисление дает $\det P(\mu) = -4\frac{2\mu^2 - \mu + 0{,}08}{\mu^3} \neq 0$ при всех $\mu > 0$, кроме $\mu = 0{,}1$ и $\mu = 0{,}4$. Следовательно, эта система является μ-поточечно управляемой при каждом $\mu > 0$, $\mu \neq 0{,}1$, $\mu \neq 0{,}4$, но не является μ-поточечно управляемой при $\mu = 0{,}1$ и $\mu = 0{,}4$.

Пример обосновывает существенность введения следующего понятия.

Определение 2.3. Семейство систем $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^0}$ называется *робастно поточечно* $\{x, y\}$-*управляемым*, если для любого $\mu \in (0, \mu^0]$ соответствующая система является μ-поточечно $\{x, y\}$-управляемой.

Для примера 2.2 любое семейство систем $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^0}$ с $\mu^0 < 0{,}1$ робастно управляемо.

Термин *робастная управляемость* естественным образом расширяет классическое понятие управляемости на случай параметрической неопределенности. Содержательно робастная управляемость характеризует способность параметрического семейства систем $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^0}$ сохранять свойство управляемости при вариациях параметра μ во всем допустимом диапазоне $(0, \mu^0]$, что соответствует стандартному пониманию робастности по отношению к параметрам системы [11].

Заметим, что в определении 2.3 финальный момент времени t_1, вообще говоря, зависит от μ и норма управления $u_\mu(t;Z)$ может быть неограничена при $\mu \to 0$. При этом требуется точное попадание в заданные точки Z в моменты времени $t_1 - \beta_j$, $j = \overline{0,\gamma}$.

Обозначим пространство целевых точек $Z = \{(x_j \in \mathbb{R}^{n_1}, y_j \in \mathbb{R}^{n_2}),\ j = \overline{0,\gamma}\}$ (набор точек из $\mathbb{R}^n$) через $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^{n(\gamma+1)}$. Норму в $\mathcal{Z}$ определим как $\|Z\| = \max_{0 \leqslant j \leqslant \gamma} \|Z_j\|$, где $\|Z_j\|$ – евклидова норма вектора $Z_j = (x_j, y_j)$ в $\mathbb{R}^n$.

Ослабление требования точного попадания приводит к понятию асимптотической поточечной управляемости, в котором допускается погрешность попадания в заданные значения.

Определение 2.4. Семейство систем $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^0}$ называется μ^k-*асимптотически поточечно* $\{x, y\}$-*управляемым (с t_1, зависящим от μ)*, если для любого набора точек $Z \in \mathcal{Z}$ и любых $0 = \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_\gamma$ существуют $t_1 \in [\beta_\gamma, +\infty)$, вообще говоря, зависящий от μ, константа $K > 0$, не зависящая от μ, Z и j, и кусочно-непрерывное управление $u_\mu(t;Z)$ такие, что для любого $\mu \in (0, \mu^0]$ решение задачи (1), (2) с управлением $u_\mu(t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\left\| \begin{pmatrix} x(t_1 - \beta_j;\mu,u_\mu) \\ y(t_1 - \beta_j;\mu,u_\mu) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} \right\| \leqslant K\,\mu^k\,\|Z\|, \quad j = \overline{0,\gamma}. \tag{9}$$

Определение μ^k-асимптотической поточечной управляемости означает, что при $\mu \to 0$ погрешность попадания в заданные значения стремится к нулю со скоростью μ^k, причем константа в оценке (9) не зависит от выбора целевых точек Z и от индекса j. При этом момент времени t_1 может зависеть от μ, но оценка погрешности остается равномерной по μ и Z. Таким образом,

данное свойство гарантирует равномерное по Z и j стремление к точной поточечной управляемости в пределе при $\mu \to 0^+$.

В определениях 2.1, 2.3 и 2.4 финальный момент времени t_1 может зависеть от μ, а норма управления может быть неограничена при $\mu \to 0$. Далее введем определения, усиливающие введенные выше понятия по следующим аспектам: *единый момент времени:* существует $t_1 \geqslant 0$, не зависящий от μ и от набора точек Z; *ограниченность управления:* норма $\|u_\mu\|_{L_\infty[0,t_1]}$ ограничена константой, не зависящей от μ (и, возможно, от Z).

Определение 2.5. Семейство систем $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^0}$ называется μ^k-*асимптотически поточечно* $\{x,y\}$-*управляемым (с фиксированным* t_1*)*, если для любого набора точек $Z \in \mathcal{Z}$ и любых $0 = \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_\gamma$ существуют момент времени $t_1 \in [\beta_\gamma, +\infty)$, не зависящий от μ , константа $K > 0$, не зависящая от μ и Z, такие что для любого $\mu \in (0, \mu^0]$ найдется кусочно-непрерывное управление $u_\mu(t;Z)$ такое, что решение задачи (1), (2) с управлением $u_\mu(t)$ удовлетворяет неравенствам (9).

Определение 2.6. Семейство систем $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^0}$ называется μ-*равномерно (относительно u) поточечно* $\{x,y\}$-*управляемым*, если для любого набора точек $Z \in \mathcal{Z}$ и любых неотрицательных чисел $0 = \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_\gamma$ существует константа $C(Z) > 0$ такая, что для каждого $\mu \in (0, \mu^0]$ найдется кусочно-непрерывное управление u_μ такое, что решение задачи (1), (2) с управлением $u_\mu(t)$ удовлетворяет равенствам (8) для некоторого $t_1 \in [\beta_\gamma, +\infty)$, вообще говоря, зависящего от μ и Z, и $\|u_\mu\|_{L_\infty[0,t_1]} \leqslant C(Z)$.

В определении 2.6 финальный момент времени t_1, вообще говоря, зависит от μ, однако норма $u_\mu(t;Z)$ ограничена при $\mu \to 0$.

Определение 2.7. Семейство систем $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^0}$ называется *равномерно по* μ *(относительно* t_1 *и u) поточечно* $\{x,y\}$-*управляемым*, если для любого набора точек $Z \in \mathcal{Z}$ и любых неотрицательных чисел $0 = \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_\gamma$ существуют момент времени $t_1 \in [\beta_\gamma, +\infty)$ и константа $c > 0$, не зависящие от μ и Z, такие, что для любого $\mu \in (0, \mu^0]$ найдется кусочно-непрерывное управление $u_\mu(t;Z)$, $t \geqslant 0$, такое, что решение задачи (1), (2) с управлением $u_\mu(t)$ удовлетворяет равенствам (8), причем управление $u_\mu(t;Z)$ может быть выбрано таким образом, что $\|u_\mu(\cdot;Z)\|_{L_\infty[0,t_1]} \leqslant c\,\|Z\|$,

В определении 2.7 финальный момент времени t_1 не зависит от μ и норма $u_\mu(t;Z)$ ограничена при $\mu \to 0$.

Если в каком-либо из определений 2.1, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 управление может быть выбрано не зависящим от параметра μ, то соответствующее свойство будем называть *идеальной поточечной* $\{x,y\}$-*управляемостью* в соответствующем смысле.

Если во введенных выше определениях условие для y опущено, т. е. требуется только $x(t_1 - \beta_j) = x_j$, $j = \overline{0,\gamma}$, то ЛССВСЗ (1) называется *поточечно x-управляемой* в соответствующем смысле.

Очевидно, что идеальная управляемость влечет обычную (неидеальную) управляемость в том же смысле, поскольку класс допустимых управлений сужается: если существует управление, не зависящее от μ, то оно, в частности, является допустимым и в исходном определении. Обратное, вообще говоря, неверно.

В таблице приведено сравнение введенных понятий поточечной управляемости по основным характеристикам.

Сравнение понятий поточечной управляемости

Понятие	t_1 от μ	t_1 от Z	Ограниченность u	Точность
μ-Поточечная (определение 2.1)	Да	Да	Нет	Точное
Робастная поточечная (определение 2.3)	Да	Да	Нет	Точное
μ^k-Асимптотически поточечная с фикс. t_1 (определение 2.5)	Нет	Нет	Нет	Приближ. $O(\mu^k)$
μ^k-Асимптотически поточечная с завис. t_1 (определение 2.4)	Да	Да	Нет	Приближ. $O(\mu^k)$
μ-Равномерная поточечная (определение 2.6)	Да	Да	Да ($C(Z)$)	Точное
Равномерно по μ поточечная (определение 2.7)	Нет	Нет	Да ($c\|Z\|$)	Точное

2.3. Отношения между понятиями поточечной управляемости

Непосредственно из определений следует, что для ЛССВСЗ (1) введенные понятия управляемости образуют следующую иерархию:

$$\text{равномерная по } \mu \Rightarrow \mu\text{-равномерная} \Rightarrow \text{робастная} \Rightarrow \mu\text{-поточечная}.$$

Кроме того, робастная $\Rightarrow$ μ^k-асимптотическая (с t_1, зависящим от набора целевых точек). Все обратные импликации, вообще говоря, неверны.

Понятия идеальной и поточечной x-управляемости не образуют самостоятельных ступеней в иерархии: идеальная управляемость – усиление каждого из введенных свойств (управление не зависит от μ), x-управляемость – ослабление (требование на y опущено). Идеальная управляемость влечет обычную в том же смысле, а $\{x,y\}$-управляемость влечет x-управляемость; обратные импликации, вообще говоря, неверны.

Контрпример для обратной импликации μ-*поточечная* $\not\Rightarrow$ *робастная* приведен в примере 2.2.

Приведем пример, который демонстрирует, что из робастной управляемости не следует равномерная по μ управляемость.

Пример 2.8. Рассмотрим семейство

$$\dot{x} = x + y + u(t), \quad x(0) = 0, \quad \mu\dot{y} = y + u(t), \quad y(0) = 0, \quad \mu \in (0, \mu^0]. \tag{10}$$

Матрица управляемости Калмана $K = \begin{pmatrix} 1 & 1+\frac{1}{\mu} \\ \frac{1}{\mu} & \frac{1}{\mu^2} \end{pmatrix}$ невырождена ($\det K = -\frac{1}{\mu} \neq 0$), имеет ранг 2 при любом $\mu > 0$. Следовательно, система полностью управляема по Калману при каждом $\mu > 0$. Поскольку для систем без запаздывания полная управляемость эквивалентна поточечной управляемости, семейство $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^0}$ (10) является *робастно поточечно управляемым* (в смысле определения 2.3) для любого $\mu^0 > 0$.

Покажем, что семейство (10) не является *равномерно по* μ *(относительно* t_1 *и* u*) поточечно управляемым* (в смысле определения 2.7) ни при каком μ^0.

Зафиксируем $\gamma = 1$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 1$, и целевые точки $z_1 = (0,0)$ в момент $t_1 - 1$ и $z_0 = (1,0)$ в момент t_1, $\|Z\| = 1$, где $t_1 \geqslant 1$ – произвольное число, не зависящее от μ. Заметим, что из требований попадания в эти точки следуют равенства $x(t_1 - 1) = y(t_1 - 1) = 0$ и $x(t_1) = 1$, $y(t_1) = 0$.

Предположим противное: пусть существуют не зависящие от μ константа $c > 0$ и время $t_1 \geqslant 1$ такие, что для любого $\mu \in (0, \mu^0]$ найдется управление u_μ с

$$\|u_\mu\|_{L_\infty[0,t_1]} \leqslant c\|Z\| =: M, \tag{11}$$

переводящее траекторию в z_0 в момент t_1 и в z_1 в момент $t_1 - 1$.

Из (10) имеем $u = \mu\dot{y} - y$ и $\dot{x} = x + \mu\dot{y}$, откуда при $x(t_1 - 1) = 0$ получаем $x(t) = \mu \int_{t_1-1}^{t} e^{t-s}\dot{y}(s)\,ds$, $t \in [t_1 - 1, t_1]$. Интегрируя по частям и учитывая $y(t_1 - 1) = y(t_1) = 0$, находим $x(t_1) = \mu \int_{t_1-1}^{t_1} e^{t_1-s} y(s)\,ds$, т. е. $\int_{t_1-1}^{t_1} e^{t_1-s} y(s)\,ds = \frac{1}{\mu}$. С другой стороны, из $\mu\dot{y} = y + u$ при $y(t_1 - 1) = 0$ имеем $y(s) = \frac{1}{\mu} \int_{t_1-1}^{s} e^{\frac{s-\theta}{\mu}} u(\theta)\,d\theta$. Подставляя в полученное выше соотношение и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\int_{t_1-1}^{t_1} u(\theta)\left(e^{\frac{t_1-\theta}{\mu}} - e^{t_1-\theta}\right)d\theta = \frac{1-\mu}{\mu}. \tag{12}$$

Из $y(t_1) = 0$ следует $\int_{t_1-1}^{t_1} e^{\frac{t_1-\theta}{\mu}} u(\theta)\,d\theta = 0$, поэтому (12) дает равенство $\int_{t_1-1}^{t_1} e^{t_1-\theta} u(\theta)\,d\theta = -\frac{1-\mu}{\mu}$. Оценивая его с помощью (11), получаем

$$\frac{1-\mu}{\mu} = \left|\int_{t_1-1}^{t_1} e^{t_1-\theta} u(\theta)\,d\theta\right| \leqslant M \int_{t_1-1}^{t_1} e^{t_1-\theta}\,d\theta = M(e-1).$$

При $\mu \to +0$ левая часть $\frac{1-\mu}{\mu} \to +\infty$, а правая $M(e-1)$ постоянна. Получили противоречие, следовательно равномерной по μ управляемости нет.

Следующая теорема показывает, что из μ^k-асимптотической поточечной управляемости семейства $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^0}$ следует робастная поточечная управляемость некоторого его сужения $\{A^0, A^1, B\}_{\mu_1}$, где $0 < \mu_1 \leqslant \mu^0$.

Зафиксируем моменты $0 = \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_\gamma$. При фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ и $t_1 > 0$ введем линейный оператор

$$\mathcal{W}_\mu : PC([0,t_1],\mathbb{R}^r) \to \mathbb{R}^{n(\gamma+1)},$$

который каждому кусочно-непрерывному на $[0,t_1]$ управлению u ставит в соответствие вектор значений решения задачи (1), (2) (в моменты $t_1 - \beta_j$):

$$\mathcal{W}_\mu(u) = \begin{pmatrix} z(t_1-\beta_0;\mu,u) \\ z(t_1-\beta_1;\mu,u) \\ \vdots \\ z(t_1-\beta_\gamma;\mu,u) \end{pmatrix}, \quad z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Из определения 2.3 следует, что робастная поточечная $\{x,y\}$-управляемость семейства $\{A^0,A^1,B\}_{\mu^0}$ эквивалентна сюръективности оператора $\mathcal{W}_\mu$ (13) для каждого $\mu \in (0,\mu^0]$.

Теорема 2.9. *Пусть семейство систем* $\{A^0,A^1,B\}_{\mu^0}$ (1) *является* μ^k*-асимптотически поточечно* $\{x,y\}$*-управляемым (с зависящим от* μ t_1*) с константой* $K > 0$*. Тогда его сужение* $\{A^0,A^1,B\}_{\mu_1}$ *на интервал* $(0,\mu_1]$ *является робастно поточечно* $\{x,y\}$*-управляемым в классе кусочно-непрерывных управлений, где* $\mu_1 = \min\{\mu^0, \frac{1}{2}K^{-1/k}\}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\mu \in (0,\mu_1]$. Тогда $K\mu^k < 1$. Для произвольного $Z \in \mathcal{Z}$ определим последовательность $\{Z_m\}_{m=0}^\infty$ следующим образом:

$$Z_0 = Z, \quad Z_{m+1} = Z_m - \mathcal{W}_\mu(u_\mu(\cdot;Z_m)), \quad m = 0,1,2,\ldots, \tag{14}$$

где $u_\mu(\cdot;Z_m) \in PC([0,t_1],\mathbb{R}^r)$ – управление из определения 2.4. Из (9) тогда имеем

$$\|Z_{m+1}\| = \|Z_m - \mathcal{W}_\mu(u_\mu(\cdot;Z_m))\| \leqslant K\mu^k\|Z_m\|. \tag{15}$$

Применяя (15) последовательно, получаем

$$\|Z_m\| \leqslant (K\mu^k)^m\|Z\| \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Так как $K\mu^k < 1$, из (16) следует, что

$$\|Z_m\| \to 0 \quad \text{при } m \to \infty. \tag{17}$$

Из определения Z_{m+1} (14) имеем $\mathcal{W}_\mu(u_\mu(\cdot;Z_m)) = Z_m - Z_{m+1}$, поэтому для частичных сумм верно $\sum\limits_{m=0}^{N-1} \mathcal{W}_\mu(u_\mu(\cdot;Z_m)) = Z - Z_N$. Переходя к пределу при $N \to \infty$ и используя (17), получаем $Z = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \mathcal{W}_\mu(u_\mu(\cdot;Z_m))$.

Таким образом, Z является пределом (в норме $\mathcal{Z}$) частичных сумм ряда, каждое слагаемое которого принадлежит $\operatorname{Im}\mathcal{W}_\mu$, где $\operatorname{Im}\mathcal{W}_\mu = \{\mathcal{W}_\mu(u) : u \in PC([0,t_1],\mathbb{R}^r)\}$. Следовательно, $Z \in \overline{\operatorname{Im}\mathcal{W}_\mu}$, где замыкание берется в $\mathcal{Z}$. Так как Z был выбран произвольно, получаем $\mathcal{Z} \subseteq \overline{\operatorname{Im}\mathcal{W}_\mu}$.

Оператор $\mathcal{W}_\mu : PC([0,t_1],\mathbb{R}^r) \to \mathcal{Z}$ является линейным. Так как он действует в конечномерное пространство $\mathcal{Z}$, его образ является подпространством конечной размерности. Следовательно, $\operatorname{Im}\mathcal{W}_\mu$ замкнуто в $\mathcal{Z}$, и с учетом $Z \in \overline{\operatorname{Im}\mathcal{W}_\mu}$, получаем $\operatorname{Im}\mathcal{W}_\mu = \mathcal{Z}$, т. е. оператор $\mathcal{W}_\mu$ сюръективный, а значит, система поточечно управляема при данном μ.

Так как $\mu \in (0,\mu_1]$ было выбрано произвольно, значит, семейство систем $\{A^0,A^1,B\}_{\mu_1}$ является робастно поточечно $\{x,y\}$-управляемым. □

Заметим, что из доказательства теоремы 2.9 следует, что μ_1 можно взять любым из интервала $(0,K^{-1/k})$.

Для доказательства теоремы о связи между робастной и равномерной по μ поточечной управляемостью нам понадобится следующая лемма.

Зафиксируем моменты $t_j = t_1 - \beta_j$, $j = \overline{0,\gamma}$, и обозначим $\tau_j = \frac{t_j}{\mu}$.

Лемма 2.10 (О структуре оператора поточечной управляемости). *Пусть характеристические числа матрицы* A_4 *отрицательны:* $\operatorname{Re}\lambda(A_4) < 0$*. Для системы* (1), (2) *оператор поточечной управляемости* $\mathcal{W}_\mu$ *допускает представление*

$$\mathcal{W}_\mu = \mathcal{W}_0 + R_\mu, \quad \|R_\mu\|_{\mathcal{L}(PC,\mathcal{Z})} \leqslant C\mu, \tag{18}$$

где $\mathcal{W}_0 : PC([0,t_1],\mathbb{R}^r) \to \mathcal{Z}$ *– линейный оператор, определяемый через решения медленной и быстрой подсистем в растянутом времени:*

$$\mathcal{W}_0(u) = \begin{pmatrix} x_s(t_0) \\ y_f(\tau_0) - L_0 x_s(t_0) - L_1 x_s(-h) \\ \vdots \\ x_s(t_\gamma) \\ y_f(\tau_\gamma) - L_0 x_s(t_\gamma) - L_1 x_s(t_\gamma - h) \end{pmatrix},$$

где $x_s(\cdot)$ *– решение вырожденной системы* (6)*;* $y_f(\cdot)$ *– решение системы пограничного слоя* (7)*.*

Доказательство. Согласно теореме об аппроксимации 0-го порядка [18; 20, формулы (17), (18)], для любого управления u решение исходной системы имеет вид

$$\begin{aligned} x_\mu(t) &= x_s(t) + \mu\,\varepsilon_x(t,\mu), \\ y_\mu(t) &= y_f\left(\frac{t}{\mu}\right) - L_0 x_s(t) - L_1 x_s(t-h) + \mu\,\varepsilon_y(t,\mu), \end{aligned} \tag{19}$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ равномерно ограничены на $[0,t_1]$.

По определению оператора $\mathcal{W}_\mu$ (13):

$$\mathcal{W}_\mu(u) = \big(x_\mu(t_0)',\, y_\mu(t_0)',\, \ldots,\, x_\mu(t_\gamma)',\, y_\mu(t_\gamma)'\big)'.$$

Здесь и далее $'$ (штрих) означает операцию транспонирования. Подставляя (19), получаем

$$\mathcal{W}_\mu(u) = \mathcal{W}_0(u) + \mu\big(\varepsilon_x(t_0,\mu)',\, \varepsilon_y(t_0,\mu)',\, \ldots,\, \varepsilon_x(t_\gamma,\mu)',\, \varepsilon_y(t_\gamma,\mu)'\big)'.$$

Обозначим второе слагаемое через $R_\mu(u)$. Оператор R_μ линеен как разность линейных операторов $\mathcal{W}_\mu$ и $\mathcal{W}_0$. Согласно теореме об аппроксимации 0-го порядка [20, теорема, формула (17)–(18)], остаточные члены $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ равномерно ограничены на $[0,t_1]$, причем константа C в оценке не зависит от u. Следовательно, $\|R_\mu\|_{\mathcal{L}(PC,\mathcal{Z})} \leqslant C\mu$. □

Теорема 2.11. *Пусть* $\mathrm{Re}\lambda(A_4) < 0$*. Если семейство систем* $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^0}$ *является робастно поточечно* $\{x,y\}$*-управляемым и оператор* $\mathcal{W}_0$ *из представления* (18) *сюръективен, то существует* $\mu^* \in (0,\mu^0]$ *такое, что сужение* $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^*}$ *семейства на интервал* $(0,\mu^*]$ *является равномерно по* μ *(относительно* t_1 *и* u*) поточечно* $\{x,y\}$*-управляемым.*

Доказательство. Из определения 2.3 робастной управляемости следует, что для каждого $\mu \in (0,\mu^0]$ оператор $\mathcal{W}_\mu$ сюръективен. Согласно лемме 2.10, при выполнении предположения теоремы оператор $\mathcal{W}_0$ не содержит μ как параметр. При этом возмущение R_μ удовлетворяет оценке $\|R_\mu\|_{\mathcal{L}(PC,\mathcal{Z})} \leqslant C\mu$ (для краткости далее используем обозначение $\|R_\mu\| := \|R_\mu\|_{\mathcal{L}(PC,\mathcal{Z})}$). Поскольку $\mathcal{Z}$ конечномерно, а $\mathcal{W}_0$ сюръективен, он имеет ограниченный правый обратный $\mathcal{W}_0^+$ с нормой $\|\mathcal{W}_0^+\| < +\infty$.

Выберем $\mu^* \in (0,\mu^0]$ так, чтобы $\mu^* = \min\left(\mu^0,\, \frac{1}{2C\|\mathcal{W}_0^+\|}\right)$, где C – константа из оценки (18). Тогда для каждого $\mu \in (0,\mu^*]$ верно $\|R_\mu\| \leqslant C\mu \leqslant C\mu^* \leqslant \frac{1}{2\|\mathcal{W}_0^+\|}$, так что $\|R_\mu\|\,\|\mathcal{W}_0^+\| \leqslant \frac{1}{2} < 1$.

Пусть $\mathcal{W}_0^+$ – правый обратный к $\mathcal{W}_0$, т. е. $\mathcal{W}_0\mathcal{W}_0^+ = I$. Положим $\mathcal{W}_\mu^+ = \mathcal{W}_0^+(I + R_\mu\mathcal{W}_0^+)^{-1}$. Тогда $\mathcal{W}_\mu\mathcal{W}_\mu^+ = (\mathcal{W}_0 + R_\mu)\mathcal{W}_0^+(I + R_\mu\mathcal{W}_0^+)^{-1} = (I + R_\mu\mathcal{W}_0^+)(I + R_\mu\mathcal{W}_0^+)^{-1} = I$, так что $\mathcal{W}_\mu^+$ – правый обратный к $\mathcal{W}_\mu$. При $\|R_\mu\|\,\|\mathcal{W}_0^+\| < 1$ ряд Неймана для $(I + R_\mu\mathcal{W}_0^+)^{-1}$ сходится, и

$$\|\mathcal{W}_\mu^+\| \leqslant \|\mathcal{W}_0^+\|\frac{1}{1 - \|R_\mu\|\,\|\mathcal{W}_0^+\|}. \tag{20}$$

Таким образом, для каждого $\mu \in (0,\mu^*]$ и любого $Z \in \mathcal{Z}$ управление $u_\mu = \mathcal{W}_\mu^+ Z$ удовлетворяет $\mathcal{W}_\mu u_\mu = Z$, $\|u_\mu\|_{L_\infty} \leqslant \|\mathcal{W}_\mu^+\| \cdot \|Z\|$. В силу (20) существует константа $K = \frac{\|\mathcal{W}_0^+\|}{1 - C\mu^*\|\mathcal{W}_0^+\|}$, не зависящая от μ и Z, такая, что $\|u_\mu\|_{L_\infty} \leqslant K\|Z\|$ для всех $\mu \in (0,\mu^*]$.

Момент времени t_1 фиксирован при определении оператора $\mathcal{W}_0$ и не зависит ни от μ, ни от Z. Следовательно, по определению 2.7 сужение $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^*}$ является равномерно по μ (относительно t_1 и u) поточечно $\{x,y\}$-управляемым на интервале $(0,\mu^*]$. □

3. Условия робастной поточечной управляемости

Для формулировки условий поточечной управляемости непосредственно по исходной сингулярно возмущенной системе управления (1) введем определяющие уравнения по правилам, аналогичным [14] (здесь t – аргумент определяющих уравнений):

$$\begin{aligned} X^m_{k+1}(t) &= A_{10}X^m_k(t) + A_{11}X^m_k(t-h) + A_{20}Y^m_k(t) + A_{21}Y^m_k(t-h) + B_1U^m_k(t),\\ Y^{m+1}_{k+1}(t) &= A_{30}X^m_k(t) + A_{31}X^m_k(t-h) + A_4Y^m_k(t) + B_2U^m_k(t), \quad t>0, \end{aligned} \tag{21}$$

где $X^m_{k+1}(jh) \in \mathbb{R}^{n_1\times r}$, $Y^{m+1}_{k+1}(jh) \in \mathbb{R}^{n_2\times r}$, с начальными условиями

$$\begin{aligned} &X^m_k(t) = 0_{n_1\times r}, \quad m<k \text{ или } k\leqslant 0 \text{ или } t\leqslant 0,\\ &Y^m_k(t) = 0_{n_2\times r}, \quad m\leqslant k \text{ или } k\leqslant 0 \text{ или } t\leqslant 0,\\ &U^0_0(0) = E_r, \quad U^m_k(t) = 0_{r\times r}, \quad k\neq 0,\ m\neq 0. \end{aligned}$$

Здесь и далее запись типа $\left[M_{ij}, i=\overline{1,I}, j=\overline{1,J}\right]$, $M_{ij}\in\mathbb{R}^{k\times l}$, обозначает $k\times IJ$-матрицу следующей структуры:

$$[M_{11}, M_{21}, \ldots, M_{I1}, M_{12}, M_{22}, \ldots, M_{I2}, \ldots, M_{IJ}].$$

Применение критерия из [4] (в форме, использующей определяющие уравнения (21) [15, теорема 1]), при фиксированном $\mu>0$ к системе (1) приводит к утверждению.

Предложение 3.1 [15]. *Система* (1) μ*-поточечно* $\{x,y\}$*-управляема тогда и только тогда, когда существует число* $\kappa(\mu)\geqslant 0$ *такое, что*

$$\operatorname{rank} P(\kappa(\mu),\mu) = n, \tag{22}$$

где

$$P(\kappa(\mu),\mu) \triangleq \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^k \kappa(\mu)^j \sum_{m=0}^k \mu^{-m} X^m_{k+1}(jh),\ k=\overline{0,n-1} \\ \sum_{j=0}^k \kappa(\mu)^j \sum_{m=0}^k \mu^{-m-1} Y^{m+1}_{k+1}(jh),\ k=\overline{0,n-1} \end{bmatrix},$$

а $X^m_{k+1}(jh)$ *и* $Y^{m+1}_{k+1}(jh)$, $k=\overline{0,n-1}$, $m=\overline{0,k}$, $j=\overline{0,k}$, *– решения определяющих уравнений* (21).

Матрица управляемости в условии (22) зависит от μ как через коэффициенты системы, так и через параметр $\kappa(\mu)$.

Следующая лемма показывает, что на некотором сужении интервала $(0,\mu^0]$ параметр κ в условии (22) можно выбрать не зависящим от μ.

Лемма 3.2 (О выборе κ_0, не зависящего от μ). *Если для каждого* $\mu\in(0,\mu^0]$ *существует* $\kappa(\mu)\geqslant 0$ *такое, что выполнено* (22), *то существуют* $\kappa_0\geqslant 0$, *не зависящее от* μ, *и* $\mu^*\in(0,\mu^0]$ *такие, что* $\operatorname{rank} P(\kappa_0,\mu) = n$ *для всех* $\mu\in(0,\mu^*]$.

Доказательство. Умножим $P(\kappa,\mu)$ слева на невырожденную при $\mu>0$ матрицу $D(\mu) = \mu^{n-1}\operatorname{diag}\{E_{n_1}, \mu E_{n_2}\}$. В результате получим матрицу $\widetilde{P}(\kappa,\mu)\triangleq D(\mu)P(\kappa,\mu)$, все элементы которой – полиномы по κ и μ с неотрицательными степенями μ. Поскольку матрица $D(\mu)$ невырождена при $\mu>0$, то

$$\operatorname{rank}\widetilde{P}(\kappa,\mu) = \operatorname{rank} P(\kappa,\mu) \quad \text{для всех } \mu>0. \tag{23}$$

Обозначим все миноры порядка n матрицы $\widetilde{P}(\kappa,\mu)$ через $q_1(\kappa,\mu),\ldots,q_N(\kappa,\mu)$. Каждый q_k, $k=\overline{1,N}$, – полином по κ и μ с постоянными коэффициентами. Определим полином двух переменных

$$F(\kappa,\mu) = \sum_{k=1}^N q_k(\kappa,\mu)^2. \tag{24}$$

Условие $\operatorname{rank}\widetilde{P}(\kappa,\mu) = n$ означает, что хотя бы один из миноров $q_k(\kappa,\mu)$, $k=\overline{1,N}$, отличен от нуля, поэтому

$$\operatorname{rank}\widetilde{P}(\kappa,\mu) = n \iff F(\kappa,\mu)>0. \tag{25}$$

Из (23), (25) и предположения леммы следует, что для каждого $\mu\in(0,\mu^0]$ существует $\kappa(\mu)\geqslant 0$ с $F(\kappa(\mu),\mu)>0$, а значит, $F\not\equiv 0$ как полином от двух переменных.

Обозначим $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ множество неотрицательных вещественных чисел. Рассмотрим F в виде полинома по μ с коэффициентами из кольца $\mathbb{R}[\kappa]$ полиномов по κ: $F(\kappa,\mu)=\sum_{i=0}^{d} a_i(\kappa)\mu^i$, $a_i\in\mathbb{R}[\kappa]$. Предположим противное: для каждого $\kappa\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ полином $F(\kappa,\mu)$ тождественно равен нулю по μ. Тогда $a_i(\kappa)=0$ для всех $i=0,\dots,d$ и всех $\kappa\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Отсюда следует $a_i\equiv 0$ для всех i. Но тогда $F\equiv 0$ как полином от двух переменных, что противоречит $F\not\equiv 0$. Следовательно, существует $\kappa_0\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, при котором $q(\mu)\triangleq F(\kappa_0,\mu)$ – ненулевой полином по μ.

Из (24) следует $q\geqslant 0$. Значит, множество $\{\mu\in(0,\mu^0]: q(\mu)>0\}$ непусто. Обозначим через $0<\mu_1<\mu_2<\dots<\mu_s$ положительные корни q (если их нет, считаем $s=0$). Положим $\mu^*=\mu_1/2$, если $s\geqslant 1$, и $\mu_1\leqslant\mu^0$, $\mu^*=\mu^0$, если $s=0$ или $\mu_1>\mu^0$. Тогда $\mu^*\in(0,\mu^0]$ и на интервале $(0,\mu^*]$ нет положительных корней q, а значит, $q(\mu)>0$ для всех $\mu\in(0,\mu^*]$, что с учетом (25) и (23) эквивалентно $\operatorname{rank}P(\kappa_0,\mu)=n$ для всех $\mu\in(0,\mu^*]$. □

Из предложения 3.1 с учетом леммы 3.2 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.3. *Если существуют* $\kappa_0\geqslant 0$ *и* $\mu^*\in(0,\mu^0]$ *такие, что* $\operatorname{rank}P(\kappa_0,\mu)=n$ *для всех* $\mu\in(0,\mu^*]$, *то семейство* $\{A^0,A^1,B\}_{\mu^*}$ *робастно поточечно* $\{x,y\}$*-управляемо.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\mu\in(0,\mu^*]$. По условию $\operatorname{rank}P(\kappa_0,\mu)=n$, значит, при $\kappa(\mu)=\kappa_0$ выполнено условие критерия из предложения 3.1 и система является μ-поточечно $\{x,y\}$-управляемой при данном μ. Поскольку $\mu\in(0,\mu^*]$ выбрано произвольно, система является μ-поточечно $\{x,y\}$-управляемой для каждого $\mu\in(0,\mu^*]$, что согласно определению (2.3) робастной поточечной $\{x,y\}$-управляемости завершает доказательство. □

Теорема 3.3 дает достаточные условия робастной поточечной управляемости, выраженные через матрицу $P(\kappa,\mu)$, построенную по решениям определяющих уравнений. Однако непосредственная проверка этого условия требует вычисления решений определяющих уравнений размерности $n_1\times r, n_2\times r$ вплоть до порядка $n-1$, что для систем высокой размерности может быть трудоемким. Кроме того, значение μ может быть неизвестно, при этом сингулярно возмущенные системы изначально моделируют процессы с естественным разделением на медленные и быстрые движения, поэтому важно получить условия управляемости, выраженные непосредственно через подсистемы медленных и быстрых переменных. Ниже устанавливаются не зависящие от μ достаточные декомпозиционные условия робастной поточечной управляемости, сформулированные в терминах управляемости вырожденной системы (6) и системы пограничного слоя (7).

Обозначим через $P_\xi(\kappa)$ матрицу управляемости Калмана для параметризованной системы $(A_{s0}+\kappa A_{s1}, B_{s0})$, связанной с вырожденной системой (6):

$$P_\xi(\kappa)=\begin{pmatrix}B_{s0} & (A_{s0}+\kappa A_{s1})B_{s0} & \dots & (A_{s0}+\kappa A_{s1})^{n_1-1}B_{s0}\end{pmatrix}, \tag{26}$$

а через P_η – матрицу управляемости Калмана для быстрой подсистемы (7):

$$P_\eta=\begin{pmatrix}B_2 & A_4B_2 & \dots & A_4^{n_2-1}B_2\end{pmatrix}. \tag{27}$$

Теорема 3.4. *Пусть* $\operatorname{Re}\lambda(A_4)<0$. *Если при некотором* $\kappa\geqslant 0$ *выполняется условие*

$$\operatorname{rank}P_\xi(\kappa)=n_1, \tag{28}$$

то существует $\mu_s^*>0$ *такое, что семейство ЛССВСЗ* $\{A^0,A^1,B\}_{\mu_s^*}$ *робастно поточечно x-управляемо. Если к тому же выполняется условие*

$$\operatorname{rank}P_\eta=n_2, \tag{29}$$

то существует $\mu_f^*>0$ *такое, что семейство ЛССВСЗ* $\{A^0,A^1,B\}_{min\{\mu_s^*,\mu_f^*\}}$ *робастно поточечно* $\{x,y\}$*-управляемо.*

Доказательство. Применим к задаче (4), (2) невырожденное преобразование переменных состояния (см. [20, формула (13)]): $z(t)=\mathcal{K}(\mu,e^{-ph})\zeta(t)$, $\zeta=(\xi',\eta')'$, $\xi(t)\in\mathbb{R}^{n_1}$, $\eta(t)\in\mathbb{R}^{n_2}$, $t\geqslant 0$, где матричный оператор $\mathcal{K}(\mu,e^{-ph})$ выражается через матрицы системы (1) (см. [20, формулы (12), (14)]).

В результате получаем эквивалентную систему вида (5) относительно новых переменных ζ, матрицы которой имеют асимптотический вид

$$\begin{aligned} A_{\xi\eta}(\mu, e^{-ph}) &= \begin{pmatrix} A_\xi(\mu, e^{-ph}) + O(\mu) & O(\mu) \\ O(\mu) & \frac{1}{\mu}(A_\eta(\mu, e^{-ph}) + O(\mu)) \end{pmatrix}, \\ B_{\xi\eta}(\mu, e^{-ph}) &= \begin{pmatrix} B_\xi(\mu, e^{-ph}) + O(\mu) \\ \frac{1}{\mu}(B_\eta(\mu, e^{-ph}) + O(\mu)) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{30}$$

где $A_\xi(\mu, e^{-ph}) = A_{s0} + A_{s1}e^{-ph}$, $B_\xi(\mu, e^{-ph}) = B_{s0}$, $A_\eta(\mu, e^{-ph}) = A_4$, $B_\eta(\mu, e^{-ph}) = B_2$, а $O(\mu)$ обозначает матрицы соответствующих размеров, элементы которых имеют порядок $O(\mu)$.

Поскольку невырожденное преобразование не меняет управляемости системы, то, согласно критерию (теорема 3.3), μ-поточечная $\{x, y\}$-управляемость исходной системы эквивалентна существованию $\kappa \geqslant 0$ такого, что $\operatorname{rank} P_{\xi\eta}(\kappa, \mu) = n$, где $P_{\xi\eta}(\kappa, \mu)$ – матрица управляемости Калмана для параметризованной системы $\{A^0_{\xi\eta}(\mu) + \kappa A^1_{\xi\eta}(\mu), B_{\xi\eta}(\mu)\}$, связанной с преобразованной системой $\{A^0_{\xi\eta}(\mu), A^1_{\xi\eta}(\mu), B_{\xi\eta}(\mu)\}$:

$$P_{\xi\eta}(\kappa, \mu) = \begin{pmatrix} B_{\xi\eta}(\mu) & \big(A^0_{\xi\eta}(\mu) + \kappa A^1_{\xi\eta}(\mu)\big)B_{\xi\eta}(\mu) & \dots & \big(A^0_{\xi\eta}(\mu) + \kappa A^1_{\xi\eta}(\mu)\big)^{n-1} B_{\xi\eta}(\mu) \end{pmatrix}.$$

Подставляя сюда асимптотические представления (30) и раскрывая степени матрицы $A^0_{\xi\eta}(\mu) + \kappa A^1_{\xi\eta}(\mu)$, получаем, что матрица $P_{\xi\eta}(\kappa, \mu)$ имеет блочную структуру

$$P_{\xi\eta}(\kappa, \mu) = \begin{pmatrix} P_{\xi\xi}(\kappa, \mu) & P_{\xi\eta}(\kappa, \mu) \\ P_{\eta\xi}(\kappa, \mu) & P_{\eta\eta}(\kappa, \mu) \end{pmatrix},$$

где $P_{\xi\xi}(\kappa, \mu) \in \mathbb{R}^{n_1 \times rn_1}$, $P_{\xi\eta}(\kappa, \mu) \in \mathbb{R}^{n_1 \times rn_2}$, $P_{\eta\xi}(\kappa, \mu) \in \mathbb{R}^{n_2 \times rn_1}$, $P_{\eta\eta}(\kappa, \mu) \in \mathbb{R}^{n_2 \times rn_2}$, при этом справедливы асимптотические представления для каждого блока:

$$\begin{aligned} P_{\xi\xi}(\kappa, \mu) &= P_\xi(\kappa) + O(\mu), & P_{\xi\eta}(\kappa, \mu) &= O(\mu), \\ P_{\eta\xi}(\kappa, \mu) &= \mu^{-n_1} O(\mu), & P_{\eta\eta}(\kappa, \mu) &= \mu^{-n_1}\big(P_\eta + O(\mu)\big), \end{aligned} \tag{31}$$

где $P_\xi(\kappa)$ и P_η определены в (26) и (27).

Умножим теперь матрицу $P_{\xi\eta}(\kappa, \mu)$ слева на невырожденную диагональную матрицу $N(\mu) = \operatorname{diag}\{E_{n_1}, \mu^{n_1} E_{n_2}\}$. Тогда получаем матрицу $\bar{P}_{\xi\eta}(\kappa, \mu) = N(\mu) P_{\xi\eta}(\kappa, \mu)$, для которой с учетом (31), справедливо

$$\bar{P}_{\xi\eta}(\kappa, \mu) = \begin{pmatrix} P_\xi(\kappa) + O(\mu) & O(\mu) \\ O(\mu) & P_\eta + O(\mu) \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Матрица $N(\mu)$ невырождена при $\mu > 0$, поэтому $\operatorname{rank} P_{\xi\eta}(\kappa, \mu) = \operatorname{rank} \bar{P}_{\xi\eta}(\kappa, \mu) \quad \forall \mu > 0$.

Из (32) видно, что $\bar{P}_{\xi\eta}(\kappa, \mu)$ является малым аддитивным возмущением блочно-диагональной матрицы $\bar{P}^{(0)}_{\xi\eta}(\kappa) = \operatorname{diag}\{P_\xi(\kappa), P_\eta\}$. При этом $\operatorname{rank} \bar{P}^{(0)}_{\xi\eta}(\kappa) = \operatorname{rank} P_\xi(\kappa) + \operatorname{rank} P_\eta$.

Предположим сначала, что выполнено условие (28). Тогда из (32) следует, что для всех достаточно малых $\mu > 0$ верхний левый блок матрицы $\bar{P}_{\xi\eta}(\kappa, \mu)$ имеет полный ранг n_1 по столбцам. Следовательно, $\operatorname{rank} \bar{P}_{\xi\eta}(\kappa, \mu) \geqslant n_1$. Это означает, что система управляема по медленным переменным ξ, т. е. существует $\mu^*_s > 0$ такое, что семейство ЛССВСЗ $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^*_s}$ робастно поточечно x-управляемо.

Если к тому же выполнено условие (29), то из (31) следует, что для всех достаточно малых $\mu > 0$ нижний правый блок матрицы $\bar{P}_{\xi\eta}(\kappa, \mu)$ также имеет полный ранг n_2 по столбцам.

Докажем, что тогда $\operatorname{rank} \bar{P}_{\xi\eta}(\kappa, \mu) = n_1 + n_2 = n$ для всех достаточно малых $\mu > 0$.

Предположим противное: пусть существует ненулевой вектор $(g_1', g_2')'$ такой, что $\bar{P}_{\xi\eta}(\kappa, \mu)(g_1', g_2')' = 0$. В силу блочной структуры (31) это эквивалентно системе

$$(P_\xi(\kappa) + O(\mu))g_1 + O(\mu)g_2 = 0, \quad O(\mu)g_1 + (P_\eta + O(\mu))g_2 = 0.$$

Поскольку P_η имеет полный ранг по столбцам, из второго уравнения при достаточно малых μ следует $g_2 = 0$. Тогда из первого уравнения получаем $(P_\xi(\kappa) + O(\mu))g_1 = 0$, что в силу полного ранга $P_\xi(\kappa)$ влечет $g_1 = 0$. Получили противоречие. Следовательно, $\operatorname{rank} \bar{P}_{\xi\eta}(\kappa, \mu) = n$ для всех достаточно малых $\mu > 0$, а значит, $\operatorname{rank} P_{\xi\eta}(\kappa, \mu) = n$.

По критерию из теоремы 3.3 это означает, что существует $\mu^* > 0$ такое, что семейство ЛССВСЗ $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^*}$ является робастно поточечно $\{x,y\}$-управляемым на интервале $(0,\mu^*]$. $\square$

4. Примеры

Приведем примеры, иллюстрирующие полученные условия робастной поточечной $\{x,y\}$-управляемости.

Пример 4.1. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = y(t) + u(t),$$
$$\mu\dot{y}(t) = -y(t) + x(t-h) + u(t), \quad t \geqslant 0.$$

Решения определяющих уравнений (21): $X_1^0(0) = 1, Y_1^1(0) = 1, X_2^1(0) = 1, Y_2^1(0) = 0, Y_2^1(h) = = 1, Y_2^2(0) = -1, Y_2^2(h) = -1$.

Матрица $\widetilde{P}(\kappa,\mu)$ из леммы 3.2 имеет вид $\widetilde{P}(\kappa,\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 1+\kappa \\ \mu & -(1+\kappa) \end{pmatrix}$, причем $\operatorname{rank}\widetilde{P}(\kappa,\mu) = 2$ при всех $\mu > 0$, $\kappa \geqslant 0$, а значит, $\operatorname{rank}P(\kappa,\mu) = 2$, и по теореме 3.3 любое семейство является робастно поточечно $\{x,y\}$-управляемым.

Пример 4.2. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = x(t-h) + u(t),$$
$$\mu\dot{y}(t) = -y(t), \quad t \geqslant 0.$$

Решения определяющих уравнений (21): $X_1^0(0) = 1, Y_1^1(0) = 0, X_2^0(0) = 0, X_2^0(h) = 1, Y_2^1(0) = = 0, Y_2^2(0) = 0$. Матрица $P(\kappa,\mu)$ имеет вид $P(\kappa,\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rank}P(\kappa,\mu) = 1 < 2 \quad \forall\mu > 0, \forall\kappa \geqslant 0$. Следовательно, по теореме 3.1 с учетом определения 2.3 любое семейство не является робастно поточечно $\{x,y\}$-управляемым.

Пример 4.3. Рассмотрим систему вида (1) с параметрами: $n_1 = 2, n_2 = 1, r = 2$, $A_{10} = = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_{20} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_{30} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, A_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = -2, B_1 = = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$. Условия теоремы 3.4 выполнены: $\operatorname{Re}\lambda(A_4) = -2 < 0$.

Матрицы медленной подсистемы: $A_{s0} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix}, A_{s1} = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}, B_{s0} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$.

Проверим условие (28) при $\kappa = 1$: $A_{s0} + \kappa A_{s1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 5/2 \end{pmatrix}$. Матрица управляемости медленной подсистемы: $P_s = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 3 & 3 \\ 1/2 & 3/2 & 7/2 & 9/2 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rank}P_s = 2 = n_1$, значит, условие (28) выполнено.

Проверим условие (29) для быстрой подсистемы: $P_f = B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, $\operatorname{rank}P_f = 1 = n_2$, условие (29) также выполнено.

Таким образом, по теореме 3.4 существует $\mu^* > 0$ такое, что семейство систем является робастно поточечно $\{x,y\}$-управляемым для всех $\mu \in (0,\mu^*]$.

5. Заключение

В работе для линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием введены и сопоставлены понятия μ-поточечной, робастной, μ^k-асимптотической, μ-равномерной и равномерной по μ поточечной управляемости (определения 2.1–2.7). Установлена их иерархия и показано, что обратные импликации, вообще говоря, неверны (примеры 2.2, 2.8). Доказано, что μ^k-асимптотическая поточечная управляемость эквивалентна робастной на некотором сужении интервала допустимых μ (теорема 2.9).

Доказан технический результат – лемма 3.2 о выборе κ_0, не зависящего от μ: в ранговом условии (предложение 3.1) параметр κ может быть выбран единым для всех достаточно малых μ, что

позволяет получать условия поточечной управляемости, не зависящие от малого параметра. Установлена асимптотическая структура оператора поточечной управляемости (лемма 2.10), на основе которой доказано, что робастная поточечная управляемость влечет μ-равномерную на некотором сужении интервала μ (теорема 2.11). Получены не зависящие от μ достаточные декомпозиционные условия, выраженные через матрицы управляемости медленной и быстрой подсистем (теорема 3.4) и сводящие проверку управляемости системы размерности $n_1 + n_2$ к проверке управляемости двух подсистем меньшей размерности. Приведенные примеры иллюстрируют полученные результаты.

Поточечная управляемость как многоточечная краевая задача естественно возникает в задачах, где требуется обеспечить попадание объекта в заданные состояния в несколько фиксированных моментов времени. Такие задачи характерны для прецизионной робототехники, согласованного управления мультиагентными системами, а также для модального управления, где она эквивалентна слабой модальной управляемости [5].

Заметим, что введенные в работе новые понятия управляемости применимы и к произвольным системам, зависящим от параметра. Однако характер соотношений между свойствами, а также условия их наличия могут отличаться от установленных в настоящей работе. Их выявление требует дополнительных исследований.

Результаты допускают обобщение на системы с несколькими запаздываниями, переменным или распределенным запаздыванием, на задачи поточечной наблюдаемости, а также на нестационарные сингулярно возмущенные системы с запаздыванием. В дальнейшем предполагается установить остальные связи между введенными понятиями поточечной управляемости и получить условия их реализации.

Работа поддержана Гродненским государственным университетом имени Янки Купалы в рамках программы «Конвергенция–2030».

Литература

1. *Кириллова Ф. М., Чуракова С. В.* Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием // Доклады АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1260–1263.

2. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. 507 с.

3. *Минюк С. А.* Две задачи управляемости для линейной системы с последействием // Вестник БГУ. Серия 1. 1972. № 1. С. 8–11.

4. *Марченко В. М., Московска Б. П., Симеонова Ю. С.* Поточечная управляемость систем с последействием // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14, № 7. С. 1324–1327.

5. *Марченко В. М.* Модальное управление в системах с последействием // Автоматика и телемеханика. 1988. № 11. С. 73–84.

6. *Kokotovic P. V., O'Malley R. E., Sannuti P.* Singular perturbations and order reduction in control theory – an overview // Automatica. 1976. Vol. 12, N 2. P. 123–132.

7. *Kokotović P. V., Khalil H. K., O'Reilly J.* Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design. Philadelphia: SIAM, 1999. xv, 371 p. (Classics in Applied Mathematics; Vol. 25).

8. *Дмитриев М. Г., Курина Г. А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.

9. *Калинин А. И.* Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. Минск: Экоперспектива, 2000. 183 с.

10. *Glizer V. Y.* Controllability of singularly perturbed linear time delay systems. Cham: Birkhäuser, 2021. XII, 419 p. (Systems & Control: Foundations & Applications).

11. *Гайшун И. В., Горячкин В. В.* Робастная и интервальная наблюдаемость двухпараметрических дискретных систем с интервальными коэффициентами // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2016. № 2. С. 6–9.

12. *Гайшун И. В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. Мн.: Институт математики НАН Беларуси. 1999.

13. *Астровский А. И., Гайшун И. В.* Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений. Минск: Беларуская навука, 2013.

14. *Копейкина Т. Б., Цехан О. Б.* Об управляемости линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем в пространстве состояний // Известия РАН. Техническая кибернетика. 1993. № 3. С. 40–46.

15. *Цехан О. Б.* Условия поточечной управляемости и поточечной наблюдаемости линейных стационарных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Труды Института математики. 2021. Т. 29, № 1–2. С. 138–148.

16. *Tsekhan O.* Approximation of the solution based on the decoupling transformation of linear time-varying singularly perturbed system with delay // Dynamic Control and Optimization (DCO 2021). Springer Proc. in Mathematics & Statistics. 2022. Vol. 407. P. 77–97.

17. *Цехан О. Б.* Асимптотическая аппроксимация решения одной линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2024. Т. 14, № 1. С. 37–47.

18. *Цехан О. Б.* Асимптотические аппроксимации решений одного класса линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем управления с постоянным запаздыванием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35, № 4. С. 578–600.

19. *Копейкина Т. Б.* Об управляемости линейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 9. С. 1508–1518.

20. *Цехан О. Б.* Асимптотическая аппроксимация решений одного класса нестационарных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (AMADE 2024): Труды 11-го международного научного семинара. Минск: БГУ, 2024. С. 108–114.

References

1. Kirillova F. M., Churakova S. V. Relative controllability of linear dynamical systems with delay. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1967, vol. 174, no. 6, pp. 1260–1263 (in Russian).

2. Gabasov R., Kirillova F. M. *Qualitative Theory of Optimal Processes*. Moscow, Nauka Publ., 1971. 507 p. (in Russian).

3. Minyuk S. A. Two controllability problems for a linear system with aftereffect. *Vestnik BGU. Seriya 1*, 1972, no. 1, pp. 8–11 (in Russian).

4. Marchenko V. M., Moskovska B. P., Simeonova Yu. S. Pointwise controllability of systems with aftereffect. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1978, vol. 14, no. 7, pp. 1324–1327 (in Russian).

5. Marchenko V. M. Modal control in systems with aftereffect. *Avtomatika i Telemekhanika*, 1988, no. 11, pp. 73–84 (in Russian).

6. Kokotovic P. V., O'Malley R. E., Sannuti P. Singular perturbations and order reduction in control theory – an overview. *Automatica*, 1976, vol. 12, no. 2, pp. 123–132.

7. Kokotović P. V., Khalil H. K., O'Reilly J. *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*. Philadelphia, SIAM, 1999. xv, 371 p. (Classics in Applied Mathematics; vol. 25).

8. Dmitriev M. G., Kurina G. A. Singular perturbations in control problems. *Avtomatika i Telemekhanika*, 2006, no. 1, pp. 3–51 (in Russian).

9. Kalinin A. I. *Asymptotic Methods for Optimization of Perturbed Dynamical Systems*. Minsk, Ekoperspektiva Publ., 2000, 183 p. (in Russian).

10. Glizer V. Y. *Controllability of Singularly Perturbed Linear Time Delay Systems*. Cham, Birkhäuser, 2021. XII, 419 p. (Systems & Control: Foundations & Applications).

11. Gaishun I. V., Goryachkin V. V. Robust and interval observability of two-parameter discrete systems with interval coefficients. *Vestsi NAN Belarusi. Ser. Fiz.-Mat. Navuk*, 2016, no. 2, pp. 6–9 (in Russian).

12. Gaishun I. V. *Introduction to the Theory of Linear Nonstationary Systems*. Minsk, Institute of Mathematics of the NAS of Belarus Publ., 1999 (in Russian).

13. Astrovskii A. I., Gaishun I. V. *Linear Systems with Quasi-Differentiable Coefficients: Controllability and Observability of Motions*. Minsk, Belaruskaya Navuka Publ., 2013 (in Russian).

14. Kopeikina T. B., Tsekhan O. B. On controllability of linear nonstationary singularly perturbed systems in the state space. *Izvestiya RAN. Tekhnicheskaya Kibernetika*, 1993, no. 3, pp. 40–46 (in Russian).

15. Tsekhan O. B. Conditions of pointwise controllability and pointwise observability of linear time-invariant singularly perturbed systems with delay. *Trudy Instituta Matematiki*, 2021, vol. 29, no. 1–2, pp. 138–148 (in Russian).

16. Tsekhan O. Approximation of the solution based on the decoupling transformation of linear time-varying singularly perturbed system with delay. *Dynamic Control and Optimization (DCO 2021). Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, 2022, vol. 407, pp. 77–97.

17. Tsekhan O. B. Asymptotic approximation of the solution of a linear nonstationary singularly perturbed system with constant delay. *Vesnik GrDU imya Yanki Kupaly. Ser. 2, Matematyka. Fizika. Informatyka, Vylichalnaya Tekhnika i Kirawanne*, 2024, vol. 14, no. 1, pp. 37–47 (in Russian).

18. Tsekhan O. B. Asymptotic approximations of solutions of a class of linear nonstationary singularly perturbed control systems with constant delay. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, no. 4, pp. 578–600 (in Russian).

19. Kopeikina T. B. On controllability of linear singularly perturbed systems with delay. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1989, vol. 25, no. 9, pp. 1508–1518 (in Russian).

20. Tsekhan O. B. Asymptotic approximation of solutions of a class of nonstationary singularly perturbed systems with delay. *Analytical Methods of Analysis and Differential Equations (AMADE 2024): Proceedings of the 11th International Scientific Seminar*. Minsk, BGU Publ., 2024, pp. 108–114 (in Russian).

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Для публикации в журнале принимаются ранее не опубликованные в других изданиях научные статьи. Обзорные статьи публикуются по решению редколлегии.

2. Объем статьи не более 20 журнальных страниц (с учетом таблиц и рисунков, а также списка литературы на 2 языках), объем краткого сообщения – до 5 страниц.

3. Статьи в Журнале публикуются на русском или английском языке.

4. Статья должна быть подготовлена в системе LaTeX по образцу, находящемуся на сайте Журнала. Не допускается использование в TeX-файлах «нестандартных» TeX-команд (т. е. команд, не входящих в стандартную поставку LaTeX), а также переопределение стандартных команд. При подаче статьи автору необходимо указывать рубрику Журнала, к которому относится статья.

5. Текст статьи начинается с индекса УДК, затем следуют название статьи, инициалы и фамилии авторов, а также краткая аннотация (не более 15 строк) и ключевые слова (5–10 слов). Аннотация не должна содержать ссылок на формулы и литературу статьи. Сведения об авторе (авторах), название статьи, аннотация и ключевые слова пишутся на русском и английском языках, остальные элементы оформляются на русском (английском) языке.

6. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их упоминания и даются в квадратных скобках. Использование ссылок на неопубликованные работы не допускается. Необходимо приводить два списка ссылок на использованную в статье литературу – «Литература» и «References».

7. Если присутствует информация о финансировании (поддержке грантами проектов и т. п.), ее следует размещать в конце статьи.

GUIDELINES FOR AUTHORS

1. Scientific articles not previously published in other publications are accepted for publication in the journal. Review articles are published by decision of the editorial board.

2. The volume of the article is no more than 20 journal pages, taking into account tables and figures, the volume of a short message is up to 5 pages.

3. Articles in the Journal are published in Russian or English.

4. The article must be prepared in the LaTeX system according to the model located on the Journal's website. It is not allowed to use "non-standard" in TeXfiles TeXcommands (i. e. commands not included in the standard LaTeX distribution), and also override standard commands. When submitting an article, the author must indicate the category of the Journal to which the article belongs.

5. The text of the paper must begin with the UDC, the title, and the name(s) of the author(s) preceded by initials followed by a short abstract (no more than 15 lines) and keywords (5–10 words). The abstract must not contain numbered references to the formulas and bibliography items. Information about the author (authors), title of the article, abstract and keywords are written in Russian and English, other elements are written in Russian (English).

6. The references in the text are numbered in order of their appearance and in square brackets. The use of references to unpublished works is not permitted. It is necessary to provide two lists of references to the literature used in the article – "References" and "Literature". An example of bibliographic descriptions is given in the model located on the Journal's website.

7. If there is information about financial support for the research (grant support for projects, etc.), it should be placed at the end of the article.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ
2026. ТОМ 34, № 1s

Редактор Т. П. Петрович
Компьютерная верстка И. В. Близнец

Подписано в печать 02.11.2026. Формат 60×84 $^{1}/_{8}$. Усл. печ. л. 21,86. Уч.-изд. л. 15,35.
Государственное научное учреждение «Институт математики Национальной академии наук Беларуси».
220072, г. Минск, ул. Сурганова, д. 11.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1 / 257 от 2 апреля 2014 г.

Отпечатано в Республиканском унитарном предприятии «Издательский дом «Беларуская навука». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1 / 18 от 02.08.2013. ЛП № 02330 / 455 от 30.12.2013.
Ул. Ф. Скорины, 40. 220084, г. Минск.
Тираж 20 экз. Заказ ….

© Институт математики НАН Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси, 2026