

ISSN 1812-5093

**ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ  
НАН БЕЛАРУСИ**

Государственное научное учреждение  
«Институт математики Национальной  
академии наук Беларуси»

Журнал основан в 1998 г.  
До 2024 г. выходил под названием  
«Труды Института математики».

**PROCEEDINGS OF THE  
INSTITUTE OF MATHEMATICS  
OF THE NAS OF BELARUS**

State Scientific Institute  
«The Institute of Mathematics  
of the National Academy of Sciences  
of Belarus»

The journal was founded in 1998.  
Before 2024, the name of the journal was  
«Proceedings of the Institute of Mathematics».

ТОМ 34, № 1  
Минск, 2026

## ОТ РЕДАКЦИИ

В журнале «Труды Института математики НАН Беларуси» публикуются оригинальные статьи фундаментальной и прикладной математики. Обзорные статьи публикуются по решению редакционной коллегии. Журнал входит в «Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований», утвержденный Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь.

До 2024 г. журнал издавался под названием «Труды Института математики».

### Основные разделы журнала:

Алгебра и теория чисел

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Вычислительная математика

Дискретная математика и математическая кибернетика

Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Математическое моделирование и численные методы

Математические методы защиты информации

Теория вероятностей и математическая статистика

Топология и геометрия

Краткие сообщения

### Адрес редакции: Address:

ул. Сурганова, 11, к. 45 11, Surganov Str., room 45,

220072, г. Минск, Беларусь Minsk, Belarus, 220072

Тел. +375-17-379-17-84 Phone: +375-17-379-17-84

**e-mail:** [tbusel@im.bas-net.by](mailto:tbusel@im.bas-net.by)

## EDITOR'S NOTE

The journal "Proceedings of the Institute of Mathematics of the NAS of Belarus" publishes original articles in fundamental and applied mathematics. Publication of review articles requires approval of the editorial board. The journal is approved by the Higher Attestation Commission of the Republic of Belarus for publishing results of dissertation research, and is included in the official list of such publications.

Before 2024, the name of the journal was "Proceedings of the Institute of Mathematics" (Trudy Instituta Matematiki).

### Main sections of the journal:

Algebra and number theory

Real, complex and functional analysis

Computational mathematics

Discrete mathematics and mathematical cybernetics

Differential equations, dynamic systems and optimal control

Mathematical modeling and numerical methods

Mathematical methods for information security

Probability theory and mathematical statistics

Topology and geometry

Brief communications

### Главный редактор

**Сафонов В. Г.** – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь

### Редакционная коллегия

**Гороховик В. В.** – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь (*заместитель главного редактора*)  
**Матус П. П.** – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь (*заместитель главного редактора*)  
**Бусел Т. С.** – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь (*ответственный секретарь*)

**Антоневич А. Б.** – Белорусский государственный университет, Беларусь  
**Асташкин С. В.** – Самарский национальный исследовательский университет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия

**Асташова И. В.** – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия

**Бахтин В. И.** – Белорусский государственный университет, Беларусь

**Вабищевич П. Н.** – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия

**Васильев Д. В.** – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь

**Галанин М. П.** – Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН, Россия

**Гладков А. Л.** – Белорусский государственный университет, Беларусь

**Го Веньбинь** – Хайнаньский университет, Школа математики и статистики, Китай

**Громак В. И.** – Белорусский государственный университет, Беларусь

**Добровольский Н. М.** – Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого, Россия

**Егоров А. Д.** – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь

**Зайцев В. А.** – Институт математики, информационных технологий и физики Удмуртского государственного университета, Россия

**Изобов Н. А.** – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь

**Ильин А. В.** – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия

**Кигурадзе И. Т.** – Математический институт имени А. Размадзе, Тбилисский государственный университет имени И. Джавахишвили, Грузия

**Ковалев М. Я.** – Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Беларусь

**Корзюк В. И.** – Белорусский государственный университет, Институт математики НАН Беларуси, Беларусь

**Костюкова О. И.** – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь

**Лебедев А. В.** – Белорусский государственный университет, Беларусь

**Леваков А. А.** – Белорусский государственный университет, Беларусь

**Лыков К. В.** – Белорусский государственный университет, Институт математики НАН Беларуси, Беларусь

**Махнев А. А.** – Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, Россия

**Ни Мин Кан** – Восточно-китайский педагогический университет, Институт математических наук, Китай

**Осиновская А. А.** – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь

**Попова С. Н.** – Удмуртский государственный университет, Россия

**Ровба Е. А.** – Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Беларусь

**Сарванов В. И.** – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь

**Сергеев И. Н.** – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия

**Скиба А. Н.** – Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Беларусь

**Старовойтов А. П.** – Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Беларусь

**Фомичев В. В.** – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия

### **Editor-in-Chief**

**Safonov V. G.** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

### **Editorial Board**

**Gorokhovich V. V.** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)

**Matus P. P.** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)

**Busel T. S.** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus (*Executive secretary*)

**Antonevich A. B.** – Belarusian State University, Belarus

**Astashkin S. V.** – Samara National Research University, Lomonosov Moscow State University, Russia

**Astashova I. V.** – Lomonosov Moscow State University, Russia

**Bakhtin V. I.** – Belarusian State University, Belarus

**Dobrovol'skii N. M.** – Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Russia

**Egorov A. D.** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

**Fomichev V. V.** – Lomonosov Moscow State University, Russia

**Galanin M. P.** – Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Russia

**Gladkov A. L.** – Belarusian State University, Belarus

**Gromak V. I.** – Belarusian State University, Belarus

**Guo Wenbin** – Hainan University, The School of Mathematics and Statistics, China

**Il'in A. V.** – Lomonosov Moscow State University, Russia

**Izobov N. A.** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

**Kiguradze I. T.** – Andrea Razmadze Mathematical Institute of Ivane Javakhsishvili, Tbilisi State University, Georgia

**Korzyuk V. I.** – Belarusian State University, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

**Kostyukova O. I.** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

**Kovalev M. Ya.** – United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

**Lebedev A. V.** – Belarusian State University, Belarus

**Levakov A. A.** – Belarusian State University, Belarus

**Lykov K. V.** – Belarusian State University, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

**Makhnev A. A.** – N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Russia

**Ni Min Kan** – East China Normal University, School of Mathematical Sciences, China

**Osinovskaya A. A.** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

**Popova S. N.** – Udmurt State University, Russia

**Rovba E. A.** – Yanka Kupala State University of Grodno, Belarus

**Sarvanov V. I.** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

**Sergeev I. N.** – Lomonosov Moscow State University, Russia

**Skiba A. N.** – Francisk Skorina Gomel State University, Belarus

**Starovoitov A. P.** – Francisk Skorina Gomel State University, Belarus

**Vabishchevich P. N.** – Lomonosov Moscow State University, Russia

**Vasilyev D. V.** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

**Zaitsev V. A.** – Institute of Mathematics, Information Technologies and Physics of Udmurt State University, Russia

**ТРУДЫ**  
**ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ**  
Минск. 2026. Т. 34. № 1

---

**СОДЕРЖАНИЕ**

**АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

- Монахов В. С., Ходанович Д. А.** Конечные группы с некоторыми  $n\Phi$ -подгруппами . . . . . 7
- Осиновская А. А.** Веретенообразность систем весов представлений алгебраических групп малого ранга и регулярные унитарные элементы . . . . . 18
- Ядченко А. А.** Степени неприводимых компонент подстановочного характера и нормальные подгруппы конечной группы . . . . . 39

**ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ**

- Куница В. Н., Лыков К. В.** О неограниченности естественных проекторов в пространствах бесконечных матриц . . . . . 45
- Шилин А. П.** Явное решение дифференциальных краевых задач типа задачи Римана . . . . . 56

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА**

- Жерело А. В.** Об одном подходе к приближенному вычислению математических ожиданий от решений стохастических дифференциальных уравнений с дрейфом . . . . . 68

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ**

- Деменчук А. К., Макаров Е. К.** Необходимое условие разрешимости задачи управления асинхронным спектром линейных периодических систем с невырожденной матрицей при управлении в нерезонансном случае . . . . . 76
- Рудько Я. В.** Классическое решение первой смешанной задачи для слабо квазилинейного волнового уравнения: метод неподвижной точки . . . . . 85

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

- Громько Г. Ф., Авлас А. Н.** Численный метод для нахождения эффективного модуля Юнга композиционных порошковых материалов . . . . . 96

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

- Лю Мэй, Дудин А. Н.** Подробное доказательство условия эргодичности для многолинейной системы массового обслуживания с неоднородными приборами и распределением времени обслуживания фазового типа . . . . . 118

**ТОПОЛОГИЯ И ГЕОМЕТРИЯ**

- Бедрицкий А. С., Тимохович В. Л.** О совпадении некоторых инфинитесимальных топологий экспоненты метризуемого пространства . . . . . 125

**PROCEEDINGS**  
**OF THE INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE NAS OF BELARUS**  
**Minsk. 2026. Vol. 34. N 1**

---

**CONTENTS**

**ALGEBRA AND NUMBER THEORY**

- Monakhov V. S., Hodanovich D. A.** Finite groups with certain  $n\Phi$ -subgroups . . . . . 7
- Osinovskaya A. A.** The spindle property of weight systems of representations of small rank algebraic groups and regular unipotent elements . . . . . 18
- Yadchenko A. A.** Degrees of irreducible components of permutation character and normal subgroups of a finite group . . . . . 39

**REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS**

- Kunica V. N., Lykov K. V.** On unboundedness of natural projectors in spaces of infinite matrices . . . 45
- Shilin A. P.** Explicit solution of differential boundary value problems such as the Riemann problem 56

**COMPUTATIONAL MATHEMATICS**

- Zherelo A. V.** On an approach to the approximate calculation of mathematical expectations from solutions of stochastic differential equations with drift . . . . . 68

**DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMIC SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL**

- Demenchuk A. K., Makarov E. K.** Necessary condition of solvability of the control problem of the asynchronous spectrum of linear periodic systems with non-degenerate matrix in control in non-resonant case . . . . . 76
- Rudzko J. V.** Classical solution to the first mixed problem for a mildly quasilinear wave equation: a fixed-point approach . . . . . 85

**MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL METHODS**

- Gromyko G. F., Aulas A. N.** Numerical method for finding the effective Young's modulus of composite powder materials . . . . . 96

**PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS**

- M. Liu, Dudin A. N.** Detailed proof of ergodicity condition for the multi-server retrial queueing system with heterogeneous servers and phase type distribution of service . . . . . 118

**TOPOLOGY AND GEOMETRY**

- Bedritskiy A. S., Timokhovich V. L.** On the coincidence of some infimal hyperspace topologies of a metrizable space . . . . . 125



УДК 512.542

<https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1-7-17>

EDN: VRBVEG

## КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С НЕКОТОРЫМИ $n\Phi$ -ПОДГРУППАМИ

В. С. Монахов<sup>1,2</sup>, Д. А. Ходанович<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

<sup>2</sup>Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь

e-mail: victor.monakhov@gmail.com, hodanovich@gsu.by

Поступила: 03.04.2026

Исправлена: 29.05.2026

Принята: 29.05.2026

**Ключевые слова:** конечная группа, нормальная подгруппа, подгруппа Фраттини, 2-максимальная подгруппа, формация, корадикал.

**Аннотация.** Рассматриваются только конечные группы. Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $n\Phi$ -подгруппой, если существует нормальная подгруппа  $K$  такая, что  $G = HK$  и  $H \cap K$  содержится в подгруппе Фраттини подгруппы  $H$ . Получено строение конечной группы в следующих случаях:  $n\Phi$ -подгруппами являются все нормальные подгруппы; подгруппа Фраттини группы единична и каждая  $n\Phi$ -подгруппа нормальна; каждая 2-максимальная подгруппа является  $n\Phi$ -подгруппой; каждая 3-максимальная подгруппа является  $n\Phi$ -подгруппой; для всех простых  $p$  каждая подгруппа порядка  $p^2$  является  $n\Phi$ -подгруппой. Для произвольной формации  $\mathfrak{F}$  устанавливается, что в  $\mathfrak{F}$ -корадикале группы каждая неединичная  $\mathfrak{F}$ -подгруппа не является  $n\Phi$ -подгруппой.

## FINITE GROUPS WITH CERTAIN $n\Phi$ -SUBGROUPS

V. S. Monakhov<sup>1,2</sup>, D. A. Hodanovich<sup>1</sup>

<sup>1</sup>F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

<sup>2</sup>Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

e-mail: victor.monakhov@gmail.com, hodanovich@gsu.by

Received: 03.04.2026

Revised: 29.05.2026

Accepted: 29.05.2026

**Keywords:** finite group, normal subgroup, Frattini subgroup, 2-maximal subgroup, formation, residual.

**Abstract.** Only finite groups are considered. A subgroup  $H$  of a group  $G$  is called an  $n\Phi$ -subgroup if there exists a normal subgroup  $K$  such that  $G = HK$  and  $H \cap K$  is contained in the Frattini subgroup of  $H$ . The structure of a finite group is obtained in the following cases: all normal subgroups are  $n\Phi$ -subgroups; the Frattini subgroup of the group is trivial and every  $n\Phi$ -subgroup is normal; every 2-maximal subgroup is an  $n\Phi$ -subgroup; every 3-maximal subgroup is an  $n\Phi$ -subgroup; for all primes  $p$ , every subgroup of order  $p^2$  is an  $n\Phi$ -subgroup. For an arbitrary formation  $\mathfrak{F}$ , it is established that in the  $\mathfrak{F}$ -residual of the a group, every non-trivial  $\mathfrak{F}$ -subgroup is not an  $n\Phi$ -subgroup.

### 1. Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемые обозначения и терминология соответствуют [1–3].

Напомним следующие определения. Пусть  $H$  – подгруппа группы  $G$ . *Добавлением* к подгруппе  $H$  в группе  $G$  называется любая подгруппа  $K$  из  $G$  такая, что  $G = HK$ . Если, кроме того,  $H \cap K = 1$ , то подгруппу  $K$  называют *дополнением* к подгруппе  $H$  в группе  $G$ . Группа называется *вполне факторизуемой*, если в ней существует дополнение к каждой подгруппе. *Минимальным добавлением* к подгруппе  $H$  в группе  $G$  называется такая подгруппа  $K$  из  $G$ , что  $HK = G$ , но  $HK_1 \neq G$  для любой собственной подгруппы  $K_1$  из  $K$ .

Если  $A$  – нормальная подгруппа группы  $G$  и  $B$  – минимальное добавление к  $A$  в  $G$ , то  $A \cap B \leq \Phi(B)$  [2, лемма 3.21], где  $\Phi(B)$  – подгруппа Фраттини группы  $B$ . Это наблюдение обосновывает следующее

**Определение 1.1 [4].** Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $n\Phi$ -подгруппой, если существует нормальная в  $G$  подгруппа  $K$  такая, что  $G = HK$  и  $H \cap K \leq \Phi(H)$ . В этой ситуации подгруппу  $K$  будем называть  $n\Phi$ -добавлением к  $H$  в группе  $G$ .

В любой группе единичная подгруппа и вся группа будут  $n\Phi$ -подгруппами: к единичной подгруппе  $n\Phi$ -добавление – сама группа; ко всей группе  $n\Phi$ -добавление – единичная подгруппа. В каждой неединичной группе подгруппа Фраттини – собственная подгруппа. Если  $n\Phi$ -подгруппа неединична, то ее  $n\Phi$ -добавление – собственная подгруппа. Следовательно, в неабелевой простой группе нет нетривиальных  $n\Phi$ -подгрупп. Если группа непростая, то минимальные добавления к каждой нормальной подгруппе будут  $n\Phi$ -подгруппами: к фраттиниевым (т. е. содержащимся в подгруппе Фраттини группы) нормальным подгруппам вся группа будет  $n\Phi$ -добавлением; к нефраттиниевым нормальным подгруппам  $n\Phi$ -добавления – собственные подгруппы.

Из определения 1.1 следует также, что  $n\Phi$ -подгруппа с единичной подгруппой Фраттини обладает нормальным дополнением. Отсюда следует, что если в группе все подгруппы простых порядков будут  $n\Phi$ -подгруппами, то группа вполне факторизуема по теореме Ю. М. Горчакова [5], потому она сверхразрешима и все ее силовские подгруппы элементарные абелевы [6, теорема 7.8]. Так как дополнения к  $n\Phi$ -подгруппам простых порядков нормальны в группе, то группа абелева [4, следствие 2.1.1]. В итоге получаем: *в группе все подгруппы простых порядков будут  $n\Phi$ -подгруппами тогда и только тогда, когда группа абелева и все ее силовские подгруппы элементарные абелевы.* Отметим, что  $n\Phi$ -подгруппа в работе [7] названа  $F$ -нормальной подгруппой и устанавливалась [7, теорема 3.1] только нильпотентность группы с  $F$ -нормальными подгруппами простых порядков. Кроме того, теорема 3.2 этой работы нуждается в более четкой формулировке.

В [4, лемма 1.5] отмечалось, что группа  $G$   $p$ -нильпотентна тогда и только тогда, когда ее силовская  $p$ -подгруппа является  $n\Phi$ -подгруппой. Отсюда следует, что *группа нильпотентна тогда и только тогда, когда все ее силовские подгруппы являются  $n\Phi$ -подгруппами.*

В настоящей работе исследуются группы с новыми системами  $n\Phi$ -подгрупп. Устанавливается, что группа совпадает с прямым произведением некоторых своих простых подгрупп в следующих двух случаях: каждая нормальная подгруппа является  $n\Phi$ -подгруппой; подгруппа Фраттини группы единична и каждая  $n\Phi$ -подгруппа нормальна. Доказывается, что группа  $G$ , в которой каждая 2-максимальная подгруппа является  $n\Phi$ -подгруппой, либо нильпотентна, либо имеет порядок  $pq$ , а если каждая 3-максимальная подгруппа является  $n\Phi$ -подгруппой, то  $G$  либо нильпотентна, либо  $|G| \in \{p^2q, pqr\}$ . Получена сверхразрешимость группы с  $n\Phi$ -подгруппами порядков  $p^2$  для всех простых  $p$ . Для произвольной формации  $\mathfrak{F}$  устанавливается, что в  $\mathfrak{F}$ -корадикале группы каждая неединичная  $\mathfrak{F}$ -подгруппа не является  $n\Phi$ -подгруппой в группе.

## 2. Вспомогательные результаты

Если в группе  $G$  есть нормальное дополнение к силовской  $p$ -подгруппе, то группа  $G$  называется  $p$ -нильпотентной. Запись  $X \leq Y$  означает, что  $X$  является подгруппой группы  $Y$ ; если  $X$  нормальна в  $Y$ , то пишем  $X \trianglelefteq Y$ . При  $X \neq Y$  используем обозначения  $X < Y$  и  $X \triangleleft Y$ . Если  $1 < X < G$ , то  $X$  называется нетривиальной подгруппой группы  $G$ . Запись  $A \times B$  означает группу, которая является полупрямым произведением своих подгрупп  $A$  и  $B$  с нормальной в  $AB$  подгруппой  $A$ , а  $\pi(G)$  – множество всех простых делителей группы  $G$ .

Приведем известные свойства подгруппы Фраттини, которые неоднократно будут использоваться при доказательствах.

**Лемма 2.1 [2, теорема 3.4; 3, § III.3].** Пусть  $G$  – группа,  $A \leq G$ ,  $K \trianglelefteq G$ . Тогда:

- (1)  $\Phi(A^g) = (\Phi(A))^g$  для любого  $g \in G$ ;
- (2)  $\Phi(K) \leq \Phi(G)$ ,  $\Phi(G)K/K \leq \Phi(G/K)$ , если  $K \leq \Phi(G)$ , то  $\Phi(G)/K = \Phi(G/K)$ ;
- (3) если  $A \leq G$  и  $K \leq \Phi(A)$ , то  $K \leq \Phi(G)$ ;
- (4)  $\Phi(G_1 \times G_2) = \Phi(G_1) \times \Phi(G_2)$ ;
- (5) если  $G$  –  $p$ -группа, то  $\Phi(G)$  является наименьшей нормальной подгруппой, фактор-группа по которой элементарная абелева  $p$ -группа;
- (6) пусть  $D \trianglelefteq K$ ,  $D \leq \Phi(G)$  и  $D \trianglelefteq G$ ; если  $K/D$  нильпотентна, то  $K$  нильпотентна.

**Лемма 2.2.** Пусть  $G$  – группа,  $N \trianglelefteq G$  и  $N \leq A \leq X \leq G$ . Если  $A$  –  $n\Phi$ -подгруппа в  $G$ , то справедливы следующие утверждения:

- (1)  $A$  –  $n\Phi$ -подгруппа в  $X$ ;
- (2)  $A^g$  –  $n\Phi$ -подгруппа группы  $G$  для каждого  $g \in G$ ;
- (3)  $A/N$  –  $n\Phi$ -подгруппа в  $G/N$ ;
- (4) если  $\Phi(A) = 1$ , то  $G = K \rtimes A$  для некоторой нормальной в  $G$  подгруппы  $K$ ;
- (5) если  $A \neq 1$ , то  $n\Phi$ -добавление  $B$  к подгруппе  $A$  в группе  $G$  является собственной подгруппой группы  $G$ ;
- (6) если  $B$  –  $n\Phi$ -добавление к подгруппе  $A$  в группе  $G$ , то  $\pi(A) = \pi(G : B)$ .

**Доказательство.** Поскольку  $A$  –  $n\Phi$ -подгруппа в  $G$ , то существует нормальная в  $G$  подгруппа  $B$  такая, что  $G = AB$  и  $A \cap B \leq \Phi(A)$ .

(1) По тождеству Дедекинда  $X = A(X \cap B)$ . Подгруппа  $X \cap B$  нормальна в  $X$  и  $A \cap (X \cap B) = A \cap B \leq \Phi(A)$ , поэтому  $A$  –  $n\Phi$ -подгруппа в  $X$ .

(2) Так как  $G = AB$  и  $A \cap B \leq \Phi(A)$ , то  $G = A^g B$  для каждого  $g \in G$  и, согласно лемме 2.1,

$$A^g \cap B = (A \cap B)^g \leq (\Phi(A))^g = \Phi(A^g).$$

(3) Так как  $G = AB$ ,  $A \cap B \leq \Phi(A)$  и  $N \leq A$ , то  $G/N = (A/N)(BN/N)$  и

$$(A/N) \cap (BN/N) = (A \cap BN)/N = (A \cap B)N/N \leq \Phi(A)N/N \leq \Phi(A/N).$$

(4) Утверждение следует из определения  $n\Phi$ -подгруппы.

(5) Так как  $A \neq 1$ , то  $\Phi(A) < A$ . Поскольку группа  $G = AB$  и  $A \cap B \leq \Phi(A) < A$ , то  $B < G$ .

(6) Так как  $G = AB$ , то  $G/B \cong A/(A \cap B)$ . Поскольку  $A \cap B \leq \Phi(A)$ , то

$$\pi(A) = \pi(A/(A \cap B)) = \pi(G : B). \quad \square$$

**Лемма 2.3.** Для группы  $G$  справедливы следующие утверждения:

(1) если  $\Phi(G) \neq 1$ , то каждая неединичная подгруппа из  $\Phi(G)$  не является  $n\Phi$ -подгруппой группы  $G$ ;

(2) если  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$ , то каждое минимальное добавление к  $N$  в  $G$  является  $n\Phi$ -подгруппой группы  $G$ .

**Доказательство.** (1) Предположим, что  $1 \neq H \leq \Phi(G)$  и  $H$  является  $n\Phi$ -подгруппой группы  $G$ . Тогда существует нормальная подгруппа  $K$  в группе  $G$  такая, что  $G = HK$ ,  $H \cap K \leq \Phi(H) < H$ . Из равенства  $G = HK$  следует, что  $G = HK \leq \Phi(G)K$  и  $K = G$ . Но теперь  $H \cap K = H$ , противоречие.

(2) Пусть  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$  и  $H$  – минимальное добавление к  $N$  в  $G$ . Тогда  $G = NH$ . Если  $N \cap H$  не содержится в  $\Phi(H)$ , то существует максимальная в  $H$  подгруппа  $H_1$  такая, что  $(N \cap H)H_1 = H$ . Но теперь

$$G = NH = (N \cap H)H_1 = NH_1,$$

что противоречит определению минимального добавления. Поэтому допущение неверно, и каждое минимальное добавление к  $N$  в  $G$  является  $n\Phi$ -подгруппой группы  $G$ .  $\square$

В диэдральной группе порядка 8 каждая из подгрупп порядка 4 обладает минимальными добавлениями порядка 4 и порядка 2. Значит,  $n\Phi$ -подгруппы с равными  $n\Phi$ -добавлениями могут иметь различные порядки.

**Лемма 2.4.** В разрешимой группе подгруппа Фиттинга является  $n\Phi$ -подгруппой тогда и только тогда, когда группа нильпотентна.

**Доказательство.** Пусть  $G$  – разрешимая группа и предположим, что  $G$  ненильпотентна и  $F = F(G)$  является  $n\Phi$ -подгруппой. Тогда существует нормальная подгруппа  $K$  такая, что  $G = FK$  и  $(F \cap K) \leq \Phi(F)$ . Так как группа  $G$  разрешима и ненильпотентна, то  $1 < F < G$ ,  $\Phi(F) < F$  и  $K < G$  по лемме 2.2. Поскольку  $\Phi(F) \leq \Phi(G)$ , то  $(F \cap K) < K$  и в  $K$  существует подгруппа  $L$  такая, что  $(F \cap K) < L \leq K$  и  $L/(F \cap K)$  – минимальная нормальная в  $G/(F \cap K)$  подгруппа. Из разрешимости группы  $G$  следует, что  $L/(F \cap K)$  абелева, а  $L$  будет нильпотентной согласно лемме 2.1. Теперь  $L \leq F$  и  $(F \cap K) < L \leq (F \cap K)$ , противоречие. Поэтому допущение неверно и  $G = F(G)$  нильпотентна. Необходимость доказана. Обратное утверждение также справедливо.  $\square$

Условие разрешимости группы в лемме 2.4 опустить нельзя, примером служит группа  $C_2 \times A_5$ .

Здесь и далее  $C_n$  и  $A_n$  – циклическая группа порядка  $n$  и знакопеременная группа степени  $n$ . Как обычно,  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{N}$  и  $\mathfrak{U}$  – формации всех абелевых, нильпотентных и сверхразрешимых групп соответственно. Если  $\mathfrak{F}$  – формация, то пересечение всех нормальных подгрупп группы  $G$ , фактор-группы по которым принадлежат  $\mathfrak{F}$ , обозначается через  $G^{\mathfrak{F}}$  и называется  $\mathfrak{F}$ -корадикалом группы  $G$  [1]. Ясно, что  $\mathfrak{A}$ -корадикал группы совпадает с ее коммутантом, а  $\mathfrak{N}$ - и  $\mathfrak{U}$ -корадикал группы называют нильпотентным и сверхразрешимым корадикалом соответственно. За классом всех абелевых (сверхразрешимых) групп с элементарными абелевыми силовскими подгруппами закрепим обозначение  $\mathfrak{A}_1$  (соответственно  $\mathfrak{U}_1$ ). Оба класса  $\mathfrak{A}_1$  и  $\mathfrak{U}_1$  являются наследственными формациями, но каждая из них ненасыщенная. В силу [6, теорема 7.8] формация  $\mathfrak{U}_1$  совпадает с классом всех вполне факторизуемых групп. Если  $\mathfrak{F}$  – формация,  $G$  – группа,  $H \leq G$  и  $H \in \mathfrak{F}$ , то  $H$  называется  $\mathfrak{F}$ -подгруппой группы  $G$ .

Самостоятельный интерес представляет следующее наблюдение.

**Предложение 2.5.** *Если  $\mathfrak{F}$  – формация и  $G$  – группа, то каждая неединичная  $\mathfrak{F}$ -подгруппа из  $G^{\mathfrak{F}}$  не является  $n\Phi$ -подгруппой группы  $G$ . В частности,  $n\Phi$ -подгруппами группы  $G$  не будут:*

- (1) подгруппы простых порядков из  $G^{\mathfrak{A}_1}$ ;
- (2) неединичные вполне факторизуемые подгруппы из  $G^{\mathfrak{U}_1}$ ;
- (3) неединичные абелевы подгруппы из коммутанта группы  $G$ ;
- (4) неединичные нильпотентные подгруппы из нильпотентного корадикала группы  $G$ ;
- (5) неединичные сверхразрешимые подгруппы из сверхразрешимого корадикала группы  $G$ .

**Доказательство.** Предположим противное и пусть  $H$  – неединичная  $n\Phi$ -подгруппа группы  $G$ ,  $H \leq G^{\mathfrak{F}}$  и  $H \in \mathfrak{F}$ . Так как  $1 \neq H \leq G^{\mathfrak{F}}$ , то группа  $G \notin \mathfrak{F}$  и  $H < G$ . Согласно определению  $n\Phi$ -подгруппы существует нормальная в  $G$  подгруппа  $K$  такая, что  $G = HK$  и  $H \cap K \leq \Phi(H)$ . Поскольку  $H \neq 1$ , то  $\Phi(H) < H$  и  $K < G$  по лемме 2.2. Далее,

$$G/K \cong H/(H \cap K) \in \mathfrak{F}, H \leq G^{\mathfrak{F}} \leq K, G = HK = K.$$

Получили противоречие. Основное утверждение доказано. При  $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{U}_1, \mathfrak{A}, \mathfrak{N}, \mathfrak{U}\}$  получаем утверждения (1)–(5).  $\square$

Тиражируя другие значения формации  $\mathfrak{F}$ , получим новые свойства  $\mathfrak{F}$ -корадикалов произвольных групп.

Из предложения 2.5 вытекает

**Следствие 2.6.** *В группе  $G$  каждая подгруппа простого порядка является  $n\Phi$ -подгруппой тогда и только тогда, когда  $G$  – абелева группа и все ее силовские подгруппы элементарны.*

*Дисперсивная группа* – группа, обладающая нормальным рядом, факторы которого изоморфны силовским подгруппам. Группа  $G$  порядка  $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$  называется *дисперсивной по Оре* [1, с. 251; 2, с. 153], если  $p_1 > p_2 > \dots > p_n$  и для любого  $i$  группа  $G$  имеет нормальную подгруппу порядка  $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$ .

*Группой Шмидта* называют конечную нильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Начало изучения таких групп положила работа О. Ю. Шмидта [8]. Основные свойства групп Шмидта освещены в монографиях [1; 3]. Приведем только используемые далее в доказательствах свойства групп Шмидта.

**Лемма 2.7.** *Группа Шмидта  $S$  обладает следующими свойствами:*

- (1)  $S = P \rtimes Q$ , где  $P$  – нормальная силовская  $p$ -подгруппа,  $Q$  – ненормальная силовская  $q$ -подгруппа,  $p$  и  $q$  – различные простые числа;
- (2)  $Q = \langle y \rangle$  – циклическая подгруппа и  $y^q \in Z(S)$ ;
- (3) если  $P$  абелева, то  $P$  – элементарная абелева порядка  $p^m$ , где  $t$  – показатель  $p$  по модулю  $q$ ; если  $P$  неабелева, то  $Z(P) = P' = \Phi(P)$ ; кроме того,  $P/Z(P) = p^m$  и каждый неединичный элемент из  $P$  имеет порядок  $p$  при  $p \geq 3$  и порядок 2 или 4 при  $p = 2$ ;
- (4)  $\Phi(S) = \Phi(P) \times \langle y^q \rangle$  и  $P/\Phi(P)$  – главный фактор группы  $S$ ;
- (5) если  $K$  – нетривиальная нормальная подгруппа в  $S$ , то
  - (5.1) подгруппа  $Q$  не содержится в  $K$ ;
  - (5.2) если  $P$  не содержится в  $K$ , то  $K \leq \Phi(S)$ .

**Доказательство.** Пункты (1)–(4) см. [1, теоремы 26.1, 26.2].

(5) Пусть  $K$  – нетривиальная нормальная подгруппа в  $S$ . Так как  $K$  – с-обственная подгруппа группы, то подгруппа  $K = P_1 \times Q_1$  нильпотентна, где  $P_1$  и  $Q_1$  – силовские  $p$ - и  $q$ -подгруппы в  $K$  соответственно. Ясно, что  $P_1$  и  $Q_1$  – нормальные подгруппы группы  $S$ , поэтому  $Q_1 < Q$  и  $Q_1 \leq \langle y^q \rangle = \Phi(Q) \leq \Phi(S)$  согласно утв. (4) доказываемой леммы. Если  $K$  не содержится в  $\Phi(S)$ , то  $P_1$  не содержится в  $\Phi(S)$ , поэтому  $P_1$  не содержится в  $\Phi(P)$ . Так как  $P_1\Phi(P)$  – нормальная подгруппа в  $S$ , то  $P_1\Phi(P) = P$  согласно утв. (4). Но теперь  $P_1 = P$  по свойствам подгруппы Фраттини. В итоге, либо  $K \leq \Phi(S)$ , либо  $P \leq K \leq P \times \langle y^{q^a} \rangle$  для некоторого целого  $a \geq 1$ .  $\square$

Сверхразрешимой называют группу, которая обладает нормальным рядом с циклическими факторами. Каждая сверхразрешимая группа дисперсивна по Оре и имеет нильпотентный коммутант [3, теорема VI.9.]. Утверждения следующей леммы хорошо известны, впервые они получены в работах [9; 10].

**Лемма 2.8.** *Несверхразрешимая группа  $G$ , в которой каждая собственная подгруппа сверхразрешима, обладает следующими свойствами:*

- (1) группа  $G$  дисперсивна и  $|\pi(G)| \leq 3$ ;
- (2)  $G = G^{\Omega} \rtimes T$ ;
- (3) подгруппа  $P = G^{\Omega}$  является силовской  $p$ -подгруппой для некоторого  $p \in \pi(G)$ ;  $P/\Phi(P)$  является минимальной нормальной подгруппой в  $G/\Phi(P)$ ;  $|P/\Phi(P)| > p$ ;
- (4)  $T/T \cap \Phi(G)$  – либо примарная циклическая группа, либо минимальная неабелева группа.

### 3. Группы с нормальными $n\Phi$ -подгруппами

**Лемма 3.1.** *В группе  $G$  нет нетривиальных  $n\Phi$ -подгрупп тогда и только тогда, когда  $G/\Phi(G)$  – простая группа.*

**Доказательство.** Пусть только единичная подгруппа и вся группа являются  $n\Phi$ -подгруппами в группе  $G$ . Предположим, что  $G/\Phi(G)$  – непростая группа и пусть  $N/\Phi(G)$  – нормальная подгруппа,  $\Phi(G) < N < G$ . Пусть  $H$  – минимальное добавление к нормальной подгруппе  $N$  в группе  $G$ . Согласно лемме 2.3 подгруппа  $H$  будет  $n\Phi$ -подгруппой группы  $G$ . Так как  $N < G$ , то  $H \neq 1$ . Поскольку  $\Phi(G) < N$ , то  $H \neq G$  и  $H$  – нетривиальная  $n\Phi$ -подгруппа группы  $G$ , противоречие. Необходимость доказана.

Обратно, пусть  $G/\Phi(G)$  – простая группа. Предположим, что существует в группе  $G$  нетривиальная  $n\Phi$ -подгруппа  $H$ . Тогда существует нормальная в  $G$  подгруппа  $K$  такая, что  $G = HK$  и  $H \cap K \leq \Phi(H)$ . Так как  $1 < H < G$ , то  $1 < K$  и  $K\Phi(G)/\Phi(G)$  – нормальная в  $G/\Phi(G)$  подгруппа. По лемме 2.2 подгруппа  $K < G$ , поэтому  $K\Phi(G) < G$ . Так как  $G/\Phi(G)$  – простая группа, то  $K \leq \Phi(G)$ . Но теперь,  $G \neq HK$  противоречие. Следовательно, достаточность тоже выполняется.  $\square$

**Теорема 3.2.** *Если в группе  $G$  каждая  $n\Phi$ -подгруппа нормальна и  $\Phi(G) = 1$ , то  $G$  является прямым произведением простых подгрупп.*

**Доказательство.** Пусть в группе  $G$  каждая  $n\Phi$ -подгруппа нормальна и  $\Phi(G) = 1$ . Если в  $G$  нет нетривиальных  $n\Phi$ -подгрупп, то согласно лемме 3.1 группа  $G$  простая и утверждение справедливо. Пусть  $A$  – нетривиальная  $n\Phi$ -подгруппа группы  $G$ . По условию подгруппа  $A$  нормальна в  $G$  и  $\Phi(A) = 1$  по лемме 2.1, поэтому  $G = A \times B$  для некоторой нормальной в  $G$  подгруппы  $B$ . Предположим, что подгруппа  $A$  непростая, и пусть  $A_1$  – нетривиальная нормальная в  $A$  подгруппа. Тогда  $A_1$  нормальна в  $G$  и  $A_1B = A_1 \times B$  – нормальная в  $G$  подгруппа. Так как  $G = A(A_1 \times B)$ , то можно выбрать в  $A$  минимальное добавление  $V_1$  к подгруппе  $A_1 \times B$  в группе  $G$ . Ясно, что  $V_1 < A$  и  $V_1$  будет  $n\Phi$ -подгруппой группы  $G$  по лемме 2.3. По условию подгруппа  $V_1$  нормальна в  $G$ , поэтому

$$V_1 \cap (A_1 \times B) \leq \Phi(V_1) = 1, G = V_1 \times A_1 \times B, A = V_1 \times A_1.$$

Повторяя подобные действия с каждым из прямых сомножителей разложения  $G = V_1 \times A_1 \times B$ , через конечное число шагов приходим к разложению группы  $G$  в прямое произведение простых подгрупп.  $\square$

**Пример 3.3.** В группе  $G = \langle a \rangle \times PSL_2(7)$ ,  $\langle a \rangle \cong C_2$ , выберем подгруппу  $\langle b \rangle < PSL_2(7)$ ,  $\langle b \rangle \cong C_4$ . Подгруппа  $\langle ab \rangle$  не нормальна в  $G$  и является  $n\Phi$ -подгруппой:

$$G = \langle ab \rangle PSL_2(7), \langle ab \rangle \cap PSL_2(7) = \langle b^2 \rangle = \Phi(\langle ab \rangle).$$

Поэтому теорема 3.2 для неразрешимых групп не допускает обращения.

**Теорема 3.4.** *Для группы следующие утверждения эквивалентны:*

- (1) *в группе  $G$  каждая нормальная подгруппа является  $n\Phi$ -подгруппой;*
- (2) *группа  $G$  является прямым произведением простых подгрупп;*
- (3) *в группе  $G$  каждая нормальная подгруппа обладает нормальным дополнением.*

**Доказательство.** Вначале докажем, что (1)  $\Rightarrow$  (2). Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть в группе  $G$  каждая нормальная подгруппа является  $n\Phi$ -подгруппой. Тогда  $\Phi(G) = 1$  согласно лемме 2.3 и можно считать, что  $G$  непростая. Пусть  $N$  – минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ . По условию  $N$  является  $n\Phi$ -подгруппой группы  $G$ . Значит, существует нормальная в  $G$  подгруппа  $K$  такая, что  $G = NK$  и  $N \cap K \leq \Phi(N)$ . Но  $\Phi(N) \leq \Phi(G) = 1$  по лемме 2.1, поэтому  $N \cap K = 1$ ,  $G = N \times K$  и  $N$  – простая подгруппа. Если  $L$  – нормальная подгруппа в  $K$ , то  $L$  нормальна в  $G$  и по условию  $L$  является  $n\Phi$ -подгруппой в  $G$ . Согласно лемме 2.2 подгруппа  $L$  будет  $n\Phi$ -подгруппой в  $K$ . Значит, условие (1) теоремы выполняется для подгруппы  $K$ . По индукции  $K = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$ , где  $K_i$  – простые группы,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Следовательно, группа  $G$  – прямое произведение простых подгрупп.

Проверим, что (2)  $\Rightarrow$  (1) и (2)  $\Rightarrow$  (3). Пусть группа  $G$  – прямое произведение простых подгрупп. Воспользуемся индукцией по индексам нормальных подгрупп и докажем, что каждая нормальная в  $G$  подгруппа является  $n\Phi$ -подгруппой и обладает нормальным дополнением. Так как подгруппы Фраттини и Фиттинга прямого произведения являются прямым произведением соответственно подгрупп Фраттини и Фиттинга сомножителей, то  $\Phi(G) = 1$  и  $G = F(G) \times K$ , где  $F(G)$  – произведение всех абелевых простых сомножителей, а  $K$  – всех неабелевых. Пусть  $N$  – минимальная нормальная в  $G$  подгруппа. Если  $N$  абелева, то  $N \leq F(G)$  и  $F(G) = N \times A$ , поскольку  $F(G)$  – произведение подгрупп простых порядков. Теперь

$$G = N \times (A \times K), (A \times K) \triangleleft G,$$

$N$  является  $n\Phi$ -подгруппой по лемме 2.3 и  $N$  обладает нормальным дополнением. Пусть  $N$  неабелева. Тогда  $N \cap F(G) = 1$  и  $F(G) \leq C_G(N)$ . Если  $N \cap K = 1$ , то  $K \leq C_G(N)$  и  $N \leq Z(G)$ , противоречие. Поэтому  $N \cap K \neq 1$ ,  $N \leq K$  и  $K = N \times K_1$  согласно [2, теорема 2.30]. Значит,

$$G = N \times (F(G) \times K_1), (F(G) \times K_1) \triangleleft G,$$

$N$  является  $n\Phi$ -подгруппой по лемме 2.3 и  $N$  обладает нормальным дополнением. Следовательно, импликации (2)  $\Rightarrow$  (1) и (2)  $\Rightarrow$  (5) справедливы в случае, когда  $N$  – минимальная нормальная в  $G$  подгруппа. Ввиду индукции по индексам нормальных подгрупп получаем, что каждая нормальная в  $G$  подгруппа является  $n\Phi$ -подгруппой и обладает нормальным дополнением. Импликации (2)  $\Rightarrow$  (1) и (2)  $\Rightarrow$  (3) доказаны. Ясно, что (3)  $\Rightarrow$  (2). Таким образом, (1)  $\Leftrightarrow$  (2)  $\Leftrightarrow$  (3).  $\square$

Поскольку разрешимая простая группа имеет простой порядок, то из теорем 3.2 и 3.4 вытекает

**Следствие 3.5.** *Для разрешимой группы следующие утверждения эквивалентны:*

- (1) *в группе каждая нормальная подгруппа является  $n\Phi$ -подгруппой;*
- (2) *группа абелева и каждая ее силовская подгруппа элементарна;*
- (3) *подгруппа Фраттини группы единичная и каждая  $n\Phi$ -подгруппа нормальна.*

#### 4. Группы с 2- и 3-максимальными $n\Phi$ -подгруппами

**Предложение 4.1.** *Если в группе  $G$  каждая максимальная подгруппа является  $n\Phi$ -подгруппой, то группа  $G$  нильпотентна.*

**Доказательство.** Предположим, что группа  $G$  ненильпотентна и воспользуемся индукцией по порядку. Так как в  $G$  есть ненормальная максимальная подгруппа  $A$ , то по условию существует нормальная подгруппа  $B$  такая, что  $G = AB$  и  $A \cap B \leq \Phi(A)$ . Подгруппа  $A$  неединична, поэтому  $\Phi(A) < A$  и  $B < G$  по лемме 2.2, т. е. группа  $G$  непростая.

Пусть  $N$  – нетривиальная нормальная подгруппа группы  $G$  и  $M/N$  – максимальная в  $G/N$  подгруппа. По условию подгруппа  $M$  является  $n\Phi$ -подгруппой, а по лемме 2.2 подгруппа  $M/N$  является  $n\Phi$ -подгруппой группы  $G/N$ . По индукции каждая нетривиальная фактор-группа группы  $G$  нильпотентна. В частности,  $\Phi(G) = 1$  по лемме 2.1.

Поскольку фактор-группа  $G/N$  нильпотентна, то подгруппа  $M$  нормальна в  $G$  и  $\Phi(M) \leq \leq \Phi(G) = 1$  по лемме 2.2. Так как  $M$  –  $n\Phi$ -подгруппа, то существует нормальная в  $G$  подгруппа  $K$  такая, что  $G = MK$  и  $M \cap K \leq \Phi(M) = 1$ . Теперь в  $G$  две нормальные подгруппы  $N$  и  $K$ , причем  $N \cap \cap K = 1$ . Поскольку фактор-группы  $G/N$  и  $G/K$  нильпотентны, то группа  $G$  нильпотентна.  $\square$

В группе кватернионов порядка 8 каждая максимальная подгруппа является  $n\Phi$ -подгруппой. Поэтому в условиях предложения 4.1 группа может быть неабелевой. В группе  $D_8 \rtimes C_2 = Q_8 \rtimes C_2$ , [11, SmallGroup(16,13)] тоже каждая максимальная подгруппа является  $n\Phi$ -подгруппой.

**Следствие 4.2.** *Если в группе  $G$  каждая максимальная подгруппа из  $G^{\mathfrak{N}}$  является  $n\Phi$ -подгруппой группы  $G$ , то группа  $G$  сверхразрешима.*

**Доказательство.** Можно считать, что  $G^{\mathfrak{M}} \neq 1$ . В силу леммы 2.2 каждая максимальная подгруппа из  $G^{\mathfrak{N}}$  является  $n\Phi$ -подгруппой в  $G^{\mathfrak{N}}$ . По предложению 4.1 подгруппа  $G^{\mathfrak{N}}$  нильпотентна. Пусть  $M$  – максимальная подгруппа в  $G^{\mathfrak{N}}$ . Тогда  $M$  нормальна в  $G^{\mathfrak{N}}$  и  $|G^{\mathfrak{N}}/M|$  – простое число. Согласно определению  $n\Phi$ -подгруппы существует нормальная в  $G$  подгруппа  $K$  такая, что  $G = MK$  и  $M \cap K \leq \Phi(M)$ . Если подгруппа  $M$  единична, то порядок подгруппы  $G^{\mathfrak{N}}$  есть простое число и  $G$  сверхразрешима согласно [2, лемма 4.46], противоречие с договоренностью  $G^{\mathfrak{M}} \neq 1$ . Значит, подгруппа  $M$  неединична,  $\Phi(M) < M$  и  $K < G$  по лемме 2.2. Теперь

$$G/K \cong M/(M \cap K) \in \mathfrak{N}, G^{\mathfrak{N}} \leq K, G = MK \leq G^{\mathfrak{N}}K = K < G,$$

противоречие. Поэтому допущение неверно и утверждение справедливо.  $\square$

В условиях следствия 4.2 группа  $G$  может быть ненильпотентной, подтверждающим примером служит ненильпотентная группа  $S_3$  порядка 6.

Пусть  $K$  – подгруппа группы  $G$ . Если существует максимальная в  $G$  подгруппа  $M$  такая, что  $K$  является максимальной подгруппой в  $M$ , то  $K$  называется *2-максимальной подгруппой группы  $G$* . Пусть  $L$  – подгруппа группы  $G$ . Если существует 2-максимальная в  $G$  подгруппа  $K$  такая, что  $L$  является максимальной подгруппой в  $K$ , то  $L$  называется *3-максимальной подгруппой группы  $G$* .

Строение конечной группы с ограничениями на 2- и 3-максимальные подгруппы изучалось во многих работах различных авторов, впервые в [9]. Из свежих публикаций можно отметить работы [12–14], в которых наряду с новыми результатами обсуждалась перспективность дальнейших исследований.

**Лемма 4.3.** (1) *Если в группе  $G$  нет 2-максимальных подгрупп, то  $|G| = p$ .*

(2) *Если в группе  $G$  нет 3-максимальных подгрупп, то  $|G| \in \{p^2, pq\}$ .*

**Доказательство.** (1) Если в группе  $G$  нет 2-максимальных подгрупп, то каждая максимальная подгруппа единичная и  $G$  – группа простого порядка.

(2) Пусть в группе  $G$  нет 3-максимальных подгрупп. Тогда каждая 2-максимальная подгруппа единичная, а каждая максимальная подгруппа имеет простой порядок. Если  $G$  нильпотентна, то, очевидно,  $|G| \in \{p^2, pq\}$ . Если  $G$  ненильпотентна, то  $G$  – группа Шмидта и  $|G| = pq$  согласно лемме 2.7.  $\square$

**Теорема 4.4.** *Если в группе  $G$  каждая 2-максимальная подгруппа является  $n\Phi$ -подгруппой, то либо группа  $G$  нильпотентна, либо является группой порядка  $pq$ , где  $p$  и  $q$  – различные простые числа.*

**Доказательство.** Пусть  $M$  – максимальная подгруппа группы  $G$  и  $H$  – максимальная подгруппа в  $M$ . Тогда  $H$  – 2-максимальная подгруппа группы  $G$  и по условию подгруппа  $H$  является  $n\Phi$ -подгруппой группы  $G$ . По лемме 2.2 подгруппа  $H$  будет  $n\Phi$ -подгруппой в  $M$ . Это верно для любой максимальной подгруппы  $H$  из  $M$  и для любой максимальной подгруппы  $M$  группы  $G$ . По предложению 4.1 все максимальные подгруппы в группе  $G$  нильпотентны.

Предположим, что группа  $G$  ненильпотентна. Тогда  $G$  – группа Шмидта. Согласно лемме 2.7 группа  $G = P \times Q$ , где  $P$  – нормальная в  $G$  силовская  $p$ -подгруппа,  $Q = \langle y \rangle$  – ненормальная в  $G$  циклическая силовская  $q$ -подгруппа, подгруппа  $\langle y^q \rangle$  содержится в центре группы  $G$ , и  $P/\Phi(P)$  – главный фактор группы  $G$ .

Допустим, что  $|P| > p$ . Ясно, что  $P \times \langle y^q \rangle$  – максимальная подгруппа группы  $G$ , а  $H = P_1 \times \times \langle y^q \rangle \neq 1$  – 2-максимальная подгруппа группы  $G$ , где  $P_1$  – максимальная подгруппа из  $P$ . Согласно лемме 2.1 подгруппа  $\Phi(H) = \Phi(P_1) \times \langle y^{q^2} \rangle$ . По условию подгруппа  $H$  является  $n\Phi$ -подгруппой

группы  $G$ . Поэтому существует нормальная в  $G$  подгруппа  $K$  такая, что  $G = HK$  и  $H \cap K \leq \Phi(H)$ . Так как  $G > H \neq 1$ , то  $K < G$ , поэтому  $H$  и  $K$  нильпотентны. Согласно [3, теорема VI.4.6] подгруппа  $Q = \langle y^q \rangle K_q$ , где  $K_q$  – силовская  $q$ -подгруппа в  $K$ . Циклическая  $q$ -подгруппа не является произведением двух собственных подгрупп [2, теорема 1.24] и  $\langle y^q \rangle < Q$ , поэтому  $Q = K_q$ . Но  $K$  нормальна в  $G$  и нильпотентна, значит подгруппа  $Q = K_q$  должна быть нормальной в  $G$ , противоречие. Поэтому допущение « $|P| > p$ » неверно и  $|P| = p$ .

Теперь  $Q$  – максимальная в  $G$  подгруппа. Предположим, что  $|Q| > q$ . Тогда  $\langle y^q \rangle$  – неединичная 2-максимальная подгруппа группы  $G$  и  $\Phi(\langle y^q \rangle) = \langle y^{q^2} \rangle$ . По условию подгруппа  $\langle y^q \rangle$  является  $n\Phi$ -подгруппой группы  $G$ . Поэтому существует нормальная в  $G$  подгруппа  $N$  такая, что  $G = \langle y^q \rangle N$  и  $\langle y^q \rangle \cap N \leq \langle y^{q^2} \rangle$ . Так как  $G > Q > \langle y^q \rangle \neq 1$ , то  $N < G$ , поэтому  $N$  нильпотентна.

Согласно [3, теорема VI.4.6]  $Q = \langle y^q \rangle N_q$ , где  $N_q$  – силовская  $q$ -подгруппа в  $N$ . Циклическая  $q$ -подгруппа  $Q$  не является произведением двух собственных подгрупп [2, теорема 1.24] и  $\langle y^q \rangle < Q$ , поэтому  $Q = N_q$ . Но  $N$  нормальна в  $G$  и нильпотентна, значит, подгруппа  $Q = N_q$  должна быть нормальной в  $G$ , противоречие. Поэтому допущение неверно и  $|Q| = q$ .  $\square$

**Теорема 4.5.** *Если в группе  $G$  каждая 3-максимальная подгруппа является  $n\Phi$ -подгруппой, то либо  $G$  нильпотентна, либо  $|G| \in \{p^2q, pqr\}$ .*

**Доказательство.** Пусть в группе  $G$  каждая 3-максимальная подгруппа является  $n\Phi$ -подгруппой. Если в группе  $G$  нет 3-максимальных подгрупп, то  $|G| \in \{p^2, pq\}$  согласно лемме 4.3 и теорема справедлива. Далее считаем, что в группе  $G$  есть 3-максимальные подгруппы. Согласно лемме 2.2, предложению 4.1 и теореме 4.4 каждая 2-максимальная подгруппа группы  $G$  нильпотентна, а каждая максимальная подгруппа в  $G$  либо нильпотентна, либо является ненильпотентной подгруппой порядка  $pq$ .

Случай 1:  $G = P \times Q$  – группа Шмидта.

Пусть  $|P| = p^a$ ,  $|Q| = q^b$  и  $1 < Q_1 < \dots < Q_{b-1} < Q$ . Здесь и далее запись  $X < Y$  означает, что  $X$  – максимальная подгруппа в группе  $Y$ . Поскольку  $P$  нормальна в  $G$ , то существует цепь подгрупп

$$1 < P_1 < \dots < P_{a-1} < P < PQ_1 < \dots < PQ_{b-1} < G. \quad (1)$$

Если  $a + b \leq 3$ , то  $|G| \in \{p^2q, pq^2\}$  и можно считать, что группа  $G$  из заключения теоремы. При  $a + b > 3$  из (1) следует, что в группе  $G$  существует нетривиальная 3-максимальная подгруппа  $H$ , порядок которой делится на  $p$ , а индекс делится на  $q$ . По условию  $H$  является  $n\Phi$ -подгруппой группы  $G$ , поэтому существует нормальная в  $G$  подгруппа  $K$  такая, что  $G = KH$  и  $(K \cap H) \leq \Phi(H)$ . Так как  $1 < H < G$ , то  $1 < K < G$  по лемме 2.2. Фактор-группа  $G/K \cong (H/(K \cap H))$  нильпотентна, поэтому  $P = G^{\mathfrak{N}} \leq K$ . Согласно лемме 2.7 подгруппа  $Q$  не содержится в  $K$  и  $Q = K_q H_q$  для некоторых силовских  $q$ -подгрупп  $K_q$  и  $H_q$  из  $K$  и  $H$  соответственно [3, теорема VI.4.6]. Но циклическая  $q$ -подгруппа не является произведением двух собственных подгрупп [2, теорема 1.24], поэтому  $Q = H_q \leq H$ , так как  $Q$  не содержится в  $K$ . Получили противоречие с тем, что индекс подгруппы  $H$  в группе  $G$  делится на  $q$ .

Случай 2:  $G$  не является группой Шмидта.

В этом случае группа  $G$  содержит ненильпотентную максимальную подгруппу  $M = C_p \times C_q$  порядка  $pq$ ,  $p > q$ ,  $q$  делит  $(p - 1)$ . Если  $|G : M|$  – простое число, то  $|G| \in \{p^2q, pq^2, pqr\}$  и теорема справедлива. Далее считаем, что  $|G : M|$  – не простое число, в частности, группа  $G$  несверхразрешима и  $M$  – ненормальная в  $G$  подгруппа. Поскольку каждая максимальная подгруппа группы  $G$  сверхразрешима, то  $G$  является минимальной несверхразрешимой группой и применима лемма 2.8. Пусть  $T = G_t = G^{\mathfrak{M}}$ ,  $t$  – простое число, и случай  $t \in \{p, q\}$  не исключается.

Если  $|\pi(G)| = 3$ , то  $t \notin \{p, q\}$ , а из леммы 2.8 заключаем, что  $G = T \rtimes M$  и  $T$  – минимальная нормальная подгруппа в группе  $G$ , поскольку  $M < G$ . Так как  $|T| > t$ , то существует подгруппа  $H$  такая, что  $1 < H < T < TC_p < G$ . По условию  $H$  является  $n\Phi$ -подгруппой группы  $G$ . Поскольку  $T$  элементарна, то  $\Phi(H) = 1$  и существует нормальная в  $G$  подгруппа  $K$  такая, что  $G = K \rtimes H$ . Фактор-группа  $G/K \cong H$  нильпотентна, поэтому  $T = G_t = G^{\mathfrak{M}} \leq K$  и  $G = K \rtimes H \leq KT = K$ , противоречие.

Пусть  $|\pi(G)| = 2$ . В этом случае  $t \in \{p, q\}$ ,  $T = G_p$  или  $T = G_q$  и  $G = T \rtimes C_s$ , поскольку  $T \cap C_s = 1$ , где  $s = \{p, q\} \setminus \{t\}$ . Так как  $|T/\Phi(T)| > t$ , то существует 2-максимальная в  $T$  подгруппа  $H$  такая, что  $\Phi(T) \leq H < T_1 < T < G$ . По условию  $H$  является  $n\Phi$ -подгруппой группы  $G$ , поэтому

существует нормальная в  $G$  подгруппа  $K$  такая, что  $G = KH$  и  $(K \cap H) \leq \Phi(H)$ . Фактор-группа  $G/K \cong (H/(K \cap H))$  нильпотентна, поэтому  $T = G^{\mathfrak{U}} \leq K$  и  $G = KH \leq KT = K$ , противоречие.  $\square$

### 5. Группы с некоторыми примарными $n\Phi$ -подгруппами

Группы с  $n\Phi$ -силовскими подгруппами и  $n\Phi$ -подгруппами простых порядков рассматривались в [4]. Теперь рассмотрим случай, когда  $n\Phi$ -подгруппами являются подгруппы, порядки которых – квадраты простых чисел.

**Теорема 5.1.** *Если в группе  $G$  для каждого  $p \in \pi(G)$  любая подгруппа порядка  $p^2$  является  $n\Phi$ -подгруппой, то группа  $G$  сверхразрешима.*

**Доказательство.** Воспользуемся индукцией по порядку группы. По лемме 2.2 условию теоремы удовлетворяет каждая подгруппа, поэтому следует считать, что  $G$  – минимальная несверхразрешимая группа. Согласно лемме 2.8 группа  $G = P \rtimes T$ , где  $P = G^{\mathfrak{U}}$  – силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$ , а  $P/\Phi(P)$  является минимальной нормальной подгруппой в  $G/\Phi(G)$  и  $|P/\Phi(P)| > p$ . Пусть  $V$  – подгруппа порядка  $p^2$ . По условию существует нормальная в  $G$  подгруппа  $K$  такая, что  $G = VK$  и  $V \cap K \leq \Phi(V)$ . Если  $V = P$ , то

$$\Phi(V) = 1, K = T, G = V \times T, T \in \mathfrak{U}, G \in \mathfrak{U},$$

противоречие. Поэтому  $V < P$  и  $P = VK_p$  согласно [3, теорема VI.4.6], где  $K_p$  – силовская  $p$ -подгруппа в группе  $K$ . Так как  $K$  нормальна в  $p$ -замкнутой группе  $G$ , то  $K$   $p$ -замкнута и  $K_p$  нормальна в  $G$ . Из равенства  $P = VK_p$  следует, что  $K_p$  не содержится в  $\Phi(P)$ . Подгруппа  $K_p\Phi(P)$  нормальна в  $G$ , а  $P/\Phi(P)$  – минимальная нормальная в  $G/\Phi(P)$  подгруппа, поэтому  $K_p\Phi(P) = P$  и  $K_p = P$ . Но в этой ситуации  $V \leq K$ , что противоречит включению  $V \cap K \leq \Phi(V)$ .  $\square$

В условиях теоремы 5.1 группа  $G$  может быть ненильпотентной, примером служит диэдральная группа порядка 12.

В [4, предложение 1.6] установлена нильпотентность группы с  $n\Phi$ -силовскими подгруппами. Развивая этот результат, мы доказываем следующую теорему.

**Теорема 5.2.** *Если в группе  $G$  каждая нециклическая силовская подгруппа является  $n\Phi$ -подгруппой, то группа  $G$  сверхразрешима и содержит нормальную холлову подгруппу  $H$ , в которой все силовские подгруппы циклические, а фактор-группа  $G/H$  нильпотентна.*

**Доказательство.** Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть  $G_p$  – силовская  $p$ -подгруппа в группе  $G$  для наименьшего  $p \in \pi(G)$ . Если  $G_p$  циклическая, то  $G$   $p$ -нильпотентна [3, теорема IV.2.8]. Если  $G_p$  нециклическая, то по условию она является  $n\Phi$ -подгруппой и  $G$  опять  $p$ -нильпотентна [4, лемма 1.5]. Итак, в любом случае в  $G$  существует нормальная  $p'$ -холлова подгруппа  $G_{p'}$ . Пусть  $Q$  – нециклическая силовская подгруппа из  $G_{p'}$ . Тогда  $Q$  является силовской подгруппой в  $G$  и по условию  $Q$  является  $n\Phi$ -подгруппой в  $G$ . Согласно лемме 2.2 подгруппа  $Q$  является  $n\Phi$ -подгруппой в  $G_{p'}$ . Следовательно, для  $G_{p'}$  выполняется условие теоремы. По индукции подгруппа  $G_{p'}$  сверхразрешима, в частности, подгруппа  $G_{p'}$  дисперсивна по Оре. Так как  $p$  – наименьшее в  $\pi(G)$  и  $G_{p'}$  нормальна в  $G$ , то  $G$  дисперсивна по Оре. В частности, группа  $G$  разрешима.

Разобьем  $\pi(G)$  на два подмножества  $\sigma$  и  $\tau$ :

$$\sigma = \{p \in \pi(G) \mid G_p \text{ циклическая}\}, \tau = \{q \in \pi(G) \mid G_q \text{ нециклическая}\}.$$

Так как силовская подгруппа  $G_q$  является  $n\Phi$ -подгруппой для каждого  $q \in \tau$ , то согласно [4, лемма 1.5] группа  $G$   $q$ -нильпотентна для каждого  $q \in \tau$ . Поэтому

$$\bigcap_{q \in \tau} G_q = G_\sigma \trianglelefteq G.$$

В  $\tau$ -холловой подгруппе  $G_\tau$  каждая силовская подгруппа будет  $n\Phi$ -подгруппой. Согласно [4, предложение 1.6] подгруппа  $G_\tau \cong G/H$  нильпотентна.

Осталось показать сверхразрешимость группы  $G$ . Если  $\sigma = \emptyset$ , то  $\tau = \pi(G)$  и  $G$  нильпотентна [4, предложение 1.6]. Пусть  $\sigma \neq \emptyset$  и  $p$  – наибольшее в  $\sigma$ . Согласно [3, теорема IV.2.11]  $\sigma$ -холлова подгруппа  $G_\sigma = H$  дисперсивна по Оре, поэтому  $G_p$  нормальна в  $G$  и  $G = G_p \rtimes G_{p'}$ . По лемме 2.2 в подгруппе  $G_{p'}$  каждая нециклическая силовская подгруппа будет  $n\Phi$ -подгруппой. По индукции

подгруппа  $G_{p'}$  сверхразрешима. Так как  $G_p$  циклическая и  $G/G_p \cong G_{p'}$  сверхразрешима, то группа  $G$  сверхразрешима [2, лемма 4.46 (1)].  $\square$

Диэдральная группа  $D_{12}$  порядка 12 удовлетворяет условиям теорем 5.1 и 5.2, поэтому в этих теоремах группа  $G$  может быть ненильпотентной.

**Следствие 5.3.** *Если в группе  $G$  каждая ненормальная нециклическая силовская подгруппа является  $n\Phi$ -подгруппой, то  $G = (G_\gamma \rtimes G_\sigma) \rtimes G_\tau$ , где*

$$\gamma = \{p \in \pi(G) \mid G_p \text{ нормальна в } G\};$$

$$\sigma = \{p \in \pi(G) \mid G_p \text{ циклическая}\};$$

$$\tau = \{p \in \pi(G) \mid G_p \text{ является } n\Phi\text{-подгруппой группы } G\}.$$

**Доказательство.** Произведение всех нормальных в группе  $G$  силовских подгрупп будет нильпотентной нормальной  $\gamma$ -холловой подгруппой  $G_\gamma$ . По теореме Шура–Цассенхауза для подгруппы  $G_\gamma$  имеется дополнение в группе  $G$ , и ясно, что это дополнение будет  $\{\sigma \cup \tau\}$ -холловой подгруппой  $G_{\{\sigma \cup \tau\}}$ . В силу леммы 2.2 к подгруппе  $G_{\{\sigma \cup \tau\}}$  применима теорема 5.1. В итоге получаем  $G = (G_\gamma \rtimes G_\sigma) \rtimes G_\tau$ .  $\square$

**Следствие 5.4.** *Если в группе  $G$  каждая ненормальная силовская подгруппа является  $n\Phi$ -подгруппой, то группа  $G$  содержит нормальную нильпотентную холлову подгруппу  $H$  такую, что фактор-группа  $G/H$  нильпотентна.*

Знакопеременная группа  $A_4$  показывает, что в условиях следствий 5.3 и 5.4 группа  $G$  может быть несверхразрешимой.

Исследования выполнены в рамках задания Государственной программы научных исследований «Конвергенция – 2030» при финансовой поддержке НАН Беларуси, проект 20260384.

### Литература

1. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
2. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006.
3. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1967.
4. Ходанович Д. А. Конечные группы с  $n\Phi$ -подгруппами простых порядков // Проблемы физики, математики и техники. 2017. № 3. С. 66–68.
5. Горчаков Ю. М. Примарно факторизуемые группы // Доклады Академии наук СССР. 1960. Т. 134. С. 23–24.
6. Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980.
7. Ma Xuanlong. On  $F$ -normal subgroups of finite groups // Ricerche mat. 2015. Vol. 64. P. 93–98.
8. Шмидт О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные // Математический сб. 1924. Т. 31. С. 366–372.
9. Huppert B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Zeitschr. 1954. Bd. 60. S. 409–434.
10. Doerk K. Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen // Math. Zeitschr. 1966. Bd. 91. S. 198–205.
11. The GAP Group: GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Ver. GAP 4.11.0 [Electronic resource]: A system for computational discrete algebra. Mode of access: <https://www.gap-system.org>. Date of access: 29.05.2025.
12. Konovalova M. N., Monakhov V. S., Sokhor I. L. On 2-maximal subgroups of finite groups // Communications in Algebra. 2022. Vol. 50. P. 96–103.
13. Лю А., Ван С., Сафонов В. Г., Скиба А. Н. Конечные группы с системами обобщенно нормальных подгрупп // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 4. С. 672–685.
14. Сафонов В. Г., Скиба А. Н. Характеризация некоторых классов конечных групп // Проблемы физики, математики и техники. 2024. № 4 (61). С. 57–64.

## References

1. Shemetkov L. A. *Formations of Finite Groups*. Moscow, Nauka, 1987 (in Russian).
2. Monakhov V. S. *Introduction to the Theory of Finite Groups and Their Classes*. Minsk, Vysshaja shkola, 2006 (in Russian).
3. Huppert B. *Endliche Gruppen I*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1967.
4. Khadanovich D. A. Finite groups with  $n\Phi$ -subgroups of prime orders. *Problemy Fiziki, Matematiki i Tekhniki*, 2017, no. 3, pp. 66–68 (in Russian).
5. Gorchakov Yu. M. Primarily factorizable groups. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1960, vol. 134, pp. 23–24 (in Russian).
6. Chernikov S. N. *Groups with Given Properties of a System of Subgroups*. Moscow, Nauka, 1980. 384 p. (in Russian).
7. Ma Xuanlong. On  $F$ -normal subgroups of finite groups. *Ricerche mat*, 2015, vol. 64, pp. 93–98.
8. Schmidt O. Groups, all subgroups of which are special. *Matematicheskii Sbornik*, 1924, vol. 31, pp. 366–372. (in Russian).
9. Huppert B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen. *Math. Zeitschr*, 1954, vol. 60, pp. 409–434.
10. Doerk K. Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen. *Math. Zeitschr*, 1966, vol. 91, pp. 198–205.
11. The GAP Group: GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Ver. GAP 4.11.0 [Electronic resource]: A system for computational discrete algebra. Mode of access: <https://www.gap-system.org>. Date of access: 29.05.2025.
12. Konovalova M. N., Monakhov V. S., Sokhor I. L. On 2-maximal subgroups of finite groups. *Communications in Algebra*, 2022, vol. 50, pp. 96–103.
13. Liu A., Wang S., Safonov V. G., Skiba A. N. Finite groups with systems of generalized normal subgroups. *Siberian Mathematical Journal*, 2024, vol. 65, pp. 793–803.
14. Safonov V. G., Skiba A. N. Characterization of some classes of finite groups. *Problemy Fiziki, Matematiki i Tekhniki*, 2024, no. 4 (61), pp. 57–64 (in Russian).

**ВЕРЕТЕНООБРАЗНОСТЬ СИСТЕМ ВЕСОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ  
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП МАЛОГО РАНГА И РЕГУЛЯРНЫЕ  
УНИПОТЕНТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ**

**А. А. Осиновская**

*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
e-mail: anna@im.bas-net.by*

**Поступила:** 09.04.2026

**Исправлена:** 08.05.2026

**Принята:** 29.05.2026

**Ключевые слова:** классические линейные группы, представления, унипотентные элементы, регулярные унипотентные элементы, блоки Жордана.

**Аннотация.** Рассматриваются неприводимые представления простых алгебраических групп над полем  $\mathbb{C}$  комплексных чисел. Для групп типа  $A_2$ ,  $A_3$  и  $C_2$  получено обобщение знаменитой теоремы Дынкина о веретенообразности системы весов. Это позволило описать Жорданову нормальную форму унипотентных элементов в неприводимых представлениях таких групп, точнее определить размерности всех блоков Жордана образов унипотентных элементов без нахождения количества этих блоков.

**THE SPINDLE PROPERTY OF WEIGHT SYSTEMS OF REPRESENTATIONS OF SMALL  
RANK ALGEBRAIC GROUPS AND REGULAR UNIPOTENT ELEMENTS**

**A. A. Osinovskaya**

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
e-mail: anna@im.bas-net.by*

**Received:** 09.04.2026

**Revised:** 08.05.2026

**Accepted:** 29.05.2026

**Keywords:** classical linear groups, representations, unipotent elements, regular unipotent elements, Jordan blocks.

**Abstract.** We study irreducible representations of simple algebraic groups over the field  $\mathbb{C}$  of complex numbers. For groups of type  $A_2$ ,  $A_3$  and  $C_2$  a generalization of the famous Dynkin theorem on the spindle property of the weight system is obtained. This has made it possible to describe the Jordan normal form of unipotent elements in irreducible representations of such groups, i. e., to determine the dimensions of all Jordan blocks of the images of unipotent elements without finding the number of these blocks.

**1. Введение**

Пусть  $G$  – простая односвязная алгебраическая группа над  $\mathbb{C}$ . Обозначим символами  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  базис системы корней группы  $G$  относительно фиксированного максимального тора  $T \subset G$  и подгруппы Бореля  $B \supset T$ ,  $\omega_1, \dots, \omega_r$  – соответствующие этому базису фундаментальные веса. Пусть  $V$  – неприводимый конечномерный модуль группы  $G$ , он однозначно определяется своим старшим весом  $\omega$ ,  $\mathcal{X}$  – множество всех весов модуля  $V$ . Тогда

$$\omega = a_1\omega_1 + \dots + a_r\omega_r,$$

а произвольный вес  $\lambda \in \mathcal{X}$  можно записать в виде

$$\lambda = \omega - k_1\alpha_1 - \dots - k_r\alpha_r,$$

где  $a_1, \dots, a_r, k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$  (множество всех неотрицательных целых чисел) [1, §12]. Разделим  $\mathcal{X}$  на уровни

$$L_i = \{\lambda \in \mathcal{X} \mid k_1 + \dots + k_r = i\}.$$

Всюду далее  $n$  – индекс последнего уровня в  $\mathcal{X}$ ,  $a = [n/2]$  (целая часть числа  $n/2$ ),  $S_i$  – сумма кратностей весов на уровне  $L_i$ . Если  $m_\lambda$  – кратность веса  $\lambda$ , то

$$S_i = \sum_{\lambda \in L_i} m_\lambda.$$

Справедлива знаменитая теорема Дынкина о «веретенообразности» систем весов.

**Теорема 1.1 [2].**

$$S_i = S_{n-i}$$

для  $0 \leq i \leq n$  и

$$S_{i-1} \leq S_i,$$

для  $1 \leq i \leq a$ .

В. Кац [3, предложение 10.10] доказал формулу для размерностей уровней:

$$\sum_{i \geq 0} S_i q^i = \prod_{\alpha \in \Phi_+^*} \frac{1 - q^{\langle \omega + \rho, \alpha \rangle}}{1 - q^{\langle \rho, \alpha \rangle}}. \quad (1)$$

Здесь  $q$  – независимая переменная,  $\Phi_+^*$  – множество всех положительных корней дуальной системы корней,  $\rho$  – полусумма положительных корней, а  $\langle \rho, \alpha \rangle$  – значение веса  $\rho$  на корне  $\alpha$ .

Из этой формулы сразу же следует, что

$$n = \begin{cases} 2a_1 + 2a_2, & G = SL_3(\mathbb{C}); \\ 3a_1 + 4a_2 + 3a_3, & G = SL_4(\mathbb{C}); \\ 3a_1 + 4a_2, & G = Sp_4(\mathbb{C}). \end{cases}$$

Мы доказали следующую теорему.

**Теорема 1.2.** Пусть  $V$  – неприводимый конечномерный модуль над алгебраической группой  $G$  типа  $A_2$ ,  $C_2$  или  $A_3$  со старшим весом  $\omega$ . Тогда

$$S_{i-1} < S_i$$

для  $1 \leq i \leq a$ , за исключением следующих случаев, когда  $S_{i-1} = S_i$ .

(i)  $G = SL_3(\mathbb{C})$ ,

1.  $a_1 a_2 = 0$ ,  $i = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ;
2.  $a_1 a_2 \neq 0$  и по крайней мере одно из них нечетно,  $i = a$ ;
3.  $a_1 a_2 \neq 0$  и оба четны,  $i = a - 1$ .

(ii)  $G = SL_4(\mathbb{C})$ , тройки  $(a_1, a_2, a_3)$  и уровни  $i$  перечислены в табл. 1.

(iii)  $G = Sp_4(\mathbb{C})$ , пары  $(a_1, a_2)$  и уровни  $i$  перечислены в табл. 2.

Теорема 1.2 позволяет найти размерности блоков Жордана унитарных элементов в представлениях таких групп. Заметим, что каждый унитарный элемент  $u \in G$  лежит в некоторой замкнутой в топологии Зарисского подгруппе  $SL_2(\mathbb{C})$  (или, иначе говоря,  $A_1$ -подгруппе), причем для фиксированного  $u$  такая подгруппа единственна с точностью до сопряжения (это следует из теоремы Джекобсона–Морозова для алгебр Ли [4, гл. VIII, § 11, предложение 2]). Следовательно, изучение формы Жордана унитарного элемента в данном представлении сводится к изучению неприводимых компонент его ограничения на подгруппу  $SL_2(\mathbb{C})$ , т. е. к нахождению так называемых правил ветвления. Очевидно, что для разных вложений  $SL_2(\mathbb{C})$  в  $G$  получаются разные неприводимые компоненты.

Напомним, что подгруппа полупростой алгебраической группы называется подсистемной, если она порождается всеми корневыми подгруппами этой группы, ассоциированными с некоторой подсистемой ее корней. Известные правила ветвления касаются ограничений представлений классических алгебраических групп на подсистемные подгруппы. Они восходят к работам Г. Вейля (для вложений специальных линейных групп [5]) и Ф. Мурнагана (для вложений специальных ортогональных и симплектических групп [6]). Д. Литтлвуд [7] нашел правила ветвлений для естественных вложений групп  $Sp_n$  и  $SO_n$  в  $GL_n$ .

Существует еще один важный класс подгрупп простых алгебраических групп, не являющихся подсистемными, – так называемые главные  $A_1$ -подгруппы (подгруппы типа  $A_1$ , содержащие регулярный унитарный элемент). В статье М. Либека, Г. Зейца и Д. Тестерман [8] классифицированы все неприводимые модули простых алгебраических групп, в которых в ограничениях

на произвольные  $A_1$ -подгруппы (в том числе главные) кратности всех композиционных факторов равны 1. А. Риццоли и Д. Тестерман [9] получили аналогичный результат для групп над полем  $K$  характеристики  $p$  большей числа Кокстера  $h$  и главных  $A_1$ -подгрупп. Однако до сих пор известно очень мало про ограничения на главные  $A_1$ -подгруппы даже в случае поля комплексных чисел. Мы описали ограничения на все  $A_1$ -подгруппы (и соответственно структуру унитарных элементов) для произвольных представлений групп типа  $A_2$ ,  $A_3$  и  $C_2$ .

Группа  $G$  типа  $A_2$ , т. е.  $SL_3(\mathbb{C})$ , имеет два класса нетривиальных унитарных элементов. В качестве их представителей можно взять корневой унитарный элемент  $u_1$ , имеющий один блок Жордана размерности 2 и один блок размерности 1, и регулярный унитарный элемент  $u_2$ , имеющий один блок Жордана размерности 3.

**Теорема 1.3.** (i) *Образ корневого унитарного элемента в неприводимом представлении группы  $SL_3(\mathbb{C})$  со старшим весом  $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$  имеет блоки Жордана всех размерностей  $i$  при  $1 \leq i \leq a_1 + a_2 + 1$ .*

(ii) *Образ регулярного унитарного элемента имеет блоки Жордана в точности следующих размерностей:*

1.  $1 \leq i \leq 2a_1 + 2a_2 + 1$ , где  $i \equiv 2a_1 + 2a_2 + 1 \pmod{4}$ , если  $a_1a_2 = 0$ ;
2.  $3, 5, \dots, 2a_1 + 2a_2 + 1$ , если  $a_1a_2 \neq 0$  и по крайней мере одно из них нечетно;
3.  $1, 5, \dots, 2a_1 + 2a_2 + 1$  (отсутствует только 3), если  $a_1a_2 \neq 0$  и оба являются четными.

Группа  $G = SL_4(\mathbb{C})$  имеет четыре класса сопряженности неединичных унитарных элементов. В качестве их представителей можно взять корневой унитарный элемент  $u_1$ , имеющий один блок Жордана размерности 2 и два блока размерности 1; элемент  $u_2$ , имеющий два блока размерности 2;  $u_3$ , имеющий один блок размерности 3 и один блок размерности 1; а также регулярный унитарный элемент  $u_4$  с одним блоком Жордана размерности 4.

Обозначим символом  $V^*$  модуль, дуальный к  $V$ . Форма Жордана унитарных элементов одинакова для  $V$  и  $V^*$ . Старший вес модуля  $V^*$  равен  $\omega^* = a_3\omega_1 + a_2\omega_2 + a_1\omega_3$ . Следовательно, в дальнейшем можно предполагать, что  $a_1 \geq a_3$ .

Таблица 1. Список исключительных  $a_1, a_2, a_3$  для  $SL_4(\mathbb{C})$ , где  $a_1 \geq a_3$

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$i$ , для которых $S_{i-1} = S_i$	Размерности отсутствующих блоков Жордана
1	0	0	1	$3a_1 + 4a_2 + 3a_3 - 1 = 2$
$1 \pmod{2} > 1$	0	0	$1, a$	$3a_1 + 4a_2 + 3a_3 - 1, 2$
2	0	0	$1, a$	$3a_1 + 4a_2 + 3a_3 - 1 = 5, 1$
$2 \pmod{4} > 2$	0	0	$1, a - 2, a$	$3a_1 + 4a_2 + 3a_3 - 1, 5, 1$
$0 \pmod{4}$	0	0	$1, a - 1$	$3a_1 + 4a_2 + 3a_3 - 1, 3$
0	1	0	1	$3a_1 + 4a_2 + 3a_3 - 1 = 3$
0	$> 1$	0	$1, a - 1$	$3a_1 + 4a_2 + 3a_3 - 1, 3$
$1 \pmod{4}$	0	1	$a$	1
$0 \pmod{4} > 0$	0	2	$a$	1
2	$> 0$	0	$a$	1
$2 \pmod{4} > 2$	2	0	$a$	1
$2 \pmod{4} > 2$	1	0	$a$	1
1	1	1	$a$	1

**Теорема 1.4.** (i) *Образ корневого унитарного элемента в неприводимом представлении группы  $SL_4(\mathbb{C})$  со старшим весом  $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3$  имеет блоки Жордана всех размерностей  $i$  при  $1 \leq i \leq a_1 + a_2 + a_3 + 1$ .*

(ii) *Образ унитарного элемента с двумя блоками Жордана размерности 2 имеет блоки всех размерностей  $i \equiv a_1 + 2a_2 + a_3 + 1 \pmod{2}$  при  $1 \leq i \leq a_1 + 2a_2 + a_3 + 1$ .*

(iii) *Образ унитарного элемента с блоками Жордана размерностей 3 и 1 имеет блоки всех размерностей  $i \equiv 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 1 \pmod{2}$  при  $1 \leq i \leq 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 1$ , за исключением случая  $a_1 = a_3 = 0, a_2 \equiv 1 \pmod{2}$ , когда отсутствуют блоки размерности 1.*

(iv) *Образ регулярного унитарного элемента имеет блоки всех размерностей  $i \equiv 3a_1 + 4a_2 + 3a_3 + 1 \pmod{2}$  при  $1 \leq i \leq 3a_1 + 4a_2 + 3a_3 + 1$ , за исключением троек  $(a_1, a_2, a_3)$*

и размерностей блоков, перечисленных в табл. 1. В частности, если  $\min\{a_1, a_2, a_3\} > 1$ , то существуют блоки всех возможных размерностей.

Таблица 2. Список исключительных  $a_1, a_2$  для  $Sp_4(\mathbb{C})$

$a_1$	$a_2$	$i$ , для которых $S_{i-1} = S_i$	Размерности отсутствующих блоков Жордана
$1 \pmod{2} > 1$	0	$1, a$	$3a_1 + 4a_2 - 1, 2$
1	$0, 2 \pmod{3}$	$a$	2
1	$1 \pmod{3}$	$a - 1$	4
3	$3 \pmod{6}$	$a$	2
2	0	$1, a$	$3a_1 + 4a_2 - 1 = 5, 1$
$2 \pmod{4} > 2$	0	$1, a - 2, a$	$3a_1 + 4a_2 - 1, 5, 1$
$0 \pmod{4}$	0	$1, a - 1$	$3a_1 + 4a_2 - 1, 3$
0	1	$1, a$	$3a_1 + 4a_2 - 1 = 3, 1$
0	2	$1, a - 1, a$	$3a_1 + 4a_2 - 1 = 7, 3, 1$
0	3	$1, a - 2, a - 1$	$3a_1 + 4a_2 - 1 = 11, 5, 3$
0	$0 \pmod{3} > 3$	$1, a - 5, a - 2, a - 1$	$3a_1 + 4a_2 - 1, 11, 5, 3$
0	$1, 2 \pmod{3} > 2$	$1, a - 3, a - 1, a$	$3a_1 + 4a_2 - 1, 7, 3, 1$
2	$> 0$	$a$	1
$0 \pmod{2} > 2$	1	$a$	1
$2 \pmod{4} > 2$	2	$a$	1
6	$1, 2, 4, 5 \pmod{6} > 2$	$a$	1
4, 10	$1, 4 \pmod{6} > 1$	$a$	1
$2, 6, 10 \pmod{12}$ и $> 6$	4	$a$	1

Утверждения (i) теорем 1.3 и 1.4 являются частным случаем следующего более общего результата.

**Предложение 1.5.** *Образ корневого унитарного элемента  $u$  в неприводимом представлении группы  $SL_{r+1}(\mathbb{C})$  со старшим весом  $\omega = a_1\omega_1 + \dots + a_r\omega_r$  имеет блоки Жордана всех размерностей  $i$  для  $1 \leq i \leq a_1 + \dots + a_r + 1$ .*

Заметим, что это предложение является непосредственным следствием [10, теорема 1.1].

Наконец, рассмотрим группу типа  $C_2$ , т. е.  $G = Sp_4(\mathbb{C})$ . Она имеет три класса неединичных унитарных элементов. В качестве их представителей можно взять унитарный элемент  $u_1$ , соответствующий длинному корню, который имеет один блок Жордана размерности 2 и два блока размерности 1; унитарный элемент  $u_2$ , соответствующий короткому корню, который имеет два блока Жордана размерности 2; и регуляриный унитарный элемент  $u_3$  с одним блоком Жордана размерности 3.

**Теорема 1.6.** (i) *Образ унитарного элемента, соответствующего длинному корню, в неприводимом представлении алгебраической группы  $Sp_4(\mathbb{C})$  со старшим весом  $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$  имеет блоки Жордана всех размерностей  $i$  при  $1 \leq i \leq a_1 + a_2 + 1$ .*

(ii) *Образ унитарного элемента, соответствующего короткому корню, имеет блоки всех размерностей  $i \equiv a_1 + 2a_2 + 1 \pmod{2}$  при  $1 \leq i \leq a_1 + 2a_2 + 1$ .*

(iii) *Образ регуляриного унитарного элемента имеет блоки всех размерностей  $i \equiv 3a_1 + 4a_2 + 1 \pmod{2}$  при  $1 \leq i \leq 3a_1 + 4a_2 + 1$ , за исключением пар  $(a_1, a_2)$  и размерностей блоков, перечисленных в табл. 2. В частности, если  $a_1 > 10$  и  $a_2 > 4$ , то существуют блоки всех возможных размерностей.*

Заметим, что случай представлений группы типа  $A_2$  уже рассматривался нами в статье [11], но здесь приведено более короткое доказательство.

## 2. Уровни и унипотентные элементы в $A_2$

Положим  $f_i(q) = 1 + q + q^2 + \dots + q^i$ . Для группы  $SL_3(\mathbb{C})$  из формулы (1) получаем

$$\sum_{i \geq 0} S_i q^i = \frac{f_{a_1}(q) f_{a_2}(q) f_{a_1+a_2+1}(q)}{1+q}. \quad (2)$$

Из (2) сразу следует, что множество  $\mathcal{X}$  состоит из  $2a_1 + 2a_2 + 1$  уровней и что средний уровень имеет индекс  $a = a_1 + a_2$ . Следовательно, по теореме Дынкина достаточно найти размерности уровней от  $S_0$  до  $S_a$ . Положим  $S_{-1} = 0$ . Вместо того чтобы исследовать, когда коэффициенты ряда (2) совпадают, можно рассмотреть следующий ряд:

$$\sum_{i \geq 0} (S_i - S_{i-1}) q^i = \frac{(1 - q^{a_1+1}) f_{a_2}(q) f_{a_1+a_2+1}(q)}{1+q} \quad (3)$$

и определить, когда его коэффициенты равны нулю.

**Доказательство теоремы 1.2 (i).** Определим числа  $b_i$  для  $i \geq 0$  с помощью бесконечной последовательности

$$\sum_{i \geq 0} b_i q^i = (1 + q^2 + q^4 + \dots)(1 + q + q^2 + \dots) \quad (4)$$

и положим  $b_i = 0$  для  $i < 0$ . Анализ различных случаев в (3) показывает, что

$$S_i - S_{i-1} = b_i - b_{i-a_1-1} - b_{i-a_2-1} \quad \text{для } 0 \leq i \leq a.$$

Из (4) следует, что

$$b_i = \begin{cases} [i/2] + 1, & i \geq 0; \\ 0, & i < 0, \end{cases} \quad (5)$$

т. е.  $(b_i)_{i=-\infty}^{\infty}$  представляет собой следующий ряд

$$\dots, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, \dots$$

Отсюда следует искомое. □

Формула Каца позволяет явно записать кратности весов для группы  $SL_3(\mathbb{C})$ . Это было сделано в [11].

Теорема 1.2(i) и классические правила ветвления позволяют определить структуру унипотентных элементов в неприводимых представлениях группы  $SL_3(\mathbb{C})$ . Пусть  $u_1$  и  $u_2$  – корневой и регулярный унипотентный элемент, рассмотренные во введении. Как отмечалось выше,  $u_i \in H_i$ , где  $H_i \subset SL_3(\mathbb{C})$  – подгруппа типа  $A_1$ . Она является единственной с точностью до сопряжения. Обозначим символом  $V|H_i$  ограничение  $G$ -модуля  $V$  на  $H_i$ . Поскольку максимальный тор подгруппы  $H_i$  одномерен, можно отождествить множество всех весов этой подгруппы с множеством целых чисел  $\mathbb{Z}$ , а множество доминантных весов – с  $\mathbb{N}$ . Блоки Жордана размерности  $k+1$  в форме Жордана для  $u_i$  находятся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми компонентами веса  $k$  в модуле  $V|H_i$ . Следовательно, если мы хотим определить размерности блоков Жордана для  $u_i$ , достаточно найти старшие веса неприводимых компонент модуля  $V|H_i$ . Заметим, что это не определяет полностью Жорданову форму регулярных унипотентных элементов (т. е. мы находим только размерности блоков Жордана без учета их кратностей), поскольку кратность определяется числом  $S_i - S_{i-1}$ , а в теореме 1.2(i) найдено лишь, когда оно равно нулю, а когда будет ненулевым.

Рассмотрим произвольную простую алгебраическую группу  $G$  и ее регулярный унипотентный элемент  $u$ . Он лежит в замкнутой в топологии Зарисского  $A_1$ -подгруппе  $H$ .

**Лемма 2.1.** Пусть  $V$  – неприводимый  $G$ -модуль со старшим весом  $\omega$ . Тогда модуль  $V|H$  имеет неприводимые компоненты со старшими весами  $n - 2i$ , где  $0 \leq i \leq a$  и  $S_i - S_{i-1} > 0$ . Кроме того, число неприводимых компонент со старшим весом  $n - 2i$  равно  $S_i - S_{i-1}$ .

**Доказательство.** Из [8, раздел 2] следует, что все метки на помеченной диаграмме Дынкина регулярного унипотентного элемента равны 2 и существует максимальный тор  $T_H \subseteq H$ , такой, что  $T_H \subseteq T$  и гомоморфизм  $\tau : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ , определенный ограничением весов с  $T$  на  $T_H$ , отображает все

веса  $\alpha_i$  в 2. Обозначим  $\tau(\omega) = x$ . Тогда для произвольного веса  $\lambda = \omega - k_1\alpha_1 - \dots - k_r\alpha_r$  модуля  $V$  имеем

$$\lambda \mapsto x - 2(k_1 + \dots + k_r).$$

Эта формула означает, что векторы с весами, лежащими на одном и том же уровне модуля  $V$ , соответствуют векторам с одинаковыми весами в модуле  $V|H$ . Неприводимый  $H$ -модуль со старшим весом  $k$  является прямой суммой одномерных весовых пространств для следующих весов

$$k, k-2, \dots, -(k-2), -k.$$

Отсюда получаем, что  $x = n$ , кратность веса  $n - 2(k_1 + \dots + k_r)$  в  $V|H$  равна  $S_{k_1 + \dots + k_r}$ , а разность  $S_i - S_{i-1}$  ( $0 \leq i \leq a$ ) является числом неприводимых компонент со старшим весом  $n - 2i$  для модуля  $V|H$ . Если  $S_i = S_{i-1}$ , то компонента со старшим весом  $n - 2i$  отсутствует.  $\square$

Применяя лемму к алгебраической группе  $SL_3(\mathbb{C})$  и регулярному унитарному элементу  $u_2$  и учитывая, что в данном случае  $n = 2a_1 + 2a_2$ , получаем пункт (ii) теоремы 1.3.

### 3. Уровни в $C_2$

Исследование представлений группы типа  $C_2$  будет проводиться по той же схеме, что и для  $A_2$ . Однако поскольку данная система корней сложнее, формула для уровней не позволяет быстро ответить на вопрос, когда  $S_i = S_{i-1}$ . Поэтому приходится разделить доказательство на случаи в зависимости от значения веса  $\omega$  и использовать рекурсию.

#### 3.1. Формула для уровней

Используем формулу Каца. Для группы типа  $C_2$  она принимает вид

$$\sum_{i \geq 0} S_i q^i = \frac{f_{a_1}(q) f_{a_2}(q) f_{a_1+a_2+1}(q) f_{a_1+2a_2+2}(q)}{(1+q)(1+q+q^2)}. \quad (6)$$

Из (6) сразу следует, что множество  $X$  состоит из  $3a_1 + 4a_2 + 1$  уровней и что средний уровень имеет индекс  $a = [3a_1/2] + 2a_2$ . Сначала рассмотрим случаи, когда  $a_1$  или  $a_2$  малы. Затем рассмотрим случай, когда выражение

$$P(q) = \frac{f_{a_1}(q) f_{a_2}(q) f_{a_1+a_2+1}(q)}{(1+q)(1+q+q^2)}$$

является многочленом от  $q$  и, наконец, случай, когда  $P(q)$  не является многочленом.

Положим  $S_{-1} = 0$ . Как и в случае с  $A_2$ , часто удобно рассматривать разности  $S_i - S_{i-1}$

$$\sum_{i \geq 0} (S_i - S_{i-1}) q^i = \frac{(1 - q^{a_1+1}) f_{a_2}(q) f_{a_1+a_2+1}(q) f_{a_1+2a_2+2}(q)}{(1+q)(1+q+q^2)} \quad (7)$$

и выяснять, когда они равны нулю.

#### 3.2. Случай $a_1 = 0$

Рассмотрение случаев с малыми значениями коэффициентов аналогично доказательству теоремы 1.2(i). Подставляя  $a_1 = 0$  в формулу (7), получаем

$$\sum_{i \geq 0} (S_i - S_{i-1}) q^i = \frac{(1 - q^{a_2+1}) f_{a_2+1}(q) f_{2a_2+2}(q)}{(1+q)(1+q+q^2)}.$$

Определим целые числа  $b_i$  для  $i \geq 0$  с помощью бесконечного ряда

$$\sum_{i \geq 0} b_i q^i = (1 + q^2 + q^4 + \dots)(1 + q^3 + q^6 + \dots) \quad (8)$$

и положим  $b_i = 0$  для  $i < 0$ . Умножая скобки в (8), получаем

$$b_i = \begin{cases} [i/6] + 1, & i \not\equiv 1 \pmod{6}, \quad i \geq 0; \\ (i-1)/6, & i \equiv 1 \pmod{6}, \quad i \geq 0; \\ 0, & i < 0, \end{cases} \quad (9)$$

т. е.  $(b_i)_{i=-\infty}^{\infty}$  представляет собой следующий ряд:

$$\dots, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 4, 4, \dots$$

С помощью индукции легко видеть, что

$$S_i - S_{i-1} = b_i - b_{i-a_2-1} - b_{i-a_2-2} \text{ для } 0 \leq i \leq a = 2a_2. \quad (10)$$

Формула (10) означает, что если  $0 \leq i \leq a_2$ , то равенство  $S_i = S_{i-1}$  выполняется только для  $i = 1$ .

Пусть  $a_2 + 1 \leq i \leq a = 2a_2$ . Используя (10), получаем, что  $S_{i-1} = S_i$  в точности в следующих случаях:

1.  $a_2 \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $i = 2a_2 - 5$ ,  $i = 2a_2 - 2$ ,  $i = 2a_2 - 1$ ;
2.  $a_2 \equiv 1, 2 \pmod{3}$ ,  $i = 2a_2 - 3$ ,  $i = 2a_2 - 1$ ,  $i = 2a_2$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} S_0 = S_1, S_{a-1} = S_a & \text{ при } a_2 = 1, \\ S_0 = S_1, S_{a-2} = S_{a-1} = S_a & \text{ при } a_2 = 2, \\ S_0 = S_1, S_{a-3} = S_{a-2} = S_{a-1} & \text{ при } a_2 = 3, \\ S_0 = S_1, S_{a-6} = S_{a-5}, S_{a-3} = S_{a-2} = S_{a-1} & \text{ при } a_2 \equiv 0 \pmod{3} > 3, \\ S_0 = S_1, S_{a-4} = S_{a-3}, S_{a-2} = S_{a-1} = S_a & \text{ при } a_2 \equiv 1, 2 \pmod{3} > 2. \end{aligned}$$

Во всех остальных случаях  $S_{i-1} < S_i$ .

### 3.3. Случай $a_2 = 0$

Подставляя  $a_2 = 0$  в формулу (7), получаем

$$\sum_{i \geq 0} (S_i - S_{i-1})q^i = \frac{(1 - q^{a_1+1})f_{a_1+1}(q)f_{a_1+2}(q)}{(1+q)(1+q+q^2)}.$$

Определим числа  $b_i$  так же, как и ранее. По индукции получаем

$$S_i - S_{i-1} = b_i - b_{i-a_1-1} - b_{i-a_1-2} - b_{i-a_1-3} \text{ для } 0 \leq i \leq a = [3a_1/2]. \quad (11)$$

Легко проверить, что если  $0 \leq i \leq a_1$ , то равенство  $S_i = S_{i-1}$  выполняется только для  $i = 1$ . Пусть  $a_1 + 1 \leq i \leq a = [3a_1/2]$  (это возможно для  $a_1 \geq 2$ ). Теперь, используя (11), видим, что  $S_i = S_{i-1}$  в точности в следующих случаях:

1.  $a_1 \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $i = 3a_1/2 - 1$ ;
2.  $a_1 \equiv 2 \pmod{4}$ ,  $i = 3a_1/2 - 2$ ,  $i = 3a_1/2$ ;
3.  $a_1 \equiv 1 \pmod{2} > 1$ ,  $i = 3a_1/2 - 1/2$ .

Таким образом,

$$\begin{aligned} S_0 = S_1, S_{a-2} = S_{a-1} & \text{ при } a_1 \equiv 0 \pmod{4}, \\ S_0 = S_1, S_{a-3} = S_{a-2}, S_{a-1} = S_a & \text{ при } a_1 \equiv 2 \pmod{4} > 2, \\ S_0 = S_1, S_{a-1} = S_a & \text{ при } a_1 = 2 \text{ или } a_1 \equiv 1 \pmod{2} > 1, \\ S_0 = S_1 & \text{ при } a_1 = 1. \end{aligned}$$

Во всех остальных случаях  $S_{i-1} < S_i$ .

### 3.4. Случай $a_1 = 1$ , $a_2 > 0$

В данном случае формула (7) имеет вид

$$\sum_{i \geq 0} (S_i - S_{i-1})q^i = \frac{(1 - q^{a_2+1})f_{a_2+2}(q)f_{2a_2+3}(q)}{1+q+q^2}.$$

Положим

$$b_i = \begin{cases} [i/3] + 1, & i \geq 0; \\ 0, & i < 0. \end{cases}$$

По индукции получаем

$$S_i - S_{i-1} = b_i - b_{i-a_2-1} - b_{i-a_2-3} \text{ при } 0 \leq i \leq a = 2a_2 + 1. \quad (12)$$

Для  $0 \leq i \leq a_2$  кратности уровней не могут совпадать. Пусть  $a_2 + 1 \leq i \leq a = 2a_2 + 1$ . Подставляя значения  $b_i$  в формулу (12), получаем, что  $S_i = S_{i-1}$  тогда и только тогда, когда:

1.  $a_2 \equiv 0, 2 \pmod{3}, i = 2a_2 + 1$ ;
2.  $a_2 \equiv 1 \pmod{3}, i = 2a_2$ .

Следовательно

$$\begin{aligned} S_{a-1} &= S_a && \text{при } a_2 \equiv 0, 2 \pmod{3} > 0, \\ S_{a-2} &= S_{a-1} && \text{при } a_2 \equiv 1 \pmod{3}. \end{aligned}$$

### 3.5. Случай $a_2 = 1, a_1 > 1$

Подставляя  $a_2 = 1$  в формулу (7), получаем

$$\sum_{i \geq 0} (S_i - S_{i-1})q^i = \frac{(1 - q^{a_1+1})f_{a_1+2}(q)f_{a_1+4}(q)}{1 + q + q^2}.$$

Предположим, что  $b_i$  такие же, как в предыдущем пункте. По индукции получаем

$$S_i - S_{i-1} = b_i - b_{i-a_1-1} - b_{i-a_1-3} - b_{i-a_1-5} \text{ для } 0 \leq i \leq a = [3a_1/2] + 2. \quad (13)$$

Из формулы (13) можно заключить, что кратности уровней не могут совпадать для  $0 \leq i \leq a_1$ . Пусть  $a_1 + 1 \leq i \leq a = [3a_1/2] + 2$ . Используя формулу (13), получаем, что  $S_i = S_{i-1}$  тогда и только тогда, когда  $a_1 \equiv 0 \pmod{2}, i = 3a_1/2 + 2$ . Следовательно,

$$S_{a-1} = S_a \text{ при } a_1 \equiv 0 \pmod{2}.$$

В остальных случаях  $S_{i-1} < S_i$ .

### 3.6. Случай $a_1 = 2, a_2 > 1$

Формула (7) приводит к следующему выражению:

$$\sum_{i \geq 0} (S_i - S_{i-1})q^i = \frac{(1 - q^{a_2+1})f_{a_2+3}(q)f_{2a_2+4}(q)}{1 + q}.$$

Определим  $b_i$  как в формуле (5). Тогда для  $0 \leq i \leq a = 2a_2 + 3$

$$S_i - S_{i-1} = b_i - b_{i-a_2-1} - b_{i-a_2-4} \text{ для } 0 \leq i \leq a = 2a_2 + 3. \quad (14)$$

Из этого следует, что для  $0 \leq i \leq a_2$  кратности уровней не могут совпадать. Пусть  $a_2 + 1 \leq i \leq a = 2a_2 + 3$ . Используя формулу (14), легко доказать, что

$$S_{a-1} = S_a,$$

а в остальных случаях  $S_{i-1} < S_i$ .

### 3.7. Случай $a_2 = 2, a_1 > 2$

Из формулы (7) следует, что

$$\sum_{i \geq 0} (S_i - S_{i-1})q^i = \frac{(1 - q^{a_1+1})f_{a_1+3}(q)f_{a_1+6}(q)}{1 + q}.$$

Целые числа  $b_i$  такие же, как и в предыдущем пункте. Тогда

$$S_i - S_{i-1} = b_i - b_{i-a_1-1} - b_{i-a_1-4} - b_{i-a_1-7} \text{ для } 0 \leq i \leq a = [3a_1/2] + 4. \quad (15)$$

Из (15) и фактов, доказанных в предыдущем пункте, следует, что для  $0 \leq i \leq \min(a_1 + 6, a)$  кратности уровней строго возрастают. Пусть  $a_1 + 7 \leq i \leq a = [3a_1/2] + 4$  (это возможно для  $a_1 \geq 6$ ). Используя формулу (15), получаем, что для  $a_1 \equiv 2 \pmod{4}$

$$S_{a-1} = S_a \text{ при } a_1 \equiv 2 \pmod{4}.$$

В других случаях кратности уровней не могут совпадать.

### 3.8. Случай, когда $a_1 > 2$ , $a_2 > 2$ и $P(q)$ – многочлен

Каждому старшему весу  $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$  поставим в соответствие пару  $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ , где  $\bar{a}_i$  – остатки от деления по модулю 6. Легко показать, что  $P(q)$  не является многочленом, если

$$(\bar{a}_1, \bar{a}_2) \in \{(0, 0), (0, 3), (1, 1), (1, 4), (3, 0), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\},$$

а в противном случае  $P(q)$  является многочленом.

Предположим, что  $P(q)$  является многочленом от  $q$ . Обозначим его коэффициенты через  $c_j$ ; тогда

$$P(q) = c_0 + c_1q + c_{2a_1+2a_2-2}q^{2a_1+2a_2-2}.$$

По определению  $P(q)$  имеем

$$c_j = c_{2a_1+2a_2-2-j} \text{ для всех } 0 \leq j \leq 2a_1 + 2a_2 - 2. \quad (16)$$

Кроме того,

$$c_{j-1} \leq c_j \text{ для всех } 1 \leq j \leq a_1 + a_2 - 1. \quad (17)$$

Чтобы показать это, разделим числитель на знаменатель в выражении для  $P(q)$ . Анализируя значения  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ , получаем, что

$$P(q) = (1 + q + q^2 + \dots + q^k)(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2l})(1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{3s})$$

для некоторых  $k \geq 3$ ,  $l, s \geq 1$ ; или

$$\begin{aligned} P(q) &= (1 + q + q^2 + \dots + q^k)(1 + q + q^2 + \dots + q^l)(1 + q^6 + q^{12} + \dots + q^{6s})(1 - q + q^2) = \\ &= (1 + q + q^2 + \dots + q^k)(1 + q^2 + q^3 + \dots + q^{l-1} + q^l + q^{l+2})(1 + q^6 + q^{12} + \dots + q^{6s}), \end{aligned}$$

где  $k, l \geq 3$ ,  $s \geq 0$ . Отсюда следует формула (17). Теперь формула (6) принимает вид

$$\sum_{i \geq 0} S_i q^i = (c_0 + c_1q + c_{2a_1+2a_2-2}q^{2a_1+2a_2-2})(1 + q + q^2 + \dots + q^{a_1+2a_2+2}).$$

Пусть  $c_j = 0$  для всех  $j < 0$  или  $j > 2a_1 + 2a_2 - 2$ . Тогда

$$S_i = c_i + c_{i-1} + \dots + c_{i-a_1-2a_2-2}.$$

Получаем

$$S_i - S_{i-1} = c_i - c_{i-a_1-2a_2-3}, \quad (18)$$

где  $1 \leq i \leq a = [3a_1/2] + 2a_2$ . Пусть  $a' = 2a_1 + 2a_2 - 2$  и  $a'' = a_1 + 2a_2 + 3$ . Тогда

$$a' > a \geq a'' \text{ при } a_1 \geq 6,$$

$$a'' \geq a' \geq a \text{ и } a'' > a \text{ при } 3 \leq a_1 \leq 5.$$

В последнем случае

$$S_i - S_{i-1} = c_i > 0 \text{ при } 1 \leq i \leq a.$$

Следовательно, кратности уровней строго возрастают. Пусть теперь  $a_1 \geq 6$ . Тогда

$$S_i - S_{i-1} = c_i > 0 \text{ при } 1 \leq i < a''.$$

Предположим, что  $a'' \leq i \leq a$ . Тогда  $c_i > 0$  и  $c_{i-a_1-2a_2-3} > 0$ . Согласно формулам (16) и (18)

$$S_i - S_{i-1} = c_{2a_1+2a_2-2-i} - c_{i-a_1-2a_2-3}.$$

Положим  $g(i) = 2a_1 + 2a_2 - 2 - i$  и  $h(i) = i - a_1 - 2a_2 - 3$ . Имеем

$$g(i-1) = g(i) + 1 > g(i) > h(i) > h(i-1) = h(i) - 1. \quad (19)$$

Для нечетного  $a_1$  получаем

$$g(a) = a_1/2 - 3/2, \quad h(a) = a_1/2 - 7/2. \quad (20)$$

Если  $a_1$  четно, то

$$g(a) = a_1/2 - 2, h(a) = a_1/2 - 3. \quad (21)$$

Поскольку  $g(i) \leq a_1 - 5$ , из формулы (17) следует, что

$$c_{g(i-1)} = c_{g(i)+1} \geq c_{g(i)} \geq c_{h(i)} \geq c_{h(i-1)} = c_{h(i)-1}. \quad (22)$$

Чтобы определить, когда  $S_{i-1} = S_i$ , достаточно найти, когда коэффициенты  $c_0, c_1, \dots, c_{a_1}$  совпадают.

Определим  $b_j$  как в формуле (9). Тогда

$$c_j - c_{j-1} = b_j - b_{j-a_2-1} \text{ при } 0 \leq j \leq a_1. \quad (23)$$

Из формулы (23) вытекает равенство  $c_j = c_{j-1}$  в точности в следующих случаях:

1.  $j = 1$ ;
2.  $a_2 = 3, j \equiv 1 \pmod{3}$ ;
3.  $a_2 = 4, j \equiv 1, 5 \pmod{6}$ ;
4.  $a_2 = 6, j \equiv 1 \pmod{6}$ .

Для других значений  $j$  коэффициенты строго возрастают.

Используя формулы (19), (20) и (21), мы приходим к выводу, что кратности рассматриваемых уровней строго возрастают для нечетных значений  $a_1$ . Для четного  $a_1$  единственное возможное равенство имеет вид

$$S_{a-1} = S_a,$$

если  $a_1/2 - 2 = j$  и  $c_{j-1} = c_j$ .

Чтобы завершить доказательство, рассмотрим 4 случая.

1.  $a_1 \geq 6, a_2 \geq 3$  и  $a_2 \neq 3, 4, 6$ .

Тогда  $S_{a-1} = S_a$  только при  $a_1 = 6$ . Поскольку  $P(q)$  является многочленом, имеем  $a_2 \equiv \equiv 1, 2, 4, 5 \pmod{6}$ .

2.  $a_1 \geq 6, a_2 = 3$ .

Если  $S_{a-1} = S_a$ , то  $a_1 \equiv 0 \pmod{6}$ . Это приводит к противоречию, так как  $P(q)$  является многочленом.

3.  $a_1 \geq 6, a_2 = 4$ .

Равенство  $S_{a-1} = S_a$  выполняется при  $a_1 \equiv 2, 6 \pmod{12}$ .

4.  $a_1 \geq 6, a_2 = 6$ .

Тогда  $S_{a-1} = S_a$  только при  $a_1 \equiv 6 \pmod{12}$ . Но это невозможно, поскольку  $P(q)$  является многочленом.

### 3.9. Случай, когда $a_1 > 2, a_2 > 2$ и $P(q)$ не является многочленом

В данном случае

$$(\bar{a}_1, \bar{a}_2) \in \{(0, 0), (0, 3), (1, 1), (1, 4), (3, 0), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\},$$

где  $\bar{a}_i$  – остатки от деления по модулю 6. Пусть

$$R(q) = \frac{f_{a_2}(q)f_{a_1+a_2+1}(q)f_{a_1+2a_2+2}(q)}{(1+q)(1+q+q^2)}. \quad (24)$$

Для наших значений  $a_1$  и  $a_2$  получается, что

$$R(q) = c_0 + c_1q + \dots + c_{2a_1+4a_2}q^{2a_1+4a_2},$$

где  $c_j$  – целые числа. Как и выше, из формулы (24) следует, что

$$c_j = c_{2a_1+4a_2-j} \text{ для всех } 0 \leq j \leq 2a_1+4a_2$$

и

$$c_{j-1} \leq c_j \text{ для всех } 1 \leq j \leq a_1+2a_2. \quad (25)$$

Теперь формула (6) принимает вид

$$\sum_{i \geq 0} S_i q^i = (c_0 + c_1q + c_{2a_1+4a_2}q^{2a_1+4a_2})(1 + q + q^2 + \dots + q^{a_1}).$$

Положим  $c_j = 0$  для  $j < 0$  или  $j > 2a_1 + 4a_2$ . Тогда

$$S_i = c_i + c_{i-1} + \dots + c_{i-a_1}.$$

Имеем

$$S_i - S_{i-1} = c_i - c_{i-a_1-1},$$

где  $1 \leq i \leq a = [3a_1/2] + 2a_2$ . Очевидно, что

$$2a_1 + 4a_2 > a > a_1 + 1.$$

Для  $1 \leq i < a_1 + 1$

$$S_i - S_{i-1} = c_i > 0.$$

Предположим, что  $a_1 + 1 \leq i \leq a_1 + 2a_2$ , тогда по формуле (25)  $S_{i-1} = S_i$ , если

$$c_i = c_{i-1} = \dots = c_{i-a_1-1},$$

т. е. если  $a_1 + 2$  соседних коэффициента многочлена  $R(q)$  равны.

Пусть  $a_1 + 2a_2 < i \leq a$ , тогда

$$S_i - S_{i-1} = c_{2a_1+4a_2-i} - c_{i-a_1-1}.$$

Положим, что  $g(i) = 2a_1 + 4a_2 - i$  и  $h(i) = i - a_1 - 1$ . Тогда  $g(i) < a_1 + 2a_2$ , поэтому выполняются неравенства (19) и (22). Предположим, что  $a_1$  нечетно. Тогда

$$g(a) = a_1/2 + 2a_2 + 1/2, \quad h(a) = a_1/2 + 2a_2 - 3/2. \quad (26)$$

Если  $a_1$  четно, то

$$g(a) = a_1/2 + 2a_2, \quad h(a) = a_1/2 + 2a_2 - 1. \quad (27)$$

Чтобы определить, когда  $S_{i-1} = S_i$ , рассмотрим  $c_0, c_1, \dots, c_{a_1+2a_2}$  и найдем, когда они совпадают. Определим  $b_j$  как в формуле (9). Тогда для  $0 \leq j \leq a_1 + 2a_2$

$$c_j - c_{j-1} = b_j - b_{j-a_2-1} - b_{j-a_1-a_2-2} \text{ при } 0 \leq j \leq a_1 + 2a_2. \quad (28)$$

Используя формулу (28), несложно заключить, что для  $1 \leq j \leq a_1 + a_2 + 1$  равенство  $c_j = c_{j-1}$  выполняется только в следующих случаях:

1.  $j = 1$ ;
2.  $a_2 = 3, j \equiv 1 \pmod{3}$ ;
3.  $a_2 = 4, j \equiv 1, 5 \pmod{6}$ ;
4.  $a_2 = 6, j \equiv 1 \pmod{6}$ .

Для других значений  $j$  коэффициенты строго возрастают.

Чтобы завершить анализ, рассмотрим 8 случаев. Каждый случай исследуется следующим образом: сначала для  $a_1 + a_2 + 2 \leq j \leq a_1 + 2a_2 = a'$  мы находим, когда  $c_j = c_{j-1}$ ; затем, объединяя всю информацию о коэффициентах многочлена  $R(q)$ , определяем  $i$ , для которого  $S_i = S_{i-1}$ . Используя приведенные выше факты, приходим к выводу, что для  $a_1 + 1 \leq i \leq a_1 + 2a_2$  это возможно тогда и только тогда, когда  $c_i = c_{i-1} = \dots = c_{i-a_1-1}$ . Теперь пусть  $a_1 + 2a_2 < i \leq a$ . Рассматривая  $i = a$ , видим, что  $S_{a-1} = S_a$  всякий раз, когда  $c_{g(a)} = c_{h(a)}$ . Из формулы (22) следует, что  $S_i - S_{i-1} \geq S_a - S_{a-1}$  для выбранных значений  $i$ . Следовательно, мы закончили, если  $S_a > S_{a-1}$ . В противном случае рассматриваем  $i = a - 1$  и так далее.

Предположим, что  $a_1 + a_2 + 2 \leq j \leq a'$ .

1.  $a_1 \equiv 0 \pmod{6}, a_2 \equiv 0 \pmod{6}$ .

Здесь  $c_j = c_{j-1}$  только для  $j = a' - 5, j = a' - 2$  и  $j = a' - 1$ . Следовательно,

$$c_{a'-3} = c_{a'-2} = c_{a'-1}$$

и для  $a_2 \geq 12$  также имеем  $c_{a'-6} = c_{a'-5}$ . Приведенные выше формулы означают, что  $a_1 + 2$  соседних коэффициента многочлена  $R(q)$  не могут совпадать. Следовательно,

$$S_{i-1} < S_i \text{ для } 1 \leq i \leq a_1 + 2a_2.$$

Пусть  $a_1 + 2a_2 < i \leq a$ . Поскольку  $a_1$  четно, из (27) следует, что  $S_{a-1} = S_a$  всякий раз, когда  $c_{i-1} = c_i$  для  $i = g(a)$ . Но  $g(a) \equiv 0, 3 \pmod{6}$ , и для таких значений  $i$  получаем  $c_{i-1} < c_i$ . Поскольку  $S_{a-1} < S_a$ , из формулы (19) следует, что  $S_{i-1} < S_i$  для  $a_1 + 2a_2 < i < a$ .

2.  $a_1 \equiv 3 \pmod{6}$ ,  $a_2 \equiv 0 \pmod{6}$ .

Равенство  $c_j = c_{j-1}$  выполняется тогда и только тогда, когда  $j = a' - 8$ ,  $j = a' - 4$  или  $j = a'$ . Следовательно,

$$c_{a'-5} = c_{a'-4}, c_{a'-1} = c_{a'}$$

и  $c_{a'-9} = c_{a'-8}$  для  $a_2 \geq 12$ .

Как и в предыдущем случае,

$$S_{i-1} < S_i \text{ при } 1 \leq i \leq a_1 + 2a_2.$$

Пусть  $a_1 + 2a_2 < i \leq a$ . Поскольку  $a_1$  нечетно, из формулы (26) следует, что  $S_{a-1} = S_a$ , всякий раз, когда  $c_{i-2} = c_{i-1} = c_i$  для  $i = g(a)$ . Легко показать, что это невозможно для  $a_2 \geq 12$ . Поскольку  $a' - 4 \equiv 5 \pmod{6}$ , мы получаем  $c_{a'-6} < c_{a'-5}$  для  $a_2 = 6$  и равенство невозможно. Таким образом,

$$S_{i-1} < S_i \text{ при } 1 \leq i \leq a.$$

3.  $a_1 \equiv 1 \pmod{6}$ ,  $a_2 \equiv 1 \pmod{6}$

Имеем  $c_j = c_{j-1}$  тогда и только тогда, когда  $j = a' - 5$ ,  $j = a' - 2$  и  $j = a' - 1$ . Следовательно,

$$c_{a'-6} = c_{a'-5}, c_{a'-3} = c_{a'-2} = c_{a'-1}.$$

Для  $1 \leq i \leq a_1 + 2a_2$ ,

$$S_{i-1} < S_i.$$

Пусть  $a_1 + 2a_2 < i \leq a$ . Поскольку  $g(a) \equiv 0, 3 \pmod{6}$ , это означает, что  $c_{g(a)-1} < c_{g(a)}$ . Следовательно,

$$S_{i-1} < S_i \text{ при } 1 \leq i \leq a.$$

4.  $a_1 \equiv 4 \pmod{6}$ ,  $a_2 \equiv 1 \pmod{6}$ .

Здесь  $c_j = c_{j-1}$  всякий раз, когда  $j = a' - 5$ ,  $j = a' - 2$  и  $j = a' - 1$ . Следовательно,

$$c_{a'-6} = c_{a'-5}, c_{a'-3} = c_{a'-2} = c_{a'-1}.$$

Для  $1 \leq i \leq a_1 + 2a_2$ ,

$$S_{i-1} < S_i.$$

Пусть  $a_1 + 2a_2 < i \leq a$ . Имеем  $g(a) \equiv 1, 4 \pmod{6}$ . Из доказанных выше фактов следует, что  $c_{g(a)-1} = c_{g(a)}$  только для  $a_1 = 4$  или  $10$ . Таким образом, если  $a_1 = 4, 10$ ,  $a_2 \equiv 1 \pmod{6} > 1$ , то

$$S_{a-1} = S_a.$$

Поскольку четыре соседних коэффициента  $c_j$  не могут совпадать, получаем

$$S_{i-1} < S_i \text{ при } a_1 + 2a_2 < i < a.$$

Для остальных значений  $a_1, a_2$ ,

$$S_{i-1} < S_i \text{ при всех } 1 \leq i \leq a.$$

5.  $a_1 \equiv 0 \pmod{6}$ ,  $a_2 \equiv 3 \pmod{6}$ .

Тогда  $c_j = c_{j-1}$  тогда и только тогда, когда  $j = a' - 5$ ,  $j = a' - 2$  или  $j = a' - 1$ . Следовательно,

$$c_{a'-2} = c_{a'-1},$$

а для  $a_2 \geq 9$  также  $c_{a'-3} = c_{a'-2}$  и  $c_{a'-6} = c_{a'-5}$ .

Для  $1 \leq i \leq a_1 + 2a_2$ ,

$$S_{i-1} < S_i.$$

Пусть  $a_1 + 2a_2 < i \leq a$ . Имеем  $g(a) \equiv 0, 3 \pmod{6}$ . Из этого следует, что  $c_{g(a)-1} < c_{g(a)}$ . Следовательно,

$$S_{i-1} < S_i \text{ при } 1 \leq i \leq a.$$

6.  $a_1 \equiv 3 \pmod{6}$ ,  $a_2 \equiv 3 \pmod{6}$ .

Имеем  $c_j = c_{j-1}$  только для  $j = a' - 5$ ,  $j = a' - 2$  и  $j = a' - 1$ . Следовательно,

$$c_{a'-2} = c_{a'-1},$$

а для  $a_2 \geq 9$  также  $c_{a'-3} = c_{a'-2}$  и  $c_{a'-6} = c_{a'-5}$ .

Для  $1 \leq i \leq a_1 + 2a_2$ ,

$$S_{i-1} < S_i.$$

Пусть  $a_1 + 2a_2 < i \leq a$ . Имеем  $g(a) \equiv 2,5 \pmod{6}$ . Доказанные выше факты означают, что  $c_{g(a)-1} = c_{g(a)}$  только для  $a_1 = 3$ . В этом случае

$$c_{g(a)-2} = c_{g(a)-1} = c_{g(a)},$$

поскольку  $g(a) - 1 \equiv 1 \pmod{3}$ .

Следовательно,

$$S_{a-1} = S_a \text{ при } a_1 = 3,$$

и

$$S_{i-1} < S_i \text{ для остальных } i < a,$$

поскольку пять соседних коэффициентов  $R(q)$  не могут совпадать.

Если  $a_1 \geq 9$ , то

$$S_{i-1} < S_i \text{ для всех } 1 \leq i \leq a.$$

7.  $a_1 \equiv 1 \pmod{6}$ ,  $a_2 \equiv 4 \pmod{6}$ .

Здесь  $c_j = c_{j-1}$  всякий раз, когда  $j = a' - 8$ ,  $j = a' - 4$  или  $j = a'$ . Следовательно,

$$c_{a'-1} = c_{a'},$$

а также  $c_{a'-9} = c_{a'-8}$ ,  $c_{a'-5} = c_{a'-4}$  для  $a_2 \geq 10$ .

Для  $1 \leq i \leq a_1 + 2a_2$ ,

$$S_{i-1} < S_i.$$

Пусть  $a_1 + 2a_2 < i \leq a$ . Имеем  $g(a) \equiv 0,3 \pmod{6}$ . Поскольку  $a_1 > 1$ , получаем  $c_{g(a)-1} < c_{g(a)}$ . Таким образом,

$$S_{i-1} < S_i \text{ при } 1 \leq i \leq a.$$

8.  $a_1 \equiv 4 \pmod{6}$ ,  $a_2 \equiv 4 \pmod{6}$ .

Тогда  $c_j = c_{j-1}$  только для  $j = a' - 5$ ,  $j = a' - 2$  и  $j = a' - 1$ . Следовательно,

$$c_{a'-3} = c_{a'-2} = c_{a'-1},$$

а также  $c_{a'-6} = c_{a'-5}$  для  $a_2 \geq 10$ .

Для  $1 \leq i \leq a_1 + 2a_2$ ,

$$S_{i-1} < S_i.$$

Пусть  $a_1 + 2a_2 < i \leq a$ . Имеем  $g(a) \equiv 1,4 \pmod{6}$ . Из доказанных выше фактов следует, что  $c_{g(a)-1} = c_{g(a)}$  для  $a_1 = 4$ ,  $a_1 = 10$  и для  $a_2 = 4$ ,  $a_1 \equiv 10 \pmod{12}$ . Следовательно,

$$S_{a-1} = S_a$$

для этих значений  $a_i$ . Поскольку четыре соседних коэффициента  $R(q)$  не могут совпадать, получаем

$$S_{i-1} < S_i \text{ при } i < a.$$

В остальных случаях

$$S_{i-1} < S_i \text{ для любого } i.$$

На этом доказательство пункта (iii) теоремы 1.2 завершено.

#### 4. Унипотентные элементы в $C_2$

Согласно классификации унипотентных элементов [12, гл. IV, п. 2.15], элементы являются сопряженными в  $Sp_n(\mathbb{C})$  тогда и только тогда, когда они являются сопряженными в  $GL_n(\mathbb{C})$ , а элемент  $GL_n(\mathbb{C})$  лежит в  $Sp_n(\mathbb{C})$  тогда и только тогда, когда число блоков Жордана размерности  $k$  в его форме Жордана является четным для всех нечетных  $k$ . Таким образом, существует три класса нетривиальных унипотентных элементов в  $Sp_4(\mathbb{C})$ . В качестве их представителей можно взять унипотентный элемент  $u_1$ , соответствующий длинному корню, унипотентный элемент  $u_2$ , соответствующий короткому корню, и регулярный унипотентный элемент  $u_3$ . Пусть  $H_i$  – подгруппа типа  $A_1$ , содержащая унипотентный элемент  $u_i$ .

Пункты (i) и (ii) теоремы 1.6 следуют из [10, теорема 1.1]. Для группы  $Sp_4(\mathbb{C})$  имеем  $n = 3a_1 + 4a_2$ . Применяя лемму 2.1, завершаем доказательство теоремы 1.6.

#### 5. Уровни и унипотентные элементы в $A_3$

Можно было бы анализировать группу типа  $A_3$  как  $A_2$  или  $C_2$ , т. е. сначала изучить размерности уровней, а затем с их помощью рассмотреть унипотентные элементы. Однако даже в случае группы типа  $C_2$  такой подход сталкивается со значительными трудностями. Поэтому мы будем рассуждать иначе. Учитывая вложение  $SL_3(\mathbb{C})$  и  $Sp_4(\mathbb{C})$  в  $SL_4(\mathbb{C})$ , сначала мы рассмотрим унипотентные элементы в  $SL_4(\mathbb{C})$ , включая регулярные, а затем отсюда легко получается теорема об уровнях для  $A_3$ .

Заметим, что корневые унипотентные элементы уже рассматривались в предложении 1.5.

##### 5.1. Унипотентные элементы с блоками Жордана размерности 3 и 1

В  $SL_4(\mathbb{C})$  существует четыре класса унипотентных элементов. Как и выше, пусть  $H_i$  – подгруппа типа  $A_1$ , содержащая унипотентный элемент  $u_i$ . Рассмотрим элемент  $u_3$ . Пусть  $H$  – подсистемная подгруппа типа  $A_2$ , соответствующая корням  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Тогда мы можем выбрать  $H_3$  таким образом, чтобы

$$H_3 \subset H \subset SL_4(\mathbb{C}).$$

Ограничение  $V|H$  известно. Согласно правилам ветвления [13, §6.1] оно состоит из неприводимых компонент со старшими весами

$$\lambda = (b_1 - b_2)\omega_1 + (b_2 - b_3)\omega_2,$$

где  $b_i$  – целые числа, такие, что

$$a_1 + a_2 + a_3 \geq b_1 \geq a_2 + a_3 \geq b_2 \geq a_3 \geq b_3 \geq 0.$$

Используя теорему 1.3 (ii), можно найти неприводимые компоненты ограничения  $V|H_3$ . Когда мы ограничиваем неприводимый  $SL_3(\mathbb{C})$ -модуль  $L(\lambda)$  со старшим весом  $\lambda$  на  $H_3$ , все неприводимые компоненты имеют четные старшие веса, и вес  $2(b_1 - b_3)$  является максимальным среди них. Для ограничения  $V|H_3$  это максимальное значение равно  $2a_1 + 2a_2 + 2a_3$  при  $b_1 = a_1 + a_2 + a_3$ ,  $b_3 = 0$ . Положим

$$b_1^0 = a_1 + a_2 + a_3, \quad b_2^0 = a_3, \quad b_3^0 = 0,$$

$$\lambda_0 = (b_1^0 - b_2^0)\omega_1 + (b_2^0 - b_3^0)\omega_2 = (a_1 + a_2)\omega_1 + a_3\omega_2$$

и рассмотрим различные случаи.

1. Пусть  $a_1 + a_2 = 0$ ,  $a_3 > 0$ .

Ограничение  $L(\lambda_0)|H_3$  имеет компоненты со старшими весами  $i \equiv 2a_3 \pmod{4}$ ,  $0 \leq i \leq 2a_3$ . Положим

$$b_1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad b_2 = a_3, \quad b_3 = 1.$$

Тогда

$$\lambda = (b_1 - b_2)\omega_1 + (b_2 - b_3)\omega_2 = (a_1 + a_2)\omega_1 + (a_3 - 1)\omega_2,$$

и  $L(\lambda)|H_3$  дает компоненты со старшими весами  $i \equiv 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 - 2 \pmod{4}$ ,  $0 \leq i \leq 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 - 2$ . Таким образом, мы получили все компоненты с четными старшими весами  $j$  при  $0 \leq j \leq 2a_1 + 2a_2 + 2a_3$ .

2. Предположим, что  $a_1 + a_2 > 0$ ,  $a_3 = 0$ .

Модуль  $L(\lambda_0)|H_3$  дает компоненты со старшими весами  $i \equiv 2a_1 + 2a_2 \pmod{4}$ ,  $0 \leq i \leq 2a_1 + 2a_2$ .

В этом случае всегда выполняется  $b_3 = 0$ .

Если  $a_1 \neq 0$ , то

$$b_1 = a_1 + a_2 + a_3 - 1, \quad b_2 = a_3, \quad b_3 = 0.$$

Получаем

$$\lambda = (a_1 + a_2 - 1)\omega_1,$$

и модуль  $L(\lambda)|H_3$  дает недостающие компоненты.

Предположим, что  $a_1 = 0$ . Тогда  $b_i$  может принимать только следующие значения:

$$b_1 = a_2, \quad b_3 = 0, \quad b_2 = k, \quad 0 \leq k \leq a_2.$$

Следовательно, вес  $\lambda$  имеет следующий вид:

$$\lambda = (a_2 - k)\omega_1 + k\omega_2.$$

Для  $k = a_2$  модуль  $L(\lambda)$  не дает никаких новых компонент. Таким образом, для  $a_2 = 1$  отсутствует компонента со старшим весом 0. Если  $a_2$  четно, то, положив  $k = 1$ , получаем компоненты со старшими весами

$$2, 4, 6, \dots, 2a_2 - 2, 2a_2, \quad (29)$$

т. е. в ограничении  $L(\lambda)|H_3$  есть все компоненты с четными старшими весами  $j$ ,  $0 \leq j \leq 2a_1 + 2a_2 + 2a_3$ .

Если  $a_2 > 1$  – нечетное число, то для  $0 \leq k \leq a_2$  модуль  $L(\lambda)$  дает компоненты со старшими весами (29), т. е. все нетривиальные компоненты. Таким образом, для четного  $a_2$  модуль  $V|H_3$  имеет все возможные компоненты, а для нечетного  $a_2$  – все компоненты, за исключением тривиальной.

3. Теперь пусть  $a_1 + a_2 > 0$ ,  $a_3 > 0$  и оба четные.

В этом случае  $L(\lambda_0)|H_3$  дает компоненты со старшими весами

$$0, 4, 6, 8, \dots, 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 - 2, 2a_1 + 2a_2 + 2a_3,$$

т. е. отсутствует компонента с весом 2. Пусть

$$b_1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad b_2 = a_3, \quad b_3 = 1.$$

Тогда

$$\lambda = (a_1 + a_2)\omega_1 + (a_3 - 1)\omega_2,$$

и ограничение  $L(\lambda)|H_3$  дает такую компоненту.

4. Пусть  $a_1 + a_2 > 0$  и является четным, а  $a_3$  – нечетным.

Ограничение  $L(\lambda_0)|H_3$  дает все композиционные факторы модуля  $L(\lambda)|H_3$ , кроме тривиального. Пусть

$$b_1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad b_2 = a_3, \quad b_3 = 1.$$

Тогда  $L(\lambda)|H_3$  дает фактор со старшим весом 0.

5. Предположим, что  $a_1 + a_2$  нечетно,  $a_3 > 0$  и четно.

Как и ранее,  $L(\lambda_0)|H_3$  дает все возможные ненулевые факторы.

Если  $a_1 = 0$ ,  $a_2, a_3 \neq 0$ , рассмотрим дуальный модуль. Мы получаем случай  $a_3 = 0$ ,  $a_1, a_2 \neq 0$ , который уже был проанализирован. Таким образом, у нас есть все компоненты с четными старшими весами.

Пусть  $a_1 > 0$ . Положив

$$b_1 = a_1 + a_2 + a_3 - 1, \quad b_2 = a_3, \quad b_3 = 0,$$

получаем недостающую компоненту.



Теперь мы можем записать все значения  $\bar{\lambda}$ , для которых  $N_{\lambda\bar{\lambda}} \neq 0$ . Имеем

$$\bar{\lambda}_1 = a_1 + n + k, \quad \bar{\lambda}_2 = a_3 + n - k,$$

где  $0 \leq k \leq a_3$ ,  $0 \leq n \leq a_2$ ;

$$\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2) = n_1\omega_1 + n_2\omega_2,$$

где  $n_1 = a_1 - a_3 + 2k$ ,  $n_2 = n + a_3 - k$ . Для всех таких  $\bar{\lambda}$  существует единственное  $\eta = \eta_{\bar{\lambda}}$ , для которого  $N_{\eta\bar{\lambda}} \neq 0$  и

$$N_{\lambda\bar{\lambda}} = N_{\eta\bar{\lambda}} = 1.$$

По теореме 1.6 (ii) ограничение  $L(\bar{\lambda})|_{H_2}$  разлагается на компоненты со старшими весами  $i \equiv n_1 + 2n_2 = a_1 + a_3 + 2n \pmod{2}$ ,  $0 \leq i \leq a_1 + a_3 + 2n$ . Но  $n \leq a_2$ . Следовательно, модуль  $V|_{H_2}$  содержит в точности компоненты со старшими весами  $i \equiv a_1 + 2a_2 + a_3 \pmod{2}$ ,  $0 \leq i \leq a_1 + 2a_2 + a_3$ . Пункт (ii) теоремы 1.4 доказан.

### 5.3. Регулярные унитарные элементы и уровни

Как и выше, можно считать, что

$$u_4 \in H_4 \subset Sp_4(\mathbb{C}).$$

Для работы с регулярными элементами мы используем приведенные выше результаты об ограничениях  $SL_4(\mathbb{C})$ -модулей на  $Sp_4(\mathbb{C})$  и  $Sp_4(\mathbb{C})$ -модулей на  $H_4$ . Далее мы предполагаем, что  $a_3 \leq a_1$ .

Согласно теореме 1.6 (iii), в ограничении  $L(\bar{\lambda})|_{H_4}$  существует композиционный фактор с максимальным старшим весом

$$a = 3n_1 + 4n_2 = 3a_1 + a_3 + 2k + 4n. \quad (30)$$

Выражение (30) принимает максимальное значение, равное  $3a_1 + 4a_2 + 3a_3$  для  $k = a_3$  и  $n = a_2$ . Кроме того, из теоремы 1.6 (iii) и формулы (30) следует, что все неприводимые компоненты модуля  $V|_{H_4}$  имеют старшие веса одинаковой четности.

Положим

$$\begin{aligned} n_0 &= a_2, \quad k_0 = a_3, \\ n_1^0 &= a_1 + a_3, \quad n_2^0 = a_2, \\ \bar{\lambda}_0 &= n_1^0\omega_1 + n_2^0\omega_2, \quad a_0 = 3a_1 + 4a_2 + 3a_3. \end{aligned}$$

Ограничение  $L(\bar{\lambda}_0)|_{H_4}$  дает все неприводимые компоненты со старшими весами  $i \equiv a_0 \pmod{2}$ ,  $0 \leq i \leq a_0$ , за исключением случаев, перечисленных в табл. 2. Рассмотрим различные возможности для  $n_1^0$  и  $n_2^0$ .

1. Пусть  $n_1^0 = a_1 + a_3 \equiv 1 \pmod{2} > 1$ ,  $n_2^0 = a_2 = 0$ .

В модуле  $L(\bar{\lambda}_0)|_{H_4}$  отсутствуют компоненты со старшими весами  $a_0 - 2$  и 1. В этом случае  $n = 0$ .

Если  $a_3 = 0$ , то  $k = 0$ . Следовательно, в ограничении  $V|_{H_4}$  отсутствуют компоненты со старшими весами  $a_0 - 2$  и 1.

Пусть  $a_3 > 0$ . Положим  $k = a_3 - 1$ , тогда

$$\begin{aligned} n_1 &= a_1 + a_3 - 2 \equiv 1 \pmod{2}, \quad n_2 = 1, \\ \bar{\lambda} &= n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = (a_1 + a_3 - 2)\omega_1 + \omega_2. \end{aligned}$$

Ограничение  $L(\bar{\lambda})|_{H_4}$  дает требуемые компоненты.

2. Предположим, что  $a_1 + a_3 = 1$ ,  $a_2 \equiv 0 \pmod{3}$ .

Имеем  $a_1 = 1$ ,  $a_3 = 0$ . В  $L(\bar{\lambda}_0)|_{H_4}$  отсутствует компонента со старшим весом 1. В этом случае  $k = 0$ .

Если  $a_2 = 0$ , то  $n = 0$ . Следовательно, в  $V|_{H_4}$  есть фактор со старшим весом 1.

Пусть  $a_2 > 0$ . Положим  $n = a_2 - 2$ , тогда

$$n_1 = 1, \quad n_2 = a_2 - 2 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Ограничение  $L(\bar{\lambda}_0)|_{H_4}$  дает требуемую компоненту.

3. Пусть теперь  $a_1 + a_3 = 1$ ,  $a_2 \equiv 1 \pmod{3}$ .

Как и выше,  $a_1 = 1$ ,  $a_3 = 0$ ,  $k = 0$ . В  $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$  отсутствует компонента со старшим весом 3. Пусть  $n = a_2 - 1$ , тогда

$$n_1 = 1, n_2 = a_2 - 1 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Ограничение  $L(\bar{\lambda})|H_4$  дает недостающую компоненту.

4. Пусть  $a_1 + a_3 = 1$ ,  $a_2 \equiv 2 \pmod{3}$ .

Имеем  $a_1 = 1$ ,  $a_3 = 0$ ,  $k = 0$ . В ограничении  $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$  отсутствует компонента со старшим весом 1. Пусть  $n = a_2 - 1$ , тогда

$$n_1 = 1, n_2 = a_2 - 1 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Ограничение  $L(\bar{\lambda})|H_4$  дает искомую компоненту.

5. Предположим, что  $a_1 + a_3 = 3$ ,  $a_2 \equiv 3 \pmod{6}$ .

В модуле  $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$  отсутствует компонента со старшим весом 1. Пусть  $n = a_2 - 1$ ,  $k = a_3$ , тогда

$$n_1 = 3, n_2 = a_2 - 1 \equiv 2 \pmod{6}.$$

Очевидно,  $L(\bar{\lambda})|H_4$  имеет фактор со старшим весом 1.

6. Пусть  $a_1 + a_3 = 2$ ,  $a_2 = 0$ .

В  $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$  отсутствуют компоненты со старшими весами  $a_0 - 2$  и 0. В этом случае  $n = 0$ .

Если  $a_1 = 2$ ,  $a_3 = 0$ , то  $k = 0$ . Следовательно, в ограничении  $V|H_4$  отсутствуют компоненты со старшими весами 4 и 0.

Пусть  $a_1 = a_3 = 1$ . Положим  $k = 0$ , тогда

$$n_1 = 0, n_2 = 1.$$

Ограничение  $L(\bar{\lambda})|H_4$  дает фактор со старшим весом 4. Возможности для  $k$  и  $n$  исчерпаны. Таким образом, при  $a_1 = a_3 = 1$ ,  $a_2 = 0$  отсутствует компонента со старшим весом 0.

7. Пусть  $a_1 + a_3 \equiv 2 \pmod{4} > 2$ ,  $a_2 = 0$ .

В модуле  $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$  отсутствуют компоненты со старшими весами  $a_0 - 2$ , 4 и 0. В этом случае  $n = 0$ .

Если  $a_3 = 0$ , то  $k = 0$ . Следовательно, в  $V|H_4$  отсутствуют факторы со старшими весами  $a_0 - 2$ , 4 и 0.

Пусть  $a_3 > 0$ . Положим  $k = a_3 - 1$ , тогда

$$n_1 = a_1 + a_3 - 2 \equiv 0 \pmod{4} > 0, n_2 = 1.$$

Ограничение  $L(\bar{\lambda})|H_4$  дает факторы со старшими весами  $a_0 - 2$  и 4. Таким образом, если  $a_3 = 1$ , то отсутствует только тривиальный фактор.

Пусть  $a_3 > 1$ . Положим  $k = a_3 - 2$ , тогда

$$n_1 = a_1 + a_3 - 4 \equiv 2 \pmod{4}, n_2 = 2.$$

Ограничение  $L(\bar{\lambda})|H_4$  не дает никаких новых компонент. Следовательно, для  $a_3 = 2$  фактор со старшим весом 0 отсутствует.

Пусть  $a_3 > 2$ . Положим  $k = a_3 - 3$ , тогда

$$n_1 = a_1 + a_3 - 6 \equiv 0 \pmod{4}, n_2 = 3.$$

Ограничение  $L(\bar{\lambda})|H_4$  дает тривиальную компоненту.

8. Теперь пусть  $a_1 + a_3 \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $a_2 = 0$ .

В  $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$  отсутствуют компоненты со старшими весами  $a_0 - 2$  и 2. Имеем  $n = 0$ .

Если  $a_3 = 0$ , то  $k = 0$ . Следовательно, в  $V|H_4$  отсутствуют факторы со старшими весами  $a_0 - 2$  и 2.

Пусть  $a_3 > 0$ . Положим  $k = a_3 - 1$ , тогда

$$n_1 = a_1 + a_3 - 2 \equiv 2 \pmod{4}, n_2 = 1.$$

Ограничение  $L(\bar{\lambda})|H_4$  дает требуемые компоненты.

9. Пусть  $a_1 + a_3 = 0$ ,  $a_2 = 1$ .

Тогда  $a_1 = a_3 = k = 0$ . В ограничении  $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$  отсутствуют факторы со старшими весами  $a_0 - 2$  и 0.

Пусть  $n = 0$ , тогда

$$n_1 = 0, n_2 = 0.$$

Ограничение  $L(\bar{\lambda})|H_4$  дает только тривиальный фактор. Таким образом, в  $V|H_4$  отсутствует фактор со старшим весом 2.

10. Предположим, что  $a_1 + a_3 = 0, a_2 = 2$ .

Как и выше,  $a_1 = a_3 = k = 0$ . В  $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$  отсутствуют компоненты со старшими весами  $a_0 - 2, 2$  и 0.

Пусть  $n = 1$ , тогда

$$n_1 = 0, n_2 = 1.$$

Ограничение  $L(\bar{\lambda})|H_4$  новых компонент не дает.

Пусть  $n = 0$ , тогда

$$n_1 = 0, n_2 = 0.$$

Ограничение  $L(\bar{\lambda})|H_4$  – это тривиальный модуль. Таким образом, в  $V|H_4$  отсутствуют компоненты со старшими весами  $a_0 - 2$  и 2.

11. Пусть  $a_1 + a_3 = 0, a_2 = 3$ .

Имеем  $a_1 = a_3 = k = 0$ . В  $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$  отсутствуют компоненты со старшими весами  $a_0 - 2, 4$  и 2.

Пусть  $n = 2$ , тогда

$$n_1 = 0, n_2 = 2.$$

Ограничение  $L(\bar{\lambda})|H_4$  дает фактор со старшим весом 4.

Для  $n = 1, n = 0$  ограничение  $L(\bar{\lambda})|H_4$  не дает новых компонент. Таким образом, в  $V|H_4$  отсутствуют компоненты со старшими весами  $a_0 - 2$  и 2.

12. Пусть  $a_1 + a_3 = 0, a_2 \equiv 0 \pmod{3} > 3$ .

Тогда  $a_1 = a_3 = k = 0$ . В  $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$  отсутствуют компоненты со старшими весами  $a_0 - 2, 10, 4$  и 2.

Пусть  $n = a_2 - 1$ , тогда

$$n_1 = 0, n_2 = a_2 - 1 \equiv 2 \pmod{3} > 2.$$

Ограничение  $L(\bar{\lambda})|H_4$  дает факторы со старшими весами 10 и 4. Для остальных значений  $n$  ограничения  $L(\bar{\lambda})|H_4$  не дают новых компонент. Следовательно, в модуле  $V|H_4$  отсутствуют компоненты со старшими весами  $a_0 - 2$  и 2.

13. Предположим, что  $a_1 + a_3 = 0, a_2 \equiv 1, 2 \pmod{3} > 1$ .

Как и выше,  $a_1 = a_3 = k = 0$ . В  $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$  отсутствуют компоненты со старшими весами  $a_0 - 2, 6, 2$  и 0.

Пусть  $n = a_2 - 1$ , если  $a_2 \equiv 1 \pmod{3}$ , и  $n = a_2 - 2$  в противном случае. Тогда

$$n_1 = 0, n_2 \equiv 0 \pmod{3} > 0.$$

Ограничение  $L(\bar{\lambda})|H_4$  дает факторы со старшими весами 6 и 0. Для других значений  $n$   $L(\bar{\lambda})|H_4$  не содержит новых факторов. Таким образом, в  $V|H_4$  отсутствуют компоненты со старшими весами  $a_0 - 2$  и 2.

14. Пусть  $a_1 + a_3 = 2, a_2 > 0$ .

В модуле  $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$  отсутствует тривиальный фактор.

Если  $a_1 = 2$ , то  $a_3 = k = 0$ . Легко показать, что тривиальный фактор не может встречаться в  $L(\bar{\lambda})|H_4$  для любого значения  $n$ . Следовательно, он отсутствует и в  $V|H_4$ .

Пусть  $a_1 = a_3 = 1$ . Положим  $k = a_3 - 1, 0 \leq n \leq a_2$ , тогда

$$n_1 = 0, n_2 = n + 1.$$

Очевидно, что если  $a_2 = 1$ , то мы не можем получить тривиальный фактор 0. Если  $a_2 > 1$ , то мы можем получить его, взяв  $n = 2$ .

Таким образом, для  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$  в  $V|H_4$  отсутствует тривиальный фактор. Если  $a_1 = a_3 = 1, a_2 > 1$ , то есть все компоненты.

15. Предположим, что  $a_1 + a_3 \equiv 0 \pmod{2} > 2, a_2 = 1$ .

В  $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$  отсутствует тривиальный фактор.

Пусть  $k = a_3$ ,  $n = 0$ , тогда

$$n_1 = a_1 + a_3 \equiv 0 \pmod{2} > 2, n_2 = 0.$$

Из этого следует, что если  $a_1 + a_3 \equiv 0 \pmod{4}$ , то  $V|H_4$  содержит все возможные факторы.

Пусть  $a_1 + a_3 \equiv 2 \pmod{4} > 2$ . Если  $a_3 = 0$ , то  $k = 0$ . Следовательно, в  $V|H_4$  отсутствует тривиальная компонента.

Пусть  $a_3 > 0$ . Пусть  $k = a_3 - 1$ ,  $n = a_2$ , тогда

$$n_1 = a_1 + a_3 - 2 \equiv 0 \pmod{4} > 0, n_2 = 2.$$

Ограничение  $L(\bar{\lambda})|H_4$  дает требуемую компоненту.

16. Пусть  $a_1 + a_3 \equiv 2 \pmod{4} > 2$ ,  $a_2 = 2$ .

В  $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$  отсутствует тривиальный фактор.

Если  $a_3 = 0$ , то  $k = 0$ . Подставляя  $n = 0$ ,  $n = 1$ , мы не получаем новых компонент. Следовательно, для  $a_3 = 0$  в  $V|H_4$  отсутствует тривиальная компонента.

Пусть  $a_3 > 0$ . Пусть  $k = a_3 - 1$ ,  $n = a_2$ , тогда

$$n_1 = a_1 + a_3 - 2 \equiv 0 \pmod{4} > 0, n_2 = 3.$$

Ограничение  $L(\bar{\lambda})|H_4$  дает требуемую компоненту.

17. Наконец, предположим, что  $a_1 + a_3 = 6$ ,  $a_2 \equiv 1, 2, 4, 5 \pmod{6} > 2$ ,

или  $a_1 + a_3 \equiv 2, 6, 10 \pmod{12} > 6$ ,  $a_2 = 4$ ,

или  $a_1 + a_3 = 4, 10$ ,  $a_2 \equiv 1, 4 \pmod{6} > 1$ .

В модуле  $L(\bar{\lambda}_0)|H_4$  тривиальный фактор тоже отсутствует.

Пусть  $k = a_3$ ,  $n = 3$ , тогда

$$n_1 = a_1 + a_3, n_2 = 3,$$

и ограничение  $L(\bar{\lambda})|H_4$  дает этот фактор. Следовательно, в  $V|H_4$  присутствуют все факторы.

Таким образом, мы рассмотрели все возможные случаи. Теорема 1.4 доказана.

Учитывая, что

$$\omega_1(h_4) = 3, \omega_2(h_4) = 4, \omega_3(h_4) = 3, \omega(h_4) = 3a_1 + 4a_2 + 3a_3$$

и применяя лемму 2.1, мы получаем теорему 1.2 (ii).

Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция–2030», НИР 1.02.1.

## Литература

1. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975. 262 с.
2. *Дынкин Е. Б.* Некоторые свойства системы весов линейного представления полупростой группы Ли // Докл. АН СССР. 1950. Т. 71, № 2. С. 221–224.
3. *Кац В.* Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993. 425 с.
4. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли, гл. VII–VIII. М.: Мир, 1978. 342 с.
5. *Вейль Г.* Классические группы. Их инварианты и представления. М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1947. 408 с.
6. *Мурнаган Ф. Д.* Теория представлений групп. М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1950. 487 с.
7. *Littlewood D. E.* On invariant theory under restricted groups // Philos. Trans. Roy. Soc. A. 1944. Vol. 239. P. 387–417. <https://doi.org/10.1098/rsta.1944.0003>
8. *Liebeck M. W., Seitz G. M., Testerman D. M.* Distinguished unipotent elements and multiplicity-free subgroups of simple algebraic groups // Pacific J. Math. 2015. Vol. 279. P. 357–382. <https://doi.org/10.2140/pjm.2015.279.357>
9. *Rizzoli A., Testerman D. M.* Multiplicity-free representations of the principal  $A_1$ -subgroup in a simple algebraic group // Pacific Journal of Mathematics. 2025. Vol. 336, N 1–2. P. 433–470. <https://doi.org/10.2140/pjm.2025.336.433>
10. *Osinovskaya A. A.* Restrictions of irreducible representations of classical algebraic groups to

root  $A_1$ -subgroups // *Commun. in Algebra*. 2003. Vol. 31, N 5. P. 2357–2379. <https://doi.org/10.1081/AGB-120019001>

11. Осиновская А. А. Ограничения неприводимых представлений алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_3$  на подалгебры типа  $\mathfrak{sl}_2$  и структура блоков Жордана нильпотентных элементов // *Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер фіз.-мат. навук*. 2000. № 2. С. 52–55.

12. Спрингер Т. А., Штейнберг Р. Классы сопряженных элементов // *Семинар по алгебраическим группам*. М.: Мир, 1973. С. 162–262.

13. Fulton W., Harris J. *Representation Theory: a First Course*. New York: Springer-Verlag, 1996. 551 p.

### References

1. Steinberg R. *Lectures on Chevalley groups*. New Haven, Yale Univ., 1968. 277 p.
2. Dynkin E. B. Some properties of the weight system of the linear representation of a semisimple Lie group. *Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR*, 1950, vol. 71, no. 2, pp. 221–224 (in Russian).
3. Кас V. *Infinite-dimensional Lie algebras*. Cambridge, Cambridge University Press, 1990. 400 p.
4. Bourbaki N. *Groupes et Algèbres de Lie, Chaps. VII–VIII*. Paris, Hermann, 1975. 271 p.
5. Weyl H. *The Classical Groups: Their Invariants and Representations*. Princeton, Princeton University Press, 1946. 336 p.
6. Murnaghan F. D. *The Theory of Group Representations*. New York, Dover Publications, 2005. 369 p.
7. Littlewood D. E. On invariant theory under restricted groups. *Philos. Trans. Roy. Soc. A*, 1944, vol. 239, pp. 387–417. <https://doi.org/10.1098/rsta.1944.0003>
8. Liebeck M. W., Seitz G. M., Testerman D. M. Distinguished unipotent elements and multiplicity-free subgroups of simple algebraic groups. *Pacific J. Math.*, 2015, vol. 279, pp. 357–382. <https://doi.org/10.2140/pjm.2015.279.357>
9. Rizzoli A., Testerman D. M. Multiplicity-free representations of the principal  $A_1$ -subgroup in a simple algebraic group. *Pacific Journal of Mathematics*, 2025, vol. 336, no. 1–2, pp. 433–470. <https://doi.org/10.2140/pjm.2025.336.433>
10. Osinovskaya A. A. Restrictions of irreducible representations of classical algebraic groups to root  $A_1$ -subgroups. *Commun. in Algebra*, 2003, vol. 31, no. 5, pp. 2357–2379. <https://doi.org/10.1081/AGB-120019001>
11. Osinovskaya A. A. Restrictions of irreducible representations of the Lie algebra  $\mathfrak{sl}_3$  to subalgebras of type  $\mathfrak{sl}_2$  and the Jordan block structure of nilpotent elements. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2000, no. 2, pp. 52–55 (in Russian).
12. Springer T. A., Steinberg R. Conjugacy classes. *Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups*. Berlin, Springer-Verlag, 1970, vol. 131, pp. 167–266.
13. Fulton W., Harris J. *Representation Theory: a First Course*. New York, Springer-Verlag, 1996. 551 p.

## СТЕПЕНИ НЕПРИВОДИМЫХ КОМПОНЕНТ ПОДСТАНОВОЧНОГО ХАРАКТЕРА И НОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

А. А. Ядченко

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь  
e-mail: yadchenko\_56@mail.ru

Поступила: 04.04.2026

Исправлена: 21.05.2026

Принята: 29.05.2026

**Ключевые слова:** конечные группы, степени характеров,  $r$ -подгруппа  $G_r$  абелева и нормальна в неприводимой комплексной линейной группе  $G$ .  
**Аннотация.** Для нечетного простого числа  $r$  найдены условия, при которых силовская  $r$ -подгруппа  $G_r$  абелева и нормальна в неприводимой комплексной линейной группе  $G$ .

## DEGREES OF IRREDUCIBLE COMPONENTS OF PERMUTATION CHARACTER AND NORMAL SUBGROUPS OF A FINITE GROUP

A. A. Yadchenko

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
e-mail: yadchenko\_56@mail.ru

Received: 04.04.2026

Revised: 21.05.2026

Accepted: 29.05.2026

**Keywords:** finite groups, degrees of characters, normal subgroups.  
**Abstract.** For an odd prime number  $r$ , we found conditions under which a Sylow  $r$ -subgroup  $G_r$  is Abelian and normal in an irreducible complex linear group  $G$ .

### 1. Введение

Работа посвящена одному из самых важных направлений в теории конечных групп – существованию в них нормальных подгрупп. Пусть  $r$  – нечетное простое число и  $G_r$  – силовская подгруппа конечной группы  $G$ . Предположим, что группа  $G$  имеет точный комплексный неприводимый характер  $\psi$  степени  $n$ . Если группа  $G$  разрешима и  $n < r$ , то по теореме Ито [1] подгруппа  $G_r \triangleleft G$  и абелева либо  $n = r - 1$  и  $n$  степень 2. Этот результат верен и для  $r$ -разрешимых групп. Д. Уинтер [2] доказал, что если  $G_r$  не является нормальной в разрешимой группе  $G$ , то  $n$  делится на такую степень  $f > 1$  простого числа, что  $f \equiv -1, 0$  или  $1 \pmod{r}$ . В статьях [3–5] установлено, что результат Д. Уинтера верен и для  $p$ -разрешимых групп степени  $n < 2p$ . В работах [6; 7] этот результат был установлен для  $r$ -разрешимых групп и произвольного числа  $n$ , а в статье [8] распространен на  $\pi$ -разрешимые группы  $G$  с  $\pi$ -холловой  $TI$ -подгруппой  $G_\pi$  для любого конечного множества нечетных простых чисел  $\pi$ .

В работе [9] был установлен подобный результат с условием, что характер  $\psi$  является неприводимой компонентой подстановочного характера  $(1_{G_\pi})^G$   $\pi$ -обособленной группы  $G$ .

Допустим, что  $G$  является произвольной группой, т. е. не обязательно разрешимой,  $r$ -разрешимой,  $\pi$ -разрешимой или  $\pi$ -обособленной. Для таких групп найдены условия, при выполнении которых подгруппа  $G_r$  нормальна в  $G$  (теорема).

**Теорема 1.1.** Пусть  $G$  – конечная группа,  $M$  – такая ее подгруппа, что  $(|M|, |G : M|) = 1$ ,  $|G : M| = q^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbf{N}$ , и нормализатор ее силовской  $q$ -подгруппы  $q$ -разложим. Предположим, что характер  $(1_M)^G$  имеет единственную неглавную неприводимую компоненту  $\psi$ , степень которой не делится на  $r$  и не делится на такую степень  $f > 1$  некоторого простого числа  $r \in \pi(M)$ , что  $f \equiv \pm 1 \pmod{r}$ . Тогда  $G_r \ker \psi \triangleleft G$  и факторгруппа  $G_r / G_r \cap \ker \psi$  абелева.

## 2. Некоторые обозначения и предварительные результаты

$\mathbf{N}$  – множество натуральных чисел; если  $n \in \mathbf{N}$  и  $q$  – простое натуральное число, то  $n = n_q n_{q'}$ ;  $\pi$  – некоторое множество простых натуральных чисел; если  $\psi$  – характер некоторой группы  $X$ , то  $\text{Irr}(\psi)$  обозначает множество всех неприводимых компонент характера  $\psi$ ; если  $X$  подгруппа группы  $G$ , то  $\pi(X)$  – множество всех простых делителей порядка группы  $X$ ;  $\pi' = \pi(X) \setminus \pi$ ;  $X_{\pi'}$  обозначает  $\pi'$ -холлову подгруппу группы  $X$ ; если  $X \triangleleft G$  и  $\varphi$  – неприводимый характер подгруппы  $X$ , то условие, что  $\varphi$   $g$ -инвариантен для некоторого элемента  $g \in G \setminus X$  запишем для краткости в виде  $I_G(\varphi) \neq X$ ;  $c.d.(G)$  – множество степеней всех неприводимых характеров группы  $G$ ; полагаем, что понятия разрешимой,  $r$ -разрешимой и  $\pi$ -разрешимой группы читателю известны;  $\pi$ -обособленной называется группа, которая  $\pi$ -разрешима или  $\pi'$ -разрешима; группа  $X$  называется  $q$ -разложимой для некоторого простого числа  $q$ , если  $X = X_q \times X_{q'}$ ;  $X^\#$  – множество всех неединичных элементов группы  $X$ ; выражение  $f \equiv 0, \pm 1 \pmod{r}$  означает, что  $f \equiv 0, 1$  или  $-1 \pmod{r}$ . Все остальные обозначения и определения обычны и их можно найти, например, в [10; 11]. Всюду под характером группы будем понимать комплексный характер, а под группой – конечную группу.

Приведем вспомогательную лемму.

**Лемма 2.1.** Пусть  $G$  – группа и  $X$  – ее подгруппа. Если  $\psi \in \text{Irr}(G)$  с ядром  $K$  и  $\bar{\psi} \in \text{Irr}(G/K)$  – характер, соответствующий в смысле леммы 2.22 [11] характеру  $\psi$ , то

$$\left( \bar{\psi}, 1_{XK/K}^{G/K} \right)_{G/K} = \left( \psi, 1_X^G \right)_G.$$

**Доказательство.** Поскольку  $\bar{\psi} \in \text{Irr}(G/K)$  – характер, соответствующий в смысле леммы 2.22 [11] характеру  $\psi$  группы  $G$ , то по этой лемме  $\bar{\psi}(gK) = \psi(gk) = \psi(g)$  для любых  $g \in G$  и  $k \in K$ . По определению 2.16 [11] и закону взаимности Фробениуса для характеров

$$\begin{aligned} & \left( \bar{\psi}, 1_{XK/K}^{G/K} \right)_{G/K} = \left( (\bar{\psi})_{XK/K}, 1_{XK/K} \right)_{XK/K} = \\ & = \frac{1}{|XK/K|} \sum_{gK \in XK/K} (\bar{\psi})_{XK/K}(gK) 1_{XK/K}(gK) = \\ & = \frac{|X \cap K|}{|X||K|} \sum_{g \in XK} \psi(g) = \frac{|X \cap K|}{|X|} \sum_{g \in \tilde{X}} \psi(g) = \\ & = \frac{|X \cap K|}{|X|} \sum_{g(X \cap K) \in X/X \cap K} \psi_{X/X \cap K}(g(X \cap K)) = \\ & = \frac{1}{|X|} \sum_{g \in X} \psi_X(g) = \left( \psi_X, 1_M \right)_X = \\ & = \left( \psi, 1_X^G \right)_G. \end{aligned}$$

Выше  $\tilde{X}$  – полное семейство представителей смежных классов  $X$  по  $X \cap K$ . □

## 3. Доказательство теоремы

Пусть  $G$  – конечная группа,  $M$  – такая ее подгруппа, что  $(|M|, |G : M|) = 1$  и  $|G : M| = q^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbf{N}$ . Пусть также  $Q$  – силовская  $q$ -подгруппа группы  $G$  и ее нормализатор  $N = N_G(Q)$   $q$ -разложим, т. е.  $N = Q \times N_{q'}$ . Предположим, что степень  $n$  единственной неглавной неприводимой компоненты  $\psi$  характера  $(1_M)^G$  не делится на  $r$  и не делится на такую степень  $f > 1$  некоторого простого числа  $r \in \pi(M)$ , что  $f \equiv \pm 1 \pmod{r}$ . Убедимся в том, что

$$G_r \ker \psi / \ker \psi \triangleleft G / \ker \psi.$$

Доказательство теоремы проведем индукцией по порядку группы  $G$ . Пусть  $G$  – группа наименьшего порядка, для которой выполняются условия теоремы, но в то же время факторгруппа  $G_r \ker \psi / \ker \psi$  не является нормальной в группе  $G / \ker \psi$ .

Из [10, лемма 6.4.2] вытекает, что  $G = MQ$ . По [11, определение 5.1]

$$(1_M)^G(g) = \sum_{t \in T} (1_M)^0(tgt^{-1}) = 0$$

для каждого элемента  $g \in Q^\#$ , ибо  $tgt^{-1} \notin M$  для каждого элемента  $g \in Q^\#$  и для каждого элемента  $t \in T$ . Здесь  $T$  – полное семейство смежных классов группы  $G$  по подгруппе  $M$ ,  $(1_M)^0(x) = 1_M(x)$ , если  $x \in M$ , и  $(1_M)^0(y) = 0$ , если  $y \notin M$ . Поскольку

$$(1_M)^G(1) = |G : M| = |Q|,$$

то по [10, теорема 4.2.7]  $((1_M)^G)_Q = \rho_Q$  – регулярный характер подгруппы  $Q$ . Учитывая, что по теореме взаимности Фробениуса для характеров

$$((1_M)^G, 1_G)_G = (1_M, (1_G)_M)_M = (1_M, 1_M)_M = 1,$$

то

$$(1_M)^G = 1_G + \psi,$$

где характер  $\psi$  по условию теоремы неприводим. Аналогично получаем, что

$$((1_M)^G, \psi)_G = (1_M, \psi_M)_M = 1.$$

Значит,

$$\psi_M = 1_M + \theta$$

для некоторого такого характера  $\theta$  подгруппы  $M$ , что  $(\theta_M, 1_M)_M = 0$ .

По [11, лемма 5.11]

$$\ker(1_M)^G = \bigcap_{g \in G} (\ker 1_M)^g = \bigcap_{g \in G} M^g = M_G. \quad (*)$$

Поскольку  $\psi \in \text{Irr}(1_M)^G$ , то  $\ker(1_M)^G \subseteq \ker \psi$ . Из формулы (\*) вытекает, что  $M_G = G \cap \ker \psi$ . Отсюда следует, что

$$\ker \psi = \ker(1_M)^G = M_G.$$

Предположим, что  $\ker \psi \neq 1$ . По лемме

$$(\overline{\psi}, 1_{M_{\ker \psi / \ker \psi}}^{G / \ker \psi})_{G / \ker \psi} = (\psi, 1_M^G)_G.$$

Поскольку

$$(|M / \ker \psi|, |G / \ker \psi : M / \ker \psi|) = 1,$$

и нормализатор  $N_{G / \ker \psi}(Q \ker \psi / \ker \psi)$  силовой  $q$ -подгруппы  $Q \ker \psi / \ker \psi$  факторгруппы  $G / \ker \psi$   $q$ -разложим, то мы замечаем, что факторгруппа  $G / \ker \psi$  и ее точный неприводимый характер  $\overline{\psi}$  удовлетворяют условию теоремы. Поскольку  $|G / \ker \psi| < |G|$ , то по индукции

$$G_r \ker \psi / \ker \psi \triangleleft G / \ker \psi.$$

Ограничим по теореме Клиффорда точный неприводимый характер  $\overline{\psi}$  группы  $G / \ker \psi$  на ее нормальную подгруппу  $G_r \ker \psi / \ker \psi$ . Поскольку

$$(|\overline{\psi}(1)|, |G_r \ker \psi / \ker \psi|) = 1$$

по условию теоремы, то все неприводимые компоненты искомого ограничения линейные, и ядро каждой из них содержит коммутант  $(G_r \ker \psi / \ker \psi)'$ . Так как пересечение ядер всех неприводимых компонент ограничения единично, ввиду точности характера  $\overline{\psi}$ , то  $(G_r \ker \psi / \ker \psi)' = 1$ , т. е. факторгруппа

$$G_r \ker \psi / \ker \psi \cong G_r / G_r \cap \ker \psi$$

абелева. В рассматриваемом случае теорема верна.

В дальнейшем считаем, что  $\ker \psi = 1$ . Значит,  $M_G = \ker(1_M)^G = 1$  и будем это учитывать.

Предположим, что  $N \neq Q$ . Так как  $N = Q \times N_{q'}$ , то

$$|G| = |MN| = \frac{|M||N|}{|M \cap N|} = \frac{|M||Q||N_{q'}|}{|M \cap N|}.$$

Поскольку  $|G| = |M||Q|$ , то мы видим, что

$$|N_{q'}| = |M \cap N|.$$

По условию теоремы  $N_{q'} \triangleleft N$ . По [12, лемма 1.16.1] подгруппа  $N_{q'}$  содержится в некоторой нормальной в  $G$  подгруппе, которая лежит, очевидно, в подгруппе  $M_G$  – максимальной нормальной в  $G$ , которая содержится в  $M$ . Так как  $M_G = 1$ , то  $N_{q'} = 1$ . Следовательно,  $N = Q$ .

Предположим, что в группе  $G$  существует собственная подгруппа  $1 \neq K \triangleleft G$ . Выберем из таких подгрупп подгруппу, имеющую максимальный порядок. Так как  $K \not\subseteq M$ , то

$$1 \neq K_q = Q \cap K \triangleleft Q, \quad K_{q'} = K \cap M \triangleleft M, \quad K = K_q K_{q'}.$$

Поэтому

$$Q_0 = K_q \cap Z(Q) \neq 1, \quad Q_0 \subseteq Z(K_q), \quad G = KN_G(K_q).$$

Отметим, что

$$Z(K_q) \text{ char } K_q \triangleleft N_G(K_q).$$

Отсюда вытекает, что

$$Q_0 \subseteq Z(K_q) = ((K_q))^x, \quad x \in N_G(K_q).$$

Так как по [11, теорема 5.18] характер  $(1_M)^G$  рациональнозначный, то характер  $\psi = (1_M)^G - 1_G$  также рациональнозначный. При этом

$$\psi(g) = \rho(g) - 1_Q(g) = 0 - 1 = -1$$

для каждого элемента  $g \in Q$ .

С одной стороны, для каждого элемента  $1 \neq g \in Q_0$  по теореме Клиффорда

$$\psi(g) = e \sum_{t \in T} \xi^t(g) = e \sum_{t \in T} \xi(tgt^{-1}),$$

где  $\xi \in \text{Irr}(\psi_K)$ ,  $e = (\psi_K, \xi)_K$  и  $T$  – полное семейство  $G$  по  $I = I_G(\xi)$ . Так как  $K \subseteq I$ , то из выделенной выше формулы вытекает, что  $T \subseteq N_G(K_q)$ .

С другой стороны,  $\psi(g) = -1$ , что показано ранее. Стало быть,

$$\psi(g) = e \sum_{t \in T} \xi(tgt^{-1}) = -1.$$

Отсюда вытекает, что

$$|\psi(g)| = |e \sum_{t \in T} \xi(tgt^{-1})| = e |\sum_{t \in T} \xi(tgt^{-1})| = 1.$$

Мы видим, что  $e = 1$ . Значит,

$$\psi(g) = \sum_{t \in T} \xi(tgt^{-1}) = -1.$$

Поскольку

$$\psi(1) = e|T|\xi(1) = |Q| - 1$$

и  $e = 1$ , то

$$(\xi')_K = e\xi = \xi$$

для такого неприводимого характера  $\xi'$  подгруппы  $I$ , что  $\psi = (\xi')^G$  по [11, теорема 6.11] и

$$\psi(1) = |T|\xi(1) = |Q| - 1.$$

Так как  $T \subseteq N_G(K_q)$ , то из рассуждений выше вытекает, что  $tgt^{-1} \in Z(K_q)$  для каждого элемента  $t \in T$ . Поэтому

$$\xi(g) = \xi(1)\zeta, \quad \zeta^q = 1, \quad \xi^t(g) = \xi(1)\zeta^t, \quad t \in T.$$

Следовательно,

$$\psi(g) = \sum_{t \in T} \xi(tgt^{-1}) = \sum_{t \in T} \xi(1)\zeta^t = \xi(1)\sum_{t \in T} \zeta^t = -1.$$

Отсюда вытекает, что

$$|\psi(g)| = |\xi(1)\sum_{t \in T} \zeta^t| = \xi(1)|\sum_{t \in T} \zeta^t| = 1.$$

Мы видим, что  $\xi(1) = 1$ . Отсюда следует, что подгруппа  $K$  абелева, а также, что  $\xi'(1) = 1$ . Поэтому  $K_{q'} \triangleleft G$ . Но  $K_{q'} \subseteq M_G = 1$ . Стало быть,  $K = K_q$  есть  $q$ -группа.

Поскольку  $N = Q$  и подгруппа  $1 \neq K \subseteq Q$ , причем  $K$  абелева, то из теоремы Бернсайда и из того, что  $M_G = 1$ , вытекает, что  $K \neq Q$ . Поскольку подгруппа  $K$  произвольная максимальная нормальная в группе  $G$ , то факторгруппа  $\overline{G} = G/K$  простая с такой подгруппой  $\overline{M}$ , что  $(|\overline{M}|, |\overline{G} : \overline{M}|) = 1$ ,  $|\overline{G} : \overline{M}| = q^{\alpha_1}$ ,  $\alpha_1 \in \mathbf{N}$ , и  $N_{\overline{G}}(\overline{Q}) = \overline{Q}$ . Здесь  $\overline{M} = MK/K$  и  $\overline{Q} = Q/K$ . Так как группа с самонормализуемой силовской подгруппой нечетного порядка не является простой, то мы заключаем, что  $q = 2$ . Тогда подгруппа  $M$  имеет нечетный порядок и, следовательно, группа  $G_1 = MK$  разрешима. Поскольку  $|G : G_1|$  является степенью 2 и  $Q \subseteq I$ , то  $G = IG_1$ , и по [11, упражнение 5.2] характер

$$\psi_{G_1} = ((\xi')^G)_{G_1} = ((\xi')^{IG_1})_{G_1} = ((\xi')_{I \cap G_1})^{G_1}$$

неприводим и точен. Нетрудно видеть, что  $G_r \subseteq G_1$ . По теореме Д. Уинтера [2]  $G_r \triangleleft G_1$ . Так как  $(|G_r|, |K|) = 1$ , то  $G_r \subseteq C_G(K) \triangleleft G$ . Поскольку подгруппа  $K$  максимальная нормальная в  $G$ ,  $K$  есть 2-группа и  $r \neq 2$ , то мы получили противоречие. Это говорит о том, что  $K = 1$ , т. е. группа  $G$  простая,  $q = 2$ , и подгруппа  $M$  является холловой подгруппой нечетного порядка.

В силу [13]  $G \cong PSL_2(p)$ ,  $p$  – простое число Мерсенна. Ее порядок

$$|G| = \frac{1}{2}p(p-1)(p+1 = 2^n), \quad n \in \mathbf{N}.$$

При этом по [14]

$$c.d.(G) = \left\{1; \frac{p-1}{2}; p-1; p; p+1 = 2^n\right\}, \quad |G_2| = p+1 = 2^n.$$

Так как  $(1_M)^G(1) = |G_2|$  и  $(1_M)^G = \psi + 1_M$ , то легко видеть, что  $\psi(1) = |G_2| - 1 = |Q| - 1 = p$ . Поскольку  $r$  делит  $p-1$  для любого  $r \in \pi(G)$ , то для неприводимого характера  $\psi$  степени  $p$  группы  $PSL_2(p)$ ,  $p$  – простое число Мерсенна, не выполняется последнее требование теоремы, которое гласит:  $\psi(1)$  не делится на такую степень  $f > 1$  некоторого простого числа, что  $f \equiv 0, \pm 1 \pmod{r}$  для некоторого  $r \in \pi(M) = \pi(G) \setminus 2$ . Следовательно, простые группы  $PSL_2(p)$ ,  $p$  – простое число Мерсенна, не удовлетворяют всем условиям теоремы. Поэтому группа  $G$  не может быть простой.  $\square$

Это последнее противоречие доказывает теорему.

### Литература

1. Ito N. On the theorem of N. F. Blichfeldt // Nagoya Math. J. 1953. Vol. 15. P. 75–77.
2. Winter D. L. On finite solvable linear groups // Ill. J. Math. 1971. Vol. 15, N 3. P. 425–428.
3. Winter D. L. Solvability of certain  $p$ -solvable linear groups of finite order // Pacific J. Math. 1970. Vol. 34, N 3. P. 827–835.
4. Isaacs I. M. Complex  $p$ -solvable linear groups // J. Algebra. 1973. Vol. 24, N 3. P. 513–530.
5. Winter D. L. On the structure of certain  $p$ -solvable linear groups // J. Algebra. 1974. Vol. 31, N 3. P. 543–546.
6. Ядченко А. А., Романовский А. В. К проблеме Айзекса о конечных  $p$ -разрешимых линейных группах // Математические заметки. 2001. Т. 69, вып. 1. С. 144–152.
7. Newton B. On the degrees of complex  $p$ -solvable linear groups // J. Algebra. 2005. Vol. 288. P. 384–391.
8. Ядченко А. А. К проблеме Айзекса // Математический сборник. 2013. Т. 204, № 12. С. 147–156.
9. Романовский А. В., Ядченко А. А. Мономиальные характеры и нормальные подгруппы конечных групп // Укр. мат. журнал. 1991. Т. 43, № 7–8. С. 991–996.
10. Gorenstein D. Finite groups. New York: Harper and Row, 1968. 527 p.
11. Isaacs I. M. Character theory of finite groups. New York: Academic Press, 1976. 303 p.
12. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. Минск: Наука и техника, 1964. 158 с.
13. Arad Z., Ward M. B. New criteria for the solvability of finite groups // J. Algebra. 1982. Vol. 77, N 1. P. 234–246.
14. Conway J. H. Atlas of finite groups. London: Clarendon Press, 1985. 252 p.

**References**

1. Ito N. On the theorem of N. F. Blichfeldt. *Nagoya Math. J.*, 1953, vol. 15, pp. 75–77.
2. Winter D. L. On finite solvable linear groups. *Ill. J. Math.*, 1971, vol. 15, no. 3, pp. 425–428.
3. Winter D. L. Solvability of certain  $p$ -solvable linear groups of finite order. *Pacific J. Math.*, 1970, vol. 34, no. 3, pp. 827–835.
4. Isaacs I. M. Complex  $p$ -solvable linear groups. *J. Algebra*, 1973, vol. 24, no. 3, pp. 513–530.
5. Winter D. L. On the structure of certain  $p$ -solvable linear groups. *J. Algebra*, 1974, vol. 31, no. 3, pp. 543–546.
6. Yadchenko A. A., Romanovskii A. V. On the Isaacs problem concerning finite  $p$ -solvable linear groups. *Math. Notes*, 2001, vol. 69, no. 1, pp. 144–152 (in Russian).
7. Newton B. On the degrees of complex  $p$ -solvable linear groups. *J. Algebra*, 2005, vol. 288, pp. 384–391.
8. Yadchenko A. A. On Isaacs' problem. *Math. Sbornik*, 2013, vol. 204, no. 12, pp. 1839–1848.
9. Romanovskii A. V., Yadchenko A. A. Monomial characters and normal subgroup of finite groups. *Ukr. Math. J.*, 1991, vol. 43, no. 7–8, pp. 925–929.
10. Gorenstein D. *Finite Groups*. New York, Harper and Row, 1968. 527 p.
11. Isaacs I. M. *Character Theory of Finite Groups*. New York, Academic Press, 1976. 303 p.
12. Chunihin S. A. *Subgroup of Finite Groups*. Minsk, Nauka i Tekhnika, 1975. 158 p.
13. Arad Z., Ward M. B. New criteria for the solvability of finite groups. *J. Algebra*, 1982, vol. 77, no. 1, pp. 234–246.
14. Conway J. H. *Atlas of finite groups*. London, Clarendon Press, 1985. 252 p.



ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ  
И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ  
REAL, COMPLEX AND  
FUNCTIONAL ANALYSIS



УДК 517.982, 517.983, 519.21

<https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1-45-55>

EDN:ETIXQP

О НЕОГРАНИЧЕННОСТИ ЕСТЕСТВЕННЫХ ПРОЕКТОРОВ  
В ПРОСТРАНСТВАХ БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦ

В. Н. Куница<sup>2</sup>, К. В. Лыков<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь

<sup>2</sup>Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

e-mail: vikakunica@gmail.com, alkv@list.ru

Поступила: 29.04.2026

Исправлена: 14.05.2026

Принята: 29.05.2026

**Ключевые слова:** дополняемое подпространство, пространства последовательностей, естественные проекторы, бесконечные матрицы, матричный оператор, операторная норма, случайная проекция, закон нуля и единицы, мультипликаторы Шура–Адамара

**Аннотация.** В работе рассматриваются банаховы пространства операторов из  $\ell^p$  в  $\ell^q$ , реализуемых в виде бесконечных матриц. Показано, что при  $p > 1$  и  $q < \infty$  для почти всех подпространств, образованных случайно выбранными матричными единицами, естественные проекторы на эти подпространства будут неограничены. Кроме того, эти проекторы будут неограничены уже на классе матриц с элементами  $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ .

ON UNBOUNDEDNESS OF NATURAL PROJECTORS IN SPACES OF INFINITE MATRICES

V. N. Kunica<sup>2</sup>, K. V. Lykov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

<sup>2</sup>Belarusian State University, Minsk, Belarus

e-mail: vikakunica@gmail.com, alkv@list.ru

Received: 29.04.2026

Revised: 14.05.2026

Accepted: 29.05.2026

**Keywords:** complemented subspace, sequence spaces, canonical projectors, infinite matrices, matrix operator, operator norm, random projection, zero-one law, Schur–Hadamard multipliers

**Abstract.** In this paper, we consider Banach spaces of operators from  $\ell^p$  to  $\ell^q$  that can be realized as infinite matrices. We show that for  $p > 1$  and  $q < \infty$ , for almost all subspaces formed by randomly chosen matrix units, the canonical projectors onto these subspaces will be unbounded. Moreover, these projectors will be unbounded even on the class of matrices with elements  $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ .

1. Введение

Вопросы дополняемости в банаховых пространствах являются одновременно важными и сложными. Общим и конкретным исследованиям в этом направлении посвящено большое количество статей, включая работы как создателей функционального анализа (см., например, [1]), так и современных математиков [2–4]. В банаховых пространствах с выделенной минимальной системой векторов и сопряженной к ней системой функционалов (т. е. с выделенной биортогональной системой) имеет смысл находить ответы на более простой вопрос: будет ли ограничен естественный проектор на подпространство, порожденное данной минимальной системой. В настоящей работе будет рассматриваться такой вопрос относительно подсистем из матричных единиц в пространствах операторов между  $\ell^p$  и  $\ell^q$ .

Напомним некоторые понятия и дадим необходимые определения.

**Определение 1.1.** Подпространство (замкнутое)  $Y$  банахова пространства  $X$  называется дополняемым в  $X$ , если существует ограниченный проектор  $P$  из  $X$  на  $Y$ , т. е. такой ограниченный идемпотентный оператор ( $P^2 = P$ ), что  $P(Y) = Y$ .

Дополняемость в  $X$  подпространства  $Y \subset X$  равносильна существованию подпространства  $Z \subset X$  такого, что

$$X = Y \oplus Z.$$

Последнее равенство означает, что  $X$  разлагается в *прямую сумму* подпространств  $Y$  и  $Z$ , а норма  $x = y + z$ ,  $y \in Y, z \in Z$ , в  $X$  эквивалентна  $\|y\| + \|z\|$  (т. е.  $\|y\| + \|z\| \leq C\|x\|$  с константой  $C$ , не зависящей от  $x \in X$ ). Все конечномерные подпространства любого банахова пространства дополняемы, и то же имеет место для подпространств конечной коразмерности. Легко видеть, что в гильбертовом пространстве все замкнутые подпространства дополняемы (достаточно построить ортогональное дополнение или рассмотреть ортогональную проекцию). Оказывается, что в любом другом банаховом пространстве (т. е. неизоморфном гильбертову) обязательно найдется недополняемое замкнутое подпространство [5]. Примером недополняемого подпространства является подпространство  $c_0$  в пространстве  $\ell^\infty$  [6]. Некоторые интересные результаты о проблеме дополняемости можно посмотреть в работе [7].

Мы будем рассматривать банаховы пространства над полем  $\mathbb{R}$ . Напомним, что пространство  $\ell^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , состоит из всех последовательностей  $x = (x_1, x_2, \dots)$ , для которых конечна норма

$$\|x\|_p := \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p},$$

$\ell^\infty$  состоит из всех ограниченных последовательностей с нормой

$$\|x\|_\infty := \sup_i |x_i|,$$

а  $c_0$  состоит из всех сходящихся к нулю последовательностей с нормой пространства  $\ell^\infty$ . Напомним, что норма элемента  $x \in \ell^p$  может быть вычислена также с помощью элементов предсопряженного пространства:

$$\|x\|_p = \sup_{y \in S_{p^*}} \langle y, x \rangle,$$

где  $p^* := p/(p-1)$  при  $p > 1$  и  $p^* := \infty$  при  $p = 1$ , через  $S_r$  здесь и далее обозначается единичная сфера пространства  $\ell^r$ , а

$$\langle y, x \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i.$$

Через  $e^j$  мы будем обозначать единичный орт в пространствах последовательностей, т. е. вектор  $e^j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  с единицей на  $j$ -й позиции, а через  $x_i$  —  $i$ -ю координату вектора  $x$ , т. е.  $x_i = \langle e^i, x \rangle$ . Обозначение  $P_n$  зарезервируем за ортогональной проекцией на первые  $n$  координат во всех пространствах последовательностей, т. е.

$$P_n x = P_n(x) := \sum_{i=1}^n x_i e^i.$$

Отметим, что для всех  $p \in [1, \infty]$  при  $n \rightarrow \infty$

$$\|P_n x\|_p \rightarrow \|x\|_p,$$

а при  $p < \infty$

$$\|P_n x - x\|_p \rightarrow 0.$$

Через  $\mathcal{L}^{p,q}$  обозначим банахово пространство всех линейных и ограниченных операторов из  $\ell^p$  в  $\ell^q$ , а через  $\mathcal{M}^{p,q}$  — подмножество  $\mathcal{L}^{p,q}$ , состоящее из операторов, представимых в матричном виде (см. раздел 3). Несложно видеть, и мы покажем это в разделе 3, что  $\mathcal{M}^{p,q}$  образует замкнутое линейное подпространство в  $\mathcal{L}^{p,q}$ . В случае  $p < \infty$  имеет место равенство  $\mathcal{M}^{p,q} = \mathcal{L}^{p,q}$ , а в случае

$p = \infty$  множество  $\mathcal{M}^{p,q}$  будет собственным подпространством  $\mathcal{L}^{p,q}$ . Для матрицы  $A \in \mathcal{M}^{p,q}$  через  $\|A\|_{p,q}$  будем обозначать операторную норму  $A$  как элемента  $\mathcal{L}^{p,q}$ .

Хорошо известна связь между свойством базисности и ограниченности естественных проекторов [8]. В недавней работе [9] исследовался вопрос о базисности системы матричных единиц, рассматриваемой при разных способах нумерации, в пространстве операторов из  $c_0$  в  $\ell^\infty$ . В этой работе было показано, что в некотором смысле почти все перестановки матричных единиц будут образовывать последовательность, не являющуюся базисом (несмотря на то что система матричных единиц полна и минимальна в рассматриваемом пространстве операторов), и была отмечена связь с некоторыми вопросами об ограниченности проекций на подсистемы системы матричных единиц.

Напомним, что система векторов  $\{x^j\}_{j \in J}$  в банаховом пространстве  $X$  называется *минимальной*, если  $x^j \notin \overline{\text{span}}(\{x^j\}_{j \notin J})$  для любого  $j \in J$ . Здесь через  $\overline{\text{span}}(\{x^j\}_{j \notin J})$  обозначено замыкание в  $X$  линейной оболочки  $\text{span}(\{x^j\}_{j \notin J})$  системы  $\{x^j\}_{j \notin J}$  (т. е. исходной системы без выбранного элемента  $x^j$ ). Для минимальной системы  $\{x^j\}_{j \in J}$  всегда существует (но может быть не единственная) [8] такая система  $\{y^j\}_{j \in J}$  элементов из сопряженного пространства  $X^*$ , что  $y^j(x^k) = [k = j]$ , где  $[k = j]$  – это индикатор равенства  $k = j$  (т. е.  $[k = j] = 0$  при  $k \neq j$  и  $[k = j] = 1$  при  $k = j$ , такая форма записи индикатора называется нотацией Айверсона). Система  $\{y^j\}_{j \in J}$  при этом называется *сопряженной системой*, а система пар  $\{(x^j, y^j)\}_{j \in J}$  – *биортогональной системой*. Предположим теперь, что для каждого  $x \in X$  в  $\overline{\text{span}}(\{x^j\}_{j \in J})$  существует единственный элемент  $Px$  такой, что  $y^j(Px) = y^j(x)$ . Будем называть так определенный оператор ( $x \rightarrow Px$ ) *естественным проектором* относительно биортогональной системы  $\{(x^j, y^j)\}_{j \in J}$ . Очевидно, что при этом оператор  $P$  будет линейным, и, кроме того, будет выполняться равенство  $P^2 = P$ , т. е.  $P$  будет идемпотентом. Если оператор  $P$  определен и ограничен, то мы будем говорить, что естественный проектор на систему  $\{x^j\}_{j \in J}$  ограничен (при условии, конечно, что сопряженная система к  $\{x^j\}_{j \in J}$  уже выбрана). В остальных случаях, т. е. когда оператор  $P$  не определен или определен, но неограничен, мы будем говорить, что естественный проектор на систему  $\{x^j\}_{j \in J}$  неограничен.

*Матричной единицей*  $E_{ij}$  будем называть матрицу, у которой в позиции  $(i, j)$  стоит единица, а все остальные элементы равны нулю. Легко видеть, что во всех матричных пространствах  $\mathcal{M}^{p,q}$  система матричных единиц  $\{E_{ij}\}$  образует минимальную систему, и, кроме того,  $\|E_{ij}\|_{p,q} = 1$ . В качестве сопряженной системы мы будем использовать систему функционалов  $\{E_{ij}^*\}$ , действующих по правилу

$$E_{ij}^*(A) = a_{ij}$$

для произвольной матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^\infty \in \mathcal{M}^{p,q}$ . В рассматриваемых пространствах сходимость по норме влечет покоординатную сходимость, так как

$$\|A\|_{p,q} \geq |a_{ij}|,$$

поэтому все функционалы  $E_{ij}^*$  будут непрерывными.

В настоящей работе изучается вопрос об ограниченности естественных проекторов на подсистемы системы матричных единиц в пространствах  $\mathcal{M}^{p,q}$ . При  $p = 1$  или  $q = \infty$  все такие проекторы будут ограничены. Нетривиальным в поставленной задаче является случай  $p > 1$  и  $q < \infty$ . Мы не исследуем в этой работе ограниченность естественного проектора при конкретном выборе системы матричных единиц, но доказываем, что при  $p > 1$  и  $q < \infty$  почти все такие проекторы будут неограничены. «Почти все» здесь понимается в вероятностном смысле. Мы выбираем подсистему матричных единиц случайно: каждая матричная единица включается в подсистему с вероятностью  $1/2$  и независимо от других матричных единиц. Из закона нуля и единицы (см. [10, глава IV, § 1]) ясно, что если ограниченность такого случайного проектора является событием, то его вероятность равна либо нулю, либо единице. Мы доказываем, что это действительно будет событием, вероятность которого в случае  $p > 1$  и  $q < \infty$  равна нулю.

Отметим, что для любой бесконечной матрицы проекцию  $P_{\mathcal{E}}$  на произвольную подсистему  $\mathcal{E}$  матричных единиц можно определить без рассмотрения объемлющих матричных пространств и, следовательно, без понятия биортогональной системы. Под естественной проекцией матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^\infty$  можно понимать матрицу  $P_{\mathcal{E}}(A) = (a_{ij}[E_{ij} \in \mathcal{E}])_{i,j=1}^\infty$ . Описанный выше подход мы

предложили для включения рассматриваемой нами задачи в более широкий контекст, подразумевая будущие более общие исследования.

Наше изложение мы начнем с рассмотрения конечномерного случая. Для различения с бесконечномерным случаем мы используем обозначения  $\ell_n^p$ ,  $\mathcal{M}_n^{p,q}$  и т. д. для естественных  $n$ -мерных аналогов введенных выше объектов и конструкций.

## 2. Естественные проекторы в конечномерном случае

В этом разделе мы будем смотреть на матрицы размера  $n \times n$  как на ограниченные линейные операторы между  $n$ -мерными пространствами. Для фиксированных  $p$  и  $q$ ,  $1 \leq p, q \leq \infty$ , это будут все операторы из  $\ell_n^p$  в  $\ell_n^q$  с операторной нормой: для матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$

$$\|A\|_{p,q} := \sup_{x \in \ell_n^p: \|x\|_{\ell_n^p}=1} \|Ax\|_{\ell_n^q}.$$

Конечномерное банахово пространство всех матриц размера  $n \times n$ , рассматриваемое с операторной нормой  $\|\cdot\|_{p,q}$ , будем обозначать через  $\mathcal{M}_n^{p,q}$ .

Через  $E_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , обозначим матричные единицы, т. е. матрицы, у которых одна единица стоит в позиции  $(i, j)$ , а на всех других позициях стоят нули. Таким образом для произвольной матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  имеет место следующее разложение:

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}.$$

Случайным естественным проектором  $P_S$  в пространстве  $\mathcal{M}_n^{p,q}$  будем называть ортогональную проекцию на подпространство  $\mathcal{M}_n^{p,q}$ , образованное набором матричных единиц  $\{E_{ij}\}_{i,j \in S}$ ,  $S \subset \{1, 2, \dots, n\}^2$ , выбранных случайным образом в соответствии с симметричной схемой Бернулли:  $P((i, j) \in S) = \frac{1}{2}$  и события  $\{(i, j) \in S\}$ ,  $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$ , независимы в совокупности. Таким образом случайный естественный проектор может принимать одно из  $2^{n^2}$  равновероятных значений, каждое из которых является естественным проектором. Для каждого фиксированного  $s \subset \{1, 2, \dots, n\}^2$  и произвольной матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$

$$P_s(A) = \sum_{i,j:(i,j) \in s} a_{ij} E_{ij}.$$

**Теорема 2.1.** Пусть  $1 < p \leq \infty$ ,  $1 \leq q < \infty$ ,  $\delta = \min\{1/p^*, 1/q, 1/2\}$ . Тогда

$$P \left( \|P_S\|_{\mathcal{M}_n^{p,q} \rightarrow \mathcal{M}_n^{p,q}} \geq \frac{n^{\delta/2} - 1}{2} \right) \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

**Доказательство.** Мы будем использовать результаты работы Г. Беннетта [11] о матрицах с элементами  $a_{ij} = \pm 1$ . Нужный нам эффект роста норм естественных проекторов проявится уже на таких матрицах.

Обозначим

$$M = \max_{\theta_{ij} = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij} \right\|_{p,q}.$$

Легко видеть (см. также [11, Proposition 3.1]), что

$$M = \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_{ij} \right\|_{p,q} = n^{1/q+1/p^*}$$

С другой стороны, из [11, Proposition 3.2 и Corollary 3.3] следует, что с константой  $B$ , не зависящей от  $n$ ,

$$E_\theta \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij} \right\|_{p,q} \leq Bn^\gamma, \quad \text{где } \gamma = \max\{1/q, 1/q + 1/2 - 1/p, 1/p^*, 1/p^* + 1/q - 1/2\}.$$

Легко видеть, что

$$\gamma \leq 1/q + 1/p^* - \delta.$$

Поэтому

$$E_\theta \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij} \right\|_{p,q} \leq BMn^{-\delta}. \quad (1)$$

Отсюда можно сделать вывод, что для множества знаков

$$\Omega_n := \left\{ \theta = (\theta_{ij} = \pm 1)_{i,j=1}^n : \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij} \right\|_{p,q} \leq Mn^{-\delta/2} \right\}$$

выполняется неравенство

$$P(\Omega_n) \geq 1 - Bn^{-\delta/2}.$$

Действительно, иначе было бы так:

$$E_\theta \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij} \right\|_{p,q} \geq \int_{\Omega \setminus \Omega_n} \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij} \right\|_{p,q} d\theta \geq Mn^{-\delta/2} P(\Omega \setminus \Omega_n) > Mn^{-\delta/2} Bn^{-\delta/2} = BMn^{-\delta},$$

а это противоречит неравенству (1).

С другой стороны, для  $\theta \in \Omega_n$

$$\left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij} \right\|_{p,q} \leq Mn^{-\delta/2}$$

и, одновременно,

$$2 \left\| \sum_{i,j:\theta_{ij}=1} E_{ij} \right\|_{p,q} = \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij} \right\|_{p,q} \geq M - Mn^{-\delta/2},$$

Следовательно, для любого набора знаков  $\theta \in \Omega_n$

$$\frac{\left\| \sum_{i,j:\theta_{ij}=1} E_{ij} \right\|_{p,q}}{\left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij} \right\|_{p,q}} = \frac{\left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_{ij} \right\|_{p,q}}{2 \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij} \right\|_{p,q}} \geq \frac{M - Mn^{-\delta/2}}{2Mn^{-\delta/2}} = \frac{n^{\delta/2} - 1}{2}.$$

Но это означает, что для случайного множества  $S \subset \{1, 2, \dots, n\}^2$ , определяемого равенством  $S = \{(i, j) : \theta_{ij} = 1\}$ , и матрицы

$$A_\theta := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij}$$

при  $\theta \in \Omega_n$  выполняется неравенство

$$\|P_S\|_{\mathcal{M}_n^{p,q} \rightarrow \mathcal{M}_n^{p,q}} \geq \frac{\|P_S(A_\theta)\|_{p,q}}{\|A_\theta\|_{p,q}} \geq \frac{n^{\delta/2} - 1}{2}.$$

Доказательство теоремы завершим наблюдением, что  $P(\Omega_n) \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . □

### 3. Реализация операторов между $\ell^p$ и $\ell^q$ в виде матриц

Будем говорить, что бесконечная матрица  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^\infty$ , составленная из вещественных чисел  $a_{ij}$ , корректно определяет (или *задает*) оператор из  $\ell^p$  в  $\ell^q$ , если для каждого  $x = (x_j) \in \ell^p$  выполняется следующее условие: для каждого  $i \in \mathbb{N}$  сходится ряд

$$\sum_{j=1}^\infty a_{ij} x_j =: y_i, \quad (2)$$

а вектор  $y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in \ell^q$ . В таком случае мы полагаем  $Ax = y$ . В общем случае определить по матрице  $A$ , задает ли она оператор из  $\ell^p$  в  $\ell^q$ , является сложной задачей. Отметим, однако, что

при  $p < \infty$  все ограниченные линейные операторы из  $\ell^p$  в  $\ell^q$  задаются матрицами. Именно, каждый линейный ограниченный оператор  $T$  из  $\ell^p$  в  $\ell^q$  корректно определяется матрицей  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$  с  $a_{ij} = (Te^j)_i$ . Действительно, последовательность  $(e^j)_{j=1}^{\infty}$  образует базис в пространстве  $\ell^p$  при  $p < \infty$ , поэтому для  $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^p$

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e^j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j e^j.$$

Из сходимости в  $\ell^q$  вытекает и покоординатная сходимость. Если оператор  $T$  линеен и непрерывен, то

$$Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j T e^j,$$

и, следовательно,

$$(Tx)_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j (Te^j)_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j,$$

а значит сходятся и все ряды  $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$  к  $(Tx)_i$ . При этом

$$((Tx)_1, (Tx)_2, \dots) = Tx \in \ell^q.$$

Аналогичное рассуждение показывает, что любой ограниченный линейный оператор из  $c_0$  в  $\ell^q$  также имеет корректное матричное представление. Отмеченное свойство представимости любого линейного ограниченного оператора в виде матрицы хорошо известно в более общей форме (не только для операторов из  $\ell^p$ ,  $p < \infty$ , или  $c_0$  в  $\ell^q$ ) [12, Theorem 2.33].

Отметим еще, что в случае  $1 \leq q < p < \infty$  все ограниченные линейные операторы из  $\ell^p$  в  $\ell^q$  являются компактными [13; 14], и это же верно для операторов из  $c_0$  в  $\ell^q$  при  $1 \leq q < \infty$ . Кроме того, множество всех матриц, задающих операторы из  $\ell^{\infty}$  в  $\ell^q$ ,  $1 \leq q < \infty$ , совпадает с аналогичным множеством в случае операторов из  $c_0$  в  $\ell^q$  [15], и, следовательно, все соответствующие этим матрицам операторы компактны. При этом в случае  $1 \leq q < 2$  все операторы из  $\ell^{\infty}$  в  $\ell^q$  компактны [14]. Однако не все компактные операторы из  $\ell^{\infty}$  в  $\ell^q$  можно представить в матричном виде (для контрпримеров можно использовать конечномерные операторы с координатными функционалами в виде банаховых пределов, про банаховы пределы см. в [16; 17]).

В любом случае, справедливо следующее утверждение.

**Предложение 3.1.** *Для любых  $p, q \in [1, \infty]$  все операторы из  $\ell^p$  в  $\ell^q$ , которые корректно определяются бесконечными матрицами, являются ограниченными и образуют банахово пространство  $\mathcal{M}^{p,q} \subset \mathcal{L}^{p,q}$  с операторной нормой: для каждой такой матрицы  $A$*

$$\|A\|_{p,q} := \sup_{x \in S_p} \|Ax\|_{\ell^q} < \infty.$$

**Доказательство.** Действительно, во-первых, если матрица  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$  корректно задает оператор из  $\ell^p$  в  $\ell^q$ , то этот оператор ограничен, т. е. принадлежит пространству  $\mathcal{L}^{p,q}$ . Чтобы в этом убедиться, применим дважды теорему Банаха–Штейнгауза о равномерной ограниченности. Все линейные функционалы  $y_i = y_i(x)$ , определенные равенством (2), автоматически являются непрерывными на  $\ell^p$ , если только соответствующий ряд сходится: каждый такой функционал является поточечным пределом последовательности ограниченных функционалов вида

$$y_i^{(n)}(x) := \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j,$$

и, в силу известного следствия из теоремы Банаха–Штейнгауза, ограничен. Значит, все конечномерные операторы вида

$$A^{(m)}(x) := (y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x), 0, 0, \dots)$$

также являются ограниченными. Кроме того, последовательность этих операторов поточечно ограничена, так как

$$\|A^{(m)}(x)\|_q \leq \|A(x)\|_q.$$

По теореме Банаха–Штейнгауза эта последовательность операторов будет равномерно ограничена. Но для любого  $x \in \ell^p$

$$\|A(x)\|_q = \lim_{m \rightarrow \infty} \|A^{(m)}(x)\|_q \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \|A^{(m)}\|_{p,q} \|x\|_p.$$

Во-вторых, подпространство  $\mathcal{M}^{p,q}$  замкнуто в  $\mathcal{L}^{p,q}$ . В случае  $p < \infty$ , как уже было отмечено, пространство  $\mathcal{M}^{p,q}$  просто совпадает с  $\mathcal{L}^{p,q}$ . В случае  $p = \infty$  имеет место изометрическое равенство  $\mathcal{M}^{\infty,q} = \mathcal{L}(c_0, \ell^\infty)$ , где через  $\mathcal{L}(c_0, \ell^\infty)$  мы обозначили пространство всех линейных ограниченных операторов из  $c_0$  в  $\ell^\infty$ . Это следует из описания пространства  $\mathcal{M}^{\infty,q}$ , см. [18, Lemma 1; 19, Theorem 9; 15, пункты 63 и 72], и обозначенного выше факта, что все операторы из  $\mathcal{L}(c_0, \ell^\infty)$  представляются матрицами.  $\square$

**Замечание 3.2.** Предложение 3.1 следует из общей теории так называемых *FK-пространств* (пространств последовательностей с некоторыми специальными, но часто встречающимися свойствами) [12; 20]. Известно, что все матричные операторы между *FK-пространствами* автоматически непрерывны (см., например, [20, Theorem 4.2.8] или [12, Theorem 2.31]). Мы решили написать прямое доказательство, использующее только теорему Банаха–Штейнгауза и относительно простые результаты о структуре матричных пространств, чтобы не вынуждать читателя изучать специальную теорию (безусловно, очень красивую, важную и полезную) перед прочтением нашей маленькой заметки. Аналогичное можно сказать и про предложение 3.3 далее.

Обозначим через  $P_{n,m}$  естественный проектор в  $\mathcal{M}^{p,q}$  на систему  $\{E_{ij}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ . Для любых целых  $k, l \geq 0$  и любой матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^\infty \in \mathcal{M}^{p,q}$  (пишем  $P_{n,m}A$  вместо  $P_{n,m}(A)$ )

$$\|P_{n,m}A\|_{p,q} = \sup_{x \in S_p, y \in S_{q^*}} \langle y, (P_{n,m}A)x \rangle \leq \sup_{x \in S_p, y \in S_{q^*}} \langle y, (P_{n+k, m+l}A)x \rangle = \|P_{n+k, m+l}A\|_{p,q}.$$

Промежуточное неравенство справедливо в силу того, что для любых  $x \in S_p, y \in S_{q^*}$  можно подобрать  $x' \in S_p, y' \in S_{q^*}$  такие, что

$$\langle y, (P_{n,m}A)x \rangle = \langle y, (P_{n+k, m+l}A)x \rangle = \langle y', (P_{n+k, m+l}A)x' \rangle.$$

Похожие соображения показывают, что  $\|P_{n,m}A\|_{p,q} \leq \|A\|_{p,q}$ . Кроме того,

$$\|P_{n,m}A\|_{p,q} \nearrow \|A\|_{p,q} \quad \text{при } n, m \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Действительно, пусть  $x' \in S_p, \varepsilon > 0$  и  $\|Ax'\|_q > \|A\|_{p,q} - \varepsilon$ . Для некоторого  $n_0$  будет выполняться неравенство  $\|P_{n_0}Ax'\|_q > \|A\|_{p,q} - 2\varepsilon$  (напомним, что через  $P_n$  мы обозначаем проектор на первые  $n$  координат в пространстве последовательностей). Далее, так как все ряды вида  $\sum_j a_{ij}x'_j, i = 1, 2, \dots, \dots, n_0$  сходятся, то для некоторого  $m_0 > n_0$

$$\|P_{n_0}(A(P_{m_0}x'))\|_q > \|A\|_{p,q} - 3\varepsilon.$$

Но тогда  $\|(P_{n_0, m_0}A)x'\|_q > \|A\|_{p,q} - 3\varepsilon$ . Следовательно,  $\|P_{n_0, m_0}A\|_{p,q} > \|A\|_{p,q} - 3\varepsilon$ , и выполнено (3).

**Предложение 3.3.** Пусть  $\mathcal{E}$  – произвольная подсистема матричных единиц,  $p, q \in [1, \infty]$ . Предположим, что для любой матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^\infty \in \mathcal{M}^{p,q}$  матрица  $P_{\mathcal{E}}(A) := (a_{ij} \cdot [E_{ij} \in \mathcal{E}])_{i,j=1}^\infty$  также принадлежит  $\mathcal{M}^{p,q}$ . Тогда линейный оператор (матричная проекция)

$$P_{\mathcal{E}} : A \in \mathcal{M}^{p,q} \rightarrow P_{\mathcal{E}}(A) \in \mathcal{M}^{p,q}$$

будет ограниченным.

**Доказательство.** В силу (3)

$$\|(P_{n,n}P_{\mathcal{E}})(A)\|_{p,q} = \|P_{n,n}(P_{\mathcal{E}}(A))\|_{p,q} \nearrow \|P_{\mathcal{E}}(A)\|_{p,q}.$$

Получается, что последовательность ограниченных (в силу конечномерности и непрерывности координатных функционалов  $a_{ij}$ ) операторов  $P_{n,n}P_{\mathcal{E}} : \mathcal{M}^{p,q} \rightarrow \mathcal{M}^{p,q}$  поточечно ограничена, а значит, по теореме Банаха–Штейнгауза, и равномерно ограничена некоторой константой  $C > 0$ . Следовательно,

$$\|P_{\mathcal{E}}(A)\|_{p,q} \leq \sup_n \|P_{n,n}P_{\mathcal{E}}\|_{\mathcal{M}^{p,q} \rightarrow \mathcal{M}^{p,q}} \|A\|_{p,q} \leq C \|A\|_{p,q}. \quad \square$$

#### 4. Неограниченность естественных проекторов в пространствах операторов между $\ell^p$ и $\ell^q$

Для данных  $p$  и  $q$  определим подпространство  $\mathcal{R}$  в пространстве  $\mathcal{M}^{p,q}$  случайно: каждый элемент  $E_{ij}$  входит в это подпространство независимо от других с вероятностью  $1/2$ , а само подпространство  $\mathcal{R}$  определяется замыканием в  $\mathcal{M}^{p,q}$  линейной оболочки выбранных матричных единиц  $E_{ij}$ . Соответствующее вероятностное пространство, от которого зависит выбор подпространства  $\mathcal{R}$ , — это пополнение счетного произведения бернуллиевских (с двумя элементарными исходами) вероятностных пространств. Зададимся следующими вопросами. Будет ли событием (в вероятностном смысле) ограниченность естественного проектора  $P_{\mathcal{R}}$  на случайное подпространство  $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}^{p,q}$ ? Чему равна вероятность такого события? Под естественным проектором  $P_{\mathcal{R}}$  мы понимаем следующее отображение на множестве всех бесконечных матриц: для матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$

$$P_{\mathcal{R}}(A) = (a_{ij} \cdot [E_{ij} \in \mathcal{R}])_{i,j=1}^{\infty}.$$

Начнем со следующего простого утверждения, показывающего, что в случае  $p = 1$  и в случае  $q = \infty$  проблемы, по сути, нет.

**Предложение 4.1.** *Если  $p = 1$  или  $q = \infty$ , то все естественные проекторы в  $\mathcal{M}^{p,q}$  ограничены, и при  $\mathcal{R} \neq \{0\}$  норма каждого проектора  $P_{\mathcal{R}}$  равна единице.*

**Доказательство.** Легко видеть, что для любой матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty} \in \mathcal{M}^{1,q}$  при  $q < \infty$

$$\|A\|_{1,q} = \sup_{j \in \mathbb{N}} \left( \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{1/q},$$

а при  $q = \infty$

$$\|A\|_{1,\infty} = \sup_{i,j \in \mathbb{N}} |a_{ij}|.$$

Поэтому

$$\|P_{\mathcal{R}}(A)\|_{1,q} \leq \|A\|_{1,q}.$$

При этом для матричной единицы  $E_{ij} \in \mathcal{R}$  имеет место равенство

$$\|P_{\mathcal{R}}(E_{ij})\|_{1,q} = \|E_{ij}\|_{1,q},$$

что завершает доказательство при  $p = 1$ .

Далее, при  $p > 1$  и  $A \in \mathcal{M}^{p,\infty}$

$$\|A\|_{p,\infty} = \sup_{i \in \mathbb{N}} \left( \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^{p^*} \right)^{1/p^*},$$

и рассуждения для  $q = \infty$  аналогичны. □

При  $p > 1$  и  $q < \infty$  простых формул для норм матричных операторов из  $\ell^p$  в  $\ell^q$  нет, и в этом случае мы не можем использовать рассуждения, аналогичные доказательству предложения 4.1. Оказывается, что и сама ситуация с ограниченностью естественных проекторов будет другой, в некотором смысле противоположной.

**Теорема 4.2.** *Пусть  $1 < p \leq \infty$ ,  $1 \leq q < \infty$ . Почти наверное для проектора  $P_{\mathcal{R}}$  найдется матрица  $A \in \mathcal{M}^{p,q}$  такая, что  $P_{\mathcal{R}}(A) \notin \mathcal{M}^{p,q}$ .*

**Доказательство.** Выберем последовательность попарно непересекающихся подмножеств  $I_n \subset \mathbb{N}$  такую, что  $|I_n| = n$ , а в остальном произвольную. Пусть  $P_{n,n}$  — проекция на подпространство  $\text{span}\{E_{ij} : i, j \in I_n\}$  в пространстве  $\mathcal{M}^{p,q}$ . Для каждого натурального  $N \in \mathbb{N}$  через  $B_{N,n}$  обозначим событие, состоящее в том, что биоограничение  $P_{n,n}P_{\mathcal{R}}P_{n,n}$  ( $= P_{\mathcal{R}}P_{n,n}$ ) оператора  $P_{\mathcal{R}}$  в  $\mathcal{M}^{p,q}$  имеет норму, не превосходящую  $N$  (соответствующее подмножество вероятностного пространства действительно будет событием, так как оно определяется лишь конечным набором элементарных событий вида  $E_{ij} \in \mathcal{R}$ ,  $i, j \in I_n$ , т. е. цилиндрическим множеством нашего вероятностного пространства). Согласно теореме 2.1 при  $n > n_N$

$$P(B_{N,n}) = P(\|P_{n,n}P_{\mathcal{R}}P_{n,n}\|_{\mathcal{M}^{p,q} \rightarrow \mathcal{M}^{p,q}} \leq N) \leq P(\|P_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{M}_n^{p,q} \rightarrow \mathcal{M}_n^{p,q}} \leq N) < 1/2.$$

Но события  $\{B_{N,n}\}_n$  независимы в совокупности, поэтому для каждого  $N \in \mathbb{N}$

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{N,n}\right) \leq P\left(\bigcap_{n=N+1}^{N+m} B_{N,n}\right) < (1/2)^m \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty,$$

и, следовательно,

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{N,n}\right) = 0.$$

Значит,

$$P\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{N,n}\right) \leq \sum_{N=1}^{\infty} P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{N,n}\right) = 0.$$

Пусть теперь  $B$  – такое подмножество нашего вероятностного пространства, на котором соответствующие проекторы  $P_{\mathcal{R}}$  ограничены. Легко видеть, что

$$\|P_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{M}^{p,q} \rightarrow \mathcal{M}^{p,q}} \geq \|P_{n,n} P_{\mathcal{R}} P_{n,n}\|_{\mathcal{M}^{p,q} \rightarrow \mathcal{M}^{p,q}}$$

(и, кроме этого, несложно показать, что  $\|P_{n,n}\|_{\mathcal{M}^{p,q} \rightarrow \mathcal{M}^{p,q}} = 1$ ). Поэтому

$$B \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{N,n}.$$

Значит, в силу полноты используемого вероятностного пространства,  $B$  является событием, и  $P(B) = 0$ . Далее, если  $P_{\mathcal{R}}(A) \in \mathcal{M}^{p,q}$  для любой матрицы  $A \in \mathcal{M}^{p,q}$ , то, в силу предложения 3.3, оператор  $P_{\mathcal{R}}$  будет ограниченным в  $\mathcal{M}^{p,q}$ , что, как мы выяснили, происходит лишь с нулевой вероятностью. Следовательно, почти наверно найдется матрица  $A \in \mathcal{M}^{p,q}$ , для которой  $P_{\mathcal{R}}(A) \notin \mathcal{M}^{p,q}$ .  $\square$

Из теоремы 4.2 и предложения 3.3 получаем

**Следствие 4.3.** При  $p > 1$  и  $q < \infty$  вероятность того, что естественный проектор  $P_{\mathcal{R}}$  на случайное попространство  $\mathcal{R}$  будет ограничено действовать в пространстве  $\mathcal{M}^{p,q}$ , равна нулю.

**Замечание 4.4.** Как это видно из доказательства теоремы 4.2 почти наверно неограниченность случайного естественного проектора в  $\mathcal{M}^{p,q}$  проявляется на финитных матрицах, у которых ненулевые элементы  $a_{ij} = \pm 1$ .

Работа второго автора поддержана Национальной академией наук Беларуси в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2030», НИР 1.08.1.

### Литература

1. Banach S., Mazur S. Zur Theorie der linearen Dimension // Studia Math. 1933. Vol. 4. P. 100–112.
2. De Hevia D., Tradacete P. Complemented subspaces of Banach lattices // Banach J. Math. Anal. 2025. Vol. 19. Art. 60.
3. Plebanek G., Rondoš J., Sobota D. Complemented subspaces of Banach spaces  $\mathcal{C}(K \times L)$  // Journal of Functional Analysis. 2026. Vol. 290, iss. 2. Art. 111236.
4. Асташкин С. В. Последовательности независимых функций и структура симметричных пространств // УМН. 2024. Т. 79, № 3(477). С. 3–92.
5. Lindenstrauss J., Tzafriri L. On the complemented subspaces problem // Isr. J. Math. 1971. Vol. 9. P. 263–269.
6. Phillips R. S. On linear transformations // Transactions of the American Mathematical Society. 1940. Vol. 48, N 3. P. 516–541.
7. Кадец М. И., Митягин Б. С. Дополняемые подпространства в банаховых пространствах // УМН. 1973. Т. 28, № 6(174). С. 77–94.
8. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Изд. АФЦ, 1999. 560 с.
9. Astashkin S. V., Bakhtin A. A., Lykov K. V. Conditional bases in the matrix space with the cut-norm // Владикавказский математический журнал. 2026. Т. 2. С. 5–19. <https://doi.org/10.46698/b6298-9094-1158-n>
10. Ширяев А. Н. Вероятность–2. М.: МЦНМО, 2017. 408 с.

11. Bennett G. Schur multipliers // *Duke Math. J.* 1977. Vol. 44, N 3. P. 603–639.
12. Banaś J., Mursaleen M. *Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations.* Springer New Delhi, 2014. 315 p.
13. Pitt H. R. A note on bilinear form // *J. Lond. Math. Soc.* 1936. Vol. 11. P. 174–180.
14. Rosenthal H. P. On Quasi-Complemented Subspaces of Banach Spaces, With an Appendix on Compactness of Operators from  $L^p(\mu)$  to  $L^q(\nu)$  // *Journal of Functional Analysis.* 1969. Vol. 4. P. 176–214.
15. Stieglitz M., Tietz H. Matrixtransformationen von Folgenräumen Eine Ergebnisübersicht // *Mathematische Zeitschrift.* 1977. Vol. 154. P. 1–16.
16. Банах С. Теория линейных операций. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 272 с.
17. Семёнов Е. М., Сукочев Ф. А., Усачёв А. С. Геометрия банаховых пределов и их приложения // *УМН.* 2020. Т. 75, № 4(454). С. 153–194.
18. Lorentz G. G. Direct theorems on methods of summability II. *Canadian Journal of Mathematics.* 1951. Vol. 3. P. 236–256.
19. Bennett G., Kalton N. J. Inclusion theorems for K-spaces // *Canadian Journal of Mathematics.* 1973. Vol. 25, N 3. P. 511–524.
20. Wilansky A. *Summability through Functional Analysis* // *North-Holland Mathematics Studies* 85. Amsterdam; New York; Oxford, 1984. xii+318 p.

### References

1. Banach S., Mazur S. Zur Theorie der linearen Dimension. *Studia Math.*, 1933, vol. 4, pp. 100–112.
2. De Hevia D., Tradacete P. Complemented subspaces of Banach lattices *Banach J. Math. Anal.*, 2025, vol. 19, art. 60. <https://doi.org/10.1007/s43037-025-00447-0>
3. Plebanek G., Rondoš J., Sobota D. Complemented subspaces of Banach spaces  $\mathcal{C}(K \times L)$  *Journal of Functional Analysis*, 2026, vol. 290, iss. 2, art. 111236. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2025.111236>
4. Astashkin S. V. Sequences of independent functions and structure of rearrangement invariant spaces. *Russian Mathematical Surveys*, 2024. vol. 79, iss. 3, pp. 375–457. <https://doi.org/10.4213/rm10171e>
5. Lindenstrauss J., Tzafriri L. On the complemented subspaces problem *Isr. J. Math.*, 1971, vol. 9, pp. 263–269. <https://doi.org/10.1007/BF02771592>
6. Phillips R. S. On linear transformations *Transactions of the American Mathematical Society*, 1940, vol. 48, iss. 3, pp. 516–541. <https://doi.org/10.2307/1990096>
7. Kadets M. I., Mityagin B. S. Complemented subspaces in Banach spaces. *Russian Mathematical Surveys*, 1973, vol. 28, iss. 6, pp. 77–95. <https://doi.org/10.1070/RM1973v028n06ABEH001630>
8. Kashin B. S., Saakyan A. A. *Orthogonal Series.* Translations of Mathematical Monographs, Amer Mathematical Society, 1989, vol. 75. 451 p.
9. Astashkin S. V., Bakhtin A. A., Lykov K. V Conditional bases in the matrix space with the cut-norm *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2026, vol. 2, pp. 5–19. <https://doi.org/10.46698/b6298-9094-1158-n>
10. Shiryaev A. N. *Probability. 2nd Edition.* Springer, New York, 1996. 621 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-72208-5>
11. Bennett G. Schur multipliers *Duke Math. J.*, 1977, vol. 44, iss. 3, pp. 603–639. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-77-04426-X>
12. Banaś J., Mursaleen M. *Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations.* Springer New Delhi, 2014. 315 p. <https://doi.org/10.1007/978-81-322-1886-9>
13. Pitt H. R. A note on bilinear form *J. Lond. Math. Soc.*, 1936, vol. 11, pp. 174–180. <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-11.3.174>
14. Rosenthal H. P. On Quasi-Complemented Subspaces of Banach Spaces, With an Appendix on Compactness of Operators from  $L^p(\mu)$  to  $L^q(\nu)$ . *Journal of Functional Analysis*, 1969, vol. 4, pp. 176–214. [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(69\)90011-1](https://doi.org/10.1016/0022-1236(69)90011-1)
15. Stieglitz M., Tietz H. Matrixtransformationen von Folgenräumen Eine Ergebnisübersicht. *Mathematische Zeitschrift*, 1977, vol. 154, pp. 1–16. <https://doi.org/10.1007/BF01215107>

16. Banach S. *Theory of Linear Operations*. Dover Publications, 2009. 254 p.
17. Semenov E. M., Sukochev F. A., Usachev A. S. Geometry of Banach limits and their applications *Russian Math. Surveys*, 2020, vol. 75, iss. 4, pp. 725–763. <https://doi.org/10.1070/RM9901>
18. Lorentz G. G. Direct theorems on methods of summability II. *Canadian Journal of Mathematics*, 1951. vol. 3, pp. 236–256. <https://doi.org/10.4153/CJM-1951-028-7>
19. Bennett G., Kalton N. J. Inclusion theorems for K-spaces. *Canadian Journal of Mathematics*, 1973, vol. 25, iss. 3, pp. 511–524. <https://doi.org/10.4153/CJM-1973-052-2>
20. Wilansky A. *Summability through Functional Analysis*. North-Holland Mathematics Studies 85. Amsterdam, New York, Oxford, 1984. xii+318 p.

УДК 517.948.32

<https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1-56-67>

EDN: FEQFZF

## ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТИПА ЗАДАЧИ РИМАНА

А. П. Шилин

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
e-mail: a.p.shilin@gmail.com

Поступила: 05.04.2026

Исправлена: 15.05.2026

Принята: 29.05.2026

**Ключевые слова:** краевая задача Римана, линейные дифференциальные уравнения, метод вариации постоянных, обобщенные формулы Сохоцкого, определители.

**Аннотация.** На замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости, изучаются обобщенные краевые задачи Римана. В краевое условие задач наряду с предельными значениями искомым функций входят предельные значения их производных. Краевое условие записывается с помощью определителей, близких к определителям Вронского. Решение задач сводится к решению классической задачи Римана и решению линейных дифференциальных уравнений в областях комплексной плоскости с некоторыми ограничениями на решения. Явно указываются условия разрешимости исходных задач, при их выполнении приводятся явные формулы решений. Приведены примеры.

## EXPLICIT SOLUTION OF DIFFERENTIAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS SUCH AS THE RIEMANN PROBLEM

A. P. Shilin

Belarusian State University, Minsk, Belarus  
e-mail: a.p.shilin@gmail.com

Received: 05.04.2026

Revised: 15.05.2026

Accepted: 29.05.2026

**Keywords:** Riemann boundary value problem, linear differential equations, method of variation of constants, generalized formulas of Sokhotsky, determinants.

**Abstract.** Generalized Riemann boundary problems are studied on a closed curve located on the complex plane. The boundary condition of the problems, along with the limit values of the desired functions, includes the limit values of their derivatives. The boundary conditions is written using determinants close to Vronsky's determinants. The solution of the problems is reduced to solving the classical Riemann problem and solving linear differential equations in areas of the complex plane with some restrictions on the solutions. The conditions for the solvability of the initial problems are indicated explicitly, and when they are fulfilled, explicit formulas for solutions are indicated. Examples are given.

### 1. Введение

Теория краевой задачи Римана для аналитических функций хорошо разработана [1; 2] и нашла многочисленные приложения в математической физике, теории упругости, задачах электродинамики и других разделах физических и технических наук. Исследованы также различные обобщения задачи Римана. Одним из обобщений являются задачи с добавленными в краевое условие предельными значениями производных искомым функций. В этом направлении первые важные результаты получены в работе [3]; таким и близким задачам посвящены § 35, 36 в [1]. Разноплановые результаты в этих исследованиях связаны главным образом с выявлением достаточно общих свойств решений. Конструктивное исследование частного случая краевой задачи с производными проведено автором в [4], а в настоящей работе дано конструктивное исследование более сложных случаев. Конструктивные исследования, приводящие к явному виду условий разрешимости и к явным формулам самих решений, всегда вызывают самостоятельный математический интерес, а также представляются наиболее актуальными для возможных приложений.

## 2. Постановка задачи

Обозначим через  $L$  простую замкнутую кривую класса  $C^1$  на расширенной комплексной плоскости. Пусть  $D_{\pm}$  – области, для которых кривая  $L$  является границей,  $0 \in D_+$ ,  $\infty \in D_-$ . Ориентируем кривую  $L$  так, чтобы при движении по ней в положительном направлении область  $D_+$  оставалась слева.

Пусть  $n, m \in \mathbb{N}$ . В области  $D_+$  зададим аналитические функции  $p(z)$ ,  $p_j(z)$ , у которых вместе с производными  $p'(z)$ ,  $p_j^{(k)}(z)$  существуют  $H$ -непрерывные (т. е. удовлетворяющие условию Гельдера) предельные значения на кривой  $L$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, n+1}$ . В области  $D_-$  зададим аналитические функции  $q(z)$ ,  $q_j(z)$ , у которых вместе с производными  $q'(z)$ ,  $q_j^{(k)}(z)$  существуют  $H$ -непрерывные предельные значения на кривой  $L$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{1, m+1}$ . Зададим также  $H$ -непрерывные функции  $G(t) \neq 0$ ,  $g(t)$ ,  $t \in L$ . Будем искать функции  $\Phi_{\pm}(z)$ , аналитические в соответствующих областях  $D_{\pm}$ , по краевому условию

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{cccc} p_1(t) & \dots & p_n(t) & \Phi_+(t) \\ p_1'(t) & \dots & p_n'(t) & \Phi_+'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{(n-1)}(t) & \dots & p_n^{(n-1)}(t) & \Phi_+^{(n-1)}(t) \\ p'(t)p_1^{(n)}(t) + p(t)p_1^{(n+1)}(t) & \dots & p'(t)p_n^{(n)}(t) + p(t)p_n^{(n+1)}(t) & p'(t)\Phi_+^{(n)}(t) + p(t)\Phi_+^{(n+1)}(t) \end{array} \right| = \\
 & = G(t) \left| \begin{array}{cccc} q_1(t) & \dots & q_m(t) & \Phi_-(t) \\ q_1'(t) & \dots & q_m'(t) & \Phi_-'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{(m-1)}(t) & \dots & q_m^{(m-1)}(t) & \Phi_-^{(m-1)}(t) \\ q'(t)q_1^{(m)}(t) + q(t)q_1^{(m+1)}(t) & \dots & q'(t)q_m^{(m)}(t) + q(t)q_m^{(m+1)}(t) & q'(t)\Phi_-^{(m)}(t) + q(t)\Phi_-^{(m+1)}(t) \end{array} \right| + \\
 & + g(t), \quad t \in L, \tag{1}
 \end{aligned}$$

предполагая, что все указанные в этом условии предельные значения искомым функций и их производных должны существовать и быть  $H$ -непрерывными.

## 3. Общая схема решения

Введем две новые неизвестные аналитические функции

$$F_+(z) = p'(z)W(p_1(z), \dots, p_n(z), \Phi_+(z)) + p(z)W'(p_1(z), \dots, p_n(z), \Phi_+(z)), \quad z \in D_+, \tag{2}$$

$$F_-(z) = q'(z)W(q_1(z), \dots, q_m(z), \Phi_-(z)) + q(z)W'(q_1(z), \dots, q_m(z), \Phi_-(z)), \quad z \in D_-. \tag{3}$$

Здесь и далее через  $W$  обозначается вронскиан функций, а сами функции указываются в скобках. Теперь краевому условию (1) можно придать вид краевого условия задачи Римана

$$F_+(t) = G(t)F_-(t) + g(t), \quad t \in L. \tag{4}$$

Пусть  $\varkappa = \text{Ind}_L G(t)$ ,  $X_{\pm}(z)$  – канонические функции задачи Римана (4). Для решения задачи Римана важно знать поведение искомой функции на бесконечности. При  $z \rightarrow \infty$  согласно результатам [4]  $W(q_1(z), \dots, q_m(z), \Phi_-(z)) = O\left(\frac{1}{z^{(m+1)^2 - (m+1)}}\right)$ , и тогда  $W'(q_1(z), \dots, q_m(z), \Phi_-(z)) = O\left(\frac{1}{z^{(m+1)^2 - m}}\right)$ . Аналитичность  $q(z)$  на бесконечности означает, что при  $z \rightarrow \infty$   $q(z) = O(1)$ , и тогда  $q'(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$ . Из формулы (3) теперь легко видеть, что

$$F_-(z) = O\left(\frac{1}{z^{(m+1)^2 - m}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \tag{5}$$

Тогда согласно теории краевой задачи Римана [1] при  $\varkappa \geq m^2 + m$  задача (4) разрешима безусловно, а при  $\varkappa < m^2 + m$  для ее разрешимости необходимы и достаточны условия

$$\int_L \frac{g(t) t^j dt}{X_+(t)} = 0, \quad (6)$$

где  $j = \overline{0, m^2 + m - 1 - \varkappa}$ . При разрешимости задачи (4) ее решение дается формулами

$$F_{\pm}(z) = X_{\pm}(z) \left( \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(t) dt}{X_+(t)(t-z)} + R(z) \right), \quad z \in D_{\pm}, \quad (7)$$

где  $R(z)$  – многочлен степени не выше  $\varkappa - m^2 - m - 1$  с произвольными комплексными коэффициентами при  $\varkappa > m^2 + m$  и  $R(z) = 0$  при  $\varkappa \leq m^2 + m$ .

Предположим, что задача (4) разрешима, а ее решение найдено. Далее равенства (2), (3) следует расценивать как дифференциальные уравнения для нахождения функций  $\Phi_{\pm}(z)$ .

#### 4. Решение уравнений (2), (3)

Сделаем дальнейшие предположения:

- 1)  $p(z) \neq 0$ ,  $W_+(z) \neq 0$ , где  $W_+(z) = W(p_1(z), \dots, p_n(z))$ ,  $z \in D_+ \cup L$ ;
- 2)  $q(z) \neq 0$ ,  $z \in D_- \cup L$ ;  $W_-(z) \neq 0$ , где  $W_-(z) = W(q_1(z), \dots, q_m(z))$ ,  $z \in (D_- \cup L) \setminus \{\infty\}$ ;
- 3)  $\Delta \neq 0$ , где  $\Delta$  – определитель

$$\begin{vmatrix} k_{10} & k_{20} & \dots & k_{m0} \\ k_{11} & k_{21} & \dots & k_{m1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{1,m-1} & k_{2,m-1} & \dots & k_{m,m-1} \end{vmatrix},$$

элементы которого берутся из следующих разложений функций в ряды Тейлора в окрестности бесконечности:

$$q_j(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{k_{js}}{z^s}, \quad k_{js} \in \mathbb{C}, \quad j = \overline{1, m}, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Решив уравнение (2) вначале относительно  $W(p_1(z), \dots, p_n(z), \Phi_+(z))$ , получим затем для нахождения функции  $\Phi_+(z)$  линейное неоднородное уравнение с произвольной комплексной постоянной  $C^+$

$$W(p_1(z), \dots, p_n(z), \Phi_+(z)) = \frac{1}{p(z)} \int_0^z F_+(\zeta) d\zeta + \frac{C^+}{p(z)}, \quad (8)$$

для которого функции  $p_j(z)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , образуют фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения. Далее находим  $\Phi_+(z)$  методом вариации произвольных постоянных:

$$\Phi_+(z) = \sum_{j=1}^n C_j^+ p_j(z) + C^+ H_+(z) + h_+(z), \quad (9)$$

где  $C_j^+$  – произвольные комплексные постоянные,  $j = \overline{1, n}$ ,

$$H_+(z) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} p_j(z) \int_0^z \frac{W_j^+(\zeta) d\zeta}{p(\zeta) W_+^2(\zeta)}, \quad (10)$$

$$h_+(z) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} p_j(z) \int_0^z \frac{W_j^+(\zeta) \int_0^{\zeta} F_+(w) dw}{p(\zeta) W_+^2(\zeta)} d\zeta, \quad (11)$$

$W_j^+(\zeta) = W(p_1(\zeta), \dots, p_{j-1}(\zeta), p_{j+1}(\zeta), \dots, p_n(\zeta))$ ,  $j = \overline{1, n}$ , ( $W_1^+(\zeta) = 1$  при  $n = 1$ ). Интегралы берутся по любым кривым, соединяющим в области  $D_+$  точки 0 и  $z$ .

Решение уравнения (3) записывается по аналогичной формуле

$$\Phi_-(z) = \sum_{j=1}^m C_j^- q_j(z) + C^- H_-(z) + h_-(z), \quad (12)$$

где  $C_j^-$ ,  $C^-$  – произвольные комплексные постоянные,

$$H_-(z) = \sum_{j=1}^m (-1)^{m+j} q_j(z) \int_{z_0}^z \frac{W_j^-(\zeta) d\zeta}{q(\zeta) W_-^2(\zeta)}, \quad (13)$$

$$h_-(z) = \sum_{j=1}^m (-1)^{m+j} q_j(z) \int_{\infty}^z \frac{W_j^-(\zeta) \int_{\infty}^{\zeta} F_-(w) dw}{q(\zeta) W_-^2(\zeta)} d\zeta, \quad (14)$$

$W_j^-(\zeta) = W(q_1(\zeta), \dots, q_{j-1}(\zeta), q_{j+1}(\zeta), \dots, q_m(\zeta))$ ,  $j = \overline{1, m}$  ( $W_1^-(\zeta) = 1$  при  $m = 1$ ).

Формулы (13), (14) требуют анализа из-за возможных особенностей функций  $H_-(z)$ ,  $h_-(z)$  в точке  $z = \infty$ . В формуле (13)  $z_0$  – фиксированная точка в области  $D_-$ , а интегрирование проводится по любой кривой, соединяющей в этой области точки  $z_0$  и  $z$ . Для дальнейшего будем предполагать выполнение равенств

$$\operatorname{res}_{\zeta=\infty} \frac{W_j^-(\zeta)}{q(\zeta) W_-^2(\zeta)} = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (15)$$

выражающих необходимые и достаточные условия однозначности функции  $H_-(z)$ .

При сделанных предположениях  $q(\infty) \neq 0$  и, кроме того, согласно [4] при  $\zeta \rightarrow \infty$

$$W_j^-(\zeta) = O\left(\frac{1}{\zeta^{(m-1)^2 - (m-1)}}\right), \quad j = \overline{1, m}, \quad (16)$$

$$W_-(\zeta) \sim \frac{k}{\zeta^{m^2 - m}}, \quad (17)$$

где  $k$  – некоторая ненулевая постоянная. Тогда при  $\zeta \rightarrow \infty$

$$\frac{W_j^-(\zeta)}{q(\zeta) W_-^2(\zeta)} = O\left(\frac{1}{\zeta^{(m-1)^2 - (m-1) - 2m^2 + 2m}}\right) = O\left(\zeta^{m^2 + m - 2}\right), \quad j = \overline{1, m}. \quad (18)$$

Это говорит о том, что интегрирование в формуле (13) может привести к функциям, имеющим в точке  $z = \infty$  полюсы порядка  $m^2 + m - 1$ . Тогда и наибольший порядок полюса, который можно предположить у функции  $H_-(z)$ , также равен  $m^2 + m - 1$ . Покажем, что этот полюс все же может быть разве что порядка  $m^2 + m - 2$  (для  $m = 1$  это будет приводить и вовсе к отсутствию полюса).

Асимптотические равенства (16) означают, что в окрестности точки  $\zeta = \infty$  справедливы представления  $W_j^-(\zeta) = \frac{l_j}{\zeta^{(m-1)^2 - (m-1)}} + \dots$ , где  $l_j$  – некоторые постоянные (возможно, для каких-то  $j$  равные нулю),  $j = \overline{1, m}$ . Здесь многоточие означает слагаемые более высоких относительно  $\frac{1}{\zeta}$  степеней, и такой же смысл имеют многоточия в последующих аналогичных равенствах. Тогда на основании асимптотики (17) будет получаться сначала

$$\int_{z_0}^z \frac{W_j^-(\zeta) d\zeta}{q(\zeta) W_-^2(\zeta)} = \int_{z_0}^z \left( k_1 l_j \zeta^{m^2 + m - 2} + \dots \right) d\zeta = \frac{k_1 l_j z^{m^2 + m - 1}}{m^2 + m - 1} + \dots,$$

где  $k_1 = \frac{1}{q(\infty)k^2}$ , а затем

$$H_-(z) = \frac{k_1}{m^2 + m - 1} \left( \sum_{j=1}^m (-1)^{m+j} k_{j_0} l_j z^{m^2 + m - 1} + \dots \right).$$

Запишем очевидное тождество

$$\begin{vmatrix} q_1(z) & q_2(z) & \dots & q_m(z) \\ q_1'(z) & q_2'(z) & \dots & q_m'(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{(m-2)}(z) & q_2^{(m-2)}(z) & \dots & q_m^{(m-2)}(z) \\ q_1(z) & q_2(z) & \dots & q_m(z) \end{vmatrix} \equiv 0, \quad z \in D_-.$$

Раскроем определитель по элементам последней строки:

$$\sum_{j=1}^m (-1)^{m+j} q_j(z) W_j^-(z) \equiv 0, \quad z \in D_-.$$

Полученное тождество означает, в частности, что при разложении функции, стоящей в его левой части, в ряд Лорана в окрестности точки  $z = \infty$  все коэффициенты разложения окажутся нулями. Найдем лишь коэффициент при  $\frac{1}{z^{(m-1)^2-(m-1)}}$ :

$$\sum_{j=1}^m (-1)^{m+j} q_j(z) W_j^-(z) = \sum_{j=1}^m (-1)^{m+j} (k_{j_0} + \dots) \left( \frac{l_j}{z^{(m-1)^2-(m-1)}} + \dots \right),$$

откуда видно, что нужный коэффициент равен  $\sum_{j=1}^m (-1)^{m+j} k_{j_0} l_j$ . Поскольку этот коэффициент равен нулю, то полюс порядка  $m^2 + m - 1$  у функции  $H_-(z)$  в точке  $z = \infty$  невозможен.

В формуле (14) для анализа поведения функций при  $z \rightarrow \infty$  первообразные удобно брать в виде интегралов  $\int_{\infty}^z$ , в которых интегрирование проводится по любым кривым, соединяющим в точки  $\infty$  и  $z$  в области  $D_-$ . При  $\zeta \rightarrow \infty$  из асимптотического равенства (5) получим

$$\int_{\infty}^{\zeta} F_-(w) dw = O\left(\frac{1}{\zeta^{(m+1)^2-(m+1)}}\right),$$

а тогда на основании равенств (18)

$$\frac{W_j^-(\zeta) \int_{\infty}^{\zeta} F_-(w) dw}{q(\zeta) W_-^2(\zeta)} = O\left(\zeta^{m^2+m-2-(m+1)^2+(m+1)}\right) = O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right), \quad j = \overline{1, m},$$

поэтому все интегралы в формуле (14) будут сходиться и давать аналитические в области  $D_-$  (и равные нулю в точке  $z = \infty$ ) функции.

Таким образом, у функции  $\Phi_-(z)$  возможен полюс в точке  $z = \infty$  за счет полюса у функции  $H_-(z)$  (кроме случая  $m = 1$ ). Полюс будет отсутствовать при выполнении равенств

$$\int_{|t|=\rho} \frac{H_-(t) dt}{t^k} = 0, \quad k = \overline{2, m^2 + m - 1}, \quad (19)$$

где  $\rho$  – достаточно большое положительное число. При невыполнении этих равенств в формуле (12) следует брать  $C^- = 0$ .

Решение  $F_{\pm}(z)$  задачи Римана (4)  $H$ -непрерывно вплоть до кривой  $L$  [1]. Таким же свойством будут обладать функции  $H_+(z)$ ,  $h_+(z)$ , поскольку в правых частях формул (10), (11) все функции этим свойством обладают. А тогда этим же свойством согласно формуле (9) будет обладать и функция  $\Phi_+(z)$ . Производные  $\Phi_+^{(k)}(z)$ ,  $k = \overline{1, n+1}$ , также  $H$ -непрерывны вплоть до кривой  $L$  – это обосновывается вполне аналогично [5, с. 366] с помощью формул для производной искомой функций в методе вариации произвольных постоянных. Аналогично и найденная функция  $\Phi_-(z)$  будет удовлетворять требованиям в постановке задачи. Подведем итог в отношении решения задачи (1).

**Теорема 1.** При  $\varkappa \geq m^2 + m$  задача (1) разрешима безусловно, а при  $\varkappa < m^2 + m$  для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнение условий (6), в которых  $j = \overline{0, m^2 + m - 1 - \varkappa}$ . В случае разрешимости задачи (1) ее решение дается формулами (9), (12), причем в формуле (12) постоянная  $C^-$  остается произвольной, если выполняются равенства (15) и (19) (при  $m = 1$  – только равенства (15)), и полагается равной нулю в противном случае.

## 5. Пример 1

Рассмотрим пример задачи (1) для  $n = m = 2$ , считая, что  $-1 \in D_+$ ;  $\frac{1}{2}, 1 \in D_-$ . Возьмем  $p_1(z) = z - 1$ ,  $p_2(z) = z(z - 1)^2$ ,  $p(z) = \frac{1}{(z-1)^4}$ ,  $q_1(z) = \sin \frac{1}{z}$ ,  $q_2(z) = \cos \frac{1}{z}$ ,  $q(z) = \frac{z}{z+1}$ ,  $G(t) = 1$ ,  $g(t) = \frac{6}{t^7} + 1$ . Краевому условию в этом случае можно придать вид

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{ccc} t-1 & t(t-1)^2 & \Phi_+(t) \\ 1 & (t-1)(3t-1) & \Phi'_+(t) \\ 0 & \frac{10-18t}{(t-1)^5} & \frac{-4\Phi''_+(t)+(t-1)\Phi'''_+(t)}{(t-1)^5} \end{array} \right| - \frac{6}{t^7} - 1 = \\
 = & \left| \begin{array}{ccc} \sin \frac{1}{t} & \cos \frac{1}{t} & \Phi_-(t) \\ -\frac{1}{t^2} \cos \frac{1}{t} & \frac{1}{t^2} \sin \frac{1}{t} & \Phi'_-(t) \\ \frac{1+t-4t^2-6t^3}{(t+1)^2t^5} \cos \frac{1}{t} + \frac{6t+5}{(t+1)^2t^4} \sin \frac{1}{t} & \frac{6t+5}{(t+1)^2t^4} \cos \frac{1}{t} + \frac{6t^3+4t^2-t-1}{(t+1)^2t^5} \sin \frac{1}{t} & \frac{\Phi''_-(t)}{(t+1)^2} + \frac{t\Phi'''_-(t)}{t+1} \end{array} \right|, \quad t \in L. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Отметим, что в согласии со сделанными предположениями  $p(z) \neq 0$  и  $W(p_1(z), p_2(z)) = (z-1)^2(2z-1) \neq 0$  в  $D_+ \cup L$ ,  $q(z) \neq 0$  в  $D_- \cup L$ ,  $W(q_1(z), q_2(z)) = \frac{1}{z^2} \neq 0$  в  $(D_- \cup L) \setminus \{\infty\}$ . Условие  $\Delta \neq 0$  выполняется, поскольку в примере получится

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Задача (4) принимает вид  $F_+(t) = F_-(t) + \frac{6}{t^7} + 1$  и является задачей Римана о скачке. Поскольку  $(m+1)^2 - m$  при  $m = 2$  дает 7, то эту задачу следует решать в классе функций, имеющих на бесконечности нуль по меньшей мере 7-го порядка. Единственное решение  $F_+(z) = 1, F_-(z) = -\frac{6}{z^7}$  такой задачи очевидно. Далее будем решать дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{ccc} z-1 & z(z-1)^2 & \Phi_+(z) \\ 1 & (z-1)(3z-1) & \Phi'_+(z) \\ 0 & \frac{10-18z}{(z-1)^5} & \frac{-4\Phi''_+(z)+(z-1)\Phi'''_+(z)}{(z-1)^5} \end{array} \right| = 1, \quad z \in D_+, \quad (21) \\
 & \left| \begin{array}{ccc} \sin \frac{1}{z} & \cos \frac{1}{z} & \Phi_-(z) \\ -\frac{1}{z^2} \cos \frac{1}{z} & \frac{1}{z^2} \sin \frac{1}{z} & \Phi'_-(z) \\ \frac{1+z-4z^2-6z^3}{(z+1)^2z^5} \cos \frac{1}{z} + \frac{6z+5}{(z+1)^2z^4} \sin \frac{1}{z} & \frac{6z+5}{(z+1)^2z^4} \cos \frac{1}{z} + \frac{6z^3+4z^2-z-1}{(z+1)^2z^5} \sin \frac{1}{z} & \frac{\Phi''_-(z)}{(z+1)^2} + \frac{z\Phi'''_-(z)}{z+1} \end{array} \right| = -\frac{6}{z^7}, \quad z \in D_-. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Уравнение (8), к которому сводится уравнение (21), приобретает вид

$$W(z-1, z(z-1)^2, \Phi_+(z)) = C^+(z-1)^4 + (z-1)^5.$$

Далее используем формулы (10), (11):

$$\begin{aligned}
 H_+(z) &= -(z-1) \int_0^z \frac{\zeta(\zeta-1)^2}{(2\zeta-1)^2} d\zeta + z(z-1)^2 \int_0^z \frac{(\zeta-1)}{(2\zeta-1)^2} d\zeta, \\
 h_+(z) &= -(z-1) \int_0^z \frac{\zeta(\zeta-1)^3}{(2\zeta-1)^2} d\zeta + z(z-1)^2 \int_0^z \frac{(\zeta-1)^2}{(2\zeta-1)^2} d\zeta.
 \end{aligned}$$

После вычисления интегралов соответствующей формуле (9) можно придать вид

$$\begin{aligned}
 \Phi_+(z) &= (z-1) \left[ C_1^+ + C_2^+ z(z-1) + \frac{C^+}{16} (2z(z+1) + (1-2z)^2 \ln(1-2z)) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{48} (2z(4z^2 - 3z - 3) - 3(1-2z)^2 \ln(1-2z)) \right], \quad (23)
 \end{aligned}$$

где под  $\ln(1-2z)$  понимается главная ветвь логарифмической функции, а разрез проводится в области  $D_-$  от точки  $z = \frac{1}{2}$  до точки  $z = \infty$ .

Переходим к уравнению (22). Вычисления по формулам (13), (14) дают

$$\begin{aligned}
 H_-(z) &= -\sin \frac{1}{z} \int_{z_0}^z (\zeta^4 + \zeta^3) \cos \frac{1}{\zeta} d\zeta + \cos \frac{1}{z} \int_{z_0}^z (\zeta^4 + \zeta^3) \sin \frac{1}{\zeta} d\zeta, \\
 h_-(z) &= -\sin \frac{1}{z} \int_{\infty}^z \left( \frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta^3} \right) \cos \frac{1}{\zeta} d\zeta + \cos \frac{1}{z} \int_{\infty}^z \left( \frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta^3} \right) \sin \frac{1}{\zeta} d\zeta = \left( 1 + \frac{1}{z} \right) - \sin \frac{1}{z} - \cos \frac{1}{z}.
 \end{aligned}$$

Легко видеть, что у функции  $H_-(z)$  в точке  $z = \infty$  полюс с главным членом  $\frac{z^4}{20}$  будет складываться с точкой ветвления. Добиваясь аналитичности функции  $\Phi_-(z)$  в этой точке, следует далее брать в соответствующей формуле (12)  $C^- = 0$ , а самой этой формуле, переобозначая  $C_1^- - 1$ ,  $C_2^- - 1$  снова соответственно на  $C_1^-$  и  $C_2^-$ , можно придать вид

$$\Phi_-(z) = C_1^- \sin \frac{1}{z} + C_2^- \cos \frac{1}{z} + 1 + \frac{1}{z}. \quad (24)$$

Итак, решение задачи (20) содержит пять произвольных постоянных  $C_1^+$ ,  $C_2^+$ ,  $C^+$ ,  $C_1^-$ ,  $C_2^-$  и записывается по формулам (23) и (24).

## 6. Приложение к интегро-дифференциальным уравнениям

Зададим  $H$ -непрерывные функции  $a(t) \neq 0$ ,  $b(t) \neq 0$ ,  $f(t)$ ,  $t \in L$ . Будем искать  $\max(n, m) + 1$  раз  $H$ -непрерывно дифференцируемую функцию  $\varphi(t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{cccc} p_1(t) & \dots & p_n(t) & \varphi(t) \\ p_1'(t) & \dots & p_n'(t) & \varphi'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{(n-1)}(t) & \dots & p_n^{(n-1)}(t) & \varphi^{(n-1)}(t) \\ p'(t)p_1^{(n)}(t) + p(t)p_1^{(n+1)}(t) & \dots & p'(t)p_n^{(n)}(t) + p(t)p_n^{(n+1)}(t) & p'(t)\varphi^{(n)}(t) + p(t)\varphi^{(n+1)}(t) \end{array} \right| + \\ & + b(t) \left. \begin{array}{cccc} q_1(t) & \dots & q_m(t) & \varphi(t) \\ q_1'(t) & \dots & q_m'(t) & \varphi'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{(m-1)}(t) & \dots & q_m^{(m-1)}(t) & \varphi^{(m-1)}(t) \\ q'(t)q_1^{(m)}(t) + q(t)q_1^{(m+1)}(t) & \dots & q'(t)q_m^{(m)}(t) + q(t)q_m^{(m+1)}(t) & q'(t)\varphi^{(m)}(t) + q(t)\varphi^{(m+1)}(t) \end{array} \right| + \\ & + \frac{a(t)}{\pi i} \left. \begin{array}{cccc} p_1(t) & \dots & p_n(t) & 0! \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ p_1'(t) & \dots & p_n'(t) & 1! \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{(n-1)}(t) & \dots & p_n^{(n-1)}(t) & (n-1)! \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^n} \\ p'(t)p_1^{(n)}(t) + p(t)p_1^{(n+1)}(t) & \dots & p'(t)p_n^{(n)}(t) + p(t)p_n^{(n+1)}(t) & n!p'(t) \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}} + \\ & & & + (n+1)!p(t) \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+2}} \end{array} \right| - \\ & - \frac{b(t)}{\pi i} \left. \begin{array}{cccc} q_1(t) & \dots & q_m(t) & 0! \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} \\ q_1'(t) & \dots & q_m'(t) & 1! \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{(m-1)}(t) & \dots & q_m^{(m-1)}(t) & (m-1)! \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^m} \\ q'(t)q_1^{(m)}(t) + & \dots & q'(t)q_m^{(m)}(t) + & m!q'(t) \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{m+1}} + \\ + q(t)q_1^{(m+1)}(t) & \dots & + q(t)q_m^{(m+1)}(t) & + (m+1)!q(t) \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{m+2}} \end{array} \right| = f(t), \quad t \in L, \quad (25) \end{aligned}$$

в котором интегралы понимаются в смысле конечной части по Адамару. Введем интеграл типа Коши

$$\Phi_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z}, \quad z \in D_{\pm}.$$

Используя обобщенные формулы Сохоцкого [6]

$$\Phi_{\pm}^{(k)}(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi^{(k)}(t) + \frac{k!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}}, \quad k = \overline{0, \max(n, m) + 1}, \quad (26)$$

для предельных значений на кривой  $L$  функций  $\Phi_{\pm}(z)$  и их производных, уравнению (25) можно придать вид краевой задачи (1), где  $G(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$ ,  $g(t) = \frac{f(t)}{2a(t)}$ . Условия разрешимости этой задачи

будут и условиями разрешимости уравнения (25). При разрешимости задачи (1) постоянные  $C_j^-$ ,  $C^-$  в формуле (12) следует брать с учетом равенства  $C_1^- k_{10} + \dots + C_m^- k_{m0} + C^- H_-(\infty) = 0$ , вытекающего из свойства  $\Phi_-(\infty) = 0$  интеграла типа Коши. Решение уравнения (25) записывается при этом по формуле  $\varphi(t) = \Phi_+(t) - \Phi_-(t)$ , получающейся из равенств (26) при  $k = 0$ .

### 7. Задача с бесконечным числом условий разрешимости

Рассмотрим краевую задачу, близкую к (1), но имеющую свою специфику:

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{cccc} 1 & \dots & 1 & \Phi_+(t) \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n & \Phi'_+(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} & \Phi_+^{(n-1)}(t) \\ \lambda_1^{n+1} - \left(a + \frac{P'(t)}{P(t)}\right) \lambda_1^n & \dots & \lambda_n^{n+1} - \left(a + \frac{P'(t)}{P(t)}\right) \lambda_n^n & \Phi_+^{(n+1)}(t) - \left(a + \frac{P'(t)}{P(t)}\right) \Phi_+^{(n)}(t) \end{array} \right| = \\
 & = G(t) \left| \begin{array}{cccc} 1 & \dots & 1 & \Phi_-(t) \\ \mu_1 & \dots & \mu_m & \Phi'_-(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_1^{m-1} & \dots & \mu_m^{m-1} & \Phi_-^{(m-1)}(t) \\ \mu_1^{m+1} - \left(b + \frac{Q'(t)}{Q(t)}\right) \mu_1^m & \dots & \mu_m^{m+1} - \left(b + \frac{Q'(t)}{Q(t)}\right) \mu_m^m & \Phi_-^{(m+1)}(t) - \left(b + \frac{Q'(t)}{Q(t)}\right) \Phi_-^{(m)}(t) \end{array} \right| + \\
 & + g(t), \quad t \in L. \tag{27}
 \end{aligned}$$

Здесь  $\lambda_j$ ,  $a$ ,  $\mu_j$ ,  $b$  – заданные комплексные числа, причем числа  $\lambda_j$  попарно различны,  $j = \overline{1, n}$ , и попарно различны числа  $\mu_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ .  $P(t)$  и  $Q(t)$  – заданные многочлены любых натуральных степеней,  $P(z) \neq 0$  при  $z \in D_+ \cup L$ ,  $Q(z) \neq 0$  при  $z \in D_- \cup L$ . Остальные предположения прежние. Для функций

$$F_+(z) = \left| \begin{array}{cccc} 1 & \dots & 1 & \Phi_+(z) \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n & \Phi'_+(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} & \Phi_+^{(n-1)}(z) \\ \lambda_1^{n+1} - \left(a + \frac{P'(z)}{P(z)}\right) \lambda_1^n & \dots & \lambda_n^{n+1} - \left(a + \frac{P'(z)}{P(z)}\right) \lambda_n^n & \Phi_+^{(n+1)}(z) - \left(a + \frac{P'(z)}{P(z)}\right) \Phi_+^{(n)}(z) \end{array} \right|, \quad z \in D_+, \tag{28}$$

$$F_-(z) = \left| \begin{array}{cccc} 1 & \dots & 1 & \Phi_-(z) \\ \mu_1 & \dots & \mu_m & \Phi'_-(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_1^{m-1} & \dots & \mu_m^{m-1} & \Phi_-^{(m-1)}(z) \\ \mu_1^{m+1} - \left(b + \frac{Q'(z)}{Q(z)}\right) \mu_1^m & \dots & \mu_m^{m+1} - \left(b + \frac{Q'(z)}{Q(z)}\right) \mu_m^m & \Phi_-^{(m+1)}(z) - \left(b + \frac{Q'(z)}{Q(z)}\right) \Phi_-^{(m)}(z) \end{array} \right|, \quad z \in D_-, \tag{29}$$

снова получаем краевую задачу Римана (4). Из аналитичности на бесконечности функции  $\Phi_-(z)$  вытекает, очевидно, аналитичность на бесконечности функции  $F_-(z)$ , поэтому задачу (4) теперь следует решать в классе функций, ограниченных на бесконечности. Согласно [1] при  $\varkappa \geq -1$  эта задача будет разрешима безусловно, а при  $\varkappa < -1$  для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнение условий (6), в которых  $j = \overline{0, -\varkappa - 2}$ . При разрешимости задачи ее решение снова записывается по формулам (7), в которых теперь  $R(z)$  – многочлен с произвольными комплексными коэффициентами степени не выше  $\varkappa$  при  $\varkappa \geq 0$ ,  $R(z) = 0$  при  $\varkappa < 0$ . Предположим, что задача Римана разрешима, а ее решение найдено. Расценивая теперь (28), (29) как дифференциальные уравнения для нахождения функций  $\Phi_{\pm}(z)$ , будем решать эти уравнения.

### 8. Решение уравнений (28), (29)

Если уравнение (28) умножить на  $\frac{e^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)z}}{e^{az}P(z)}$ , то получим уравнение в виде (2), где  $p_j(z) = e^{\lambda_j z}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $p(z) = \frac{1}{e^{az}P(z)}$ , а в роли прежней функции  $F_+(z)$  будет функция  $\frac{F_+(z)e^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)z}}{e^{az}P(z)}$ . Но решать уравнение (28) лучше по-другому, к тому же новые функции  $p_j(z)$ ,  $p(z)$  не будут обладать прежними свойствами. Решим вначале однородное уравнение (28). После умножения однородного уравнения на  $e^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)z}$  ему можно придать вид

$$W' \left( e^{\lambda_1 z}, \dots, e^{\lambda_n z}, \Phi_+(z) \right) - \left( a + \frac{P'(z)}{P(z)} \right) W \left( e^{\lambda_1 z}, \dots, e^{\lambda_n z}, \Phi_+(z) \right) = 0,$$

откуда вначале получим

$$W \left( e^{\lambda_1 z}, \dots, e^{\lambda_n z}, \Phi_+(z) \right) = C^+ e^{az} P(z),$$

а затем придем к уравнению

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \Phi_+(z) \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n & \Phi'_+(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^n & \dots & \lambda_n^n & \Phi_+^{(n)}(z) \end{vmatrix} = C^+ e^{(a-\lambda_1-\lambda_2-\dots-\lambda_n)z} P(z). \quad (30)$$

Уравнение (30) есть уравнение с постоянными коэффициентами с соответствующей фундаментальной системой решений  $e^{\lambda_j z}$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Частное решение  $\Phi_+^*(z)$  лучше находить методом неопределенных коэффициентов, что даст

$$\Phi_+^*(z) = C^+ e^{(a-\lambda_1-\lambda_2-\dots-\lambda_n)z} P_1(z),$$

где  $P_1(z)$  – вполне определенный многочлен для каждого уравнения (30). Теперь понятно, что фундаментальную систему решений однородного уравнения (28) образуют функции

$$e^{\lambda_1 z}, \dots, e^{\lambda_n z}, e^{(a-\lambda_1-\lambda_2-\dots-\lambda_n)z} P_1(z)$$

и, следовательно, можно записать общее решение неоднородного уравнения (28), полученное с помощью метода вариации произвольных постоянных:

$$\Phi_+(z) = \sum_{j=1}^n C_j^+ e^{\lambda_j z} + C^+ e^{(a-\lambda_1-\lambda_2-\dots-\lambda_n)z} P_1(z) + \Phi_+^{**}(z), \quad (31)$$

где

$$\Phi_+^{**}(z) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(-1)^{n+1+j}}{V_+} \int_0^z \frac{F_+(\zeta) W_j^+(\zeta) d\zeta}{W_+(\zeta)},$$

$$W_j^+(\zeta) = W \left( e^{\lambda_1 \zeta}, \dots, e^{\lambda_{j-1} \zeta}, e^{\lambda_{j+1} \zeta}, \dots, e^{\lambda_n \zeta}, e^{(a-\lambda_1-\lambda_2-\dots-\lambda_n)\zeta} P_1(\zeta) \right), \quad j = \overline{1, n},$$

$$W_{n+1}^+(\zeta) = W \left( e^{\lambda_1 \zeta}, \dots, e^{\lambda_n \zeta} \right),$$

$$W_+(\zeta) = W \left( e^{\lambda_1 \zeta}, \dots, e^{\lambda_n \zeta}, e^{(a-\lambda_1-\lambda_2-\dots-\lambda_n)\zeta} P_1(\zeta) \right),$$

$V_+$  – определитель Вандермонда чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Аналогично записывается общее решение уравнения (29):

$$\Phi_-(z) = \sum_{j=1}^m C_j^- e^{\mu_j z} + C^- e^{(b-\mu_1-\mu_2-\dots-\mu_m)z} Q_1(z) + \Phi_-^{**}(z), \quad (32)$$

где  $Q_1(z)$  – вполне определенный многочлен,

$$\Phi_-^{**}(z) = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{(-1)^{m+1+j}}{V_-} \int_{z_0}^z \frac{F_-(\zeta) W_j^-(\zeta) d\zeta}{W_-(\zeta)}, \quad (33)$$

$$W_j^-(\zeta) = W \left( e^{\mu_1 \zeta}, \dots, e^{\mu_{j-1} \zeta}, e^{\mu_{j+1} \zeta}, \dots, e^{\mu_m \zeta}, e^{(b-\mu_1-\mu_2-\dots-\mu_m)\zeta} Q_1(\zeta) \right), \quad j = \overline{1, m},$$

$$W_{m+1}^-(\zeta) = W(e^{\mu_1 \zeta}, \dots, e^{\mu_m \zeta}),$$

$$W_-(\zeta) = W(e^{\mu_1 \zeta}, \dots, e^{\mu_m \zeta}, e^{(b-\mu_1-\mu_2-\dots-\mu_m)\zeta} Q_1(\zeta)),$$

$V_-$  – определитель Вандермонда чисел  $\mu_1, \dots, \mu_m, z_0 \in D_-$ .

Для однозначности функции  $\Phi_-(z)$  необходимы и достаточны условия

$$\operatorname{res}_{\zeta=\infty} \frac{F_-(\zeta)W_j^-(\zeta)}{W_-(\zeta)} = 0, \quad j = \overline{1, m+1}, \quad (34)$$

которые далее предположим выполненными. В точке  $z = \infty$  функция  $\Phi_-(z)$  будет иметь, вообще говоря, существенную особенность, которую следует устранить. Решение однородного уравнения (29), содержащееся в формуле (32) при  $\Phi_-^{**}(z) = 0$ , может оказаться аналитическим (и притом равным нулю) в точке  $z = \infty$  лишь при  $C_j^- = C^- = 0, j = \overline{1, m}$ , поскольку функции  $e^{\mu_1 z}, \dots, e^{\mu_m z}, e^{(b-\mu_1-\mu_2-\dots-\mu_m)z} Q_1(z)$  линейно независимы. Надлежащим подбором постоянных  $C_j^-, C^-$  в формуле (32) можно добиться аналитичности в точке  $z = \infty$  лишь частного решения. Для этого функцию  $\Phi_-(z)$  следует разложить в ряд Лорана в окрестности бесконечности и приравнять к нулю коэффициенты при положительных степенях  $z$  этого разложения. Возникнет бесконечное число условий разрешимости, которые следует расценивать как бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для нахождения постоянных  $C_j^-, C^-$ . Система имеет вид

$$\sum_{j=1}^m \mu_j^k C_j^- + \alpha_k C^- = \beta_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (35)$$

где

$$\alpha_k = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} \frac{e^{(b-\mu_1-\mu_2-\dots-\mu_m)t} Q_1(t) dt}{t^{k+1}}, \quad \beta_k = -\frac{k!}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} \frac{\Phi_-^{**}(t) dt}{t^{k+1}},$$

$\rho$  – достаточно большое положительное число.

Теперь можно сформулировать окончательный результат в отношении задачи (27).

**Теорема 2.** Для разрешимости задачи (27) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (6) для  $j = \overline{0, -\kappa - 2}$  (если  $\kappa < -1$ ), выполнялись условия (34) и была совместна система (35). При разрешимости задачи ее решение записывается по формулам (31), (32), причем в формуле (32) постоянные  $C_j^-, C^-$  являются решением системы (35).

Отметим, что при  $\kappa > -1$  произвол коэффициентов многочлена  $R(z)$ , входящего в выражение для  $F_-(z)$ , можно использовать для выполнения условий разрешимости исходной задачи. В этом случае условиям (34) в развернутом виде можно придать вид системы линейных алгебраических уравнений для нахождения этих коэффициентов. Если некоторые коэффициенты останутся произвольными, то их можно использовать для достижения совместности системы (35).

## 9. Пример 2

Рассмотрим пример задачи (27), предполагая, что  $1 \in D_-$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \Phi_+(t) \\ 1 & -1 & \Phi'_+(t) \\ -1 - \frac{1}{t-1} & -3 - \frac{1}{t-1} & \Phi''_+(t) - (2 + \frac{1}{t-1}) \Phi'_+(t) \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{t} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \Phi_-(t) \\ 2 & 3 & \Phi'_-(t) \\ 12 - \frac{4}{t} & 36 - \frac{9}{t} & \Phi''_-(t) - (\frac{1}{t} - 1) \Phi'_-(t) \end{vmatrix} + \frac{-4t^4 + 4t^3 - 38t^2 + 42t - 6}{t^2(t-1)}, \quad t \in L.$$

Здесь  $n = m = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \mu_1 = 2, \mu_2 = 3, a = 2, b = -1, P(t) = t - 1, Q(t) = t$ , выражения для  $G(t)$  и  $g(t)$  очевидны. Для соответствующей задачи Римана (4) получится  $\kappa = \operatorname{Ind}_L \frac{1}{t} = -1$ , поэтому задача разрешима безусловно. Единственное решение этой задачи оказывается равным

$$F_+(z) = \frac{2(2z - 2z^2 - 1)}{z - 1}, \quad z \in D_+; \quad F_-(z) = \frac{6(6z - 1)}{z}, \quad z \in D_-.$$

Общее решение соответствующего уравнения (28)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \Phi_+(z) \\ 1 & -1 & \Phi'_+(z) \\ -1 - \frac{1}{z-1} & -3 - \frac{1}{z-1} & \Phi''_+(z) - (2 + \frac{1}{z-1})\Phi'_+(z) \end{vmatrix} = \frac{2(2z - 2z^2 - 1)}{z-1}, \quad z \in D_+,$$

записывается по формуле

$$\Phi_+(z) = C_1^+ e^z + C_2^+ e^{-z} + C^+ e^{2z}(7 - 3z) + z. \quad (36)$$

Подробнее остановимся на аналогичном решении соответствующего уравнения (29)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \Phi_-(z) \\ 2 & 3 & \Phi'_-(z) \\ 12 - \frac{4}{z} & 36 - \frac{9}{z} & \Phi''_-(z) - (\frac{1}{z} - 1)\Phi'_-(z) \end{vmatrix} = \frac{6(6z-1)}{z}, \quad z \in D_-. \quad (37)$$

Вначале для уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \Phi_-(z) \\ 2 & 3 & \Phi'_-(z) \\ 4 & 9 & \Phi''_-(z) \end{vmatrix} = C^- e^{-6z},$$

аналогичного уравнению (30), находим частное решение  $C^- e^{-6z}(72z + 17)$ , поэтому фундаментальную систему решений однородного уравнения (37) образуют функции  $e^{2z}$ ,  $e^{3z}$ ,  $e^{-6z}(72z + 17)$ . Формула (33) принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi_-^{**}(z) = & \frac{1}{864} \left( e^{2z} \int_1^z \frac{(6\zeta - 1)(-648\zeta - 81)e^{-2\zeta} d\zeta}{\zeta^2} - \right. \\ & \left. - e^{3z} \int_1^z \frac{(6\zeta - 1)(-576\zeta - 64)e^{-3\zeta} d\zeta}{\zeta^2} + e^{-6z}(72z + 17) \int_1^z \frac{(6\zeta - 1)e^{6\zeta} d\zeta}{\zeta^2} \right). \end{aligned}$$

Важно заметить, что вычеты на бесконечности всех подынтегральных функций оказываются равными нулю. Дальнейшие вычисления дают

$$\Phi_-^{**}(z) = -\frac{69}{32} e^{-2} e^{2z} + \frac{34}{27} e^{-3} e^{3z} - \frac{1}{864} e^6 e^{-6z}(72z + 17) + 1.$$

Следовательно, в формуле (32), принимающей в случае уравнения (37) вид

$$\Phi_-(z) = C_1^- e^{2z} + C_2^- e^{3z} + C^- e^{-6z}(72z + 17) + \Phi_-^{**}(z),$$

для ограниченности решения на бесконечности следует взять

$$C_1^- = \frac{69}{32} e^{-2}, \quad C_2^- = -\frac{34}{27} e^{-3}, \quad C^- = \frac{1}{864} e^6,$$

и тогда записывать и решать систему (35) нет необходимости. Окончательно получится, что решение примера дается формулами (36) и  $\Phi_-(z) = 1$ .

## 10. Заключительное замечание

Разносторонние исследования можно проводить для многих задач, близких к (1) и (27). Такие задачи можно связать с известными краевыми задачами Гильберта, Карлемана, Газемана и т. п. Определители в этих задачах могут приводить к разным линейным уравнениям высших порядков. При этом число подобных задач, допускающих явное решение, едва ли будет велико.

## Литература

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
2. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
3. Крикунов Ю. М. О решении обобщенной краевой задачи Римана и линейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения // Ученые записки Казанского университета. 1952. Т. 112, № 10. С. 191–199.

4. Шилин А. П. Дифференциальная краевая задача Римана и ее приложение к интегро-дифференциальным уравнениям // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2019. Т. 63, № 4. С. 391–397. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-391-397>

5. Шилин А. П. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с линейными функциями в коэффициентах // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2022. Т. 58, № 4. С. 358–369. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-358-369>

6. Зверович Э. И. Обобщение формул Сохоцкого // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2012. № 2. С. 24–28.

### References

1. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*. Moscow, Nauka, 1977 (in Russian).
2. Muskhelishvili N. I. *Singular Integral Equations*. Moscow, Nauka, 1968 (in Russian).
3. Krikunov Yu. M. On the solution of the generalized Riemann boundary value problem and the linear singular integro-differential equation. *Scientific Notes Kazan University*, 1952, vol. 112, no. 10, pp. 191–199 (in Russian).
4. Shilin A. P. Riemann's differential boundary-value problem and its application to integro-differential equations. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 4, pp. 391–397 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-391-397>
5. Shilin A. P. A hypersingular integro-differential equation with linear functions in coefficients. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2022, vol. 58, no. 4, pp. 358–369 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-358-369>
6. Zverovich E. I. Generalization of Sokhotsky formulas. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2012, no. 2, pp. 24–28 (in Russian).



УДК 519.21+519.6

<https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1-68-75>

EDN: YPMEON

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПРИБЛИЖЕННОМУ ВЫЧИСЛЕНИЮ  
МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ ОТ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРЕЙФОМ

А. В. Жерело

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

e-mail: zherelo@bsu.by

Поступила: 31.03.2026

Исправлена: 14.05.2026

Принята: 29.05.2026

**Ключевые слова:** случайный процесс, стохастическое дифференциальное уравнение, интеграл Ито, математическое ожидание, приближенные вычисления, слабые аппроксимации.

**Аннотация.** Объектом исследования статьи является стохастическое дифференциальное уравнение Ито с дрейфом. В работе предложен метод приближенного вычисления математических ожиданий функций от решения рассматриваемого уравнения. Метод основан на использовании вспомогательного случайного процесса специального вида, зависящего только от процесса Винера. Такой подход позволяет использовать для получения приближенного значения искомого математического ожидания уже известные формулы приближенного вычисления для случая, когда функционал зависит только от процесса Винера. В работе представлены результаты численного эксперимента.

ON AN APPROACH TO THE APPROXIMATE CALCULATION OF MATHEMATICAL  
EXPECTATIONS FROM SOLUTIONS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS  
WITH DRIFT

A. V. Zherelo

Belarusian State University, Minsk, Belarus

e-mail: zherelo@bsu.by

Received: 31.03.2026

Revised: 14.05.2026

Accepted: 29.05.2026

**Keywords:** random process, stochastic differential equation, Ito integral, mathematical expectation, approximate calculations, weak approximations.

**Abstract.** The object of the paper's research is the stochastic differential equation of Ito with drift. The paper proposes a method for approximate calculation of mathematical expectations of functions from the solution of such equation. The method is based on the use of an auxiliary random process of a special kind that depends only on the Wiener process. This approach allows us to use the already known approximate calculation formulas for the case when the functional depends only on the Wiener process to obtain an approximate value of the desired mathematical expectation. The paper presents the results of a numerical experiment.

## 1. Введение

В современной промышленности математическое моделирование, основанное на использовании дифференциальных уравнений, уже давно является обязательным этапом проектирования и создания конечных изделий. Разработанные методы активно проникают и в те направления деятельности человека, которые напрямую могут быть и не связаны с производством конечного продукта, например, в экономику и финансы. Явления, возникающие в таких направлениях, и для которых исследователям хотелось бы получить строгие математические описания, зачастую не предоставляют исследователю информации, достаточной для построения детерминированной модели. Отсутствие такой определенности приводит к необходимости использования уравнений, содержащих случайный компонент. Например, в финансах как на уровне макроэкономических

показателей, так и на уровне описания микроэкономических явлений, на данный момент активно используются стохастические дифференциальные уравнения [1; 2]. В свою очередь, поскольку стохастические уравнения описывают, как правило, поведение моделируемой системы на микроуровне, т. е. описывают траектории стохастической системы, соответствующей исследуемому явлению, как правило, у исследователя в большей степени присутствует интерес к получению общей информации о моделируемой системе, чем о конкретной траектории. К примеру, если мы говорим о финансах, то интерес представляют такие показатели, как общий тренд движения рынка или учетной ставки, которые являются функционалами от случайных процессов, а именно, математические ожидания от решений используемых для описания моделируемых явлений стохастических уравнений.

Разработка методов приближенного вычисления математических ожиданий является актуальной задачей, поскольку точно вычислить значения от функционалов от решений в подавляющем количестве случаев невозможно. Как следствие, исследователи зачастую упрощают используемую модель ради возможности вычисления хотя бы некоторых функционалов от решения, возможно, жертвуя при этом полезной информацией о структуре моделируемого процесса.

В данной работе предлагается метод приближенного вычисления математических ожиданий от решения стохастического дифференциального уравнения, содержащего дрейф. Здесь и далее в статье будем говорить, что в стохастическом дифференциальном уравнении присутствует дрейф, если в соответствующей интегральной форме уравнения присутствует интеграл по времени.

## 2. Вспомогательное уравнение

Рассмотрим стохастическое уравнение вида

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha(X_s, s) ds + \int_0^t \beta(X_{s-}, s) dW_s, \quad (1)$$

где  $X_0 \in \mathbb{R}$ ,  $W_t$  – процесс Винера,  $t \in [0, 1]$ ,  $X_t$  согласован с фильтрацией  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ .

Здесь и далее будем обозначать

$$\|x\| = (\mathbb{E}[x^2])^{\frac{1}{2}},$$

где  $x$  – некоторая  $\mathcal{F}_t$ -измеримая случайная величина.

Далее в работе будем считать, что подынтегральные функции  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют условию существования сильного решения:

$$\begin{aligned} \|\alpha(y_1, t) - \alpha(y_2, t)\|^2 + \|\beta(y_1, t) - \beta(y_2, t)\|^2 &\leq K_1 \|y_1 - y_2\|^2, \\ \|\alpha(y_1, t)\|^2 + \|\beta(y_1, t)\|^2 &\leq K_2 (1 + \|y_1\|^2), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $y_1, y_2$   $\mathcal{F}_t$ -измеримы и  $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ .

Основной задачей данной статьи является разработка метода приближенного расчета математического ожидания вида  $\mathbb{E}[F(X_t)]$ , где  $F$  – гладкий функционал, удовлетворяющий условию Липшица

$$\|F(y_1) - F(y_2)\| \leq C \|y_1 - y_2\|, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Точность расчета значений функционала такого вида, как правило, не высока. В частности, если мы рассмотрим хорошо известную схему Мильштейна, то увидим, что ее точность, с которой данная аппроксимация приближает моделируемое решение, имеет порядок  $\mathcal{O}(t)$  (например, см. [3]). А это означает, что в случае вычисления даже простого функционала, такого как математическое ожидание от решения уравнения (1) будет хуже, поскольку при использовании метода Монте-Карло мы выбираем конечный набор моделируемых траекторий. Аналогичные рассуждения касаются и стохастического метода Рунге–Кутты [4], при котором можно достичь порядка аппроксимации решения  $\mathcal{O}(t^2)$  и даже более, однако это значительно усложняет вычисления.

В случае использования слабых методов приближенного вычисления математических ожиданий так же существует задача улучшения точности получаемых значений. Например, в работе [5] была предложена формула приближенного вычисления математического ожидания указанного вида, однако точность полученной в упомянутой работе формулы составляет  $\mathcal{O}(t^{3/2})$ . Здесь стоит

отметить, что, в отличие от упомянутых выше методов, это точность вычисления математического ожидания от функционала от решения.

При численном решении детерминированных обыкновенных дифференциальных уравнений с целью улучшения точности получаемых приближенных значений часто используют подход типа «предиктор-корректор». Если описать такой подход упрощенно, то он представляет собой комбинацию из двух шагов, где на первом шаге вычисляется промежуточное значение решения в некоторой промежуточной точке интервала дискретизации, которое затем используется для коррекции получаемого приближенного значения на конце интервала.

К сожалению, применить похожую схему напрямую к стохастическому дифференциальному уравнению не представляется возможным в силу того, что в уравнении (1) интеграл по  $dW_s$  является интегралом Ито и, следовательно, мы не можем использовать в подынтегральном выражении значение процесса  $X_s$  в некоторой внутренней точке принципиально, поскольку в таком случае интеграл в правой части не определен.

Чтобы избежать указанной проблемы, предлагается использовать вспомогательное уравнение вида

$$\tilde{X}_t = X_0 + \int_0^t \alpha(X_0 + \alpha(a, t/2)s + \beta(a, t/2)W_{s-}, s) ds + \int_0^t \beta(X_0 + \alpha(a, t/2)s + \beta(a, t/2)W_{s-}, s) dW_s, \quad (3)$$

где  $a \in \mathbb{R}$  – некоторый калибровочный параметр, который будет определен ниже. Приближенное вычисление  $\mathbb{E}[F(X_t)]$  будет основано на методах, описанных в [6], которые применяются к  $\tilde{X}_t$  в сочетании с результатами, представленными в [5].

### 3. Оценка приближения и выбор параметра

Предположим далее, что  $a \in \mathbb{R}$  – некоторая известная величина. Оценим разницу между  $\mathbb{E}[F(X_t)]$  и  $\mathbb{E}[F(\tilde{X}_t)]$ , где  $\tilde{X}_t$  задается уравнением (3). Тогда

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[F(X_t)] - \mathbb{E}[F(\tilde{X}_t)]| &\leq \mathbb{E}|F(X_t) - F(\tilde{X}_t)| \leq \|F(X_t) - F(\tilde{X}_t)\| \leq C\|X_t - \tilde{X}_t\| = \\ &= C \left\{ \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t \alpha(X_s, s) - \alpha(X_0 + \alpha(a, t/2)s + \beta(a, t/2)W_s, s) ds + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \int_0^t \beta(X_{s-}, s) - \beta(X_0 + \alpha(a, t/2)s + \beta(a, t/2)W_{s-}, s) dW_s \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \leq (*). \end{aligned}$$

На данном шаге используем неравенство  $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$

$$\begin{aligned} (*) &\leq \sqrt{2}C \left\{ \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t \alpha(X_s, s) - \alpha(X_0 + \alpha(a, t/2)s + \beta(a, t/2)W_s, s) ds \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left( \int_0^t \beta(X_{s-}, s) - \beta(X_0 + \alpha(a, t/2)s + \beta(a, t/2)W_{s-}, s) dW_s \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \leq (*). \end{aligned}$$

Воспользуемся далее следующим свойством математического ожидания интеграла Ито (например, см. [7; 8]):

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t f(s) dW_s \right)^2 \right] = \int_0^t \mathbb{E}[f(s)^2] ds.$$

Тогда предыдущее выражение может быть записано в виде

$$(*) \leq \sqrt{2}C \left\{ \int_0^t \mathbb{E} \left[ (\alpha(X_s, s) - \alpha(X_0 + \alpha(a, t/2)s + \beta(a, t/2)W_s, s))^2 \right] ds + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \mathbb{E} \left[ (\beta(X_s, s) - \beta(X_0 + \alpha(a, t/2)s + \beta(a, t/2)W_{s-}, s))^2 \right] ds \Bigg\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq \sqrt{2C} \left\{ \int_0^t \|\alpha(X_s, s) - \alpha(X_0 + \alpha(a, t/2)s + \beta(a, t/2)W_{s-}, s)\|^2 ds + \right. \\
& \left. + \int_0^t \|\beta(X_s, s) - \beta(X_0 + \alpha(a, t/2)s + \beta(a, t/2)W_{s-}, s)\|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} \leq (*).
\end{aligned}$$

Теперь, воспользовавшись условием (2), можно представить оценку последнего выражения следующим образом:

$$\begin{aligned}
(*) & \leq \sqrt{2C} \left\{ K_1 \int_0^t \|X_s - (X_0 + \alpha(a, t/2)s + \beta(a, t/2)W_s)\|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} = \\
& = \sqrt{2C} \left\{ K_1 \int_0^t \left\| \int_0^s \alpha(X_\tau, \tau) - \alpha(a, t/2) d\tau + \int_0^s \beta(X_{\tau-}, \tau) - \beta(a, t/2) dW_\tau \right\|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} \leq (*).
\end{aligned}$$

Здесь снова используем упомянутое ранее неравенство, свойства интегралов Ито и условие (2) и получим окончательный вид оценки

$$\begin{aligned}
(*) & \leq \sqrt{2C} \left\{ 2K_1 t \int_0^t \|\alpha(X_\tau, \tau) - \alpha(a, t/2)\|^2 + \|\beta(X_{\tau-}, \tau) - \beta(a, t/2)\|^2 d\tau \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq 2C \left\{ K_1 t^2 \left( \|\alpha(X_{t/2}, t/2) - \alpha(a, t/2)\|^2 + \|\beta(X_{t/2-}, t/2) - \beta(a, t/2)\|^2 + \mathcal{O}(t^3) \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq 2tC \{ K_1^2 \|X_{t/2} - a\|^2 + \mathcal{O}(t^3) \}^{\frac{1}{2}} = 2tCK_1 \|X_{t/2} - a\| + \mathcal{O}(t^{5/2}). \tag{4}
\end{aligned}$$

Для определения значения параметра  $a$  нужно минимизировать значение

$$\|X_{t/2} - a\|^2 = \mathbb{E}[(X_{t/2} - a)^2].$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[(X_{t/2} - a)^2] = \mathbb{E}[(X_{t/2} - \mathbb{E}[X_{t/2}] + \mathbb{E}[X_{t/2}] - a)^2] = \\
& = (\mathbb{E}[X_{t/2}] - a)^2 + \mathbb{E}[(X_{t/2} - \mathbb{E}[X_{t/2}])^2] + 2(\mathbb{E}[X_{t/2}] - a)\mathbb{E}[(X_{t/2} - \mathbb{E}[X_{t/2}])] = \\
& = (\mathbb{E}[X_{t/2}] - a)^2 + \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^{t/2} \beta(X_{s-}, s) dW_s \right)^2 \right] = (\mathbb{E}[X_{t/2}] - a)^2 + \int_0^{t/2} \mathbb{E}[\beta(X_{s-}, s)^2] ds. \tag{5}
\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что оба слагаемых положительны, минимальное значение будет достигаться при  $a = \mathbb{E}[X_{t/2}]$ .

Вычислить  $a$  точно в общем случае не представляется возможным. Однако  $\mathbb{E}[X_{t/2}]$  можно вычислить приближенно используя формулу, предложенную в [5]. Причем, используя тот факт, что

$$\mathbb{E}[X_{t/2}] = X_0 + \int_0^{t/2} \mathbb{E}[\alpha(X_s, s)] ds,$$

и, применив формулу из [5] непосредственно к математическому ожиданию под знаком интеграла, согласно полученным в той же статье оценкам, выражение (5) можно записать

$$\mathbb{E}[(X_{t/2} - a)^2] = \int_0^{t/2} \mathbb{E}[\beta(X_{s-}, s)^2] ds + \mathcal{O}(t^3) \leq \int_0^{t/2} \mathbb{E}[K_2(1 + (X_{s-})^2)] ds + \mathcal{O}(t^3) =$$

$$= \frac{1}{2}tK_2 + \int_0^{t/2} \mathbb{E}[(X_{s-})^2]ds + \mathcal{O}(t^3) = \frac{1}{2}t(K_2 + X_0^2) + \mathcal{O}(t^2).$$

Подставив последнее выражение в (4) получим

$$|\mathbb{E}[F(X_t)] - \mathbb{E}[F(\tilde{X}_t)]| \leq t^2CK_1(K_2 + X_0^2) + \mathcal{O}(t^{5/2}).$$

#### 4. Приближенная формула

Исходя из полученного выше результата для оценки значения  $\mathbb{E}[F(X_t)]$  можно перейти к приближенному вычислению  $\mathbb{E}[F(\tilde{X}_t)]$ .

Здесь можно воспользоваться семейством формул, предложенных в [6], поскольку было положено, что функционал  $F$  является гладким.

Для демонстрации предложенного метода воспользуемся формулой, точной для полиномов третьей степени (см. [6]):

$$\mathbb{E}[W_{(\cdot)}] \approx S_0^{(1)}(F) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F[\text{sign}(u)1_{[|u|,1]}(\cdot)] du,$$

где  $G$  – это функционал, гладко зависящий от  $W_t$ . Тогда  $G[W_{(\cdot)}] = F[\tilde{X}_{(\cdot)}]$  и

$$\begin{aligned} S_0^{(1)}(G) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F \left[ X_0 + \int_0^t \alpha(X_0 + \alpha(a, t/2)s + \beta(a, t/2)\text{sign}(u)1_{[|u|,1]}(s), s) ds + \right. \\ &\left. + \int_0^t \beta(X_0 + \alpha(a, t/2)s + \beta(a, t/2)\text{sign}(u)1_{[|u|,1]}(s-), s) \frac{d(\text{sign}(u)1_{[|u|,1]}(s))}{ds} \right] du = (*). \end{aligned}$$

Здесь необходимо заметить, что  $1_{[|u|,1]}(|u|-) = 0$ , тогда

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F \left[ X_0 + \int_0^t \alpha(X_0 + \alpha(a, t/2)s + \beta(a, t/2)\text{sign}(u)1_{[|u|,1]}(s), s) ds + \right. \\ &\left. + \beta(X_0 + \alpha(a, t/2)|u|, |u|)\text{sign}(u)1_{[|u|,1]}(t) \right] du = (*). \end{aligned}$$

Воспользуемся тем фактом, что  $1_{[|u|,1]}(s-) = 0$  для  $|u| > t$ , и представим последний интеграл в виде следующей суммы:

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{-1}^{-t} F \left[ X_0 + \int_0^t \alpha(X_0 + \alpha(a, t/2)s, s) ds \right] du + \\ &+ \int_{-t}^t F \left[ X_0 + \int_0^t \alpha(X_0 + \alpha(a, t/2)s + \beta(a, t/2)\text{sign}(u), s) ds + \beta(X_0 + \alpha(a, t/2)|u|, |u|)\text{sign}(u) \right] du + \\ &+ \int_t^1 F \left[ X_0 + \int_0^t \alpha(X_0 + \alpha(a, t/2)s, s) ds \right] du. \end{aligned}$$

Таким образом, формулу для приближенного вычисления  $\mathbb{E}[F(X_t)]$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F(X_t)] \approx S_0^{(1)}[F[\tilde{X}_t]] = & (1-t)F \left[ X_0 + \int_0^t \alpha(X_0 + \alpha(a, t/2)s, s) ds \right] + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{k=0}^1 F \left[ X_0 + \int_0^t \alpha(X_0 + \alpha(a, t/2)s + (-1)^k \beta(a, t/2), s) ds + \right. \\ & \left. + (-1)^k \beta(X_0 + \alpha(a, t/2)u, u) \right] du. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь необходимо отметить, что полученная формула представляет особый интерес при приближенном вычислении математических ожиданий, поскольку и в методах типа Монте-Карло и в слабых аппроксимациях, таких как в [5] при проведении итоговых расчетов в используемых формулах в той или иной мере присутствует аппроксимация процесса, определяемого (1), тогда как в предложенной формуле присутствует аппроксимация процесса Винера, который значительно лучше изучен, что, в свою очередь, может быть использовано для построения более широкого и вычислительно простого класса формул.

### 5. Численный эксперимент

Рассмотрим далее уравнения, для которых получение аналитических представлений решений сопряжено со значительными вычислительными трудностями. Рассмотрим, для начала, уравнение вида

$$X_t = 1 + \int_0^t \cos X_s ds + \int_0^t \sin X_{s-} dW_s,$$

для которого вычислим значение функционала вида  $\mathbb{E}[\sin X_t]$ .

Вычисленные с помощью предложенной в работе [5] формулы значения параметра  $a$  для  $t = 0,005$  и  $t = 0,05$  равны соответственно  $\mathbb{E}[X_{0,005}] \approx 1,00269$  и  $\mathbb{E}[X_{0,05}] \approx 1,02678$ .

Результаты численного эксперимента для математических ожиданий  $\mathbb{E}[\sin X_t]$  и  $\mathbb{E}[\cos X_t]$  приведены в табл. 1 и 2. В табл. 1–4  $N$  обозначает количество симуляций траекторий, которое было использовано для расчета значения функционала по схеме Мильштейна (см. [9]), и которая получила широкое распространение в задачах для рассматриваемого типа уравнений (например, см. [3]).

Здесь необходимо обратить внимание читателя на тот факт, что даже при таком большом количестве моделируемых траекторий в схемах типа Монте-Карло не происходит стабилизации вычисляемых значений, в связи с чем в таблицах для каждого вычисляемого математического ожидания представлены результаты трех различных симуляций.

Таблица 1. Результаты численного эксперимента для  $\mathbb{E}[\sin X_t]$

$t$	С применением формул (3) и (6)	Метод Мильштейна $N = 10000$		
0,01	0,840527	0,841178	0,841574	0,841930
0,1	0,832592	0,833878	0,843205	0,837589

Таблица 2. Результаты численного эксперимента для  $\mathbb{E}[\cos X_t]$

$t$	С применением формул (3) и (6)	Метод Мильштейна $N = 10000$		
0,01	0,533343	0,533025	0,534185	0,53446
0,1	0,476793	0,482863	0,479152	0,48082

Далее приведем результаты численного эксперимента для еще одного нелинейного уравнения

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s^2 ds + \int_0^t (\sin X_{s-})^2 dW_s.$$

Значения параметра  $a$  в этом случае равны  $\mathbb{E}[X_{0,005}] \approx 1,00504$  и  $\mathbb{E}[X_{0,05}] \approx 1,05386$ . Результаты вычисления математического ожидания  $\mathbb{E}[(\sin X_s)^2]$  приведены в табл. 3 и для  $\mathbb{E}[(\cos X_s)^2]$  в табл. 4.

Таблица 3. Результаты численного эксперимента для  $\mathbb{E}[(\sin X_s)^2]$

$t$	С применением формул (3) и (6)	Метод Мильштейна $N = 100000$		
0,01	0,714831	0,716077	0,714889	0,714839
0,1	0,76557	0,762969	0,759787	0,761945

Таблица 4. Результаты численного эксперимента для  $\mathbb{E}[(\cos X_s)^2]$

$t$	С применением формул (3) и (6)	Метод Мильштейна $N = 100000$		
0,01	0,285169	0,284682	0,285335	0,285275
0,1	0,23443	0,238896	0,235424	0,237824

## 6. Заключение

В данной работе предложен подход к приближенному вычислению математических ожиданий от решений уравнения с дрейфом. Подход предполагает возможность использования большого семейства формул (см., например, [6; 10]) На основе элементарной формулы третьей степени точности построена приближенная формула для вычисления математического ожидания функции от решения стохастического дифференциального уравнения, содержащего дрейф. В уравнении используется стохастический интеграл по процессу Винера в смысле Ито.

Полученная формула относится к классу так называемых слабых аппроксимаций и опирается на формулу, точную для моментов третьего порядка процесса Винера, примененную к предложенному в работе вспомогательному процессу специального вида. Проведен численный эксперимент. Указанный подход позволяет разделить процедуру вычисления математического ожидания на два этапа, этап аналитических вычислений и этап численного расчета, что при многократном применении формулы значительно быстрее и вычислительно экономичнее, чем традиционно используемые методы типа Монте-Карло, которые требуют многократного моделирования поведения стохастической системы каждый раз, когда необходимо осуществить вычисление некоторого математического ожидания.

## Литература

1. *Brigo D., Mercurio F.* Interest Rate Models – Theory and Practice With Smile, Inflation and Credit. Springer Finance, 2006.
2. *Andersen Leif B. G., Piterbarg V. V.* Interest Rate Modeling. Atlantic Financial Press, 2011.
3. *Kloeden P. E., Platen E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer, 1999.
4. *Rößler A.* Runge-Kutta methods for the strong approximation of solutions of stochastic differential equations // SIAM J. Numer. Anal. 2010. Vol. 48, N 3. P. 922–952.
5. *Жерело А. В.* Приближенная формула для математических ожиданий от решения стохастического дифференциального уравнения с дрейфом // Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Т. 33, № 1. С. 87–94.
6. *Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A.* Functiona Integrals; Approximate Evaluation and Applications. Dordrecht: «Kluwer Acad. Publ.», 1993.
7. *Øksendal B.* Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. Springer, 2003.
8. *Applebaum D.* Levy Processes and Stochastic Calculus. Cambridge University Press, 2009.
9. *Мильштейн Г. Н.* Приближенное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применения. 1974. Т. 19, № 3. С. 583–588.
10. *Егоров А. Д., Жидков Е. П., Лобанов Ю. Ю.* Введение в теорию и приложения функциональных интегралов. М.: «Физматлит», 2006.

---

### References

1. Brigo D., Mercurio F. *Interest Rate Models – Theory and Practice With Smile, Inflation and Credit*. Springer Finance, 2006.
2. Andersen Leif B. G., Piterbarg V. V. *Interest Rate Modeling*. Atlantic Financial Press, 2011.
3. Kloeden P. E., Platen E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, 1999.
4. Rößler A. Runge-Kutta methods for the strong approximation of solutions of stochastic differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 2010, vol. 48, no. 3, pp. 922–952.
5. Zherelo A. V. Approximate formula for mathematical expectations of a solution of a stochastic differential equation with drift. *Proceedings of the Institute of Mathematics of the NAS of Belarus*. 2025, vol. 33, no. 1, pp. 87–94 (in Russian).
6. Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A. *Functiona Integrals; Approximate Evaluation and Applications*. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1993.
7. Øksendal B. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer, 2003.
8. Applebaum D. *Levy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge University Press, 2009.
9. Milshtein G. N. Approximate integration of stochastic differential equations. *Theory of Probability & Its Applications*, 1974, vol. 19, no 3. pp. 583–588 (in Russian).
10. Egorov A. D., Zhidkov E. P., Lobanov Yu. Yu. *Introduction in a Theory and Applications of Functional Integlas*. Moscow, Phismatlit, 2006 (in Russian).



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ,  
ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ  
И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ  
DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMIC  
SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL



УДК 517.9

<https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1-76-84>

EDN: DQVILP

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ  
АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
С НЕВЫРОЖДЕННОЙ МАТРИЦЕЙ ПРИ УПРАВЛЕНИИ В НЕРЕЗОНАНСНОМ  
СЛУЧАЕ

А. К. Деменчук, Е. К. Макаров

*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*  
*e-mail: demenchuk@im.bas-net.by, jcm@im.bas-net.by*

Поступила: 12.03.2026

Исправлена: 06.04.2026

Принята: 29.05.2026

**Ключевые слова:** линейная система управления, периодическое решение, управление асинхронным спектром, иррегулярное допустимое множество, нерезонансный случай.

**Аннотация.** Рассматривается линейная периодическая система управления с постоянной невырожденной матрицей при управлении. Программное управление является периодическим, причем его период несоизмерим с периодом матрицы коэффициентов. Допустимое множество таких периодических управлений названо иррегулярным. Ставится задача выбора такого управления из указанного допустимого множества, чтобы теперь уже у квазипериодической системы появилось частично нерегулярное периодическое решение с заданным спектром частот, период которого совпадает с периодом управления. Такая задача названа задачей управления асинхронным спектром с иррегулярным допустимым множеством. Для ее решения исходная система сводится к некоторой линейной неоднородной системе меньшей размерности. Изучается нерезонансный случай, когда соответствующая однородная система не имеет нерегулярных периодических решений. Получено необходимое условие разрешимости задачи управления асинхронным спектром с иррегулярным допустимым множеством.

NECESSARY CONDITION OF SOLVABILITY OF THE CONTROL PROBLEM OF THE  
ASYNCHRONOUS SPECTRUM OF LINEAR PERIODIC SYSTEMS WITH  
NON-DEGENERATE MATRIX IN CONTROL IN NON-RESONANT CASE

A. K. Demenchuk, E. K. Makarov

*Institute of Mathematic of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*  
*e-mail: demenchuk@im.bas-net.by, jcm@im.bas-net.by*

Received: 12.03.2026

Revised: 06.04.2026

Accepted: 29.05.2026

**Keywords:** linear control system, periodic solution, asynchronous spectrum control, irregular feasible set, non-resonant case.

**Abstract.** A linear periodic system with a constant non-degenerate matrix under control is considered. The program control is periodic, and its period is incommensurable with the period of the coefficient matrix. The admissible set of such periodic controls is called irregular. The problem is to choose such a control from this admissible set so that the now quasi-periodic system has a partially irregular periodic solution with a given frequency spectrum whose period coincides with the period of the control. Such problem is called the control problem of the asynchronous spectrum with an irregular admissible set. To solve it, the original system is reduced to some linear nonhomogeneous system of lower dimension. The non-resonant case is studied, when the corresponding homogeneous system has no irregular periodic solutions. A necessary condition for the solvability of the control problem of the asynchronous spectrum with an irregular admissible set is obtained.

## 1. Введение

Системы периодических и почти периодических дифференциальных уравнений, в том числе и линейных, лежат в основе многих математических моделей, описывающих колебательные процессы в механике, радиотехнике, биологии, эпидемиологии и других областях (см., напр. [1–5] и др.). В большинстве работ по теории колебаний, как правило, изучался так называемый регулярный случай, когда частотные модули периодической (почти периодической) дифференциальной системы и ее решения совпадают. Вопросы о других возможных соотношениях модулей частот не затрагивались. Хотя для некоторых прикладных задач необходимо иметь информацию о том, в какой мере специфика частот параметров системы оказывает влияние на частотный спектр ее решения. Так еще в середине 30-х гг. прошлого века в исследованиях, проводимых под общим руководством Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси [6], изучалось параметрическое воздействие на двухконтурные параметрические системы. В частности, при включении в цепь питания электродвигателя некоторой емкости для компенсации переменной индуктивности было установлено, что скорость вращения электродвигателя не синхронна с частотой тока питания. В результате, в отличие от обычного параметрического возбуждения, которое имело место только при целочисленном отношении частот, была получена новая своеобразная трансформация частоты вращения мотора практически в любом (в том числе и иррациональном) отношении с частотой контура. Позднее изучался ряд систем, преобразующих энергию источника высокочастотных колебаний в низкочастотные, частота которых практически не зависит от частоты источника [7; 8]. Так в [8] исследован случай, когда гармоническая сила, с которой поле конденсатора действует на пролетающий заряд, имеет частоту, несоизмеримую с частотой собственных колебаний заряда. При этом возможно установление устойчивых незатухающих колебаний.

Тем не менее изучение периодических решений периодических дифференциальных систем достаточно длительное время, вплоть до конца сороковых годов прошлого века, основывалось на гипотезе о соизмеримости периодов решения и системы. По-видимому, первым, кто указал на ошибочность такого предположения, был Х. Массера. В 1950 г. он показал, что периодические дифференциальные системы могут иметь периодические решения с иррациональным отношением периодов решения и системы [9]. Этот результат послужил началом нового направления в теории дифференциальных уравнений, которое впоследствии развивалось для различных классов систем и их решений в работах Я. Курцвейля и О. Вейвоты [10], Н. П. Еругина [11], И. В. Гайшуна [12], Э. И. Груды [13], В. Т. Борухова [14], А. В. Ласунского [15] и др. Такие периодические решения ввиду их необычности, в сравнении с ранее изучавшимися, были названы сильно нерегулярными [16], их частотный спектр – асинхронным, а описываемые ими колебания – асинхронными [17].

В работе [18] задача синтеза асинхронных режимов периодических систем сформулирована в виде следующей задачи управления. Пусть управляемая система описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

правая часть которого обеспечивает существование и единственность решений и периодична или почти периодична по  $t$ . Управление  $u$  принимает значения в некотором допустимом множестве, определяемом постановкой конкретной задачи. Задачу выбора такого управления  $u$ , чтобы у данного уравнения появились нерегулярные периодические решения, спектр частот которых содержит заданное подмножество  $L$ , названа задачей управления спектром нерегулярных колебаний (асинхронным спектром) с целевым множеством частот  $L$ . Вопросы разрешимости сформулированной задачи применительно к линейным периодическим системам с программным управлением того же периода изучались в работах [19; 20] и др. Задача управления асинхронным спектром допускает модифицированные варианты, связанные с выбором иных видов управления. Например, в монографии [21, гл. III] и др. рассматривался случай синтеза управления в виде линейной по фазовым переменным обратной связи. В работе [22] поставлена задача управления асинхронным спектром периодических систем, где в качестве допустимого множества выступают периодические функции, период которых несоизмерим с периодом системы, и приведено необходимое условие ее разрешимости, базирующееся на свойствах осциллирующей составляющей матрицы коэффициентов. В настоящей работе для решения этой задачи исходная система приводится к некоторой неоднородной системе

меньшей размерности. Изучается нерезонансный случай, когда соответствующая однородная система не имеет нерегулярных периодических решений. Получено необходимое условие разрешимости задачи управления асинхронным спектром с иррегулярным допустимым множеством, использующее строение неособенной матрицы при управлении.

## 2. Предварительные сведения

Приведем кратко необходимые для замкнутости изложения понятия теории периодических и квазипериодических скалярных функций, которые без труда переносятся на векторно и матричнозначные функции [23, гл. I; гл. II, с. 118]. Пусть конечное множество действительных чисел  $(\omega_1)^{-1}, \dots, (\omega_k)^{-1}$  рационально линейно независимо. Непрерывная функция  $g(t)$  называется квазипериодической с периодами  $\omega_1, \dots, \omega_k$ , если найдется непрерывная функция  $k$  переменных  $G^*(t_1, \dots, t_k)$ , периодическая по  $t_j$  с периодом  $\omega_j$  ( $j = \overline{1, k}$ ), которая является диагональной для исходной функции, т. е.

$$g(t) \equiv G^*(t, \dots, t).$$

Числа  $2\pi/\omega_1, \dots, 2\pi/\omega_k$  образуют базис частот квазипериодической функции  $g(t)$ . Квазипериодическими будут, в частности, тригонометрические многочлены с рационально линейно независимыми частотами. Например, функция  $g(t) = \sin t + \sin(\sqrt{2})t$  является квазипериодической с периодами  $\omega_1 = 2\pi$  и  $\omega_2 = \sqrt{2}\pi$ . Очевидно, что периодические функции являются подмножеством квазипериодических и имеют одночастотный базис.

Для непрерывной  $\omega$ -периодической функции  $f(t)$  среднее значение – это постоянная величина

$$\hat{f} = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} f(\tau) d\tau,$$

а осциллирующая часть определяется равенством

$$\tilde{f}(t) = f(t) - \hat{f}.$$

Показателем Фурье (частотой) функции  $f(t)$  называется действительное число  $\mu$  такое, что хотя бы один из интегралов

$$\int_0^{\omega} f(t) \cos \mu t dt$$

или

$$\int_0^{\omega} f(t) \sin \mu t dt$$

отличен от нуля. Множество показателей Фурье периодической функции образует ее спектр.

Через  $\text{rank}_{\text{row}} H$  обозначим строчный ранг некоторой периодической матрицы  $H(t)$ , т. е. наибольшее число ее линейно независимых строк. Подобным образом можно определить и столбцовый ранг этой матрицы  $\text{rank}_{\text{col}} H$ . Отметим, что в общем случае строчный и столбцовый ранги матрицы  $H(t)$  не обязаны совпадать. В стационарном случае введенные ранги, очевидно, совпадают. Будем говорить, что  $H(t)$  – матрица неполного столбцового ранга, если ее столбцовый ранг меньше числа столбцов.

Рассмотрим квазипериодическую систему

$$\frac{dz}{dt} = g_1(t, z) + g_2(t, z), \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

где вектор-функции  $g_1$  и  $g_2$  периодические по первому аргументу с периодами  $\omega$  и  $\Omega$  соответственно, причем отношение этих периодов иррационально. Периодическое решение  $z = z(t)$  с периодом  $\Omega$  данной системы называется частично нерегулярным [16], а его частотный спектр – частично асинхронным. Если  $g_2(t, z) \equiv 0$ , то решение  $z(t)$  – нерегулярно (сильно нерегулярно).

В дальнейшем нам понадобится вытекающая из [16]

**Лемма.** *Линейная периодическая функциональная система*

$$\dot{H}(t)w = 0$$

имеет отличное от тривиального сильно нерегулярное периодическое решение  $w = w(t)$ , если и только если ее матрица коэффициентов  $\dot{H}(t)$  имеет неполный столбцовый ранг.

Для разбиения некоторого  $k$ -вектора  $l = \text{col}(l_1, \dots, l_k)$  примем следующие обозначения:

$$l = \text{col}(l^{[s]}, l_{[k-s]}), \quad l^{[s]} = \text{col}(l_1, \dots, l_s), \quad l_{[k-s]} = \text{col}(l_{k-s+1}, \dots, l_k),$$

т. е. векторы  $l^{[s]}$  и  $l_{[k-s]}$  составлены соответственно из  $s$  первых и  $k - s$  последних компонент вектора  $l$  ( $1 \leq s < k$ ).

### 3. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

в которой  $A(t)$  – непрерывная  $\omega$ -периодическая  $(n \times n)$ -матрица,  $B$  – постоянная невырожденная  $(n \times n)$ -матрица,  $u$  – управление. В качестве управляющего воздействия  $u(\cdot)$  в системе (1) будем использовать непрерывные на вещественной оси  $\Omega$ -периодические  $n$ -вектор-функции такие, что числа  $\omega$  и  $\Omega$  несоизмеримы. Допустимое множество периодических функций такого рода будем называть иррегулярным.

Задача управления асинхронным спектром с целевым множеством  $L$  и иррегулярным допустимым множеством состоит в следующем [22]: выбрать такое программное управление

$$u = u(t)$$

из указанного допустимого множества, чтобы квазипериодическая система

$$\dot{x} = A(t)x + Bu(t) \quad (2)$$

имела нетривиальное частично нерегулярное решение  $x = x(t)$  периода  $\Omega$  с заданным спектром частот  $L$ . Для решения этой задачи система (2) приводится к некоторой неоднородной системе меньшей размерности. Изучим нерезонансный случай, когда соответствующая однородная система не имеет нерегулярных периодических решений.

### 4. Основной результат

Пусть  $u(t)$  –  $\Omega$ -периодический  $n$ -вектор такой, что система (2) имеет частично нерегулярное решение  $x(t)$  с множеством частот  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ . В силу постановки задачи элементы целевого множества попарно различны, соизмеримы между собой и несоизмеримы с  $2\pi/\omega$ . В таком случае найдется наибольшее положительное вещественное  $\lambda$ , которому будут кратны числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ , т. е.  $\lambda_j = k_j \lambda$  ( $k_j \in N$ ;  $j = \overline{1, s}$ ) и  $\Omega = 2\pi/\lambda$ , при этом отношение чисел  $\omega$  и  $\Omega$  иррационально.

Из работы [13] следует, что система (2) в смысле существования  $\Omega$ -периодических решений эквивалентна системе, состоящей из двух подсистем

$$\dot{x} = \hat{A}x + Bu(t), \quad \tilde{A}(t)x = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим вторую подсистему из (3), которая является функциональной относительно неизвестного  $\Omega$ -периодического вектора  $x = x(t)$  с множеством частот  $L$ . Если осциллирующая часть  $\tilde{A}(t)$  матрицы коэффициентов имеет полный столбцовый ранг, то согласно лемме эта подсистема не имеет искомого периодических решений. Поэтому далее будем предполагать, что имеет место оценка

$$\text{rank}_{\text{col}} \tilde{A} = r, \quad 1 \leq r < n. \quad (4)$$

В этом случае найдется постоянная неособенная  $(n \times n)$ -матрица  $Q$ , с помощью которой матрица  $\tilde{A}(t)$  приводится к специальному виду

$$\tilde{A}(t)Q = \tilde{C}(t) = [0 \cdots 0 \quad \tilde{C}_{n,r}(t)],$$

где первые  $n - r$  столбцов нулевые, а столбцы правого блока  $\tilde{C}_{n,r}$  размерности  $n \times r$  линейно независимы (здесь и далее нижние индексы блочных матриц указывают их размерность). Один из алгоритмов построения преобразующей матрицы  $Q$  описан на этапе ii) доказательства теоремы работы [24].

Выполнив в системе (4) замену фазовых переменных

$$x = Qy \quad (5)$$

получим систему

$$\dot{y} = Q^{-1}\hat{A}Qy + Q^{-1}Bu(t), \quad \tilde{A}(t)Qy = 0,$$

которую запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \hat{C}y + Du(t), \quad \hat{C} = Q^{-1}\hat{A}Q, \quad D = Q^{-1}B, \\ \tilde{C}(t)y &= [0 \cdots 0 \ \tilde{C}_{n,r}(t)]y = 0, \quad \tilde{C}(t) = \tilde{A}(t)Q. \end{aligned} \quad (6)$$

В силу неособенности преобразования (5) система (6) также имеет  $\Omega$ -периодическое решение  $y(t) = Q^{-1}x(t)$ . Поэтому выполняется, в частности, тождество

$$[0 \cdots 0 \ \tilde{C}_{n,r}(t)]y(t) \equiv 0,$$

которое с учетом принятых обозначений для разбиения векторов примет вид

$$\tilde{C}_{n,r}(t)y_{[n-r]}(t) \equiv 0.$$

Так как по построению матрица  $\tilde{C}_{n,r}(t)$  имеет полный столбцовый ранг, то из последнего тождества в силу леммы вытекает тривиальность вектора  $y_{[n-r]}(t)$ . Следовательно, фазовый вектор имеет следующее строение:

$$y = \text{col}(y^{[n-r]}, y_{[r]}), \quad y^{[n-r]} = \text{col}(y_1, \dots, y_{n-r}), \quad y_{[r]} = \text{col}(0, \dots, 0) = 0. \quad (7)$$

В соответствии с разбиением вектора  $y$  представим матрицу  $\hat{C}$  в блочном виде. Пусть  $\hat{C}_{n-r,n-r}^{(11)}$ ,  $\hat{C}_{r,n-r}^{(21)}$  – ее левые верхний и нижний, а  $\hat{C}_{n-r,r}^{(12)}$ ,  $\hat{C}_{r,r}^{(22)}$  – правые верхний и нижний блоки, т. е.

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \hat{C}_{n-r,n-r}^{(11)} & \hat{C}_{n-r,r}^{(12)} \\ \hat{C}_{r,n-r}^{(21)} & \hat{C}_{r,r}^{(22)} \end{pmatrix}.$$

С целью согласования размерностей матрицу  $D$  в свою очередь разобьем по вертикали на два блока  $D^{(1)}$  и  $D^{(2)}$ , образованные соответственно первыми  $n - r$  и остальными  $r$  строками этой матрицы

$$D = \begin{pmatrix} D^{(1)} \\ D^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Тогда, принимая во внимание введенные разбиения матриц  $\hat{C}$ ,  $D$  систему (6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{y}^{[n-r]} &= \hat{C}_{n-r,n-r}^{(11)}y^{[n-r]} + \hat{C}_{n-r,r}^{(12)}y_{[r]} + D^{(1)}u(t), \\ \dot{y}_{[r]} &= \hat{C}_{r,n-r}^{(21)}y^{[n-r]} + \hat{C}_{r,r}^{(22)}y_{[r]} + D^{(2)}u(t), \end{aligned}$$

откуда на основании строения (7) фазового вектора получаем

$$\begin{aligned} \dot{y}^{[n-r]} &= \hat{C}_{n-r,n-r}^{(11)}y^{[n-r]} + D^{(1)}u(t), \\ \hat{C}_{r,n-r}^{(21)}y^{[n-r]} + D^{(2)}u(t) &= 0, \quad y_{[r]} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку исходная матрица  $B$  при управлении невырождена, то ввиду неособенности преобразования (5) матрица  $D$  также будет невырожденной. Поэтому строки матрицы  $D$  линейно независимы. Значит, ранг прямоугольной постоянной матрицы  $D^{(2)}$  размерности  $r \times n$ , образованной последними строками матрицы  $D$ , равен числу строк, т. е.

$$\text{rank} D^{(2)} = r, \quad r < n.$$

В этом случае найдется постоянная неособенная  $(n \times n)$ -матрица  $T$  такая, что у постоянной матрицы  $D^{(2)}T = F^{(2)}$  первые  $r$  столбцов будут линейно независимыми, а последние  $n - r$  столбцов – нулевыми (см., напр. [24])

$$F^{(2)} = D^{(2)}T = [ F_{r,r}^{(21)} \ F_{r,n-r}^{(22)} ], \quad \det F_{r,r}^{(21)} \neq 0, \quad F_{r,n-r}^{(22)} = 0.$$

Пусть также

$$F^{(1)} = D^{(1)}T = [ F_{n-r,r}^{(11)} \ F_{n-r,n-r}^{(12)} ], \quad \text{rank } F^{(1)} = n - r.$$

Введем линейное невырожденное преобразование управления

$$v(t) = T^{-1}u(t). \tag{9}$$

Тогда система (8) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{y}^{[n-r]} &= \hat{C}_{n-r,n-r}^{(11)} y^{[n-r]} + D^{(1)}T v(t), \\ \hat{C}_{r,n-r}^{(21)} y^{[n-r]} + D^{(2)}T v(t) &= 0, \quad y^{[r]} = 0. \end{aligned}$$

Новое представление вектора управления

$$v = \text{col}(v^{[r]}, v_{[n-r]}), \quad v^{[r]} = \text{col}(v_1, \dots, v_r), \quad v_{[n-r]} = \text{col}(v_{n-r+1}, \dots, v_n)$$

позволит с учетом введенных выше обозначений записать последнюю систему следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{y}^{[n-r]} &= \hat{C}_{n-r,n-r}^{(11)} y^{[n-r]} + F_{n-r,r}^{(11)} v^{[r]}(t) + F_{n-r,n-r}^{(12)} v_{[n-r]}(t), \\ \hat{C}_{r,n-r}^{(21)} y^{[n-r]} + F_{r,r}^{(21)} v^{[r]}(t) + F_{r,n-r}^{(22)} v_{[n-r]}(t) &= \hat{C}_{r,n-r}^{(21)} y^{[n-r]} + F_{r,r}^{(21)} v^{[r]}(t) = 0, \quad y^{[r]} = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

В силу неособенности матрицы  $F_{r,r}^{(21)}$  из второго равенства в (10) выразим вектор

$$v^{[r]}(t) = -(F_{r,r}^{(21)})^{-1} \hat{C}_{r,n-r}^{(21)} y^{[n-r]}$$

и подставим полученное выражение в первую подсистему

$$\dot{y}^{[n-r]} = \hat{C}_{n-r,n-r}^{(11)} y^{[n-r]} + F_{n-r,r}^{(11)} (-(F_{r,r}^{(21)})^{-1} \hat{C}_{r,n-r}^{(21)} y^{[n-r]}) + F_{n-r,n-r}^{(12)} v_{[n-r]}(t).$$

Таким образом, в результате выполненных преобразований получим систему

$$\dot{y}^{[n-r]} = H_{n-r,n-r} y^{[n-r]} + h(t), \tag{11}$$

где

$$H_{n-r,n-r} = \hat{C}_{n-r,n-r}^{(11)} - F_{n-r,r}^{(11)} (F_{r,r}^{(21)})^{-1} \hat{C}_{r,n-r}^{(21)}, \quad h(t) = F_{n-r,n-r}^{(12)} v_{[n-r]}(t),$$

причем  $y^{[r]} = 0$ , а  $v^{[n-r]}(t)$  – нетривиальная компонента управления, составленная из первых  $n - r$  элементов  $\Omega$ -периодического вектора  $T^{-1}u(t)$ .

Рассмотрим соответствующую редуцированной системе (11) однородную стационарную систему

$$\dot{y}^{[n-r]} = H_{n-r,n-r} y^{[n-r]}. \tag{12}$$

Предположим, что система (12) не имеет  $\Omega$ -периодических решений. Такой случай применительно к неоднородной системе (11) называется нерезонансным [25, п. 23].

Поскольку по исходному допущению система (2) имеет  $\Omega$ -периодическое решение  $x = x(t)$ , то в силу обратимости выполненных преобразований (5), (9) и того, что компонента  $y^{[r]} = 0$ , система (11) также имеет решение  $y^{[n-r]} = y^{[n-r]}(t)$  периода  $\Omega$  с таким же множеством частот. Из [2, с. 92] вытекает, что в нерезонансном случае система (11) не имеет  $\Omega$ -периодических решений (отличных от тривиального), если выполняется условие  $h(t) \equiv 0$ . Поэтому далее считаем, что такое тождество не имеет места, т. е.

$$h(t) \neq 0,$$

откуда следует, что правый блок размерности  $(n - r) \times (n - r)$ -матрицы  $F^{(1)} = D^{(1)}T$  нетривиален

$$F_{n-r,n-r}^{(12)} \neq 0. \tag{13}$$

Таким образом, имеет место

**Теорема 4.1.** Пусть задача управления асинхронным спектром системы (1) с иррегулярным допустимым множеством имеет решение в нерезонансном случае. Тогда выполняется условие (13).

**Заключение.** Для линейной периодической системы в нерезонансном случае дано необходимое условие разрешимости задачи управления асинхронным спектром с иррегулярным допустимым множеством, основанное на свойствах невырожденной матрицы при управлении. Полученное условие в совокупности с результатом работы [22] нацелено на построение критерия разрешимости рассматриваемой задачи.

Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси при поддержке БРФФИ (проект № Ф25КИ-015).

### Литература

1. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах. М.: Мир, 1966.
2. Якубович В. А. Линейные дифференциальные уравнения и их приложения. М.: Наука, 1972.
3. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Дрофа, 2004.
4. Гусев А. Ф., Новоселова М. В. Прикладная теория колебаний. Тверь: ТвГТУ, 2017.
5. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. М.: Лань, 2024.
6. Папалекси Н. Д. Об одном случае параметрически связанных систем // Journ. Of Phys. Acad. Sc. USSR. 1939. Т. 1. С. 373–379.
7. Пеннер Д. И., Дубошинский Я. Б., Дубошинский Д. Б., Козаков М. И. Колебания с саморегулирующимся временем взаимодействия // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 5. С. 1065–1066.
8. Пеннер Д. И., Дубошинский Д. Б., Козаков М. И., Вермель А. С., Галкин Ю. В. Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний // Успехи физ. наук. 1973. Т. 109, вып. 1. С. 402–406.
9. Massera J. L. Observaciones sobre las soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales // Bol. de la Facultad de Ingenieria. 1950. Vol. 4, N 1. P. 37–45.
10. Курцвейль Я., Вейвода О. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Чехосл. мат. журнал. 1955. Т. 5, № 3. С. 362–370.
11. Еругин Н. П. О периодических решениях дифференциальных уравнений // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 1. С. 148–152.
12. Гайшун И. В. Уравнения в полных производных с периодическими коэффициентами // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 8. С. 684–686.
13. Грудо Э. И., Деменчук А. К. О периодических решениях с несоизмеримыми периодами линейных неоднородных периодических дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 3. С. 409–416.
14. Борухов В. Т. Сильно инвариантные подпространства неавтономных линейных периодических систем и их решения с периодом, несоизмеримым с периодом системы // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 5. С. 585–591.
15. Ласунский А. В. О периодических решениях системы разностных уравнений, период которых взаимно прост с периодом системы // Труды ИММ УрО РАН. 2025. Т. 31, № 1. С. 110–118.
16. Demenchuk A. K. Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems // Math. Bohemica. 2001. Vol. 126, N 1. P. 221–228.
17. Ланда П. С., Дубошинский Я. Б. Автоколебательные системы с высокочастотными источниками энергии // Успехи физ. наук. 1989. Т. 158, вып. 4. С. 729–742.
18. Деменчук А. К. Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний // Доклады НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 4. С. 37–42.
19. Деменчук А. К. Управление спектром нерегулярных колебаний линейных систем с совпадением рангов матрицы при управлении и расширенной матрицы // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 9. С. 1241–1246.
20. Деменчук А. К. Управление асинхронным спектром линейных систем с невырожденным средним значением матрицы коэффициентов // Труды Института математики. 2020. Т. 28, № 1–2. С. 11–16.

21. Деменчук А. К. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2012.
22. Деменчук А. К., Макаров Е. К. Задача управления асинхронным спектром линейных периодических систем с иррегулярным допустимым множеством – необходимое условие разрешимости // Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Т. 33, № 2. С. 90–95.
23. Левитан Б. М. Почти периодические функции. М.: ГТТИ, 1953.
24. Деменчук А. К. Зависимость между компонентами сильно нерегулярного квазипериодического решения линейной однородной алгебраической системы // Труды Института математики НАН Беларуси. 2024. Т. 32, № 1. С. 67–74.
25. Демидович Б. М. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

### References

1. Hale J. *Oscillations in Nonlinear Systems*. Moscow, Mir, 1966 (in Russian).
2. Yakubovich V. A., Starginskii V. M. *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients and Their Applications*. Moscow, Nauka, 1972 (in Russian).
3. Babakov I. M. *Theory of Oscillations*. Moscow, Drofa, 2004 (in Russian).
4. Gusev A. F., Novoselova M. V. *Applied Theory of Oscillations*. Tver, TvGTU, 2017 (in Russian).
5. Strelkov S. P. *Introduction to the Theory of Oscillations*. Moscow, Lan, 2024 (in Russian).
6. Papaleksi N. D. On one case of parametrically related systems. *Journ. Of Phys. Acad. of Sc. of USSR*, 1939, vol. 1, pp. 373–379 (in Russian).
7. Penner D. I., Duboshinskii Ya. B., Duboshinskii D. B. Oscillations with self-regulating interaction time. *Doklady Acad. of Sci. of USSR*, 1972, vol. 204, no. 5, pp. 1065–1066 (in Russian).
8. Penner D. I., Duboshinsky D. B., Kozakov M. I., Vermel A. S., Galkin Yu. V. Asynchronous excitation of undamped oscillations. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 1973, vol. 109, no. 1, pp. 402–406 (in Russian).
9. Massera J. L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales. *Bol. de la Facultad de Ingenieria*, 1950, vol. 4, no. 1, pp. 37–45.
10. Kurzweil Ya., Veyvoda O. On periodic and almost periodic solutions of systems of ordinary differential equations. *Czechosl. Math. J.*, 1955, vol. 5, no. 3, pp. 362–370 (in Russian).
11. Erugin N. P. On periodic solutions of differential equations. *Priklad. Math. and Mech.*, 1956, vol. 20, is. 1, pp. 148–152 (in Russian).
12. Gaishun I. V. Total derivative equations with periodic coefficients. *Doklady Acad. of Sci. of BSSR*, 1979, vol. 23, no. 8, pp. 684–686 (in Russian).
13. Grudo E. I., Demenchuk A. K. On periodic solutions with incommensurate periods of linear inhomogeneous periodic differential systems. *Differential Equations*, 1987, vol. 23, no. 3, pp. 409–416 (in Russian).
14. Borukhov V. T. Strongly invariant subspaces non-autonomous linear periodic systems and their solutions with period, incommensurable with the period of the system. *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 5, pp. 585–591 (in Russian).
15. Lasunsky A. B. On periodic solutions of a system of difference equations whose period is coprime with the period of the system. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 110–118 (in Russian).
16. Demenchuk A. K. Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems. *Math. Bohemica*, 2001, vol. 126, no. 1, pp. 221–228.
17. Landa P. S., Duboshinskii Ya. B. Self-oscillatory systems with high-frequency energy sources. *Uspekhi Fiz. Nauk*, 1989, vol. 158, is. 4, pp. 729–742 (in Russian).
18. Demenchuk A. K. Problem of control of the spectrum of strongly irregular periodic oscillations. *Doklady NAN Belarusi*, 2009, vol. 53, no. 4, pp. 37–42 (in Russian).
19. Demenchuk A. K. Control of the spectrum of irregular oscillations of linear systems with the coincidence ranks of the control matrix and the extended matrix. *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 9, pp. 1241–1246 (in Russian).

20. Demenchuk A. K. Control of an asynchronous spectrum of linear systems with a non-degenerate average value of the coefficient matrix. *Trudy Instituta Matematiki*, 2020, vol. 28, № 1–2, pp. 11–16 (in Russian).
21. Demenchuk A. K. *Asynchronous oscillations in differential systems. Conditions of existence and control*. Saarbrucken, Lambert Academic Publishing, 2012 (in Russian).
22. Demenchuk A. K., Makarov E. K. The problem of controlling an asynchronous spectrum of linear periodic systems with an irregular allowable set is a necessary condition for solvability. *Proceeding of the Institute of Mathematics of the NAS of Belarus*, 2025, vol. 33, no. 2, pp. 90–95 (in Russian).
23. Levitan B. M. *Almost Periodic Functions*. Moscow, GTTI, 1953 (in Russian).
24. Demenchuk A. K. Dependence between the components of a strongly irregular quasi-periodic solution of a linear homogeneous algebraic system. *Proceeding of the Institute of Mathematics of the NAS of Belarus*, 2024, vol. 32, no. 1, pp. 67–74 (in Russian).
25. Demidovich B. M. *Lectures on Mathematical Theory of Stability*. Moscow, Nauka, 1967 (in Russian).

## CLASSICAL SOLUTION TO THE FIRST MIXED PROBLEM FOR A MILDLY QUASILINEAR WAVE EQUATION: A FIXED-POINT APPROACH

J. V. Rudzko

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

*e-mail: janycz@yahoo.com*

**Received:** 05.02.2026

**Revised:** 20.03.2026

**Accepted:** 29.05.2026

**Keywords:** mildly quasilinear wave equation, mixed problem, classical solution, fixed-point principle, matching conditions.

**Abstract.** For a one-dimensional mildly quasilinear wave equation given in the first quadrant, we consider a mixed problem in which Cauchy conditions are specified on the spatial semi-axis and a Dirichlet condition is specified on the temporal semi-axis. The nonlinearity contains independent variables, the unknown function, and its derivatives. We construct the solution in implicit analytical form as the solution of some integro-differential equations. We prove the solvability of these integro-differential equations using a generalization of the Banach fixed-point theorem. For the problem in question, we prove the uniqueness of the solution and establish the conditions under which its classical solution exists

## КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛАБО КВАЗИЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ: МЕТОД НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Я. В. Рудько

*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*

*e-mail: janycz@yahoo.com*

**Поступила:** 05.02.2026

**Исправлена:** 20.03.2026

**Принята:** 29.05.2026

**Ключевые слова:** слабо квазилинейное волновое уравнение, смешанная задача, классическое решение, принцип неподвижной точки, условия согласования.

**Аннотация.** Для одномерного слабо квазилинейного волнового уравнения, заданного в первом квадранте, рассматривается смешанная задача, в которой на пространственной полуоси задаются условия Коши, а на временной полуоси задается условие Дирихле. Нелинейность содержит независимые переменные, искомую функцию и ее производные. Решение строится в неявном аналитическом виде как решение некоторых интегро-дифференциальных уравнений. Разрешимость интегро-дифференциальных уравнений доказывается с использованием обобщения теоремы Банаха о неподвижной точке. Для рассматриваемой задачи доказывается единственность решения и устанавливаются условия, при выполнении которых существует ее классическое решение.

### 1. Introduction

We often use various fixed-point theorems and the method of successive approximations to find solutions to initial and mixed problems for nonlinear equations. For example, the classical Banach fixed-point theorem has been used to find a weak solution to the Cauchy problem for the nonlinear wave equation and the nonlinear parabolic equation with nonlinearities of the form  $f(\nabla u, \partial_t u, u)$  and  $f(u)$ , respectively [1]. Many results have been obtained using topological fixed-point theorems, such as the Schauder fixed-point theorem and the Leray–Schauder fixed-point principle, namely: 1) the existence of a weak solution to a nonlinear elliptic equation [2] (nonlinearity of the form  $f(u)$ ) in the space  $H_0^1$ ; 2) classical solutions of various mixed problems with a nonlinear boundary condition for the semilinear equation of string oscillation in a half-strip [3–5] (nonlinearities of the form  $F[\partial_t u(0, t)]$  and  $f(u)$ ); 3) classical solution of the Cauchy–Darboux problem, the first Darboux problem and the second Darboux problem for the nonlinear wave equation [6–8] (nonlinearity of the form  $\lambda|u|^\alpha u$ ); 4) existence of a weak solution of a quasilinear elliptic equation [1] (nonlinearity of the form  $f(\nabla u)$ ) in the space  $H^2 \cap H_0^1$ ; 5) solvability of the Dirichlet problem for nonlinear elliptic equations in the Hölder spaces  $C^{2,\alpha}$  [9]. Using the fixed-point theorem adapted to modular metric spaces, it is shown that the Cauchy problem for a one-dimensional nonlinear parabolic equation with nonlinearity of the form  $f(t, x, u(t, x), \partial_x u(t, x))$  could be solved [2]. Together with

V. I. Korzyuk, the author of this paper used the Banach fixed-point theorem for locally convex spaces to construct classical and weak solutions of the Cauchy problem for a mildly quasilinear wave equation [10].

Various versions of the fixed point principle are closely related to the method of successive approximations. This method has produced several results in the theory of partial differential equations. For example, it has been used to find: 1) a twice continuously differentiable solution to the Cauchy problem in a cone and a truncated cone for a nonlinear wave equation with nonlinearity of the form  $F'(|u|^2)u$  [11]; 2) the classical solution to the first mixed problem for the telegraph equation with a nonlinear potential [12]; 3) the classical solution to the Cauchy–Darboux problem for a one-dimensional wave equation with power nonlinearity [6]; 4) the classical solution to the Goursat problem on a plane for a semilinear hyperbolic equation [13]. A rather interesting application of the method of successive approximations is shown in the work [14], where an economic problem is qualitatively solved. The problem under study, namely, the first mixed problem for one-dimensional mildly quasilinear wave equation in the first quadrant of the plane, was also studied by the method of successive approximations [15–18]. In this paper, we present a new approach to solving this problem based on the fixed-point principle. This fixed point principle, which is a generalization of Banach’s theorem to the case of locally convex spaces, for the mixed problem in the first quadrant is applied for the first time in the present paper in the corresponding locally convex spaces.

## 2. Auxiliary material

In this section we present a generalization of Banach’s theorem to the case of locally convex spaces, as well as all the necessary auxiliary definitions for this.

**Definition 2.1.** Let  $X$  be a locally convex space whose topology is determined by a system of seminorms  $\{p_i\}_{i \in \mathfrak{J}}$ . A mapping  $f: X \mapsto X$  is called  $\mathfrak{L}$ -Lipschitz if  $p_i(f(x_1), f(x_2)) \leq \mathfrak{L}p_i(x_1, x_2)$  for any  $i \in \mathfrak{J}, x_1 \in X, x_2 \in X$ .

**Definition 2.2.** Let  $X$  be a locally convex space whose topology is given by a system of seminorms  $\{p_i\}_{i \in \mathfrak{J}}$ . A mapping  $f: X \mapsto X$  is called  $\mathfrak{p}$ -contracting if it is  $\mathfrak{p}$ -Lipschitz and  $0 \leq \mathfrak{p} < 1$ .

**Remark 2.3.** In the literature, in a locally convex space  $X$  with a topology given by a system of seminorms  $\{p_i\}_{i \in \mathfrak{J}}$ , a mapping  $f: X \mapsto X$  is called  $p$ -contracting for some  $p \in \{p_i\}_{i \in \mathfrak{J}}$  if there exists a constant  $k_p \in [0, 1)$  such that  $p(f(x_1), f(x_2)) \leq k_p p(x_1, x_2)$ . However, our definition differs in that it establishes an explicit correspondence between  $\mathfrak{L}$ -Lipschitz and  $p$ -contracting maps, similar to the case of standard definitions for metric spaces.

**Theorem 2.4.** Let  $X$  be a sequentially complete Hausdorff locally convex space whose topology is determined by the system of seminorms  $\{p_i\}_{i \in \mathfrak{J}}$  and let the mapping  $f: X \mapsto X$  be  $\mathfrak{p}$ -contracting. Then the mapping  $f$  has a unique fixed point  $x^* \in X$ , and it is the limit of any sequence  $x_{n+1} = f(x_n)$ , where  $x_0$  is any element of  $X$ .

The **proof** is given in paper [19].

## 3. Statement of the problem

In the domain  $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$  of two independent variables  $(t, x) \in \overline{Q}$ , we consider a one-dimensional nonlinear wave equation

$$\square u(t, x) + f(t, x, u(t, x), \partial_t u(t, x), \partial_x u(t, x)) = F(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (1)$$

where  $\square = \partial_t^2 - a^2 \partial_x^2$  is the d’Alembert operator ( $a > 0$  for definiteness),  $F$  is a function given on the set  $\overline{Q}$ , and  $f$  is a function given on the set  $\overline{Q} \times \mathbb{R}^3$ . Equation (1) is equipped with the initial conditions

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (2)$$

and the boundary condition

$$u(t, 0) = \mu(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (3)$$

where  $\varphi$ ,  $\psi$ , and  $\mu$  are functions given on the half-line  $[0, \infty)$ .

**Example 3.1.** Setting  $F \equiv 0$  and  $f(t, x, u, u_t, u_x) = b \sin(\lambda u)$  in Eq. (1) yields the sine-Gordon equation, which has a number of applications in physics [20].

**Example 3.2.** Setting  $F \equiv 0$  and  $f(t, x, u, u_t, u_x) = \tilde{f}(u)$  in Eq. (1) yields the nonlinear Klein–Gordon–Fock equation, which arises in differential geometry and various areas of physics (superconductivity, slip in crystals, waves in ferromagnets, laser pulses in two-phase media, etc.) [21].

**Example 3.3.** Setting  $F \equiv 0$  and  $f(t, x, u, u_t, u_x) = \varepsilon^{-2}((1 + \tilde{g}(u))u_t - \tilde{f}(u))$ ,  $\varepsilon > 0$  in Eq. (1) yields a nonlinear equation describing the voltage on electrical communication lines with nonlinear shunt conductivity and a series connection of an inductive load, the movement and reproduction of tissue cells and unicellular organisms, and a branching random walk [22].

**Example 3.4.** Setting  $F \equiv 0$  and  $f(t, x, u, u_t, u_x) = \sinh(u)$  in Eq. (1) yields the sinh-Gordon equation. This equation is a special case of the Toda chain and can model the interaction between neighboring particles of the same mass in crystal lattices [23].

#### 4. Integro-differential equation

We divide the domain  $Q$  by the characteristic  $x - at = 0$  into two subdomains  $Q^{(j)} = \{(t, x) : (-1)^j(at - x) > 0\}$ ,  $j = 1, 2$ .

Let us consider the following coupled equations

$$u^{(1)}(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{4a^2} \int_{x-at}^{x+at} dz \int_{x-at}^z \left[ F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) - f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right), \partial_t u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right), \partial_x u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) \right] dy, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}, \quad (4)$$

$$u^{(2)}(t, x) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) - u^{(1)}\left(\frac{at-x}{2a}, \frac{at-x}{2}\right) + u^{(1)}\left(\frac{x+at}{2a}, \frac{x+at}{2}\right) - \frac{1}{4a^2} \times \int_{at-x}^{x+at} dz \int_0^{x-at} \left[ F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}\right) - f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}, u^{(2)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}\right), \partial_t u^{(2)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}\right), \partial_x u^{(2)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}\right)\right) \right] dy, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(2)}}. \quad (5)$$

On the closure  $\overline{Q}$  of the domain  $Q$ , we define a function  $u$  as the one coinciding with the solution  $u^{(j)}$  of Eqs. (4) and (5)

$$u(t, x) = u^{(j)}(t, x), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

on the closure  $\overline{Q^{(j)}}$  of the domain  $Q^{(j)}$ . The following theorem holds.

**Theorem 4.1.** *Let the conditions  $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3)$ ,  $F \in C^1(\overline{Q})$ ,  $\varphi \in C^2([0, \infty))$ ,  $\psi \in C^1([0, \infty))$ , and  $\mu \in C^2([0, \infty))$  be satisfied. A function  $u$  from the class  $C^2(\overline{Q})$  is a solution of the mixed problem (1)–(3) if it can be represented in the form (4)–(6) and the matching conditions*

$$\mu(0) = \varphi(0), \quad (7)$$

$$\mu'(0) = \psi(0), \quad (8)$$

$$\mu''(0) = F(0, 0) - f(0, 0, \varphi(0), \psi(0), \varphi'(0)) + a^2 \varphi''(0) \quad (9)$$

are satisfied.

The **proof** is presented in works [15; 18].

For brevity of further reasoning, we will rewrite Eqs. (4) and (5) in the form

$$u^{(1)}(t, x) = K_1[u^{(1)}](t, x) = G_1(t, x) - \frac{1}{4a^2} \int_{x-at}^{x+at} dz \int_{x-at}^z f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right), \partial_t u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right), \partial_x u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) dy, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}, \quad (10)$$

$$u^{(2)}(t, x) = K_2[u^{(2)}](t, x) = G_2(t, x) + \frac{1}{4a^2} \int_{at-x}^{x+at} dz \int_0^z f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}, u^{(2)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}\right), \partial_t u^{(2)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}\right), \partial_x u^{(2)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}\right)\right) dy, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(2)}}, \quad (11)$$

and introduce the sets  $Q_T = Q \cap \{(t, x) \mid t \leq T\}$ ,  $Q_T^{(j)} = Q^{(j)} \cap \{(t, x) \mid t \leq T\}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $Q_n^* = [nT, (n+1)T] \times [0, \infty)$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Assume that the topology of the Fréchet space  $C^1(\overline{Q_T^{(1)}})$  is defined by a countable system of seminorms  $\{\|\bullet\|_{C^1(\Omega_m)}\}_{m=\lceil 2aT+1 \rceil}^\infty$ , where

$$\Omega_m = \text{Conv}\{(0, 0), (0, m), (T, aT), (T, m - aT)\}.$$

This topology is well defined because

$$\bigcup_{m=\lceil 2aT+1 \rceil}^\infty \text{Conv}\{(0, 0), (0, m), (T, aT), (T, m - aT)\} = \overline{Q_T^{(1)}}.$$

The following lemma holds.

**Lemma 4.2.** *Let the conditions  $G_1 \in C^1(\overline{Q_T^{(1)}})$  and  $f \in C(\overline{Q_T^{(1)}} \times \mathbb{R}^3)$  be satisfied and let the function  $f$  satisfy the Lipschitz condition*

$$|f(t, x, z_1, z_2, z_3) - f(t, x, w_1, w_2, w_3)| \leq L(|z_1 - w_1| + |z_2 - w_2| + |z_3 - w_3|) \quad (12)$$

in the last three variables with constant  $L$ . Then the operator  $K_1: C^1(\overline{Q_T^{(1)}}) \mapsto C^1(\overline{Q_T^{(1)}})$ , acting by formula (10), is  $\mathcal{L}$ -Lipschitz, where  $\mathcal{L} = 3L \max\{T, T^2\} \max\{1, a^{-1}\}$ .

**Proof.** Let us find the norm estimates

$$\begin{aligned} & \|K_1[u] - K_1[\tilde{u}]\|_{C(\Omega_m)} = \\ &= \max_{(t,x) \in \Omega_m} \left| \frac{1}{4a^2} \int_{x-at}^{x+at} dz \int_{x-at}^z \left( f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right), \partial_t u\left(\frac{x-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right), \partial_x u\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) - f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, \tilde{u}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right), \partial_t \tilde{u}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right), \partial_x \tilde{u}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right) \right) dy \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{4a^2} \int_{x-at}^{x+at} dz \int_{x-at}^z L(|u - \tilde{u}| + |\partial_t u - \partial_t \tilde{u}| + |\partial_x u - \partial_x \tilde{u}|) \left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) dy \leq \\ & \leq \frac{1}{2} LT^2 (\|u - \tilde{u}\|_{C(\Omega_m)} + \|\partial_t u - \partial_t \tilde{u}\|_{C(\Omega_m)} + \|\partial_x u - \partial_x \tilde{u}\|_{C(\Omega_m)}). \end{aligned}$$

Similarly, we obtain

$$\begin{aligned} & \|\partial_t K_1[u] - \partial_t K_1[\tilde{u}]\|_{C(\Omega_m)} \leq \\ & \leq LT (\|u - \tilde{u}\|_{C(\Omega_m)} + \|\partial_t u - \partial_t \tilde{u}\|_{C(\Omega_m)} + \|\partial_x u - \partial_x \tilde{u}\|_{C(\Omega_m)}), \\ & \|\partial_x K_1[u] - \partial_x K_1[\tilde{u}]\|_{C(\Omega_m)} \leq \\ & \leq \frac{LT}{a} (\|u - \tilde{u}\|_{C(\Omega_m)} + \|\partial_t u - \partial_t \tilde{u}\|_{C(\Omega_m)} + \|\partial_x u - \partial_x \tilde{u}\|_{C(\Omega_m)}). \end{aligned}$$

Since  $\|\bullet\|_{C^1(\Omega_m)} = \|\bullet\|_{C(\Omega_m)} + \|\partial_t \bullet\|_{C(\Omega_m)} + \|\partial_x \bullet\|_{C(\Omega_m)}$ , introducing the notation  $\tilde{T} = \max\{T, T^2\}$ ,  $A = \max\{1, a^{-1}\}$ , we obtain

$$\begin{aligned} & \|K_1[u] - K_1[\tilde{u}]\|_{C(\Omega_m)} \leq \tilde{L}\tilde{T}A \|u - \tilde{u}\|_{C^1(\Omega_m)}, \\ & \|\partial_t K_1[u] - \partial_t K_1[\tilde{u}]\|_{C(\Omega_m)} \leq \tilde{L}\tilde{T}A \|u - \tilde{u}\|_{C^1(\Omega_m)}, \end{aligned}$$

$$\|\partial_x K_1[u] - \partial_x K_1[\tilde{u}]\|_{C(\Omega_m)} \leq L\tilde{T}A\|u - \tilde{u}\|_{C^1(\Omega_m)},$$

where  $u$  and  $\tilde{u}$  are arbitrary functions from the space  $C^1(\overline{Q_T^{(1)}})$ . So,

$$\|K_1[u] - K_1[\tilde{u}]\|_{C^1(\Omega_m)} \leq 3L\tilde{T}A\|u - \tilde{u}\|_{C^1(\Omega_m)}.$$

With respect to any of the seminorms, that defines the topology of the Fréchet space  $C^1(\overline{Q_T^{(1)}})$ , the operator  $K$  satisfies the Lipschitz condition with constant  $3L\max\{T, T^2\}\max\{1, a^{-1}\}$ .  $\square$

**Corollary 4.3.** *Let the conditions  $G_1 \in C^1(\overline{Q_T^{(1)}})$  and  $f \in C(\overline{Q_T^{(1)}} \times \mathbb{R}^3)$  be satisfied, let the function  $f$  satisfy the Lipschitz condition (12), and let  $T < \min\left\{1, \frac{1}{3L\max\{1, a^{-1}\}}\right\}$ . Then the operator  $K_1: C^1(\overline{Q_T^{(1)}}) \mapsto C^1(\overline{Q_T^{(1)}})$ , acting by formula (10), is  $\mathfrak{p}$ -contracting, where  $\mathfrak{p} = \frac{1}{3L\max\{1, a^{-1}\}}$ .*

By combining Corollary 4.3 with Theorem 2.4, we obtain the following statement.

**Corollary 4.4.** *Let the conditions  $G_1 \in C^1(\overline{Q_T^{(1)}})$  and  $f \in C(\overline{Q_T^{(1)}} \times \mathbb{R}^3)$ , let the function  $f$  satisfy the Lipschitz condition (12), and let  $T < \min\left\{1, \frac{1}{3L\max\{1, a^{-1}\}}\right\}$ . Then there exists a unique solution  $u^{(1)}$  of Eq. (10) in the class  $C^1(\overline{Q_T^{(1)}})$ .*

**Lemma 4.5.** *Let the conditions  $G_2 \in C^1(\overline{Q_T^{(2)}})$  and  $f \in C(\overline{Q_T^{(2)}} \times \mathbb{R}^3)$  be satisfied and let the function  $f$  satisfy the Lipschitz condition (12). Then the operator  $K_2: C^1(\overline{Q_T^{(2)}}) \mapsto C^1(\overline{Q_T^{(2)}})$ , acting by formula (11), is  $\mathfrak{L}$ -Lipschitz, where  $\mathfrak{L} = 3L\max\{T, T^2\}\max\{1, a^{-1}\}$ .*

**Proof.** Similar to Lemma 4.2, we introduce the notation  $\tilde{T} = \max\{T, T^2\}$ ,  $A = \max\{1, a^{-1}\}$  and calculate

$$\begin{aligned} \|K_2[u] - K_2[\tilde{u}]\|_{C(\overline{Q_T^{(2)}})} &\leq \frac{LT^2\|u - \tilde{u}\|_{C^1(\overline{Q_T^{(2)}})}}{2} \leq L\tilde{T}A\|u - \tilde{u}\|_{C^1(\overline{Q_T^{(2)}})}, \\ \|\partial_t K_2[u] - \partial_t K_2[\tilde{u}]\|_{C(\overline{Q_T^{(2)}})} &\leq LT\|u - \tilde{u}\|_{C^1(\overline{Q_T^{(2)}})} \leq L\tilde{T}A\|u - \tilde{u}\|_{C^1(\overline{Q_T^{(2)}})}, \\ \|\partial_x K_2[u] - \partial_x K_2[\tilde{u}]\|_{C(\overline{Q_T^{(2)}})} &\leq \frac{LT\|u - \tilde{u}\|_{C^1(\overline{Q_T^{(2)}})}}{a} \leq L\tilde{T}A\|u - \tilde{u}\|_{C^1(\overline{Q_T^{(2)}})}. \end{aligned}$$

where  $u$  and  $\tilde{u}$  are arbitrary functions from the space  $C^1(\overline{Q_T^{(2)}})$ . Therefore,

$$\|K[u] - K[\tilde{u}]\|_{C^1(\overline{Q_T^{(2)}})} \leq 3L\tilde{T}A\|u - \tilde{u}\|_{C^1(\overline{Q_T^{(2)}})}.$$

$\square$

**Corollary 4.6.** *Let the conditions  $G_2 \in C^1(\overline{Q_T^{(2)}})$ ,  $f \in C(\overline{Q_T^{(2)}} \times \mathbb{R}^3)$  be satisfied, let the function  $f$  satisfy the Lipschitz condition (12), and let  $T < \min\left\{1, \frac{1}{3L\max\{1, a^{-1}\}}\right\}$ . Then the operator  $K_2: C^1(\overline{Q_T^{(2)}}) \mapsto C^1(\overline{Q_T^{(2)}})$ , acting by formula (11), is contractive.*

Using the Banach fixed-point theorem, we obtain the following corollary.

**Corollary 4.7.** *Let the conditions  $G_2 \in C^1(\overline{Q_T^{(2)}})$  and  $f \in C(\overline{Q_T^{(2)}} \times \mathbb{R}^3)$  be satisfied, let the function  $f$  satisfy the Lipschitz condition (12), and let  $T < \min\left\{1, \frac{1}{3L\max\{1, a^{-1}\}}\right\}$ . Then there exists a unique solution  $u^{(2)}$  of Eq. (11) in the class  $C^1(\overline{Q_T^{(2)}})$ .*

The following theorem on the smoothness of solutions Eqs. (10) and (11) hold.

**Theorem 4.8.** *Let the conditions  $F \in C^1(\overline{Q_T})$ ,  $f \in C^1(\overline{Q_T} \times \mathbb{R}^3)$ ,  $\varphi \in C^2([0, \infty))$ ,  $\psi \in C^1([0, \infty))$ , and  $\mu \in C^2([0, T])$  be satisfied, and let the functions  $u^{(1)} \in C^1(\overline{Q_T^{(1)}})$  and  $u^{(2)} \in C^1(\overline{Q_T^{(2)}})$  solve Eqs. (10) and (11), respectively. Then the function*

$$u_T(t, x) = \begin{cases} u^{(1)}(t, x) & (t, x) \in \overline{Q_T^{(1)}}, \\ u^{(2)}(t, x) & (t, x) \in \overline{Q_T^{(2)}}, \end{cases}$$

*belongs to the class  $C^2(\overline{Q_T})$  if and only if the matching conditions (7)–(9) are fulfilled.*

The **proof** is presented in works [15; 18].

## 5. Local classical solution

According to Theorem 4.1 and Corollaries 4.4 and 4.7, under the smoothness conditions  $F \in C^1(\overline{Q_T})$ ,  $f \in C^1(\overline{Q_T} \times \mathbb{R}^3)$ ,  $\varphi \in C^2([0, \infty))$ ,  $\psi \in C^1([0, \infty))$ , and  $\mu \in C^2([0, T])$ , the Lipschitz condition (12), and the matching conditions (7)–(9), we constructed the classical solution  $u$  of the problem (1)–(3) on the set  $\overline{Q_T}$ , where  $T$  can be taken as  $T = \frac{1}{2} \min \left\{ 1, \frac{1}{3L \max\{1, a^{-1}\}} \right\}$ . This solution is determined by formulas (4)–(6). Furthermore, conditions (7)–(9) are sufficient and necessary.

## 6. Global classical solution

It turns out that using the conjugation conditions

$$u_1(T, x) = u_0(T, x), \quad \partial_t u_1(T, x) = \partial_t u_0(T, x), \quad x \in [0, \infty), \quad (13)$$

we can continue the solution  $u_0$  of the first mixed problem (1)–(3) to the set  $\overline{Q_1^*}$ . Since the functions  $x \mapsto u_0(T, x)$  and  $x \mapsto \partial_t u_1(T, x)$  belong to the classes  $C^2([0, \infty))$  and  $C^1([0, \infty))$ , respectively, the matching conditions are satisfied

$$\begin{aligned} \mu(T) &= u_0(T, 0), \\ \mu'(T) &= \partial_t u_0(T, 0), \\ \mu''(T) &= F(0, 0) - f(0, 0, u_0(T, 0), \partial_t u_0(T, 0), \partial_x u_0(T, 0)) + a^2 \partial_x^2 u_0(T, 0). \end{aligned}$$

The function  $u_1: \overline{Q_1^*} \ni (t, x) \mapsto u_1(t, x) \in \mathbb{R}$  will belong to the class  $C^2(\overline{Q_1^*})$  if, for example,  $F \in C^1(\overline{Q})$ ,  $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3)$ ,  $\varphi \in C^2([0, \infty))$ ,  $\psi \in C^1([0, \infty))$ , and  $\mu \in C^2([0, \infty))$ .

Differentiating equalities (13) with respect to  $x$  yields the following:

$$\begin{aligned} \partial_x u_1(T, x) &= \partial_x u_0(T, x), \quad \partial_x^2 u_1(T, x) = \partial_x^2 u_0(T, x), \\ \partial_x \partial_t u_1(T, x) &= \partial_x \partial_t u_0(T, x), \quad x \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (14)$$

From Eq. (1) we express the quantities  $\partial_t^2 u_j(T, x)$ ,  $j = 0, 1$ ,

$$\partial_t^2 u_j(T, x) = a^2 \partial_x^2 u_j(T, x) + F(T, x) - f(T, x, u_j(T, x), \partial_t u_j(T, x), \partial_x u_j(T, x)), \quad x \in [0, \infty). \quad (15)$$

Due to expressions (13) and (14) and the continuity of the functions  $f$  and  $F$  in expression (15), the right-hand sides are equal for  $j = 0$  and  $j = 1$ . Thus, the left-hand sides are also equal, i. e.,

$$\partial_t^2 u_1(T, x) = \partial_t^2 u_0(T, x), \quad x \in [0, \infty). \quad (16)$$

Conditions (13), (14), and (16) mean that the function

$$u_{0,1}(t, x) = \begin{cases} u_0(t, x), & (t, x) \in [0, T] \times [0, \infty), \\ u_1(t, x), & (t, x) \in [T, 2T] \times [0, \infty), \end{cases}$$

belongs to the class  $C^2([0, 2T] \times [0, \infty))$  and satisfies equation (1) on the set  $(0, 2T) \times [0, \infty)$ . Note that a different choice of the matching conditions (13) will result in at least one of the functions  $u_{0,1}$  or  $\partial_t u_{0,1}$  being discontinuous, which will entail  $u_{0,1} \notin C^2([0, 2T] \times [0, \infty))$ .

Again, for the function  $u_1$  the following conditions hold:

$$\begin{aligned}\mu(2T) &= u_1(2T, 0), \\ \mu'(2T) &= \partial_t u_1(2T, 0), \\ \mu''(2T) &= F(0, 0) - f(0, 0, u_1(2T, 0), \partial_t u_1(2T, 0), \partial_x u_1(2T, 0)) + a^2 \partial_x^2 u_1(2T, 0),\end{aligned}$$

which, together with the smoothness conditions of  $F \in C^1(\overline{Q_T})$ ,  $f \in C^1(\overline{Q_T} \times \mathbb{R}^3)$ ,  $\varphi \in C^2([0, \infty))$ ,  $\psi \in C^1([0, \infty))$  and  $\mu \in C^2[0, \infty)$ , the matching conditions (7)–(9) and the Lipschitz condition of  $f$  with respect to the last three variables, makes it possible to extend the solution to the set  $\overline{Q_2^*}$  using a similar scheme. It proves the base of induction.

Suppose that after the  $n$ -th step, we have a function

$$u_{0,n}(t, x) = u_i(t, x), \quad (t, x) \in \overline{Q_i^*},$$

which is defined on the set  $[0, (n+1)T] \times [0, \infty)$ , belongs to the class  $C^2([0, (n+1)T] \times [0, \infty))$ , is a solution to problem (1)–(3) on this set, and satisfies the conditions

$$\begin{aligned}\mu((n+1)T) &= u_{0,n}((n+1)T, 0), \\ \mu'((n+1)T) &= \partial_t u_{0,n}((n+1)T, 0), \\ \mu''((n+1)T) &= F(0, 0) - f(0, 0, u_{0,n}((n+1)T, 0), \partial_t u_{0,n}((n+1)T, 0), \\ &\quad \partial_x u_{0,n}((n+1)T, 0)) + a^2 \partial_x^2 u_{0,n}((n+1)T, 0).\end{aligned}$$

We extend this function to the set  $\overline{Q_{n+1}^*}$  using the conditions

$$u_n((n+1)T, x) = u_{0,n}((n+1)T, x), \quad \partial_t u_n((n+1)T, x) = \partial_t u_{0,n}((n+1)T, x), \quad x \in [0, \infty).$$

Based on formulas (4) and (5), we obtain

$$\begin{aligned}\mu((n+2)T) &= u_n((n+2)T, 0), \\ \mu'((n+2)T) &= \partial_t u_n((n+2)T, 0), \\ \mu''((n+2)T) &= F(0, 0) - f(0, 0, u_n((n+2)T, 0), \partial_t u_n((n+2)T, 0), \\ &\quad \partial_x u_n((n+2)T, 0)) + a^2 \partial_x^2 u_n((n+2)T, 0),\end{aligned}$$

Using the above-proposed scheme, we prove that the function  $u_{0,n+1}$  belongs to the class  $C^2([0, (n+2)T] \times [0, \infty))$ . Thus, the induction step is proved.

Thus, a global classical solution of the problem was constructed under certain smoothness conditions, matching conditions, and Lipschitz conditions. However, condition (12) can be slightly weakened to:

$$|f(t, x, z_1, z_2, z_3) - f(t, x, w_1, w_2, w_3)| \leq C_{\text{lip}}(t, x)(|z_1 - w_1| + |z_2 - w_2| + |z_3 - w_3|), \quad (17)$$

where  $C_{\text{lip}}$  is some continuous function. We show that in this case one can also construct a unique global classical solution if we impose the following smoothness conditions  $\varphi \in C^2([0, \infty))$ ,  $\psi \in C^1([0, \infty))$ ,  $\mu \in C^2([0, \infty))$ ,  $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3)$ ,  $F \in C^1(\overline{Q})$  and the matching conditions (7)–(9). Note that the fulfillment of condition (17) for all  $(t, x) \in \Theta_m = \text{Conv}\{(0, 0), (0, m), (m/(2a), m/2), (m/(2a), 0)\}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , implies inequality (12) with constant  $L = \|C_{\text{lip}}\|_{C(\Theta_m)}$  on the same set  $(t, x) \in \Theta_m$ . We define the function  $v^{(m)}: \Theta_m \ni (t, x) \mapsto v^{(m)}(t, x) \in \mathbb{R}$  as the classical solution of the first mixed problem (1)–(3) on the set  $\Theta_m$ . According to the approach described earlier, such a solution exists and is unique.

We extend  $v^{(m)}$  to the entire set  $\overline{Q}$  so that  $v^{(m)} \in C^2(\overline{Q})$ . We claim that the function  $u^{(\infty)} = \lim_{m \rightarrow \infty} v^{(m)}$  is a classical solution of the problem (1)–(3) on the set  $\overline{Q}$ . Note that the topology of the Fréchet space  $C^2(\overline{Q})$  can be defined by a countable system of seminorms  $\mathcal{P} = (\mathfrak{p}_i)_{i=1}^{\infty}$ , where  $\mathfrak{p}_i(u) = \|u\|_{C^2(\Theta_i)}$ , since  $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Theta_i = \overline{Q}$ . Since for any natural numbers  $m$  and  $j$  the equality  $[v^{(m+j)} - v^{(m)}]_{\Theta_m} \equiv 0$  holds, the sequence  $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots$  converges with respect to any seminorm  $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}$ . This implies the existence and uniqueness of the limit  $\lim_{m \rightarrow \infty} v^{(m)}$  in the space  $C^2(\overline{Q})$ . Next, we must verify that the function  $u^{(\infty)}$  satisfies Eq. (1), the initial (2) and the boundary conditions (3). Indeed, since for any fixed point  $(t, x) \in \overline{Q}$  there exists a natural number  $m$  such that  $u^{(\infty)}(t, x) = v^{(m)}(t, x)$ , the function  $u^{(\infty)}$  satisfies Eq. (1) at the point  $(t, x)$ , and since

the point  $(t, x) \in \overline{Q}$  is arbitrary, it satisfies the equation in the entire set  $\overline{Q}$ . The satisfaction of conditions (2) and (3) is similarly proved. The uniqueness of the global solution is proved by contradiction. Assume that there exist two global solutions  $u^{(\infty,1)}$  and  $u^{(\infty,2)}$ . Then, for a fixed  $m \in \mathbb{N}$ , consider their restrictions  $u^{(\infty,1)}|_{\Theta_m}$  and  $u^{(\infty,2)}|_{\Theta_m}$ , which are solutions of the first mixed problem (1)–(3) on the set  $\Theta_m$ . Since the solution to this problem is unique,  $u^{(\infty,1)}|_{\Theta_m} \equiv u^{(\infty,2)}|_{\Theta_m}$ . From this, we obtain  $[u^{(\infty,1)} - u^{(\infty,2)}]|_{\Theta_m} \equiv 0$ . Since  $m$  is arbitrary and  $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Theta_i = \overline{Q}$ ,  $u^{(\infty,1)} - u^{(\infty,2)} \equiv 0$  on the set  $\overline{Q}$ , which proves uniqueness. We state the result as the following theorem.

**Theorem 6.1.** *Let the conditions  $\varphi \in C^2([0, \infty))$ ,  $\psi \in C^1([0, \infty))$ ,  $\mu \in C^2([0, \infty))$ ,  $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3)$ , and  $F \in C^1(\overline{Q})$  be satisfied and let the function  $f$  satisfy the Lipschitz condition (17) with the function  $C_{\text{lip}} \in C(\overline{Q})$ . The first mixed problem (1)–(3) has a unique solution  $u$  from the class  $C^2(\overline{Q})$  if and only if the conditions (7)–(9) are satisfied. This solution has the representation (4)–(6).*

The **proof** follows from the above reasoning.

**Remark 6.2.** *Formulas (4)–(6), which define the equations for the classical solution  $u$  of the problem (1)–(3), can be rewritten in a simpler form, similar to that given in [24, p. 76–77], namely:*

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} (F(\tau, \xi) - f(\tau, \xi, u(\tau, \xi), \partial_t u(\tau, \xi), \partial_x u(\tau, \xi))) d\xi, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}, \quad (18)$$

$$u(t, x) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} (F(\tau, \xi) - f(\tau, \xi, u(\tau, \xi), \partial_t u(\tau, \xi), \partial_x u(\tau, \xi))) d\xi, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(2)}}. \quad (19)$$

**Proof.** Indeed, by changing the variables

$$\tau = \frac{z-y}{2a}, \quad \xi = \frac{z+y}{2}$$

in the integrals in formulas (4) and (5), we arrive at expressions (18) and (19).  $\square$

**Remark 6.3.** *The condition  $F \in C^1(\overline{Q})$  of Theorems 4.1 and 6.1 can be replaced with*

$$F \in C(\overline{Q}), \quad \left( \overline{Q} \ni (t, x) \mapsto \int_0^t F(\tau, |x \pm a(t-\tau)|) d\tau \in \mathbb{R} \right) \in C^1(\overline{Q}). \quad (20)$$

**Proof.** If condition (20) holds, then the right-hand sides of expressions (18) and (19) represent a function  $u$  from the space  $C^2(\overline{Q})$  under conditions  $\varphi \in C^2([0, \infty))$ ,  $\psi \in C^1([0, \infty))$ ,  $\mu \in C^2([0, \infty))$ ,  $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3)$ , and (7)–(9) [25; 26].  $\square$

**Remark 6.4.** *If the function  $F$  has the form  $F(t, x) = F(t)$  or  $F(t, x) = F(x)$  then the condition  $F \in C^1(\overline{Q})$  of Theorems 4.1 and 6.1 can be replaced with  $F \in C(\overline{Q})$ .*

**Proof.** Let us first consider the case when  $F(t, x) = F(t)$ . We have

$$\left( \overline{Q} \ni (t, x) \mapsto \int_0^t F(\tau, |x \pm a(t-\tau)|) d\tau = \int_0^t F(\tau) d\tau \in \mathbb{R} \right) \in C^1(\overline{Q}).$$

The case  $F(t, x) = F(x)$  is proved. Now consider the case  $F(t, x) = F(x)$ . We have

$$\int_0^t F(\tau, |x \pm a(t-\tau)|) d\tau = \int_0^t F(|x \pm a(t-\tau)|) d\tau.$$

By virtue of the formulas

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^t F(x+a(t-\tau)) d\tau \right) &= F(x) + \int_0^t aF'(x+a(t-\tau)) d\tau = F(x+at), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^t F(x+a(t-\tau)) d\tau \right) &= \int_0^t F'(x+a(t-\tau)) d\tau = \frac{F(x+at) - F(x)}{a}, \end{aligned}$$

we conclude that

$$\left( \bar{Q} \ni (t,x) \mapsto \int_0^t F(\tau, x+a(t-\tau)) d\tau \in \mathbb{R} \right) \in C^1(\bar{Q}).$$

Similarly, we derive that

$$\left( \bar{Q} \ni (t,x) \mapsto \int_0^t F(\tau, |x-a(t-\tau)|) d\tau \in \mathbb{R} \right) \in C^1(\bar{Q}).$$

Thus, the case  $F(t,x) = F(x)$  is also proved. □

### Conclusions

In this paper, the first mixed problem for a mildly quasilinear one-dimensional wave equation in the first quadrant has been studied in the classical formulation. The problem contains Cauchy conditions on the spatial semi-axis and a Dirichlet condition on the temporal semi-axis, with nonlinearity depending on the unknown function and its first-order derivatives.

The main contributions of the work are as follows:

**1. Integral representation of the solution.** The solution is constructed implicitly through a system of coupled integro-differential equations, derived by partitioning the domain along the characteristic line  $x - at = 0$ . This representation generalizes the classical d'Alembert formula to the nonlinear case and naturally incorporates the initial and boundary data.

**2. Fixed-point approach in locally convex spaces.** The solvability of the integro-differential system is established using a generalization of the Banach fixed-point theorem to sequentially complete Hausdorff locally convex spaces. This allows the treatment of the nonlinear terms under a Lipschitz condition, ensuring the existence and uniqueness of local classical solutions.

**3. Local and global classical solvability.** Under smoothness assumptions on the data and nonlinearity, and subject to matching conditions at the origin, the existence of a unique classical solution is proved locally in time. Using a step-by-step extension method based on conjugation conditions, the local solution is extended globally to the entire first quadrant, preserving  $C^2$ -regularity.

**4. Weakened Lipschitz and regularity conditions.** Results extended to a spatially and time dependent Lipschitz condition, broadening the class of admissible nonlinearities. Additionally, regularity requirements on the nonhomogeneous term  $F$  are relaxed, allowing for certain integrability conditions rather than pointwise smoothness.

**5. Physical and mathematical relevance.** The framework encompasses several important equations of mathematical physics, including the sine-Gordon, double sine-Gordon, and nonlinear Klein-Gordon-Fock equations, demonstrating the applicability of the results to problems in wave propagation, differential geometry, and nonlinear dynamics.

In summary, the paper provides a rigorous and constructive treatment of the first mixed problem for a mildly quasilinear wave equation, combining classical PDE techniques with functional-analytic methods. The results extend prior works on semilinear and quasilinear wave equations and offer a versatile approach for studying nonlinear initial-boundary value problems in unbounded domains.

## Funding

The work was supported by state program for scientific research “Interdisciplinary and Synergetic Research” (“Convergence-2030”), subprogram “Modern Mathematical Methods and Their Applications”, task 1.05 “Classical Solutions, Development of New Methods for Studying Problems of the Theory of Partial Differential Equations”, R&D 1.05.1 “Classical Methods for Solving and Proving the Hadamard Well-Posedness of Problems for Partial Differential Equations”.

## Declaration of AI

DeepSeek was used to improve the quality of the text while working on the article. The main prompts were: correct grammar, proofread the text, write conclusions.

## References

1. Evans L. C. *Partial Differential Equations*. Providence, American Mathematical Society, 2010.
2. Borisut P., Khammahawong K., Kumam P. Fixed point theory approach to existence of solutions with differential equations. *Differential Equations – Theory and Current Research*. London, IntechOpen, 2018, vol. 66, pp. 3–34.
3. Jokhadze O. M. Mixed problem with a nonlinear boundary condition for a semilinear wave equation. *Diff. Equat.*, 2022, vol. 58, pp. 593–609.
4. Kharibegashvili S. S., Jokhadze O. M. Solvability of a mixed problem with nonlinear boundary condition for a one-dimensional semilinear wave equation. *Math. Notes*, 2020, vol. 108, pp. 123–136.
5. Kharibegashvili S. S., Dzhokhadze O. M. On solvability of a periodic problem for a nonlinear telegraph equation. *Sib. Math. J.*, 2016, vol. 57, pp. 735–743.
6. Kharibegashvili S. S., Dzhokhadze O. M. The Cauchy–Darboux problem for the one-dimensional wave equation with power nonlinearity. *Sib. Math. J.*, 2013, vol. 54, pp. 1120–1136.
7. Dzhokhadze O. M., Kharibegashvili S. S. First Darboux problem for nonlinear hyperbolic equations of second order. *Math. Notes*, 2008, vol. 84, pp. 646–663.
8. Kharibegashvili S. S., Dzhokhadze O. M. Second Darboux problem for the wave equation with a power-law nonlinearity. *Diff. Equat.*, 2013, vol. 49, pp. 1623–1640.
9. Gilbarg D., Trudinger N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2001.
10. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of the initial-value problem for a one-dimensional quasilinear wave equation. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2023, vol. 67, no. 1, pp. 14–19.
11. Jörgens K. Das Anfangswertproblem in Großen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen. *Math. Zeitschr.*, 1961, no. 208, pp. 295–308.
12. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of the first mixed problem for the telegraph equation with a nonlinear potential. *Differential Equations*, 2022, vol. 58, no. 2, pp. 175–186.
13. Korzyuk V. I., Kovnatskaya O. A., Sevastyuk V. A. Goursat’s problem on the plane for a quasilinear hyperbolic equation. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2022, vol. 66, no. 4, pp. 391–396 (in Russian).
14. Lowenthal F., Langsen A., Benson C. T. Merton’s partial differential equation and fixed point theory. *The American Mathematical Monthly*, 1998, vol. 105, no. 5, pp. 412–420.
15. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of an initial-boundary value problem with a mixed boundary condition for a mildly quasilinear wave equation. *Analytical Methods of Analysis and Differential Equations (AMADE–2024): Proceedings of the 11th International Workshop (September 16–20, 2024, Minsk)*. Minsk, 2024, pp. 46–55.
16. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of an initial-boundary value problem with a mixed boundary condition and conjugation conditions for a mildly quasilinear wave equation. *Fifth International Scientific Conf. «Mathematical Modeling and Differential Equations», Dedicated to the Centenary of the*

*Birth of E. A. Ivanov and N. I. Brish: Proc. of the International Scientific Conf. (December 17–19, 2024, Minsk)*. Minsk, 2024, pp. 48–49.

17. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of a mixed problem with the zarembo boundary condition and conjugation conditions for a mildly quasilinear wave equation. *Modern Methods of Function Theory and Related Problems: Proceedings of the International Conference: Voronezh Winter Mathematical School (January 30 – February 4, 2025, Voronezh)*. Voronezh, 2025, pp. 408–410.

18. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of a mixed problem with the Zarembo boundary condition and conjugation conditions for a semilinear wave equation. *Journal of Mathematical Sciences*, 2025, vol. 293, no. 5, pp. 678–693.

19. Cain G. L., Jr., Nashed M. Z. Fixed points and stability for a sum of two operators in locally convex spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 1971, vol. 39, no. 3, pp. 581–592.

20. Griffiths G. W., Schiesser W. E. Linear and nonlinear waves. *Scholarpedia*, 2009, vol. 4, pp. 4308.

21. Polyanin A. D., Schiesser W. E., Zhurov A. I. Partial differential equation. *Scholarpedia*, 2008, vol. 3, pp. 4605.

22. Dunbar S. R., Othmer H. G. On a nonlinear hyperbolic equation describing transmission lines, cell movement, and branching random walks. *Nonlinear Oscillations in Biology and Chemistry*. Berlin, 1986, vol. 66, pp. 274–289.

23. Xie Y., Tang J. A Unified method for solving Sinh-Gordon–Type equations. *Il Nuovo Cimento B*, 2006, vol. 121B, no. 2, pp. 147–167.

24. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Equations of Mathematical Physics*. New York, Dover Publications, 1990.

25. Baranovskaya S. N. On classical solution of a mixed problem for a one-dimensional hyperbolic equation. *Differ. Uravn.*, 1991, vol. 27, no. 6, pp. 1071–1073 (in Russian).

26. Baranovskaya S. N., Novikov E. N., Yurchuk N. I. Directional derivative problem for the telegraph equation with a Dirac potential. *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 9, pp. 1147–1155.



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ  
MATHEMATICAL MODELING  
NUMERICAL METHODS



УДК 539.3:620.22:519.6

<https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1-96-117>

EDN: YUKKVT

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОГО МОДУЛЯ ЮНГА  
КОМПОЗИЦИОННЫХ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

Г. Ф. Громько, А. Н. Авлас

*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*

*e-mail: grom@im.bas-net.by, aulas@im.bas-net.by*

Поступила: 21.02.2026

Исправлена: 28.05.2026

Принята: 29.05.2026

**Ключевые слова:** композиционные порошковые материалы, эффективный модуль упругости, метод контрольного объема, численное моделирование, ячейка периодичности, представительный объем, напряженно-деформированное состояние, градиентные покрытия, механика деформируемого твердого тела.

**Аннотация.** Статья посвящена разработке вычислительной методики для определения эффективного модуля Юнга композиционных порошковых материалов на основе анализа их микроструктуры. Предлагаемый подход включает построение двумерной геометрической модели микроструктуры композита в виде ячейки периодичности, формулировку математической модели, имитирующей физический эксперимент на растяжение-сжатие представительного объема, и численную реализацию методом контрольного объема на структурированных четырехугольных сетках. Учитываются свойства матрицы и включений, их объемное содержание и форма. Эффективный модуль упругости вычисляется на основе энергетического баланса: работа внешних сил приравнивается к сумме энергий деформации всех ячеек сетки. Приведены результаты вычислительных экспериментов для композитов на основе меди с включениями карбида вольфрама и тефлона, а также для градиентных покрытий на основе NiCr с добавлением TiC. Показано, что методика позволяет прогнозировать изменение модуля упругости в зависимости от объемной доли наполнителя и может быть использована при проектировании слоистых износостойких покрытий.

NUMERICAL METHOD FOR FINDING THE EFFECTIVE YOUNG'S MODULUS  
OF COMPOSITE POWDER MATERIALS

G. F. Gromyko, A. N. Aulas

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

*e-mail: grom@im.bas-net.by, aulas@im.bas-net.by*

Received: 21.02.2026

Revised: 28.05.2026

Accepted: 29.05.2026

**Keywords:** composite powder materials, effective elastic modulus, control volume method, numerical simulation, periodicity cell, representative volume element, stress-strain state, gradient coatings, solid mechanics.

**Abstract.** The article focuses on the development of a computational procedure for determining the effective Young's modulus of composite powder materials based on the analysis of their microstructure. The proposed approach includes constructing a two-dimensional geometric model of the composite microstructure as a periodicity cell, formulating a mathematical model that simulates a physical tension-compression test of a representative volume element, and performing numerical implementation using the control volume method on structured quadrilateral grids. The properties of the matrix and inclusions, their volume fractions, and morphology are taken into account. The effective elastic modulus is calculated based on an energy balance: the work done by external forces is equated to the sum of the strain energies of all grid cells. The results of computational experiments are presented for copper-matrix composites with tungsten carbide and Teflon inclusions, as well as for NiCr-based gradient coatings with TiC additives. It is shown that the procedure allows predicting the variation of the elastic modulus as a function of the filler volume fraction and can be used in the design of layered wear-resistant coatings.

## 1. Введение

В автомобильной, аэрокосмической и других областях промышленности и техники применяются композиционные материалы, представляющие собой дисперсно-наполненные композиты, состоящие из непрерывной матрицы, в которой распределена дисперсная фаза в виде твердых частиц – наполнителя (порошка, микросфер, коротких волокон и др.) с четкими границами раздела [1]. Свойства наполнителя могут значительно отличаться как друг от друга, так и от свойств матрицы. Добавление различных наполнителей изменяет теплофизические и механические свойства композита, что обуславливает большой интерес к таким материалам.

Особый интерес представляют композиционные порошковые материалы, к которым предъявляются повышенные требования по прочности и износостойкости при интенсивных динамических воздействиях в экстремальных условиях эксплуатации. Для таких материалов механические характеристики, такие как модуль Юнга ( $E$ ) и коэффициент Пуассона ( $\nu$ ), являются ключевыми параметрами при проектировании и прочностных расчетах изделий.

Разработка нового материала с заданными свойствами даже при небольшом количестве варьируемых компонент, различных вариантах их геометрических характеристик и компоновки является трудоемкой, длительной по времени и требует значительных финансовых затрат как на изготовление экспериментальных образцов, так и на их испытания.

Экспериментальные методы исследования свойств структурно сложных материалов достаточно достоверны, но требуют больших материальных и временных затрат и дают информацию лишь об интегральных (эффективных) характеристиках. На ранних этапах проектирования новых материалов для анализа вариантов компоновки и оптимизации состава композиционного материала широко используется численное моделирование [2; 3]. Теоретические методы исследования, включающие методы вычислительной механики и математики, предполагают разработку и реализацию физических и математических моделей. В зависимости от сложности модели в ней могут быть отражены те или иные структурные особенности. Если классическая механика оперирует в основном моделями однородной, изотропной, упругой среды, то для композиционных материалов характерен учет наличия различных фаз, сложной внутренней геометрии и характера межфазного взаимодействия. Актуальной задачей современного материаловедения и механики деформируемого твердого тела является установление связи между внутренней микроструктурой композиционных материалов и их эффективными макроскопическими упругими характеристиками.

В настоящее время сочетание математического моделирования с компьютерным конструированием материала представляет собой наиболее перспективный подход к разработке новых материалов [4]. Это расширяет инструментарий разработчиков и позволяет целенаправленно прогнозировать физико-механические свойства композиционных порошковых материалов на основе информации о фазовом составе композиции, ее внутренней геометрии и условиях межфазного взаимодействия.

В данной работе рассматривается двумерная (2D) постановка задачи, что является обоснованным первым этапом разработки и верификации численных алгоритмов перед переходом к более ресурсоемким трехмерным моделям. Предлагаемый подход включает следующие этапы: построение двумерной геометрической модели микроструктуры порошкового материала и выделение расчетной области (ячейки периодичности с учетом внутренней геометрии включений); формулировка математической модели, имитирующей физический эксперимент по определению модуля упругости; разработка численного метода для вычисления эффективного модуля упругости.

Целью работы является разработка вычислительной методики, позволяющей с приемлемой точностью оценивать макроскопические механические упругие свойства по заданной микроструктуре композита, свойствам матрицы и компонент включений.

## 2. Основные допущения для численного моделирования

В настоящей работе приняты следующие основные допущения.

**Двумерность задачи.** Рассматривается двумерный (2D) случай. Это является оправданным первым шагом для разработки и верификации численных алгоритмов перед переходом к более ресурсоемким трехмерным моделям. Двумерное моделирование позволяет эффективно исследовать качественное влияние ключевых параметров микроструктуры на свойства композита при меньших вычислительных затратах.

**Тип напряженно-деформированного состояния.** Принимается гипотеза плоской деформации: перемещения вдоль третьего направления (перпендикулярного плоскости  $xz$ ) отсутствуют, а соответствующие деформации равны нулю.

**Условия на границах контакта.** На контактных границах между матрицей и включениями выполняются условия идеальной адгезии: отсутствует взаимное проскальзывание и отрыв [5].

**Механические свойства компонентов.** Материалы матрицы и включений могут быть как изотропными, так и ортотропными. В случае ортотропного материала предполагается, что его главные оси упругой симметрии совпадают с осями декартовой системы координат  $(x, z)$ . Изотропный материал рассматривается как частный случай ортотропного при равенстве упругих характеристик во взаимно перпендикулярных направлениях.

**Характер деформирования.** Деформации предполагаются малыми, что позволяет использовать линейный закон Гука. Материал работает в пределах упругости, пластические деформации не рассматриваются.

Указанные допущения лежат в основе построения математической модели и численного метода, излагаемых в последующих разделах.

### 3. Схематизация структуры композиционного материала

В соответствии с допущениями раздела 2 о равномерном распределении включений и регулярности структуры, в качестве представительного объема принимается ячейка периодичности. Для материалов с хаотическим расположением включений потребовалось бы осреднение по множеству возможных конфигураций, что выходит за рамки данной работы.

Процедура построения расчетной области включает следующие этапы.

**1. Выбор ячейки периодичности.** Из металлографического изображения реальной структуры (двумерный случай) выделяется область, которая принимается за ячейку периодичности. Эта область должна отражать характерные особенности композита: форму, размер и взаимное расположение включений.

**2. Дискретизация области.** На выделенную область накладывается расчетная сетка. Шаг сетки выбирается достаточно мелким, чтобы границы включений располагались на ребрах ячеек. Для адекватного описания геометрии минимальный размер ячейки должен быть не более наименьшего характерного размера включения [6].

**3. Формирование цифрового аналога.** Полученная дискретная область сохраняется в виде упорядоченного массива данных (цифрового изображения), где каждой ячейке приписан целочисленный идентификатор материала. Этот массив в дальнейшем используется как расчетная область для численного моделирования.

Построенная таким образом ячейка периодичности регулярно повторяется в композиционном материале. Ее размеры превышают характерные размеры включений, но значительно меньше характерных размеров макрообразца. Эта область принимается в качестве расчетной области и в последующих разделах для нее формулируется математическая модель определения напряженно-деформированного состояния.

### 4. Подход к нахождению эффективного модуля упругости

Технические модули упругости материала – модуль упругости I рода (модуль Юнга) и модуль упругости II рода (модуль сдвига) – характеризуют упругие свойства и определяют способность материала сопротивляться продольным и сдвиговым деформациям соответственно [7]. Коэффициент Пуассона (коэффициент поперечной деформации) устанавливает связь между продольной и

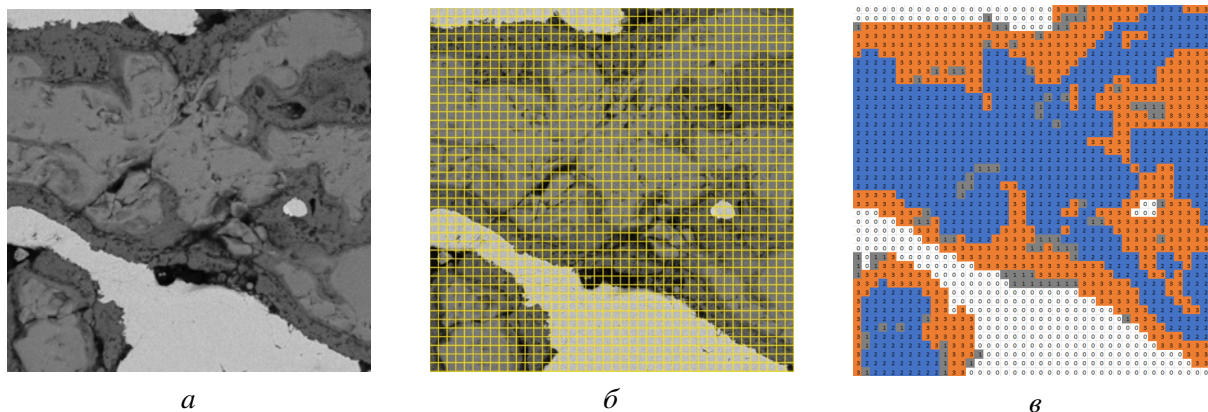


Рис. 1. Основные этапы построения расчетной области: *a* – исходное металлографическое изображение; *б* – наложение расчетной сетки с шагом, обеспечивающим совпадение границ включений с ребрами ячеек; *в* – результирующая дискретная модель, где каждая ячейка отнесена к соответствующему материалу

поперечной деформациями. Механические характеристики многих материалов определены экспериментально и приведены в соответствующих справочниках [8]. Наиболее полно механические свойства твердых тел описываются диаграммами деформирования. По результатам серии экспериментов на растяжение строят диаграммы деформации (напряжения–деформации). Такие диаграммы представляют собой зависимость между механическими напряжениями, возникающими в материале при внешнем нагружении, и соответствующими деформациями.

Испытание на растяжение–сжатие является наиболее распространенным методом лабораторных исследований и контроля механических свойств материалов [9]. В испытательных машинах усилие создается вручную, или каким-либо механическим приводом, или гидравлическим приводом, что присуще машинам с большей мощностью.

Для нахождения модуля упругости композиционного материала будем использовать подход, имитирующий физический эксперимент на растяжение–сжатие представительного объема материала. По аналогии с разработкой методики по нахождению эффективного коэффициента теплопроводности композиционного материала [10; 11] строится математическая модель, которая имитирует процесс растяжения (сжатия) образца (представительного объема).

Будем использовать предположение, что на макроуровне композиционные материалы в силу осреднения параметров можно рассматривать как однородные и ортотропные.

В работе рассматривается подход, позволяющий на основе результатов численного моделирования процесса растяжения (сжатия) представительного объема материала, в котором известны форма, процентное содержание и свойства компонент включений, использования осреднения полученных результатов и с помощью энергетического баланса, определить упругие эффективные свойства композита как однородного материала.

Составим математическую модель процесса растяжения представительного объема.

## 5. Математическая модель процесса растяжения представительного объема

В соответствии с допущениями раздела 2 и схематизацией структуры раздела 3, область расчета  $D$  представляет собой прямоугольную ячейку периодичности, в которой каждой ячейке сетки приписан определенный материал (матрица или включение) с известными упругими свойствами.

Рассматривается стационарная задача линейной теории упругости в плоской постановке (плоская деформация). Область  $D$  подвергается растяжению вдоль оси  $z$  путем задания постоянных перемещений на верхней и нижней границах.

В декартовой системе координат  $(x, z)$  система уравнений равновесия имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (x, z) \in D, \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений.

Материалы матрицы и включений могут быть изотропными или ортотропными. Для ортотропного материала (с учетом совпадения главных осей с осями координат) обобщенный закон Гука записывается в виде

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{E_1}{A} (\varepsilon_{11} + \nu_{12} \varepsilon_{22}), \\ \sigma_{22} = \frac{E_2}{A} (\nu_{21} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = 2G_{12} \varepsilon_{12}, \end{cases} \quad A = 1 - \nu_{12} \nu_{21}. \quad (2)$$

Компоненты тензора деформаций выражаются через перемещения точек расчетной области  $u(x, z)$  и  $w(x, z)$ :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Коэффициенты  $E_1(x, z)$ ,  $E_2(x, z)$ ,  $G_{12}(x, z)$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}(x, z)$  являются кусочно-постоянными функциями, принимающими значения, соответствующие материалу каждой ячейки сетки. Для изотропного материала полагаем  $E_1 = E_2 = E$ ,  $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$ ,  $G_{12} = E/(2(1 + \nu))$ .

Сформулируем граничные условия, имитирующие эксперимент на растяжение образца вдоль оси  $z$  (рис. 2). Прямоугольная область  $D = [x_0, x_N] \times [z_0, z_M]$  растягивается за счет задания постоянных перемещений на верхней и нижней границах. На боковых границах задаются условия отсутствия касательных напряжений.

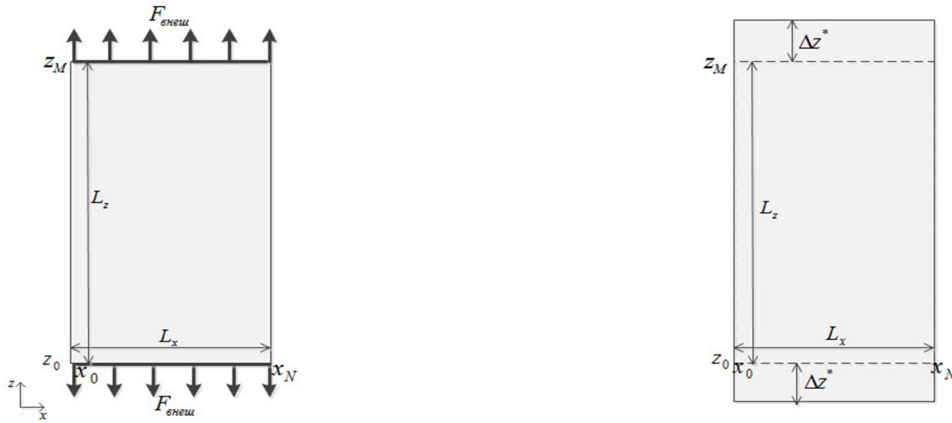


Рис. 2. Схематичное изображение:  $a$  – физическая модель растяжения;  $b$  – расчетная область с граничными условиями

Граничные условия запишем следующим образом:  
на верхней границе ( $z = z_M$ ):

$$w \Big|_{z=z_M} = \Delta z^*, \quad \sigma_{12} \Big|_{z=z_M} = 0, \quad \sigma_{21} \Big|_{z=z_M} = 0; \quad (3)$$

на нижней границе ( $z = z_0$ ):

$$w \Big|_{z=z_0} = -\Delta z^*, \quad \sigma_{12} \Big|_{z=z_0} = 0, \quad \sigma_{21} \Big|_{z=z_0} = 0; \quad (4)$$

на левой боковой границе ( $x = x_0$ ):

$$\sigma_{21} \Big|_{x=x_0} = 0, \quad \sigma_{12} \Big|_{x=x_0} = 0; \quad (5)$$

на правой боковой границе ( $x = x_N$ ):

$$\sigma_{21} \Big|_{x=x_N} = 0, \quad \sigma_{12} \Big|_{x=x_N} = 0. \quad (6)$$

Здесь  $\Delta z^*$  – заданная величина перемещения. Условия на боковых границах обеспечивают отсутствие сдвиговых усилий и фиксируют горизонтальное положение образца.

На внутренних контактных границах между различными материалами автоматически выполняются условия идеальной адгезии (непрерывность перемещений и напряжений).

## 6. Численный метод

Построение сеточного метода проведем с помощью метода контрольного объема. Среди множества вычислительных подходов метод контрольных объемов (МКО) демонстрирует высокую эффективность для решения задач механики сплошных сред в сложных областях благодаря своей консервативности и гибкости при дискретизации расчетных областей с нерегулярной геометрией. В отличие от метода конечных элементов, МКО обеспечивает строгое соблюдение интегральных балансов законов сохранения, что ведет к прямой физической интерпретации результирующих разностных уравнений и особенно важно для гетерогенных сред с резкими скачками упругих свойств.

Реализация МКО для численного решения систем дифференциальных уравнений состоит из следующих этапов: разбиение области расчета сеткой на непересекающиеся элементарные ячейки; выбор точек (узлов), в которых ищется решение; построение для каждого узла контрольного объема (ассоциированной с узлом окрестности расчетной области); аппроксимация основного уравнения в выбранных контрольных объемах. В соответствии с принятым в разделе 2 условием идеального контакта на границах раздела матрица–включение, сетка строится так, чтобы эти границы совпадали со сторонами ячеек, что позволяет использовать общие узлы для матрицы и включения.

Построение вычислительной сетки в области расчета проводим в декартовой системе координат с учетом размера включений. Размерность сетки определяется минимальным размером включений: чем меньше размер включений, тем большее количество ячеек требуется для описания их формы, а следовательно, растет размер сетки. Будем использовать структурированные сетки с четырехугольными ячейками, которые наследуют свойства стандартных прямоугольных сеток, но позволяют лучше описать геометрию различных включений. В области расчета введем структурированную сетку таким образом, чтобы границы раздела между различными материалами совпадали со сторонами ячеек, а сами ячейки имели соизмеримые площади и не пересекались. Последнее требование выполнимо при достаточно мелкой сетке. Будем считать, что вычислительная сетка построена и область расчета представлена объединением всех непересекающихся ячеек  $\omega^{<i,k>}$ . В результате сеточная область  $D_h = \bigcup_{i,k} \omega^{<i,k>}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $k = \overline{1, M}$ , полностью покрывает исходную область расчета  $D$ .

Поскольку границы контакта между разными материалами совпадают со сторонами сеточных ячеек, каждая ячейка содержит материал только одного вида. Введем кодировку ячеек целочисленным параметром, отражающим свойства определенного материала. Объем  $V^{<i,k>}$  ячейки  $\omega^{<i,k>}$  в плоской постановке – это площадь четырехугольника, образованного вершинами ячейки.

Каждая ячейка сетки  $\omega^{<i,k>}$  в декартовой системе  $xz$  описывается четырьмя узлами, пронумерованными начиная с левого нижнего узла в направлении обхода против часовой стрелки (рис. 3). Аналогично проводится и нумерация граней (сторон) ячейки. Таким образом, в ходе построения сетки формируется упорядоченный массив данных – координат узлов ячеек  $\left( x_m^{<i,k>}, z_m^{<i,k>} \right)$ ,  $m = \overline{1, 4}$ ;  $i = \overline{1, N}$ ,  $k = \overline{1, M}$ .

Перемещение сеточной ячейки  $\omega^{<i,k>}$  в пространстве  $xz$  будем описывать перемещением четырех ее вершин, т. е. точек  $\left( x_m^{<i,k>}, z_m^{<i,k>} \right)$ ,  $m = \overline{1, 4}$  (рис. 3). Для каждого сеточного узла  $(x_i, z_i)$ , являющегося первой вершиной ячейки  $\omega^{<i,k>}$ , будем искать перемещения, где  $u_{i,k}$ ,  $w_{i,k}$  – перемещение узла в направлении  $x$  и в направлении  $z$  соответственно.

Введем в ячейке следующие обозначения:  $P_m$  – середины сторон,  $m = \overline{1,4}$ ;  $O$  – точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон  $P_1P_3$  и  $P_2P_4$ ; точки  $O_R, O_L, O_B, O_T$  – середины отрезков  $OP_2, OP_4, OP_1, OP_3$  соответственно;  $S_m$  – площадь (длина) стороны,  $m = \overline{1,4}$ . Вид сеточной ячейки  $\omega^{<i,k>}$  и обозначения в ней показаны на рис. 3.

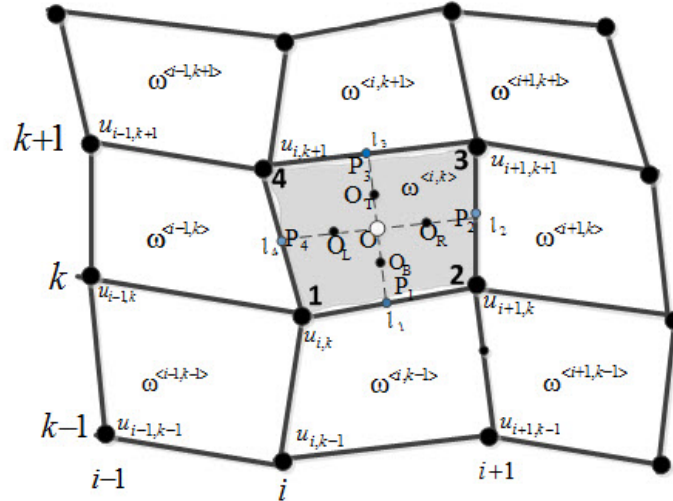


Рис. 3. Локальные обозначения в сеточной ячейке  $\omega^{<i,k>}$

В глобальной системе координат все введенные обозначения и вычисленные значения величин в ячейке записываются с верхним индексом, указывающим на номер ячейки, например, точка 1 в локальной системе координат будет записана как точка  $1^{<i,k>}$  в глобальной.

Для удобства дальнейшей записи, проведем дополнительные вычисления в ячейке. Зная координаты вершин ячейки, нетрудно вычислить координаты точки  $O(x_o^{<i,k>}, z_o^{<i,k>})$ , координаты серединных точек  $P_m^{<i,k>} = P_m^{<i,k>}(x_{P_m}^{<i,k>}, z_{P_m}^{<i,k>})$ , координаты точек  $O_R^{<i,k>}, O_L^{<i,k>}, O_B^{<i,k>}, O_T^{<i,k>}$ , площади (длины для плоской постановки) граней  $S_m^{<i,k>} = l_m^{<i,k>}$ ,  $m = \overline{1,4}$ ; объем ячейки  $V^{<i,k>}$ .

Задача состоит в нахождении перемещений  $(u_{i,k}, w_{i,k})$  сеточного узла  $(x_i, z_k)$ .

В соответствии с идеологией МКО для каждого отдельного узла определяется ассоциированная с ним окрестность расчетной области, называемая контрольным объемом (КО). Разностная схема для узла получается интегрированием исходного дифференциального уравнения по контрольному объему и аппроксимацией входящих в уравнение величин.

Построим контрольный объем  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$ , окружающий узел 1 для ячейки  $\omega^{<i,k>}$  (рис. 4), для которого ищем перемещение. Для нахождения перемещений  $u_{i,k}, w_{i,k}$  этого узла, выберем контрольный объем, в центре которого находится рассматриваемый узел. В глобальных координатах – это восьмиугольник  $O^{<i-1,k-1>}P_2^{<i-1,k-1>}O^{<i,k-1>}P_3^{<i,k-1>}O^{<i,k>}P_4^{<i,k>}O^{<i-1,k>}P_1^{<i-1,k>}$ , окружающий узел с координатами  $(x_i, z_k)$ . Схематично контрольный объем  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$  изображен на рис. 4 (область, ограниченная пунктирной линией).

Проинтегрируем уравнения (1) по контрольному объему  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{V_{u,w}^{<i,k>}} \iint_{\omega_{u,w}^{<i,k>}} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} dV + \frac{1}{V_{u,w}^{<i,k>}} \iint_{\omega_{u,w}^{<i,k>}} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial z} dV = 0, \\ \frac{1}{V_{u,w}^{<i,k>}} \iint_{\omega_{u,w}^{<i,k>}} \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} dV + \frac{1}{V_{u,w}^{<i,k>}} \iint_{\omega_{u,w}^{<i,k>}} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial z} dV = 0. \end{cases}$$

Используя формулу Остроградского–Гаусса, получим

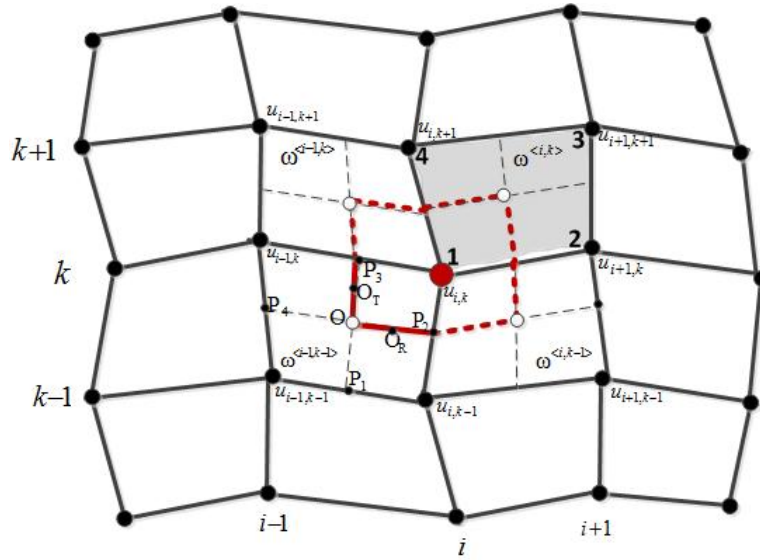


Рис. 4. Контрольный объем  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$  для узла 1 ячейки  $\omega^{<i,k>}$

$$\begin{cases} \frac{1}{V_{u,w}^{<i,k>}} \oint_{\omega_{u,w}^{<i,k>}} (\sigma_{11}n_x + \sigma_{12}n_z) dS = 0, \\ \frac{1}{V_{u,w}^{<i,k>}} \oint_{\omega_{u,w}^{<i,k>}} (\sigma_{21}n_x + \sigma_{22}n_z) dS = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где  $V_{u,w}^{<i,k>}$  – объем  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$ .

Для получения дискретного аналога балансового уравнения в выбранной ячейке необходимо вычислить интегралы, входящие в (7), используя какие-либо квадратурные формулы. При этом крайне важно, чтобы для соприкасающихся ячеек поверхностный интеграл по их общей грани вычислялся идентично. Последнее требование, легко реализуемое при составлении компьютерной программы, обеспечивает консервативность численной схемы, т. е. точное (в рамках принятого способа вычисления интегралов) соблюдение баланса величины согласно уравнению (7) для всей области. Это свойство МКО выгодно отличает его от метода конечных разностей (МКР) и метода конечных элементов (МКЭ), в которых реализация строгой консервативности схемы является скорее исключением, чем правилом.

Условимся, что обход граней контрольного объема производится против часовой стрелки, начиная с точки  $O^{<i-1,k-1>}$  (рис. 4). Интеграл по границе контрольного объема вычисляется как сумма произведений значений вектора потока в центрах граней контрольного объема на площадь соответствующей грани, т. е.  $q_m^{u,w;<i,k>} = q_m^{u,w;<i,k>} \bar{n}_m^{u,w;<i,k>} S_m^{u,w;<i,k>}$ ,  $m = \overline{1,8}$ . Здесь  $q_m^{u,w;<i,k>}$  – поток через  $m$ -ю грань контрольного объема  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$ , ориентация которой задается внешней единичной нормалью  $\bar{n}_m^{u,w;<i,k>}$  к  $m$ -й грани КО,  $S_m^{u,w;<i,k>}$  – площадь соответствующей  $m$ -й грани КО,  $q_m^{u,w;<i,k>}$  – значение потока на грани,  $m$  – количество граней ( $m = 8$ ).

Учитывая, что  $\oint_{\partial \omega_{u,w}^{<i,k>}} \sigma_{11}n_x dS = \sum_{m=1}^8 (\sigma_{11}n_x S) \Big|_m$ , где  $m$  – номер грани контрольного объема  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$ , система (7) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{V_{u,w}^{<i,k>}} \sum_{m=1}^8 [(\sigma_{11}n_x + \sigma_{12}n_z) S] \Big|_m = 0, \\ \frac{1}{V_{u,w}^{<i,k>}} \sum_{m=1}^8 [(\sigma_{21}n_x + \sigma_{22}n_z) S] \Big|_m = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, получение дискретного аналога балансовых уравнений (8) сводится к аппроксимации компонент напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{21}$  и  $\sigma_{22}$  на восьми гранях КО  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$ .

Предварительно найдем представление напряжений через перемещения, используя формулы (2). Получим

$$\begin{cases} \sigma_{11} = E_1^* \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{E}_1 \frac{\partial w}{\partial z}, & \sigma_{12} = G_{12} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \sigma_{22} = \tilde{E}_2 \frac{\partial u}{\partial x} + E_2^* \frac{\partial w}{\partial z}, & \sigma_{21} = G_{21} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ E_1^* = \frac{E_1}{A}, & \tilde{E}_1 = \frac{E_1 \nu_{21}}{A}, & E_2^* = \frac{E_2}{A}, & \tilde{E}_2 = \frac{E_2 \nu_{21}}{A}. \end{cases} \quad (9)$$

Введем обозначения потоков на  $m$ -й грани  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$  соответственно из (8):

$$fluxU_m = \frac{1}{V_{u,w}^{<i,k>}} (\sigma_{11} n_x + \sigma_{12} n_z) \Big|_m, \quad fluxW_m = \frac{1}{V_{u,w}^{<i,k>}} (\sigma_{21} n_x + \sigma_{22} n_z) \Big|_m, \quad m = \overline{1,8}. \quad (10)$$

С учетом зависимостей (9) и способа построения КО  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$ , выражения для потоков (10) на 1-й грани примут следующий вид:

$$\begin{cases} fluxU_1 = \frac{S_{OP_2}^{<i-1,k-1>}}{V_{u,w}^{<i,k>}} \left( \left( E_1^* \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{E}_1 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \bar{n}_{P_4 P_2, x}^{<i-1,k-1>} + \right. \\ \left. + G_{12} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \bar{n}_{P_4 P_2, z}^{<i-1,k-1>} \right) \Big|_{O_R^{<i-1,k-1>}}, \\ fluxW_1 = \frac{S_{OP_2}^{<i-1,k-1>}}{V_{u,w}^{<i,k>}} \left( G_{12} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \bar{n}_{P_4 P_2, z}^{<i-1,k-1>} + \right. \\ \left. + \left( \tilde{E}_2 \frac{\partial u}{\partial x} + E_2^* \frac{\partial w}{\partial z} \right) \bar{n}_{P_4 P_2, x}^{<i-1,k-1>} \right) \Big|_{O_R^{<i-1,k-1>}}, \end{cases} \quad (11)$$

где  $S_{OP_2}^{<i-1,k-1>}$  – площадь (длина для двумерного случая) 1-й грани контрольного объема,  $O_R^{<i-1,k-1>}$  – середина отрезка, соединяющего центр  $O^{<i-1,k-1>}$  и точку  $P_2^{<i-1,k-1>}$  (середина 2-й грани сеточной ячейки  $\omega^{<i-1,k-1>}$ ),  $\bar{n}_1^{u,w; <i,k>} = \bar{n}_{P_4 P_2}^{<i-1,k-1>}$  – единичный вектор внешней нормали к 1-й грани КО. Заметим, что  $\bar{n}_{P_4 P_2}^{<i-1,k-1>} = \bar{n}_{OP_2}^{<i-1,k-1>}$ , поскольку  $O^{<i-1,k-1>} \in (P_4 P_2)^{<i-1,k-1>}$ .

Таким образом, аппроксимация потоков (11) на первой грани КО  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$  сводится к аппроксимации частных производных от перемещений  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial z}$  в точке  $O_R^{<i-1,k-1>}$ .

Предварительно построим линейную интерполяцию функции  $f(x, z)$  в треугольнике  $\Delta_{123}$ , вершины которого обозначены цифрами 1, 2, 3, имеют соответствующие координаты  $(x_1, z_1)$ ,  $(x_2, z_2)$ ,  $(x_3, z_3)$  и значения функции в них известны  $f_m$ ,  $m = 1, 2, 3$ . Линейную интерполяционную функцию  $f^{\Delta_{123}}(x, z)$  будем искать в виде

$$f^{\Delta_{123}}(x, z) = a_0 + a_1 x + a_2 z, \quad (x, z) \in \Delta_{123}. \quad (12)$$

Учитывая, что в узлах  $(x_m, z_m)$  имеет место равенство  $f^{\Delta_{123}}(x_m, z_m) = f_m$ , получим систему трех линейных уравнений относительно неизвестных  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ . Решая ее, находим

$$\begin{cases} a_0 = \frac{f_1(x_2 z_3 - x_3 z_2) + f_2(x_3 z_1 - x_1 z_3) + f_3(x_1 z_1 - x_2 z_1)}{|\Delta_{123}|}, \\ a_1 = \frac{f_1(z_2 - z_3) + f_2(z_3 - z_1) + f_3(z_1 - z_2)}{|\Delta_{123}|}, \\ a_2 = \frac{f_1(x_3 - x_2) + f_2(x_1 - x_3) + f_3(x_2 - x_1)}{|\Delta_{123}|}, \end{cases}$$

где

$$|\Delta_{123}| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} = 2S_{123},$$

где  $S_{123}$  – площадь треугольника  $\Delta_{123}$ . Определитель системы  $|\Delta_{123}| \neq 0$ , так как равен двум площадям треугольника.

Перепишем представление функции (12) относительно величин  $f_m$ ,  $m = 1, 2, 3$ , с учетом вида найденных коэффициентов  $a_0, a_1, a_2$

$$\begin{aligned} f^{\Delta_{123}}(x, z) = & f_1 \frac{(x_2 z_3 - x_3 z_2) + (z_2 - z_3)x + (x_3 - x_2)z}{|\Delta_{123}|} + \\ & + f_2 \frac{(x_3 z_1 - x_1 z_3) + (z_3 - z_1)x + (x_1 - x_3)z}{|\Delta_{123}|} + \\ & + f_3 \frac{(x_1 z_1 - x_2 z_1) + (z_1 - z_2)x + (x_2 - x_1)z}{|\Delta_{123}|}, \quad (x, z) \in \Delta_{123}. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя представление интерполяционной функции в виде (13), построим аппроксимации производных  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial z}$  на первой грани КО  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$ . Покажем построение аппроксимации производной  $\frac{\partial u}{\partial x}$  в точке  $O_R^{<i-1,k-1>}$  первой грани КО  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$ . Ввиду того, что дальнейшие преобразования проводятся в пределах одной сеточной ячейки  $\omega^{<i-1,k-1>}$ , верхний индекс  $<i-1, k-1>$  для удобства и упрощения записи временно опускается.

В качестве функции для последующей интерполяции рассмотрим  $f(x, z) = \frac{\partial u}{\partial x}$ . Выберем вершины 1, 2, 3 таким образом, чтобы точка  $O_R$  находилась внутри построенного с помощью них условного треугольника  $\Delta_{123}$ , т. е.  $O_R \in \Delta_{123}$ . Это условие будет справедливо, если в качестве вершин выбрать, например, следующие середины сторон сеточной ячейки: вершина 1 – точка  $P_1$ , вершина 2 – точка  $P_2$ , вершина 3 – точка  $P_3$  (рис. 4).

Значение функции  $f(x, z)$  в выбранных точках  $P_m$ ,  $m = 1, 2, 3$ , вычислим, используя определение производной по направлению, совпадающему с соответствующей стороной ячейки, т. е. по направлению  $l_m$ ,  $m = 1, 2, 3$ , соответственно (рис. 3). Переходя к индексной записи, получим

$$\begin{cases} f_1(x, z) \Big|_{P_1} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{P_1} = \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{l_1} \frac{x_{i,k-1} - x_{i-1,k-1}}{l_1} = (u_{i,k-1} - u_{i-1,k-1}) \frac{x_{i,k-1} - x_{i-1,k-1}}{(l_1)^2}, \\ f_2(x, z) \Big|_{P_2} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{P_2} = \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{l_2} \frac{x_{i,k} - x_{i,k-1}}{l_2} = (u_{i,k} - u_{i,k-1}) \frac{x_{i,k} - x_{i,k-1}}{(l_2)^2}, \\ f_3(x, z) \Big|_{P_3} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{P_3} = \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{l_3} \frac{x_{i,k} - x_{i-1,k}}{l_3} = (u_{i,k} - u_{i-1,k}) \frac{x_{i,k} - x_{i-1,k}}{(l_3)^2}. \end{cases}$$

Используя аппроксимацию (13), получим выражение для интерполяционной функции  $f^{\Delta_{P_1 P_2 P_3}}(x, z)$  в глобальной системе координат вида

$$\begin{aligned} f^{\Delta_{P_1 P_2 P_3}}(x, z) = & (u_{i,k-1} - u_{i-1,k-1}) \frac{x_{i,k-1} - x_{i-1,k-1}}{(l_1)^2} \frac{(x_2 z_3 - x_3 z_2) + (z_2 - z_3)x + (x_3 - x_2)z}{|\Delta_{P_1 P_2 P_3}|} + \\ & + (u_{i,k} - u_{i,k-1}) \frac{x_{i,k} - x_{i,k-1}}{(l_2)^2} \frac{(x_3 z_1 - x_1 z_3) + (z_3 - z_1)x + (x_1 - x_3)z}{|\Delta_{P_1 P_2 P_3}|} + \\ & + (u_{i,k} - u_{i-1,k}) \frac{x_{i,k} - x_{i-1,k}}{(l_3)^2} \frac{(x_1 z_1 - x_2 z_1) + (z_1 - z_2)x + (x_2 - x_1)z}{|\Delta_{P_1 P_2 P_3}|}, \end{aligned} \quad (14)$$

где координаты вершин 1, 2, 3 определяются соответствующими координатами точек  $(x_1, z_1) = (x_{P_1}, z_{P_1})$ ,  $(x_2, z_2) = (x_{P_2}, z_{P_2})$ ,  $(x_3, z_3) = (x_{P_3}, z_{P_3})$ .

Учитывая вид функции  $f(x, z)$ , по формуле (14) находим выражение для производной в точке  $O_R \in \Delta_{123}$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{O_R} &= f^{\Delta P_1 P_2 P_3}(x_{O_R}, z_{O_R}) = \\ &= u_{i-1, k-1} a_{O_R; (i-1, k-1)} + u_{i, k-1} a_{O_R; (i, k-1)} + u_{i-1, k} a_{O_R; (i-1, k)} + u_{i, k} a_{O_R; (i, k)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Коэффициенты при неизвестных в (15) вычисляются следующим образом:

$$\begin{cases} a_{O_R; (i-1, k-1)} = -A_{O_R; 1}, & a_{O_R; (i, k-1)} = A_{O_R; 1} - A_{O_R; 2}, \\ a_{O_R; (i-1, k)} = -A_{O_R; 3}, & a_{O_R; (i, k)} = A_{O_R; 2} + A_{O_R; 3}, \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} A_{O_R; 1} = \frac{x_{i, k-1} - x_{i-1, k-1} (x_2 z_3 - x_3 z_2) + (z_2 - z_3) x_{O_R} + (x_3 - x_2) z_{O_R}}{(l_1)^2 \frac{|\Delta P_1 P_2 P_3|}{|\Delta P_1 P_2 P_3|}}, \\ A_{O_R; 2} = \frac{x_{i, k} - x_{i, k-1} (x_3 z_1 - x_1 z_3) + (z_3 - z_1) x_{O_R} + (x_1 - x_3) z_{O_R}}{(l_2)^2 \frac{|\Delta P_1 P_2 P_3|}{|\Delta P_1 P_2 P_3|}}, \\ A_{O_R; 3} = \frac{x_{i, k} - x_{i-1, k} (x_1 z_1 - x_2 z_3) + (z_1 - z_2) x_{O_R} + (x_2 - x_1) z_{O_R}}{(l_3)^2 \frac{|\Delta P_1 P_2 P_3|}{|\Delta P_1 P_2 P_3|}}. \end{cases}$$

Для аппроксимации производной  $\frac{\partial u}{\partial z}$  построим интерполяционную формулу для функции  $f(x, z) = \frac{\partial u}{\partial z}$ , используя производную по направлению в соответствующих точках, например, в точке 1, т. е. получим, что  $f_1 = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{P_1} = \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{l_1} \frac{z_{i, k-1} - z_{i-1, k-1}}{l_1} = (u_{i, k-1} - u_{i-1, k-1}) \frac{z_{i, k-1} - z_{i-1, k-1}}{(l_1)^2}$  и т. д.

По аналогии с (15), нетрудно получить следующую аппроксимацию:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{O_R} = u_{i-1, k-1} b_{O_R; (i-1, k-1)} + u_{i, k-1} b_{O_R; (i, k-1)} + u_{i-1, k} b_{O_R; (i-1, k)} + u_{i, k} b_{O_R; (i, k)}. \quad (16)$$

Поскольку для неизвестных компонент перемещения  $u(x, z)$  и  $w(x, z)$  сетка узлов одна и та же, т. е. неизвестные  $u_{i, k}$  и  $w_{i, k}$  определены в одних точках, то для производных  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial z}$  аналогично (15), (16) нетрудно получить следующие аппроксимации:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{O_R} = w_{i-1, k-1} a_{O_R; (i-1, k-1)} + w_{i, k-1} a_{O_R; (i, k-1)} + \\ \quad + w_{i-1, k} a_{O_R; (i-1, k)} + w_{i, k} a_{O_R; (i, k)}, \\ \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{O_R} = w_{i-1, k-1} b_{O_R; (i-1, k-1)} + w_{i, k-1} b_{O_R; (i, k-1)} + \\ \quad + w_{i-1, k} b_{O_R; (i-1, k)} + w_{i, k} b_{O_R; (i, k)}. \end{cases}$$

Подставляя найденные аппроксимации производных в выражения для потоков через первую грань КО  $\omega_{u, w}^{<i, k>}$  в первое уравнение системы (11) и группируя выражения при одинаковых неизвестных, получим

$$fluxU_1 = \sum_{\zeta} u_{\zeta} g_{O_R; \zeta}^u + \sum_{\zeta} w_{\zeta} e_{O_R; \zeta}^u, \quad (17)$$

где индекс  $\zeta$  принадлежит множеству индексов  $\{(i-1, k-1), (i, k-1), (i-1, k), (i, k)\}$ , что соответствует индексу вершин ячейки  $\omega^{<i-1, k-1>}$ .

Коэффициенты при неизвестных в выражении для потока (17) определяются формулами

$$\begin{cases} g_{O_R; \zeta}^u = \frac{SOP_2}{V_{u, v}} \left( E_1^* a_{O_R; \zeta} \bar{n}_{P_4 P_2, x} + \frac{1}{2} G_{12} b_{O_R; \zeta} \bar{n}_{P_4 P_2, z} \right), \\ e_{O_R; \zeta}^u = \frac{SOP_2}{V_{u, v}} \left( \tilde{E}_1 b_{O_R; \zeta} \bar{n}_{P_4 P_2, x} + \frac{1}{2} G_{12} a_{O_R; \zeta} \bar{n}_{P_4 P_2, z} \right). \end{cases}$$

Аналогично, подставляя найденные аппроксимации производных в выражения для потоков через первую грань КО  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$  во второе уравнение системы (11) и группируя выражения при одинаковых неизвестных, получим

$$fluxW_1 = \sum_{\zeta} u_{\zeta} g_{O_R;\zeta}^w + \sum_{\zeta} w_{\zeta} e_{O_R;\zeta}^w. \quad (18)$$

Коэффициенты при неизвестных в выражении для потока (18) определяются формулами

$$\begin{cases} g_{O_R;\zeta}^u = \frac{S_{OP_2}}{V_{u,v}} \left( \frac{1}{2} G_{12} b_{O_R;\zeta} \bar{n}_{P_4 P_2, x} + \tilde{E}_2 a_{O_R;\zeta} \bar{n}_{P_4 P_2, z} \right), \\ e_{O_R;\zeta}^u = \frac{S_{OP_2}}{V_{u,v}} \left( \frac{1}{2} G_{12} a_{O_R;\zeta} \bar{n}_{P_4 P_2, x} + E_2^* b_{O_R;\zeta} \bar{n}_{P_4 P_2, z} \right). \end{cases}$$

Выражения для компонент внешней единичной нормали к первой стороне КО  $\omega_{u,w}$  нетрудно найти зная координаты точек  $P_4$  и  $P_2$ .

Заметим, что с точки зрения реализации численного алгоритма, при аппроксимации потоков через первую грань контрольного объема целесообразно аппроксимировать потоки и через восьмую грань, поскольку указанные грани принадлежит одной ячейке  $\omega^{<i-1,k-1>}$ , а все ее параметры уже вычислены.

Рассмотрим выражения для потоков через восьмую грань:

$$\begin{cases} fluxU_8 = \frac{S_{OP_3}}{V_{u,w}} \left( \left( E_1^* \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{E}_1 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \bar{n}_{P_3 P_1, x} + G_{12} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \bar{n}_{P_3 P_1, z} \right) \Big|_{O_T}, \\ fluxW_8 = \frac{S_{OP_3}}{V_{u,w}} \left( G_{12} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \bar{n}_{P_3 P_1, x} + \left( \tilde{E}_2 \frac{\partial u}{\partial x} + E_2^* \frac{\partial w}{\partial z} \right) \bar{n}_{P_3 P_1, z} \right) \Big|_{O_T}. \end{cases} \quad (19)$$

Построим аппроксимацию производных от перемещений в точке  $O_T$ , принадлежащей восьмой грани КО  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$ , по аналогии с предыдущей. Выберем вершины 1, 2, 3 для последующей интерполяции таким образом, чтобы точка  $O_T$  находилась внутри построенного с помощью них фиктивного треугольника  $\Delta_{123}$ . Это условие будет справедливо, если в качестве вершин 1, 2, 3 выбрать точки  $P_4$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  соответственно (рис. 4).

Рассуждая аналогичным образом, получим выражение для интерполяционной функции  $f^{\Delta_{P_4 P_2 P_3}}(x, z)$  в глобальной системе координат вида

$$\begin{aligned} f^{\Delta_{P_4 P_2 P_3}} &= (u_{i-1,k} - u_{i-1,k-1}) \frac{x_{i-1,k} - x_{i-1,k-1}}{(l_4)^2} \frac{(x_2 z_3 - x_3 z_2) + (z_2 - z_3)x + (x_3 - x_2)z}{|\Delta_{P_4 P_2 P_3}|} + \\ &+ (u_{i,k} - u_{i,k-1}) \frac{x_{i,k} - x_{i,k-1}}{(l_2)^2} \frac{(x_3 z_1 - x_1 z_3) + (z_3 - z_1)x + (x_1 - x_3)z}{|\Delta_{P_4 P_2 P_3}|} + \\ &+ (u_{i,k} - u_{i-1,k}) \frac{x_{i,k} - x_{i-1,k}}{(l_3)^2} \frac{(x_1 z_1 - x_2 z_1) + (z_1 - z_2)x + (x_2 - x_1)z}{|\Delta_{P_4 P_2 P_3}|}, \end{aligned}$$

где координаты вершин 1, 2, 3 определяются соответствующими координатами точек  $(x_1, z_1) = (x_{P_4}, z_{P_4})$ ,  $(x_2, z_2) = (x_{P_2}, z_{P_2})$ ,  $(x_3, z_3) = (x_{P_3}, z_{P_3})$ .

Учитывая вид функции  $f(x, z)$  находим выражение для производной в точке  $O_T$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{O_T} = u_{i-1,k-1} a_{O_T;(i-1,k-1)} + u_{i,k-1} a_{O_T;(i,k-1)} + u_{i-1,k} a_{O_T;(i-1,k)} + u_{i,k} a_{O_T;(i,k)},$$

где коэффициенты при неизвестных получаются аналогично (15).

Для производных  $\frac{\partial u}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x}$  и  $\frac{\partial w}{\partial z}$  строим аппроксимации аналогичным образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{O_T} = u_{i-1,k-1} b_{O_T;(i-1,k-1)} + u_{i,k-1} b_{O_T;(i,k-1)} + u_{i-1,k} b_{O_T;(i-1,k)} + u_{i,k} b_{O_T;(i,k)}, \\ \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{O_T} = w_{i-1,k-1} a_{O_T;(i-1,k-1)} + w_{i,k-1} a_{O_T;(i,k-1)} + w_{i-1,k} a_{O_T;(i-1,k)} + w_{i,k} a_{O_T;(i,k)}, \\ \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{O_T} = w_{i-1,k-1} b_{O_T;(i-1,k-1)} + w_{i,k-1} b_{O_T;(i,k-1)} + w_{i-1,k} b_{O_T;(i-1,k)} + w_{i,k} b_{O_T;(i,k)}. \end{array} \right.$$

Подставляя полученные аппроксимации производных в уравнение для потока (19) и группируя выражения при одинаковых неизвестных, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} fluxU_8 = \sum_{\zeta} u_{\zeta} g_{O_T;\zeta}^u + \sum_{\zeta} w_{\zeta} e_{O_T;\zeta}^u, \\ fluxW_8 = \sum_{\zeta} u_{\zeta} g_{O_T;\zeta}^w + \sum_{\zeta} w_{\zeta} e_{O_T;\zeta}^w, \end{array} \right. \quad (20)$$

где индекс  $\zeta$  принадлежит множеству индексов  $\{(i-1, k-1), (i, k-1), (i-1, k), (i, k)\}$ .

Коэффициенты при неизвестных в системе (20) определяются формулами

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{O_R;\zeta}^u = \frac{SOP_3}{V_{u,v}} \left( E_1^* a_{O_T;\zeta} \bar{n}_{P_3 P_1, x} + \frac{G_{12}}{2} b_{O_T;\zeta} \bar{n}_{P_3 P_1, z} \right), \\ e_{O_R;\zeta}^u = \frac{SOP_3}{V_{u,v}} \left( \tilde{E}_1 b_{O_T;\zeta} \bar{n}_{P_3 P_1, x} + \frac{G_{12}}{2} a_{O_T;\zeta} \bar{n}_{P_3 P_1, z} \right), \\ g_{O_R;\zeta}^w = \frac{SOP_3}{V_{u,v}} \left( \frac{G_{12}}{2} b_{O_T;\zeta} \bar{n}_{P_3 P_1, x} + \tilde{E}_2 a_{O_T;\zeta} \bar{n}_{P_3 P_1, z} \right), \\ e_{O_R;\zeta}^w = \frac{SOP_3}{V_{u,v}} \left( \frac{G_{12}}{2} a_{O_T;\zeta} \bar{n}_{P_3 P_1, x} + E_2^* b_{O_T;\zeta} \bar{n}_{P_3 P_1, z} \right). \end{array} \right.$$

Суммируя выражения для соответствующих потоков на первой и восьмой гранях КО, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} fluxU_1 + fluxU_8 = \sum_{\zeta} u_{\zeta} g_{O_R;\zeta}^u + \sum_{\zeta} w_{\zeta} e_{O_R;\zeta}^u + \sum_{\zeta} u_{\zeta} g_{O_T;\zeta}^u + \sum_{\zeta} w_{\zeta} e_{O_T;\zeta}^u = \\ = \sum_{\zeta} u_{\zeta} (g_{O_R;\zeta}^u + g_{O_T;\zeta}^u) + \sum_{\zeta} w_{\zeta} (e_{O_R;\zeta}^u + e_{O_T;\zeta}^u), \\ fluxW_1 + fluxW_8 = \sum_{\zeta} u_{\zeta} g_{O_R;\zeta}^w + \sum_{\zeta} w_{\zeta} e_{O_R;\zeta}^w + \sum_{\zeta} u_{\zeta} g_{O_T;\zeta}^w + \sum_{\zeta} w_{\zeta} e_{O_T;\zeta}^w = \\ = \sum_{\zeta} u_{\zeta} (g_{O_R;\zeta}^w + g_{O_T;\zeta}^w) + \sum_{\zeta} w_{\zeta} (e_{O_R;\zeta}^w + e_{O_T;\zeta}^w), \end{array} \right.$$

где индекс  $\zeta$  принадлежит множеству индексов  $\{(i-1, k-1), (i, k-1), (i-1, k), (i, k)\}$ .

Производя аналогичные преобразования для ячеек  $\omega^{<i,k-1>}$ ,  $\omega^{<i,k>}$ ,  $\omega^{<i-1,k>}$ , получаем аппроксимации для потоков на второй и третьей, четвертой и пятой, шестой и седьмой гранях соответственно. Возвращаясь к обозначениям индексов ячейки и подставляя полученные аппроксимации в первое уравнение системы (8), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V_{u,w}^{<i,k>}} \sum_{m=1}^8 [(\sigma_{11} n_x + \sigma_{12} n_z) S] \Big|_m = \\ & = \sum_{\zeta \in \zeta^{<i-1,k-1>}} u_{\zeta} (g_{O_R;\zeta}^{u;<i-1,k-1>} + g_{O_T;\zeta}^{u;<i-1,k-1>}) + \sum_{\zeta \in \zeta^{<i-1,k-1>}} w_{\zeta} (e_{O_R;\zeta}^{u;<i-1,k-1>} + e_{O_T;\zeta}^{u;<i-1,k-1>}) + \\ & + \sum_{\zeta \in \zeta^{<i,k-1>}} u_{\zeta} (g_{O_L;\zeta}^{u;<i,k-1>} + g_{O_T;\zeta}^{u;<i,k-1>}) + \sum_{\zeta \in \zeta^{<i,k-1>}} w_{\zeta} (e_{O_L;\zeta}^{u;<i,k-1>} + e_{O_T;\zeta}^{u;<i,k-1>}) + \\ & + \sum_{\zeta \in \zeta^{<i-1,k>}} u_{\zeta} (g_{O_B;\zeta}^{u;<i-1,k>} + g_{O_L;\zeta}^{u;<i-1,k>}) + \sum_{\zeta \in \zeta^{<i-1,k>}} w_{\zeta} (e_{O_B;\zeta}^{u;<i-1,k>} + e_{O_L;\zeta}^{u;<i-1,k>}) + \\ & + \sum_{\zeta \in \zeta^{<i,k>}} u_{\zeta} (g_{O_R;\zeta}^{u;<i,k>} + g_{O_B;\zeta}^{u;<i,k>}) + \sum_{\zeta \in \zeta^{<i,k>}} w_{\zeta} (e_{O_R;\zeta}^{u;<i,k>} + e_{O_B;\zeta}^{u;<i,k>}), \end{aligned}$$

где множества индексов определены следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta^{<i-1,k-1>} = \{(i-1, k-1), (i, k-1), (i-1, k), (i, k)\}, \\ \zeta^{<i,k-1>} = \{(i, k-1), (i+1, k-1), (i, k), (i+1, k)\}, \\ \zeta^{<i,k>} = \{(i, k), (i+1, k), (i, k+1), (i+1, k+1)\}, \\ \zeta^{<i-1,k>} = \{(i-1, k), (i, k), (i-1, k+1), (i, k+1)\}. \end{array} \right.$$

Группируя слагаемые при одинаковых неизвестных, приходим к уравнению вида для внутренних узлов сетки

$$R_h^{<i,k>}(u) + P_h^{<i,k>}(w) = 0, \quad i = \overline{1, N_x - 1}, \quad k = \overline{1, N_z - 1}, \quad (21)$$

где  $R_h^{<i,k>}(u)$ ,  $P_h^{<i,k>}(w)$  – линейные операторы относительно 9 неизвестных  $u_{i,k}$  и 9 неизвестных  $w_{i,k}$  вида

$$\left\{ \begin{array}{l} R_h^{<i,k>}(u) = r_{i-1,k-1}^{<i,k>} u_{i-1,k-1} + r_{i,k-1}^{<i,k>} u_{i,k-1} + r_{i+1,k-1}^{<i,k>} u_{i+1,k-1} + \\ + r_{i-1,k}^{<i,k>} u_{i-1,k} + r_{i,k}^{<i,k>} u_{i,k} + r_{i+1,k}^{<i,k>} u_{i+1,k} + \\ + r_{i-1,k+1}^{<i,k>} u_{i-1,k+1} + r_{i,k+1}^{<i,k>} u_{i,k+1} + r_{i+1,k+1}^{<i,k>} u_{i+1,k+1}, \\ P_h^{<i,k>}(w) = p_{i-1,k-1}^{<i,k>} w_{i-1,k-1} + p_{i,k-1}^{<i,k>} w_{i,k-1} + p_{i+1,k-1}^{<i,k>} w_{i+1,k-1} + \\ + p_{i-1,k}^{<i,k>} w_{i-1,k} + p_{i,k}^{<i,k>} w_{i,k} + p_{i+1,k}^{<i,k>} w_{i+1,k} + \\ + p_{i-1,k+1}^{<i,k>} w_{i-1,k+1} + p_{i,k+1}^{<i,k>} w_{i,k+1} + p_{i+1,k+1}^{<i,k>} w_{i+1,k+1}. \end{array} \right. \quad (22)$$

Коэффициенты оператора  $R_h^{<i,k>}$  вычисляются по следующим формулам:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{(i-1,k-1)}^{<i,k>} = g_{O_R;(i-1,k-1)}^{u;<i-1,k-1>} + g_{O_T;(i-1,k-1)}^{u;<i-1,k-1>}, \\ r_{(i,k-1)}^{<i,k>} = g_{O_R;(i,k-1)}^{u;<i-1,k-1>} + g_{O_T;(i,k-1)}^{u;<i-1,k-1>} + g_{O_L;(i,k-1)}^{u;<i,k-1>} + g_{O_T;(i,k-1)}^{u;<i,k-1>}, \\ r_{(i+1,k-1)}^{<i,k>} = g_{O_L;(i+1,k-1)}^{u;<i,k-1>} + g_{O_T;(i+1,k-1)}^{u;<i,k-1>}, \\ r_{(i-1,k)}^{<i,k>} = g_{O_R;(i-1,k)}^{u;<i-1,k-1>} + g_{O_T;(i-1,k)}^{u;<i-1,k-1>} + g_{O_R;(i-1,k)}^{u;<i,k>} + g_{O_B;(i-1,k)}^{u;<i,k>}, \\ r_{(i,k)}^{<i,k>} = g_{O_R;(i,k)}^{u;<i-1,k-1>} + g_{O_T;(i,k)}^{u;<i-1,k-1>} + g_{O_L;(i,k)}^{u;<i,k-1>} + g_{O_T;(i,k)}^{u;<i,k-1>} + \\ + g_{O_B;(i,k)}^{u;<i-1,k>} + g_{O_L;(i,k)}^{u;<i-1,k>} + g_{O_R;(i,k)}^{u;<i,k>} + g_{O_B;(i,k)}^{u;<i,k>}, \\ r_{(i+1,k)}^{<i,k>} = g_{O_L;(i+1,k)}^{u;<i,k-1>} + g_{O_T;(i+1,k)}^{u;<i,k-1>} + g_{O_B;(i+1,k)}^{u;<i-1,k>} + g_{O_L;(i+1,k)}^{u;<i-1,k>}, \\ r_{(i-1,k+1)}^{<i,k>} = g_{O_R;(i-1,k+1)}^{u;<i,k>} + g_{O_B;(i-1,k+1)}^{u;<i,k>}, \\ r_{(i,k+1)}^{<i,k>} = g_{O_B;(i,k+1)}^{u;<i-1,k>} + g_{O_L;(i,k+1)}^{u;<i-1,k>} + g_{O_R;(i,k+1)}^{u;<i,k>} + g_{O_B;(i,k+1)}^{u;<i,k>}, \\ r_{(i+1,k+1)}^{<i,k>} = g_{O_B;(i+1,k+1)}^{u;<i-1,k>} + g_{O_L;(i+1,k+1)}^{u;<i-1,k>}. \end{array} \right.$$

Поскольку вид коэффициентов оператора  $P_h^{<i,k>}$  полностью аналогичен коэффициентам оператора  $R_h^{<i,k>}$  с точностью до замены буквенных обозначений (коэффициенты  $g$  заменяются на коэффициенты  $e$  с сохранением индексов), их явная запись, в силу громоздкости, опущена.

Подставляя аппроксимации потоков во второе уравнение системы (8), получим уравнение для внутренних узлов вида

$$T_h^{<i,k>}(u) + Q_h^{<i,k>}(w) = 0, \quad i = \overline{1, N_x - 1}, \quad k = \overline{1, N_z - 1}, \quad (23)$$

где операторы  $T_h^{<i,k>}(u)$  и  $Q_h^{<i,k>}(w)$  имеют аналогичный вид с операторами, приведенными в (22).

Таким образом, в результате аппроксимации исходной системы (8), была получена система (21), (23) из  $2 \times (N_x - 1) \times (N_z - 1)$  сеточных уравнений относительно неизвестных  $u_{i,k}$  и  $w_{i,k}$ . Однако в задаче в силу выбора сеточных узлов, количество неизвестных будет  $2 \times (N_x + 1) \times (N_z + 1)$ : из них  $(N_x + 1) \times (N_z + 1)$  неизвестных  $u_{i,k}$  и  $(N_x + 1) \times (N_z + 1)$  неизвестных  $w_{i,k}$ . Для однозначного решения системы уравнений недостающие уравнения нетрудно получить, аппроксимируя законы сохранения в приграничных объемах с учетом граничных условий (3)–(6).

Решая полученную систему, например, стабилизированным методом бисопряженных градиентов (BiCGStab) [12], находим перемещения  $u_{i,k}$  и  $w_{i,k}$  в узлах сеточной области. В соответствии с разностным аналогом формул для компонент напряжений, нетрудно найти напряженно-деформированное состояние в каждой ячейке вычислительной сетки.

## 7. Общий энергетический подход для нахождения эффективных модулей упругости

Модуль упругости представительного объема будем находить исходя из энергетических соображений. Опишем процедуру нахождения модуля упругости.

При нагружении упругого тела внешними силами происходит смещение частиц тела от их первоначального положения. Это смещение вызывает силы упругого сопротивления, которые стремятся вернуть частицы в исходное состояние. Энергия этих сил представляет собой потенциальную энергию деформации, запасенную упругим телом. При разгрузке эта энергия высвобождается и способна совершать работу. Таким образом, упругое тело является аккумулятором энергии: при нагружении внешние силы совершают работу ( $A$ ), которая затрачивается на деформирование и приводит к накоплению потенциальной энергии деформации ( $U$ ).

Чтобы определить численное значение потенциальной энергии деформации, следует рассмотреть работу внешних и внутренних сил. Внешние силы, деформируя тело, совершают работу на перемещениях частиц из исходного состояния. Внутренние силы упругости, возвращая частицы после разгрузки в начальное положение, совершают работу на тех же перемещениях, но в обратном направлении.

Удельная потенциальная энергия деформации, как работы, совершаемой при деформации единицы объема тела, определяется следующим образом [13]:

$$U = \int_{\varepsilon_{ij}=0}^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}.$$

Таким образом, при деформации упругого тела внешние силы совершают работу. При этом происходит увеличение потенциальной энергии тела. Считая, что в начальный момент потенциальная энергия недеформированного тела равна нулю, после деформации потенциальная энергия деформированного тела будет равна работе, затраченной на деформацию тела. Это будет справедливо до тех пор, пока деформации не достигнут предела упругости.

Поскольку потенциальная энергия деформированного тела  $U$  определяется потенциальной энергией ячеек сетки, то

$$U = \sum_{\omega^{<i,k>}} \frac{1}{2} (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{21}\varepsilon_{21})^{<i,k>} V^{<i,k>}.$$

Так как по предположению включения могут быть из ортотропного материала, то можно полагать, что материал композита также ортотропный и описывается формулами (2) с соответствующими эффективными модулями упругости (в дальнейшем, они обозначаются с нижним индексом  $E_{1,\text{eff}}$ ,  $E_{2,\text{eff}}$  и др.).

Для нахождения модуля упругости композиционного материала вдоль вертикальной оси ( $E_{2,\text{eff}}$ ) был поставлен численный эксперимент на растяжение, моделируемый граничными условиями (3)–(6).

При нагружении образца внешней силой  $F_{\text{внешн}}$  происходит растяжение в зависимости от приложенной силы. Вычислим работу, затраченную на растяжение вдоль вертикальной оси на величину  $\Delta z^*$  исходного материала

$$A_{\text{внешн}} = \int_0^{\Delta z^*} F_{\text{внешн}} dz.$$

Чтобы изменить длину образца, надо приложить силу к верхней границе области в соответствии с законом Гука, т. е. надо положить  $\frac{F_{\text{внешн}}}{S} = \sigma_{zz}$ , где  $S$  – площадь верхней границы области. Откуда находим силу  $F_{\text{внешн}} = S\sigma_{zz}$ .

В соответствии с [13] работа  $A_{\text{внешн}}$ , затраченная на растяжение представительного объема на величину  $\Delta z^*$ , с учетом закона Гука (2) будет равна

$$A_{\text{внешн}} = \int_0^{\Delta z^*} F_{\text{внешн}} dz = \int_0^{\Delta z^*} S \frac{E_{2;\text{eff}}}{A} (\varepsilon_{22;\text{eff}} + \nu_{21;\text{eff}} \varepsilon_{11;\text{eff}}) dz,$$

где  $A = 1 - \nu_{12;\text{eff}} \nu_{21;\text{eff}}$ .

Поскольку растяжение представительного объема происходит только вдоль вертикальной оси, то  $\varepsilon_{11;\text{eff}} = 0$  и, соответственно,  $\nu_{21;\text{eff}} = 0$ . Тогда выражение для работы упрощается и имеет вид

$$A_{\text{внешн}} = \int_0^{\Delta z^*} S E_{2;\text{eff}} \varepsilon_{22;\text{eff}} dz = \int_0^{\Delta z^*} S E_{2;\text{eff}} \frac{z}{L_z} = E_{2;\text{eff}} \frac{S}{L_z} \frac{(\Delta z^*)^2}{2} = \frac{1}{2} E_{2;\text{eff}} V \varepsilon_{22;\text{eff}}^2, \quad (24)$$

где  $E_{2;\text{eff}}$  – модуль упругости представительного объема,  $V = S L_z = L_x L_z$  – объем представительного объема,  $\varepsilon_{22;\text{eff}} = \frac{\Delta z^*}{L_z}$  – заданная деформация растяжения вдоль оси  $z$ .

Учитывая, что работа внешних сил (24), затраченная на растяжение представительного объема, равна потенциальной энергии деформации всех ячеек этого объема, получим

$$\frac{1}{2} E_{2;\text{eff}} V \varepsilon_{22;\text{eff}}^2 = \sum_{\omega^{<i,k>}} \frac{1}{2} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{21} \varepsilon_{21})^{<i,k>} V^{<i,k>}. \quad (25)$$

Тогда из (25) следует

$$E_{2;\text{eff}} = \frac{1}{V \varepsilon_{22;\text{eff}}^2} \sum_{\omega^{<i,k>}} \frac{1}{2} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{21} \varepsilon_{21})^{<i,k>} V^{<i,k>}, \quad (26)$$

где  $E_{2;\text{eff}}$  – искомый эффективный модуль упругости в направлении растяжения представительного объема,  $\varepsilon_{22;\text{eff}}$  – средняя деформация растяжения представительного объема в направлении  $z$ ,  $V$  – объем деформируемой области (представительного объема). Суммирование в правой части (26) производится по ячейкам сеточной области  $\omega^{<i,k>}$ ,  $V^{<i,k>}$  – объем сеточной ячейки. Напряжения вдоль осей  $\sigma_{11}^{<i,k>}$ ,  $\sigma_{22}^{<i,k>}$ , напряжение сдвига  $\sigma_{12}^{<i,k>}$ , деформации  $\varepsilon_{11}^{<i,k>}$ ,  $\varepsilon_{22}^{<i,k>}$ ,  $\varepsilon_{12}^{<i,k>}$  вычисляются по формулам для ортотропного материала (2) в центрах ячеек  $\omega^{<i,k>}$ .

Таким образом, решение задачи нахождения напряженно-деформированного состояния представительного объема, как неоднородного материала с учетом геометрии и свойств включений при продольном растяжении, позволяет определить эффективный продольный модуль упругости в соответствии с формулой (26).

Видно, что на основе описанного подхода можно получить информацию об упругих макрохарактеристиках композиционного материала, которые обычно получают при механических испытаниях образцов в лабораторных условиях.

Пользуясь описанным методом, можно найти другие механические характеристики композиционного материала при соответствующем выборе граничных условий, имитирующих физические эксперименты, в частности, модуль упругости вдоль направления  $x$ .

## 8. Вычислительные эксперименты

Проведем ряд численных экспериментов по разработанному алгоритму для нахождения модуля упругости. В качестве материалов для экспериментов выбраны реально существующие композиционные системы, состоящие из матрицы и, например, одного из двух различных типов наполнителя, контрастирующих по своим механическим свойствам. Материалом матрицы во всех рассматриваемых случаях взята медь (Cu), упругие характеристики которой хорошо изучены и известны.

### 8.1. Численный расчет эффективного модуля Юнга композита на основе меди с различной объемной долей включения

В роли наполнителя рассматривали два альтернативных материала, модули упругости которых существенно отличаются от модуля упругости матрицы (Cu). Первый материал наполнителя – карбид вольфрама (WC), обладает значительно более высоким модулем упругости по сравнению с медью. Вторым вариантом – политетрафторэтилен (PTFE, тефлон), модуль упругости которого, напротив, значительно ниже, чем у меди. Свойства материалов приведены в табл. 1.

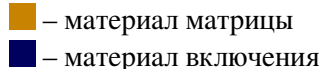






Выбор указанных комбинаций обусловлен не только их механической контрастностью, но и широким распространением в промышленности. Композиты системы Cu–WC активно используются в отраслях, требующих сочетания высокой тепло- и электропроводности, присущим медной матрице, и экстремальной твердости с износостойкостью, обеспечиваемой включениями карбида вольфрама. К типичным областям применения относятся радиаторы охлаждения (теплоотводы) для устройств силовой электроники и электрические контакты с повышенным эксплуатационным ресурсом [14; 15]. Композиты системы Cu–PTFE находят применение в узлах сухого трения и скольжения, функционирующих в условиях, где использование жидких смазочных материалов невозможно или затруднено. К таким условиям относятся вакуум, экстремально высокие или низкие температуры, агрессивные химические среды, а также специфические требования пищевой и медицинской промышленности [16].

Таблица 1. Свойства материалов, используемых для вычислительного эксперимента

Материал	Cu [8]	WC [17]	PTFE [18]
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	8960	15170	2200
Модуль Юнга $E$ , ГПа	110	655,8	0,68
Модуль сдвига $G$ , ГПа	41,5	271,4	0,24
Коэффициент Пуассона $\nu$	0,325	0,208	0,45

В качестве представительного объема рассматривалась область размером  $1,0^{-4} \times 1,0^{-4}$  м. Расчетная сетка выбрана равномерной  $10 \times 10$ , что соответствовало сеточному шагу  $1,0^{-5}$  м. Была проведена серия численных экспериментов по разработанному алгоритму с различной долей включения двух наполнителей. Расчетные значения модуля упругости для композита на основе меди с различной объемной долей включения приведены в табл. 2.

Таблица 2. Расчетные значения модуля упругости

Наполнитель	Элементы включения					
	0%	20%	40%	60%	80%	100%
Цифровое изображение композита: 						
Тефлон, $E_{\text{eff}}$ , ГПа	110,29	65,26	27,72	3,89	1,41	0,69
Карбид вольфрама, $E_{\text{eff}}$ , ГПа	110,29	164	239	357	484	657

В первой строке таблицы приводится процентное содержание наполнителя в композите, цифровое изображение ячейки периодичности которого иллюстрируют рисунки во второй строке таблицы. В третьей и четвертой строках таблицы приведены расчетные данные эффективного модуля упругости, соответствующие выбранному композиту.

График зависимости эффективного модуля упругости композита в зависимости от доли твердого включения приведен на рис. 5. Здесь точками отмечены значения, полученные из численного эксперимента.

Как видно из графиков рис. 5 для обоих экспериментов характерна одинаковая зависимость: при отсутствии наполнителя композит состоит только из материала матрицы, что на графике отражается значением эффективного модуля упругости при 0%, а при 100%-ном включении наполнителя – значением эффективного модуля упругости наполнителя.

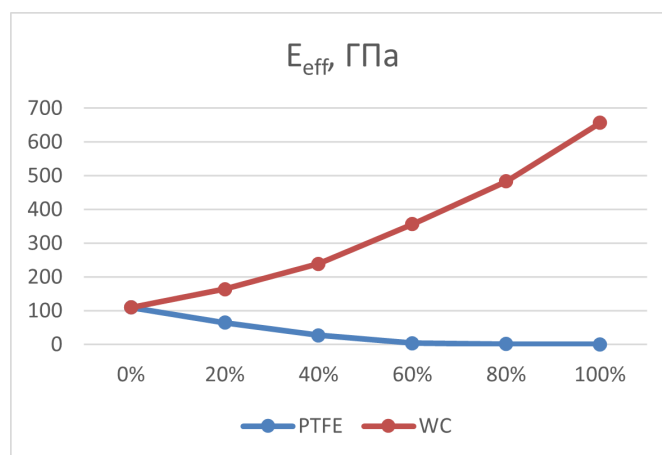


Рис. 5. Зависимость эффективного модуля упругости композита от объемной доли включения

## 8.2. Численный расчет эффективного модуля Юнга слоев градиентного покрытия на основе NiCr

Предложенный метод расчета упругих модулей может быть использован при разработке износостойких порошковых покрытий, модифицируемых твердыми тугоплавкими соединениями. К таким покрытиям предъявляются высокие требования относительно прочности и износостойкости. Поскольку поверхностный слой покрытия воспринимает значительную часть нагрузки при рабочих условиях и создает предпосылки его работоспособности в условиях доминирующего изнашивания, то он должен быть более твердым по сравнению с нижними слоями. Поэтому возникает необходимость в разработке градиентных покрытий, например, слоистой структуры с различным содержанием упрочняющей фазы. Слоистая структура покрытия и использование различной доли упрочняющей фазы дают возможность управлять механическими свойствами покрытия в различных частях области расчета. Например, можно подобрать процентное содержание упрочняющего компонента в композите так, чтобы конструкция покрытия создавала предпосылки повышения его прочности за счет постепенного изменения теплофизических свойств его слоев от подложки к рабочей поверхности.

Рассмотрим пример разработки износостойкого градиентного покрытия на основе матрицы из нихрома (NiCr) с добавлением разной доли твердых включений из карбида титана (TiC). На рис. 6 показана микроструктура обработанного двухслойного градиентного покрытия [19].

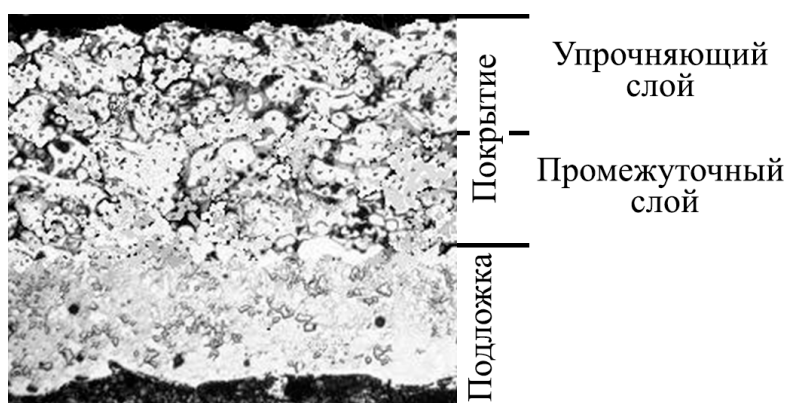


Рис. 6. Микроструктура обработанного градиентного покрытия

Как видно из рисунка, основными структурными элементами являются материал матрицы и добавочные включения, которые достаточно равномерно распределены в поверхностном и промежуточном градиентных слоях, создавая жесткую систему, которая воспринимает значительную часть контактной нагрузки трибосопряжения.

В качестве примера для вычислительного эксперимента по нахождению эффективного модуля упругости выберем два композита с матрицей из нихрома, но с различным содержанием упрочняющей фазы TiC и найдем модули упругости для выбранных композитов.

Рассмотрим два композитных материала с разной долей содержания упрочняющей фазы:

1. Композитный материал NiCr80/20 + 40 % TiC – верхний упрочняющий слой;
2. Композитный материал NiCr80/20 + 20 % TiC – промежуточный слой.

Размер включений TiC составляет 1–2 микрона. Механические характеристики матрицы NiCr80/20 и твердых включений TiC приведены в табл. 3.

Таблица 3. Механические характеристики материалов

Материал	NiCr80/20	TiC
Модуль Юнга $E$ , ГПа	218	450
Модуль сдвига $G$ , ГПа	85,2	190,7
Коэффициент Пуассона $\nu$	0,28	0,18

Из рис. 6 видно, что все включения распределены равномерно во всем объеме композиционного материала. Следуя описанному выше подходу, за область расчета (представительный объем композита) для численного метода нахождения эффективных модулей упругости берем ячейку периодичности.

В качестве представительного объема для вычислительного эксперимента была выбрана область размером  $1,0^{-4} \times 1,0^{-4}$  м. Производя схематизацию структуры композита для каждого слоя и описывая ее в соответствии с выбранным представительным объемом, построим решетку с достаточно мелким шагом, имитирующую композиционную систему.

Для численного метода использовали равномерный шаг сетки по обоим направлениям, равный  $1,0^{-5}$  м, что соответствовало минимальному размеру включения.

Таким образом, область расчета представлена в виде некоторой решетки, ячейки которой заполнены либо веществом матрицы, либо веществом включений в соответствии с его объемным содержанием. На рис. 7, *а* изображена область расчета, соответствующая композиту с 20%-ным содержанием TiC, на рис. 7, *б* – область расчета, соответствующая композиту с 40%-ным содержанием TiC. Оранжевым цветом отмечены ячейки матрицы с веществом NiCr80/20, темным синим цветом – ячейки с материалом TiC.

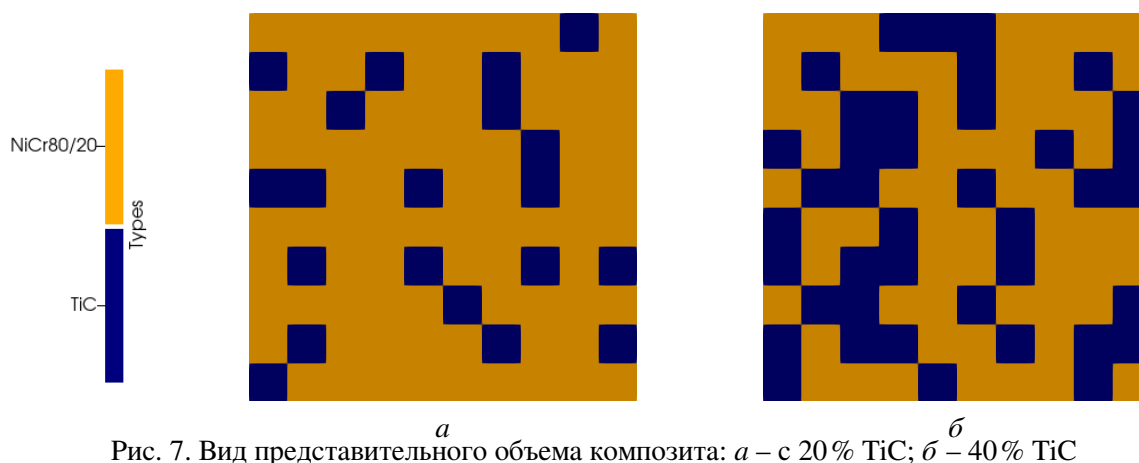


Рис. 7. Вид представительного объема композита: *а* – с 20 % TiC; *б* – 40 % TiC

Используя описанный в работе численный метод, были получены эффективные модули Юнга ( $E_{\text{eff}}$ ) соответствующего композита:  $E_{\text{eff}} = 257,1$  ГПа для материала с 20%-ным содержанием включений TiC и  $E_{\text{eff}} = 300,1$  ГПа для 40%-ного содержания.

Полученные результаты вычислений показывают, что увеличение доли твердого компонента приводит к росту эффективного модуля упругости композита. Таким образом, изменяя процентное содержание упрочняющего элемента и анализируя полученный в результате численного эксперимента эффективный модуль упругости соответствующего композита, можно сформировать конструкцию градиентных слоев покрытия таким образом, чтобы создавались предпосылки

повышения его прочности за счет постепенного изменения упругих характеристик начиная от подложки к рабочей поверхности.

Предложенный метод расчета упругих модулей может быть использован при разработке градиентных износостойких порошковых покрытий, модифицируемых твердыми тугоплавкими соединениями.

## 9. Заключение

Построенный с помощью метода контрольного объема с использованием структурированных четырехугольных сеток в декартовой системе координат численный метод расширяет возможности сеточных методов для решения задач механики в двумерных неоднородных областях сложной формы. Как показали расчеты, метод хорошо работает при наличии в области мелких включений с различными свойствами.

В работе предложен подход, позволяющий оценивать макроскопические механические упругие свойства композиционного порошкового материала по заданной микроструктуре композита, т. е. по известным свойствам и внутренней геометрии компонент включений, а также – при разной температуре. Путем ряда вычислительных экспериментов можно прогнозировать упругие технические модули композиционного материала в зависимости от температуры, объемного содержания и формы включений (наполнителя), а также, используя другие граничные условия можно исследовать упругие свойства в другом направлении. Такой подход представляется перспективным для разработчиков новых материалов и расширяет возможности конструирования композита под необходимые теплофизические и механические свойства.

## Литература

1. *Xiao-Su Yi, Shanyi Du, Litong Zhang*. Composite Materials Engineering, Volume 2. Different Types of Composite Materials. Singapore: Springer Singapore – Chemical Industry Press, 2018. 617 с. <https://doi.org/10.1007/978-981-10-5690-1>
2. *Dhuria Mohit, Grover Neeraj, Goyal Kavita*. Review of solution methodologies for structural analysis of composites // European Journal of Mechanics – A/Solids. 2024. Vol. 103. Art. 105157. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.105157>
3. *Alotaibi Hatim, Soutis Constantinos, Jabbari Masoud*. FEM and FVM methods for design and manufacturing of hierarchical aerospace composites: A review // Applied Sciences. 2025. Vol. 15, N 16. Art. 8896. <https://doi.org/10.3390/app15168896>
4. *Люкшин Б. А., Шилько С. В., Панин С. В. и др.* Дисперсно-наполненные полимерные композиты технического и медицинского назначения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2017. 311 с.
5. *Zvi Hashin*. Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2002. Vol. 50, N 12. P. 2509–2537. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(02\)00050-9](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(02)00050-9)
6. *Terada Kenjiro, Kikuchi Noboru*. Microstructural modeling technique for homogenization analysis using digital images // Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. Series A, 1998. Vol. 64, N 617. P. 170–177. <https://doi.org/10.1299/kikaia.64.170>
7. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1978. 512 с.
8. *Бабичев А. П. и др.* Физические величины: Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
9. *Колчанов Н. В., Колчанова Е. А.* Механика: методические указания к общему физическому практикуму. Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ), 2020. 121 с.
10. *Громько Г. Ф., Мацука Н. П., Ильющенко А. Ф. и др.* Численное исследование теплофизических свойств композиционного порошкового материала // Порошковая металлургия. 2020. № 43. С. 132–139.
11. *Авлас А. Н.* Численный расчет эффективного коэффициента теплопроводности дисперсно-наполненных композиционных материалов // Труды Института математики НАН Беларуси. 2024. Т. 32, №1. С. 86–96.

12. Henk A. van der Vorst. *Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 221 p.
13. Темам Р., Миранвиль А. Математическое моделирование в механике сплошных сред. М.: Лаборатория знаний, 2025. 323 с.
14. Никитин Д. С., Шаненков И. И., Насырбаев А. Р. и др. Получение порошков меди и металлматричных композитов с медной матрицей в плазме дугового разряда // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2026. Т. 337, № 2. С. 149–160. <https://doi.org/10.18799/24131830/2026/2/5232>
15. Ковтун В. А., Пасовец В. Н., Плескачевский Ю. М. и др. Триботехнические и прочностные характеристики гибридных нанонаполненных металлополимерных порошковых композитов // Вестник ПГУ. Серия В, Промышленность. Прикладные науки. 2016. № 3. С. 108–114.
16. Xiaoyan Zhang, Qian Lei, Yang Gao et al. High-strength wear-resistant Cu/tungsten carbide/diamond composites fabricated by powder metallurgy // *Adv. Eng. Mater.* 2024. Vol. 26, N 11. Art. 2302142. <https://doi.org/10.1002/adem.202302142>
17. Wang B., Praksh V. Sound speed measurements in shock compressed cemented tungsten carbide: Evolution of elastic moduli with damage at pressures to 100 GPa // *Journal of Applied Physics*. 2024. Vol. 135, N 13. Art. 135901. <https://doi.org/10.1063/5.0195772>
18. Berladir K., Zhyhylii D., Brejcha J. et al. Computer simulation of composite materials behavior under pressing // *Polymers*. 2022. Vol. 14, N. 23. Art. 5288. <https://doi.org/10.3390/polym14235288>
19. Ильющенко А. Ф., Шевцов А. И., Громыко Г. Ф. и др. К вопросу оптимизации технологических параметров упрочнения поверхностей трения газотермическим распылением металлокерамических порошков с последующей обработкой покрытий высокоэнергетическими импульсами // Порошковая металлургия. 2025. № 48. С. 195–202.

### References

1. Xiao-Su Yi, Shanyi Du, Litong Zhang. *Composite Materials Engineering, Volume 2: Different Types of Composite Materials*. Singapore, Springer Singapore – Chemical Industry Press, 2018. 617 p. <https://doi.org/10.1007/978-981-10-5690-1>
2. Dhuria Mohit, Grover Neeraj, Goyal Kavita. Review of solution methodologies for structural analysis of composites. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2024, vol. 103, art. 105157. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.105157>
3. Alotaibi Hatim, Soutis Constantinos, Jabbari Masoud. FEM and FVM methods for design and manufacturing of hierarchical aerospace composites: A review. *Applied Sciences*, 2025, vol. 15, no. 16, art. 8896. <https://doi.org/10.3390/app15168896>
4. Lyukshin B. A., Shilko S. V., Panin S. V. et al. *Dispersion-Filled Polymer Composites for Technical and Medical Purposes*. Novosibirsk, Publishing House of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2017. 311 p. (in Russian).
5. Zvi Hashin. Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2002, vol. 50, no. 12, pp. 2509–2537. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(02\)00050-9](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(02)00050-9)
6. Terada Kenjiro, Kikuchi Noboru. Microstructural modeling technique for homogenization analysis using digital images. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. Series A*, 1998, vol. 64, no. 617, pp. 170–177. <https://doi.org/10.1299/kikaia.64.170>
7. Lurie A. I. *Theory of Elasticity*. Moscow, Nauka, 1978. 512 p. (in Russian).
8. Babichev A. P. et al. *Physical Quantities: Handbook*. Moscow, Energoatomizdat, 1991. 1232 p. (in Russian).
9. Kolchanov N. V., Kolchanova E. A. *Mechanics: methodological guidelines for the general physics laboratory course*. Perm, Perm State National Research University (PSNRU), 2020. 121 p. (in Russian).
10. Gromyko G. F., Matsuka N. P., Piyushchenko A. F. et al. Numerical study of thermophysical properties of composite powder material. *Powder Metallurgy*, 2020, no. 43, pp. 132–139 (in Russian).
11. Avlas A. N. Numerical calculation of the effective thermal conductivity of dispersion-filled composite materials. *Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of*

*Belarus*, 2024, vol. 32, no. 1, pp. 86–96 (in Russian).

12. Henk A. van der Vorst. *Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems*. Cambridge, Cambridge University Press, 2003. 221 p.

13. Temam R., Miranville A. *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*. Moscow, Laboratory of Knowledge, 2025. 323 p. (in Russian).

14. Nikitin D. S., Shanenkov I. I., Nasyrbaev A. R. et al. Production of copper powders and metal-matrix composites with a copper matrix in arc discharge plasma. *Bulletin of Tomsk Polytechnic University. Geossets Engineering*, 2026, vol. 337, no. 2, pp. 149–160 (in Russian). <https://doi.org/10.18799/24131830/2026/2/5232>

15. Kovtun V. A., Pasovets V. N., Pleskachevsky Yu. M. et al. Tribotechnical and strength characteristics of hybrid nanofilled metal-polymer powder composites. *PSU Bulletin. Series B, Industry. Applied Sciences*, 2016, no. 3, pp. 108–114 (in Russian).

16. Xiaoyan Zhang, Qian Lei, Yang Gao et al. High-strength wear-resistant Cu/tungsten carbide/diamond composites fabricated by powder metallurgy. *Adv. Eng. Mater.*, 2024, vol. 26, no. 11, art. 2302142. <https://doi.org/10.1002/adem.202302142>

17. Wang B., Praksh V. Sound speed measurements in shock compressed cemented tungsten carbide: Evolution of elastic moduli with damage at pressures to 100 GPa. *Journal of Applied Physics*, 2024, vol. 135, no. 13, art. 135901. <https://doi.org/10.1063/5.0195772>

18. Berladir K., Zhyhylii D., Brejcha J. et al. Computer simulation of composite materials behavior under pressing. *Polymers*, 2022, vol. 14, no. 23, art. 5288. <https://doi.org/10.3390/polym14235288>

19. Ilyushchenko A. F., Shevtsov A. I., Gromyko G. F. et al. On the issue of optimizing technological parameters for strengthening friction surfaces by thermal spraying of metal-ceramic powders followed by coating treatment with high-energy pulses. *Powder Metallurgy*, 2025, no. 48, pp. 195–202 (in Russian).



ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ  
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА  
PROBABILITY THEORY AND  
MATHEMATICAL STATISTICS



UDC 519.872

<https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1-118-124>

EDN: PBYKZA

DETAILED PROOF OF ERGODICITY CONDITION FOR THE MULTI-SERVER  
RETRIAL QUEUEING SYSTEM WITH HETEROGENEOUS SERVERS AND PHASE  
TYPE DISTRIBUTION OF SERVICE

M. Liu, A. N. Dudin

Belarusian State University, Minsk, Belarus  
e-mail: liumei19910101@126.com, dudin@bsu.by

Received: 05.02.2026

Revised: 20.03.2026

Accepted: 29.06.2026

**Keywords:** Markovian arrival process, retrials, heterogeneous servers, phase-type distribution, asymptotically quasi-Toeplitz Markov chains, ergodicity.

**Abstract.** Detailed proof of ergodicity for a multi-server retrial queueing system with heterogeneous servers, service times having a phase-type distribution with different irreducible representations and customer arrival defined by a Markovian arrival process is given. The proof consists of the use of the asymptotically quasi-Toeplitz Markov chains and Markov renewal processes theory.

ПОДРОБНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УСЛОВИЯ ЭРГОДИЧНОСТИ  
ДЛЯ МНОГОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ  
С НЕОДНОРОДНЫМИ ПРИБОРАМИ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ  
ОБСЛУЖИВАНИЯ ФАЗОВОГО ТИПА

Лю Мэй, А. Н. Дудин

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
e-mail: liumei19910101@126.com, dudin@bsu.by

Поступила: 05.02.2026

Исправлена: 20.03.2026

Принята: 29.06.2026

**Ключевые слова:** марковский процесс поступления, повторные попытки, неоднородные серверы, распределение фазового типа, асимптотически квазитеплицевы цепи Маркова, эргодичность.

**Аннотация.** Представлено подробное доказательство условия эргодичности для многолинейной системы массового обслуживания с повторными попытками, неоднородными приборами, временем обслуживания, имеющим фазовое распределение с различными неприводимыми представлениями, и поступлением запросов, определяемым марковским процессом поступления. Доказательство состоит в использовании асимптотически квазитеплицевых цепей Маркова и теории марковских процессов обновления.

## 1. Introduction

Retrial queues are good mathematical models of a variety of important real-world systems. Therefore, their analysis attracts significant attention of many researchers. In [1], quite general multi-server retrial queueing system with a finite number of heterogeneous servers, service times having a phase-type distribution with different irreducible representations and customer arrival defined by a Markovian arrival process was analysed. The survey of the related research is provided there.

Essential step in analysis of any stochastic process is establishing conditions for ergodicity of the process. A random process is called ergodic if time averages of a single sample function (realization) are equal to the ensemble averages (the statistical average across all possible realizations). Equivalently, a random process is called ergodic if the statistical dependence between its values at two time points vanishes as the distance between these points increases to infinity. In application to queueing models, the

ergodicity of a process describing the dynamics of the system implies the existence of so called stationary regime of the system operation or stationary (steady-state, invariant) distribution of the system states.

Stochastic processes describing the dynamics of multi-server retrial queues are state inhomogeneous what makes derivation of ergodicity condition for these queues very difficult. In [1], such a condition is presented for quite general retrial queue with Markovian arrival process, heterogeneous servers whose service times have so-called phase-type (*PH*) distribution, arbitrary dependence of the total retrial rate on the number of retrying customers, the priority for service beginning given to the servers with the minimal serial number (index) and impossibility to preempt service and change the server at which service is provided. Ergodicity condition has a simple analytically tractable form. However, its proof, which is based on the use of the results obtained for so-called asymptotically quasi-Toeplitz Markov chains, see [2], presented in [1] appears to be too brief. The goals of this paper are: (i) to present such a proof in more detailed form; and (ii) to propose the new possible way for simplification of ergodicity condition for a large class of multidimensional Markov chains under the presence of some specifics of the concrete queueing model.

## 2. The mathematical model

We present here a very brief description of the retrial queue under study. Detailed description can be found in [1].

– The system has  $N$  independent, generally speaking, non-identical servers. Servers are enumerated in some order. Admitted customer receives service in the server having the minimal number among all idle servers. After service beginning, transition of the customer to another server is not allowed.

– The service time of a customer by  $n$ -th server,  $n = \overline{1, N}$ , has *PH* distribution. It is governed by the continuous-time Markov chain (directing process)  $\eta_t^{(n)}$ ,  $t \geq 0$ . This process has an absorbing state 0 and the set  $\{1, \dots, M^{(n)}\}$  of transient states. The initial state of the process  $\eta_t^{(n)}$  at the epoch of starting the service is chosen among the transient states with the probabilities defined by the entries of the row-vector  $\beta^{(n)} = (\beta_1^{(n)}, \dots, \beta_{M^{(n)}}^{(n)})$ . The transitions of the process  $\eta_t^{(n)}$  inside the set of transient states do not lead to service completion and are defined by the entries of the irreducible matrix  $S^{(n)}$  of size  $M^{(n)}$ . The diagonal entries of this matrix are negative. Their modules define the rates of the exit of the process  $\eta_t^{(n)}$  from its transient states. The non-diagonal entries define the intensities of transitions inside the set of the transient states. The rates of transition to the absorbing state, which lead to service completion, are defined by the entries of the column vector  $S_0^{(n)} = -S^{(n)}e$ .

The value  $\mu_n$  defined by the formula  $\mu_n^{-1} = \beta^{(n)}(-S^{(n)})^{-1}e$ ,  $n = \overline{1, N}$ , is the mean service rate in the  $n$ th server. More information about the *PH* distribution and its properties can be found in [3].

– The customers arrive according to a *MAP* (Markovian Arrival Process). The underlying process of the *MAP*,  $\nu_t$ ,  $t \geq 0$ , is the irreducible continuous-time Markov chain having the state space  $\{0, 1, \dots, W\}$ . The intensities of transitions of the process  $\nu_t$  are defined as the entries of the square matrices  $D_0$  and  $D_1$  of size  $\bar{W} = W + 1$ . The matrix  $D_0$  contains the intensities of transitions at which customers do not arrive. The matrix  $D_1$  contains the intensities of transitions at which customer arrives to the system. The vector  $\theta$  that is the unique solution to the system of equations  $\theta(D_0 + D_1) = \mathbf{0}$ ,  $\theta e = 1$  defines the stationary distribution of the process  $\nu_t$ . Here and thereafter  $e$  is a column vector of an appropriate size consisting of 1's and  $\mathbf{0}$  is a row vector of an appropriate size consisting of zeroes.

The average arrival rate  $\lambda$  of the *MAP* is defined as  $\lambda = \theta D_1 e$ .

More information about the *MAP* arrival flow, its properties, formulas for computation of the coefficients of correlation and variation as well as higher moments of distribution of inter-arrival times, important particular cases, possible generalizations and usefulness for modelling the correlated bursty flows in modern service systems, telecommunication networks in particular, can be found in the book [3].

– If the arriving customer meets idle servers, it immediately starts service in the server with the minimal number among available servers. If all servers are busy, then the arriving customer goes to the virtual place called orbit. Capacity of the orbit is unlimited. These customers are said to be repeated customers. These customers try their luck later until they will be served. We assume that the total flow of retrials from the orbit is such that the probability of generating the retrial attempt in the small interval

$(t, t + \Delta t)$  is equal to  $\alpha_i \Delta t + o(\Delta t)$  when the orbit size (the number of customers on the orbit) is equal to  $i$ ,  $i > 0$ ,  $\alpha_0 = 0$ . We assume the infinitely increasing retrial rate:  $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = \infty$ .

### 3. The random process defining the dynamics of the system

Description of the dynamics of any multi-server retrial queue with the *MAP* arrivals and *PH* distribution of service times includes information about the number, say  $i_t$ , of retrying customers at the moment  $t$ ,  $t > 0$ , where  $i_t \geq 0$ . Account of *MAP* arrivals implies permanent monitoring the state  $\nu_t$  of the underlying process of the arrivals,  $\nu_t = \overline{0, \bar{W}}$ . Additionally, account of the Markov processes with a finite state describing simultaneous service of admitted customers by the servers is mandatory. If servers are homogeneous and service times are exponentially distributed, the service process is completely defined by the number, say  $n_t$ , of busy servers. If servers are homogeneous and service times have more general, *PH*-type distribution, besides the number  $n_t$  of busy servers, it is necessary to specify the current phase of service at each busy server or the number of customers receiving service at any phase. In the considered in this paper system, the servers are heterogeneous. Therefore, for each server it is necessary to specify whether the server is busy or idle. In the former case, the current phase of service has to be specified.

Having in mind the presented considerations, we describe the dynamics of the system under study by the following multidimensional Markov process:

$$\zeta_t = \{i_t, \eta_t^{(1)}, \dots, \eta_t^{(N)}, \nu_t\}, \quad t \geq 0,$$

where  $\eta_t^{(n)}$  is the state of the underlying process of the service in the  $n$ th server,  $n = \overline{1, N}$ . This state belongs to the set  $\{1, \dots, M^{(n)}\}$  if this server is busy and is assumed to be 0 if the server is idle.

Let us enumerate the states of the Markov chain  $\zeta_t$  in the lexicographic order and call the set of the states of the chain having the value  $i$  of the component  $i_t$ , as level  $i$ ,  $i \geq 0$ . Let us combine the transition rates from the level  $i$  to level  $j$  into the square matrices  $\mathbf{Q}_{i,j}$  of size  $\hat{M}\bar{W}$ , where  $\hat{M} = \prod_{n=1}^N (M^{(n)} + 1)$ . Here,  $\max\{i-1, 0\} \leq j \leq i+1$ ,  $i \geq 0$ .

The following formulas for the matrices  $\mathbf{Q}_{i,j}$  are derived in [1]:

$$\mathbf{Q}_{i,i+1} = J \otimes D_1, \quad \mathbf{Q}_{i,i-1} = \alpha_i \tilde{I}_\beta \otimes I_{\bar{W}}, \quad \mathbf{Q}_{i,i} = G \oplus D_0 - \alpha_i \tilde{I} \otimes I_{\bar{W}} + \tilde{I}_\beta \otimes D_1.$$

Here: matrix  $J$  is defined as

$$J = \bigotimes_{n=1}^N J_n, \quad J_n = \begin{pmatrix} O_{1 \times 1} & O_{1 \times M^{(n)}} \\ O_{M^{(n)} \times 1} & I_{M^{(n)}} \end{pmatrix}, \quad n = \overline{1, N};$$

matrix  $G$  is defined as

$$G = \sum_{n=1}^N \left( I_{\prod_{l=1}^{n-1} (M^{(l)}+1)} \otimes G_n \otimes I_{\prod_{l=n+1}^N (M^{(l)}+1)} \right),$$

where the matrix  $G_n$ ,  $n = \overline{1, N}$ , is defined as

$$G_n = \begin{pmatrix} O_{1 \times 1} & O_{1 \times M^{(n)}} \\ S_0^{(n)} & S^{(n)} \end{pmatrix};$$

matrix  $\Gamma_n$  is defined as

$$\Gamma_n = \bigotimes_{l=1}^{n-1} J_l \otimes G_n \otimes \bigotimes_{l=n+1}^N J_l, \quad n = \overline{1, N};$$

matrix  $\tilde{I}_\beta$  is defined as

$$\tilde{I}_\beta = \sum_{n=1}^N \left( \bigotimes_{k=1}^{n-1} J_k \otimes \begin{pmatrix} O_{1 \times 1} & \beta^{(n)} \\ O_{M^{(n)} \times 1} & O_{M^{(n)} \times M^{(n)}} \end{pmatrix} \otimes I_{\prod_{k=n+1}^N (M^{(k)}+1)} \right);$$

$$\bar{I} = (I_{\hat{M}} - J);$$

$\otimes$  and  $\oplus$  are the symbols of the Kronecker product and sum of matrices, see, e. g., [4].

Derivation of ergodicity conditions for the Markov chain  $\zeta_t$  is based on the use of the corresponding results for the asymptotically quasi-Toeplitz Markov chains given in [2]. According to [2], it is necessary to consider the discrete-time multidimensional Markov chain describing transitions of the states of the continuous-time Markov chain  $\zeta_t$  at all moments of the jumps of the chain  $\zeta_t$ .

For this embedded Markov chain, it is proven in [1] that the following limits exist:

$$Y_0 = \lim_{i \rightarrow \infty} R_i^{-1} \mathbf{Q}_{i,i-1}, Y_2 = \lim_{i \rightarrow \infty} R_i^{-1} \mathbf{Q}_{i,i+1}, Y_1 = \lim_{i \rightarrow \infty} R_i^{-1} \mathbf{Q}_{i,i} + I,$$

where  $R_i = -I \circ \mathbf{Q}_{i,i} = \alpha_i \bar{I} \otimes I_{\bar{W}} + C$ ,  $i \geq 0$ , where  $C = -I \circ (G \oplus D_0)$  and  $\circ$  denotes Hadamard product of matrices, see [5].

By direct calculations, it was shown in [1] that the matrices  $Y_k$ ,  $k = 0, 1, 2$ , are defined by formulas

$$Y_0 = \bar{I}_{\beta} \otimes I_{\bar{W}}, Y_2 = C^{-1}(J \otimes D_1), Y_1 = C^{-1}\left(\sum_{n=1}^N \Gamma_n \oplus D_0\right) + J \otimes I_{\bar{W}}.$$

#### 4. Proof of ergodicity condition

The following assertion is given in [1].

**Theorem 4.1.** *The following statements hold good:*

(i) *The Markov chain  $\zeta_t$  is ergodic if the inequality*

$$\lambda < \sum_{k=1}^N \mu_k \quad (1)$$

*is fulfilled.*

(ii) *The Markov chain  $\zeta_t$  is non-ergodic if*

$$\lambda > \sum_{k=1}^N \mu_k.$$

**Proof.** According to [2], the Markov chain  $\zeta_t$  is ergodic if the inequality

$$\mathbf{y}Y_2\mathbf{e} < \mathbf{y}Y_0\mathbf{e}, \quad (2)$$

where the vector  $\mathbf{y}$  is the unique solution of the system

$$\mathbf{y}(Y_0 + Y_1 + Y_2) = \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}\mathbf{e} = 1 \quad (3)$$

is fulfilled.

The Markov chain  $\zeta_t$  is non-ergodic if inequality (2) has an opposite sign.

Condition (2) is easily verified on computer for any asymptotically quasi-Toeplitz Markov chain, once the limiting matrices  $Y_k$ ,  $k = 0, 1, 2$ , are computed and a finite system (3) is solved.

However, sometimes, when the generator  $\mathbf{Q}$  of the chain has some specifics, it is possible to reduce inequality (2) to the simple and transparent scalar form like (1) in the model under study in this paper. To implement such a reduction, it is necessary to solve system (3) not numerically, but explicitly.

If the servers of the multi-server retrial queue are identical, the levels  $i$  can be evidently partitioned into sublevels  $((i, 0), (i, 1), \dots, (i, N))$  where sublevel  $(i, n)$  contains the states of the Markov chain when  $i$  customers stay in orbit and  $n$  servers are busy. Correspondingly, vector  $\mathbf{y}$ , which is solution of system (3), is partitioned as  $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N)$ . Using such a presentation, often system (3) can be solved explicitly. Matrix of this system is reducible. This causes that the vectors  $\mathbf{y}_n$ ,  $n = \overline{0, N-2}$ , are equal to zero. The vectors  $\mathbf{y}_n$ ,  $n = N-1, N$  are then found as solution of a small subsystem of system (3).

However, in analysis of the queueing system under study, such a natural decomposition of the vector  $\mathbf{y}$  is not possible due to the complicated structure of the matrix  $(Y_0 + Y_1 + Y_2)$  of this system which excludes the possibility of the partition  $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N)$ . Therefore, we cannot solve the system (3) by means

of the algebraic manipulations as in the case of homogeneous servers. Instead, we use the probabilistic considerations.

Let us denote by  $\mathbf{u}_n$ ,  $n = \overline{0, N}$ , the vectors obtained from the vector  $\mathbf{y}$  by setting equal to zero all the components that correspond to the states of the Markov chain  $\zeta_t$  such that the number of busy servers is not equal to  $n$ . In other words, the vector  $\mathbf{u}_n$  includes only the corresponding entries of the vector  $\mathbf{y}$  for which the number of the components  $\eta_t^{(l)}$ ,  $l = \overline{1, N}$ , such that  $\eta_t^{(l)} \neq 0$  is equal to  $n$ .

It is obvious, that

$$\mathbf{y} = \sum_{n=0}^N \mathbf{u}_n.$$

According to definition in [2], the vector  $\mathbf{y}$  defines the stationary distribution of the discrete-time Markov chain that is embedded at the moments immediately after the jumps of the continuous-time Markov chain  $\zeta_t$  when the value of the component  $i_t$  approaches infinity. Because when the component  $i_t$  approaches infinity, i.e., the number of customers in the orbit becomes infinite, the new service begins immediately after service completion in any server. Therefore, with the positive probability, the number of busy servers at the embedded moment can be equal to  $N$  (when no transitions of the underlying process of arrivals or underlying processes of service, which imply the service completion, occur at the jump moment) or equal to  $N - 1$  when the transition of the underlying processes of service, which leads to service completion in one of the busy servers, occurs. In the latter case, new service immediately starts in the just released server.

As follows from the presented consideration, the vectors  $\mathbf{u}_n$  are zero vectors for  $n = \overline{0, N-2}$ , and, therefore, the vector  $\mathbf{y}$ , which is the solution of system (3), is defined by

$$\mathbf{y} = \mathbf{u}_N + \mathbf{u}_{N-1}. \quad (4)$$

Let us calculate the vectors  $\mathbf{u}_N$  and  $\mathbf{u}_{N-1}$ . It is known, see, e. g., [3; 6], that if the service in the  $n$ th server is providing permanently, i. e., new service begins immediately after service completion, then the steady-state distribution of the underlying process of service in this server is defined by the vector

$$\boldsymbol{\psi}_n = \mu_n \boldsymbol{\beta}^{(n)} (-S^{(n)})^{-1}, \quad n = \overline{1, N},$$

and the joint steady-state distribution of the underlying processes of service in the system with permanently busy  $N$  servers is defined by the vector

$$\boldsymbol{\Psi} = \bigotimes_{n=1}^N (0, \boldsymbol{\psi}_n)$$

which is the solution of the system

$$\boldsymbol{\Psi} \sum_{n=1}^N \left[ \bigotimes_{k=1}^{n-1} J_k \otimes \begin{pmatrix} O_{1 \times 1} & O_{1 \times M^{(n)}} \\ O_{M^{(n)} \times 1} & S^{(n)} + \mathbf{S}_0^{(n)} \boldsymbol{\beta}^{(n)} \end{pmatrix} \otimes \bigotimes_{k=n+1}^N J_k \right] = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\Psi} \mathbf{e} = 1.$$

Therefore, the vector of the stationary probabilities of these underlying processes and, independent of them, underlying process of arrivals at an arbitrary moment is equal to  $\boldsymbol{\Psi} \otimes \boldsymbol{\theta}$  where, as it is defined above,  $\boldsymbol{\theta}$  is the vector of the steady state probabilities of the underlying process of arrivals.

As follows from the theory of Markov renewal processes, see, e. g., [3; 7], the vectors of the stationary probabilities of all underlying processes at an arbitrary moment are expressed via the vectors of the stationary probabilities of these processes at the jump moments as follows:

$$\boldsymbol{\Psi} \otimes \boldsymbol{\theta} = \tau^{-1} \mathbf{u}_N \int_0^{\infty} e^{I \circ G x} \otimes e^{I \circ D_0 x} dx = \tau^{-1} \mathbf{u}_N \int_0^{\infty} e^{I \circ (G \oplus D_0) x} dx \quad (5)$$

where  $\tau$  is the average length of the interval between the jumps, the matrix  $e^{I \circ G x}$  defines the probability that the underlying processes of the service make no transition during time  $x$  and the matrix  $e^{I \circ D_0 x}$  defines the probability that the underlying process of the arrivals makes no transition during time  $x$ .

By calculating the integral, what is possible because the matrix  $G \oplus D_0$  is the irreducible subgenerator, relation (5) is rewritten as

$$\boldsymbol{\Psi} \otimes \boldsymbol{\theta} = \tau^{-1} \mathbf{u}_N C^{-1},$$

what is equivalent to

$$\mathbf{u}_N = \tau(\boldsymbol{\psi} \otimes \boldsymbol{\theta})C. \quad (6)$$

Formula for computation of the vector  $\mathbf{u}_{N-1}$  is easily derived using the following consideration. Transition of the embedded Markov chain to the state where  $N - 1$  servers are busy is possible from the state when  $N$  servers are busy after some time, say,  $x$ ,  $x \geq 0$ , during which no transitions occur, via service completion in one of busy servers during the small interval  $(x, x + dx)$ . The rates of the service completion in one of  $n$ th busy servers, conditional that the system is overloaded, i. e., all other servers are busy as well and new service immediately starts in the released server, are given by the matrix  $\tilde{\Gamma}_n = \bigotimes_{l=1}^{n-1} J_l \otimes \tilde{G}_n \otimes \bigotimes_{l=n+1}^N J_l$ ,  $n = \overline{1, N}$ , where the matrix  $\tilde{G}_n$  is defined as

$$\tilde{G}_n = \begin{pmatrix} O_{1 \times 1} & O_{1 \times M^{(n)}} \\ \mathbf{0}^T & S_0^{(n)} \boldsymbol{\beta}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad n = \overline{1, N}.$$

Here  $\mathbf{0}^T$  is the transposed row vector  $\mathbf{0}$ .

As the result of these considerations, we obtain formula

$$\mathbf{u}_{N-1} = \mathbf{u}_N \int_0^\infty e^{I \circ (G \oplus D_0)x} \left( \sum_{n=1}^N \tilde{\Gamma}_n \otimes I_{\bar{W}} \right) dx$$

or, finally,

$$\mathbf{u}_{N-1} = \mathbf{u}_N C^{-1} \left( \sum_{n=1}^N \tilde{\Gamma}_n \otimes I_{\bar{W}} \right) = \tau(\boldsymbol{\psi} \otimes \boldsymbol{\theta}) \left( \sum_{n=1}^N \tilde{\Gamma}_n \otimes I_{\bar{W}} \right). \quad (7)$$

Formulas (4), (6), and (7) completely define the vector  $\mathbf{y}$  that is the solution of system (3). Note that the positive constant  $\tau$  can be easily found from the normalization condition  $(\mathbf{u}_{N-1} + \mathbf{u}_N)\mathbf{e} = 1$ , but we do not need to know this constant in further derivation.

Now, we have to derive inequality (1) from inequality (2). It follows from (4) that inequality (2) can be rewritten as

$$\mathbf{u}_N Y_2 \mathbf{e} + \mathbf{u}_{N-1} Y_2 \mathbf{e} < \mathbf{u}_N Y_0 \mathbf{e} + \mathbf{u}_{N-1} Y_0 \mathbf{e}.$$

This inequality is reduced to a simpler form

$$\mathbf{u}_N Y_2 \mathbf{e} < \mathbf{u}_{N-1} Y_0 \mathbf{e} \quad (8)$$

because the matrix  $Y_2$  has non-zero rows only for the states of the embedded Markov chain corresponding to all busy servers while the vector  $\mathbf{u}_{N-1}$  has non-zero components corresponding to  $N - 1$  busy servers; the matrix  $Y_0$  has non-zero rows only for the states of the embedded Markov chain when at least one server is idle while the vector  $\mathbf{u}_N$  has non-zero components only for the states with  $N$  busy servers.

The left hand side of inequality (8) is transformed as follows:

$$\mathbf{u}_N Y_2 \mathbf{e} = \tau(\boldsymbol{\psi} \otimes \boldsymbol{\theta})(J \otimes D_1)\mathbf{e} = \tau(\boldsymbol{\psi} J \otimes \boldsymbol{\theta} D_1)\mathbf{e} = \tau(\boldsymbol{\psi} J)\mathbf{e} \otimes (\boldsymbol{\theta} D_1)\mathbf{e} = \tau\lambda. \quad (9)$$

The so-called mixed product rule for the Kronecker products of matrices  $((AB) \otimes (CD) = (A \otimes C)(B \otimes D)$  for matrices  $A, B, C, D$  of matching sizes) was used in transformations (9) along with the definition of the mean arrival rate  $\lambda$ .

The right hand side of inequality (8) is transformed as follows:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{N-1} Y_0 \mathbf{e} &= \tau(\boldsymbol{\psi} \otimes \boldsymbol{\theta}) \left( \sum_{n=1}^N \tilde{\Gamma}_n \otimes I_{\bar{W}} \right) \mathbf{e} = \tau \boldsymbol{\psi} \left( \sum_{n=1}^N \tilde{\Gamma}_n \right) \mathbf{e} = \\ &= \tau \bigotimes_{n=1}^N (0, \boldsymbol{\psi}_n) \left( \sum_{n=1}^N \bigotimes_{l=1}^{n-1} J_l \otimes \tilde{G}_n \otimes \bigotimes_{l=n+1}^N J_l \right) \mathbf{e} = \tau \sum_{n=1}^N \mu_n. \end{aligned} \quad (10)$$

Inequality (1) evidently follows from formulas (8), (9), and (10). Theorem is proven.  $\square$

### References

1. Liu M., Dudin A. N. Steady-state analysis of the multi-server retrial queueing system with heterogeneous servers and phase type distribution of service times. *Proceedings of the Institute of Mathematics of the NAS of Belarus*, 2025, vol. 33, no. 1, pp. 111–120.
2. Klimenok V. I., Dudin A. N. Multi-dimensional asymptotically quasi-Toeplitz Markov chains and their application in queueing theory. *Queueing Systems*, 2006, vol. 54, pp. 245–259.
3. Dudin A. N., Klimenok V. I., Vishnevsky V. M. *The Theory of Queuing Systems with Correlated Flows*. Springer Nature, 2020.
4. Graham A. *Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications*. Courier Dover Publications, Mineola, 2018.
5. Horn R. A., Johnson C. R. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2012.
6. Neuts M. *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models*. North Chelmsford, Courier Corporation, 1994.
7. Cinlar E. *Introduction to Stochastic Processes*. Courier Corporation, 2013.



УДК 515.12

<https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1-125-130>

EDN: YLIFFX

О СОВПАДЕНИИ НЕКОТОРЫХ ИНФИМАЛЬНЫХ ТОПОЛОГИЙ  
ЭКСПОНЕНТЫ МЕТРИЗУЕМОГО ПРОСТРАНСТВА

А. С. Бедрицкий, В. Л. Тимохович

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
e-mail: [timvlaleo@gmail.com](mailto:timvlaleo@gmail.com), [bedrickiAS@bsu.by](mailto:bedrickiAS@bsu.by)

Поступила: 02.10.2025

Исправлена: 29.05.2026

Принята: 29.05.2026

**Ключевые слова:** гиперпространство, метрика Хаусдорфа,  $\rho$ -проксимальная топология, топология Вайсмана, инфимальная топология.

**Аннотация.** Рассматриваются метризуемое топологическое пространство  $X$  и множество  $\Omega_X$  всех метрик, порождающих топологию этого пространства. Как известно, эквивалентным метрикам  $\rho$  и  $\sigma$  из  $\Omega_X$  на экспоненте  $\exp X$  могут соответствовать различные топологии  $\tau_{\hat{\rho}}$  и  $\tau_{\hat{\sigma}}$ , порожденные метриками Хаусдорфа  $\hat{\rho}$  и  $\hat{\sigma}$ , различные проксимальные топологии  $\tau_{\delta(\rho)}$  и  $\tau_{\delta(\sigma)}$  и различные топологии Вайсмана  $\tau_{W(\rho)}$  и  $\tau_{W(\sigma)}$ . Таким образом, на  $\exp X$  возникают семейства топологий  $\mathcal{T}_H = \{\tau_{\hat{\rho}} \mid \rho \in \Omega_X\}$ ,  $\mathcal{T}_\delta = \{\tau_{\delta(\rho)} \mid \rho \in \Omega_X\}$  и  $\mathcal{T}_W = \{\tau_{W(\rho)} \mid \rho \in \Omega_X\}$ . В предлагаемой статье описаны случаи совпадения инфимумов указанных семейств, т. е. топологий  $\tau_{H(\text{inf})} = \inf \mathcal{T}_H$ ,  $\tau_{\delta(\text{inf})} = \inf \mathcal{T}_\delta$  и  $\tau_{W(\text{inf})} = \inf \mathcal{T}_W$ :  $\tau_{H(\text{inf})} = \tau_{\delta(\text{inf})}$  тогда и только тогда, когда пространство  $X$  обладает счетной базой, равенства  $\tau_{H(\text{inf})} = \tau_{W(\text{inf})}$  и  $\tau_{\delta(\text{inf})} = \tau_{W(\text{inf})}$  имеют место тогда и только тогда, когда пространство  $X$  компактно. Помимо этого установлено, что топологии  $\tau_{\delta(\text{inf})}$  и  $\tau_{W(\text{inf})}$  секвенциальны тогда и только тогда, когда исходное пространство  $X$  обладает счетной базой.

ON THE COINCIDENCE OF SOME INFIMAL HYPERSPACE TOPOLOGIES  
OF A METRIZABLE SPACE

A. S. Bedritskiy, V. L. Timokhovich

Belarusian State University, Minsk, Belarus  
e-mail: [timvlaleo@gmail.com](mailto:timvlaleo@gmail.com), [bedrickiAS@bsu.by](mailto:bedrickiAS@bsu.by)

Received: 02.10.2025

Revised: 29.05.2026

Accepted: 29.05.2026

**Keywords:** hyperspace, Hausdorff metric,  $\rho$ -proximal topology, Wijsman topology, infimum topology.

**Abstract.** A metrizable topological space  $X$  and the set  $\Omega_X$  of all metrics generating the topology of  $X$  are considered. It is well known that, in general, equivalent metrics  $\rho$  and  $\sigma$  from  $\Omega_X$  can determine different Hausdorff metric topologies  $\tau_{\hat{\rho}}$  and  $\tau_{\hat{\sigma}}$ , different proximal topologies  $\tau_{\delta(\rho)}$  and  $\tau_{\delta(\sigma)}$  and different Wijsman topologies  $\tau_{W(\rho)}$  and  $\tau_{W(\sigma)}$  on  $\exp X$ . Thus the families of topologies  $\mathcal{T}_H = \{\tau_{\hat{\rho}} \mid \rho \in \Omega_X\}$ ,  $\mathcal{T}_\delta = \{\tau_{\delta(\rho)} \mid \rho \in \Omega_X\}$  and  $\mathcal{T}_W = \{\tau_{W(\rho)} \mid \rho \in \Omega_X\}$  appear on the  $\exp X$ . We've described the cases when the infimums of this families, i.e. the topologies  $\tau_{H(\text{inf})} = \inf \mathcal{T}_H$ ,  $\tau_{\delta(\text{inf})} = \inf \mathcal{T}_\delta$  and  $\tau_{W(\text{inf})} = \inf \mathcal{T}_W$  coincide:  $\tau_{H(\text{inf})} = \tau_{\delta(\text{inf})}$  if and only if the space  $X$  is second countable,  $\tau_{H(\text{inf})} = \tau_{W(\text{inf})}$  and  $\tau_{\delta(\text{inf})} = \tau_{W(\text{inf})}$  if and only if the space  $X$  is compact. Besides it is found that the topologies  $\tau_{\delta(\text{inf})}$  and  $\tau_{W(\text{inf})}$  are sequential if and only if the space  $X$  is second countable.

1. Введение

На экспоненте  $\exp X$  метризуемого топологического пространства  $X$  кроме классической топологии Вьеториса  $\tau_V$  и топологии Фелла  $\tau_F$  для любой допустимой (т. е. согласованной с топологией) метрики  $\rho$  на  $X$  определены метрика Хаусдорфа  $\hat{\rho}$  и соответствующая топология  $\tau_{\hat{\rho}}$ ,  $\rho$ -проксимальная топология  $\tau_{\delta(\rho)}$  [1] и топология Вайсмана  $\tau_{W(\rho)}$  [2, chapter 2]. При замене метрики  $\rho$  на эквивалентную ей метрику  $\sigma$  на  $\exp X$  возникают новые топологии  $\tau_{\hat{\sigma}}$ ,  $\tau_{\delta(\sigma)}$  и  $\tau_{W(\sigma)}$ , отличные, вообще говоря, от

топологий  $\tau_{\hat{\rho}}$ ,  $\tau_{\delta(\rho)}$  и  $\tau_{W(\rho)}$  соответственно. Таким образом, на  $\text{exp} X$  возникают как самостоятельные объекты целые семейства экспоненциальных топологий  $\mathcal{T}_H = \{\tau_{\hat{\rho}} \mid \rho \in \Omega_X\}$ ,  $\mathcal{T}_{\delta} = \{\tau_{\delta(\rho)} \mid \rho \in \Omega_X\}$  и  $\mathcal{T}_W = \{\tau_{W(\rho)} \mid \rho \in \Omega_X\}$ , где  $\Omega_X$  – множество всех допустимых метрик на  $X$ . Как известно, для всякого семейства топологий  $\mathcal{T}$  определены его точные нижняя и верхняя грани (т. е. инфимум и супремум)  $\tau_{\text{inf}}$  и  $\tau_{\text{sup}}$  соответственно, где  $\tau_{\text{inf}} = \bigcap \mathcal{T}$ , а  $\tau_{\text{sup}}$  задается предбазой  $\bigcup \mathcal{T}$ . Оказалось, что супремумы семейств  $\mathcal{T}_{\delta}$  и  $\mathcal{T}_W$  совпадают с топологией Вьеториса  $\tau_V$  [1], а супремум семейства  $\mathcal{T}_H$  является топологией вьеторисовского типа, названной в [3] *локально конечной топологией*.

Предлагаемая статья посвящена некоторым свойствам инфимумов  $\tau_{H(\text{inf})}$ ,  $\tau_{\delta(\text{inf})}$  и  $\tau_{W(\text{inf})}$  указанных выше семейств топологий  $\mathcal{T}_H$ ,  $\mathcal{T}_{\delta}$  и  $\mathcal{T}_W$  соответственно. По своей тематике она примыкает к работе авторов [4], а также к публикациям [1; 5; 6].

Основными результатами работы являются, во-первых, описание случаев совпадения между топологиями  $\tau_{H(\text{inf})}$ ,  $\tau_{\delta(\text{inf})}$  и  $\tau_{W(\text{inf})}$ : равенство  $\tau_{H(\text{inf})} = \tau_{\delta(\text{inf})}$  имеет место тогда и только тогда, когда пространство  $X$  обладает счетной базой (теорема 3.9), равенства  $\tau_{\delta(\text{inf})} = \tau_{W(\text{inf})}$  и  $\tau_{H(\text{inf})} = \tau_{W(\text{inf})}$  – тогда и только тогда, когда пространство  $X$  компактно (теорема 3.6 и следствие 3.7), и, во-вторых, установление критерия секвенциальности топологий  $\tau_{\delta(\text{inf})}$  и  $\tau_{W(\text{inf})}$  (топология  $\tau_{H(\text{inf})}$  секвенциальна всегда): топологии  $\tau_{\delta(\text{inf})}$  и  $\tau_{W(\text{inf})}$  секвенциальны тогда и только тогда, когда пространство  $X$  со счетной базой (теоремы 3.1 и 3.2).

Приведем основные понятия и обозначения, встречающиеся в тексте.

Напомним, что пространство  $X$  называют секвенциальным, если для любого незамкнутого множества  $A \subset X$  найдутся точка  $x \in X \setminus A$  и последовательность  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ , сходящаяся к  $x$ .

Под экспонентой  $\text{exp} X$  пространства  $X$  будем понимать множество всех *непустых* замкнутых подмножеств пространства  $X$ .

Обозначим:  $[A]_X$  ( $[A]_{\tau}$ ) – замыкание  $A$  в пространстве  $X$  (относительно топологии  $\tau$  соответственно);

$$B_{\rho}(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}, D_{\rho}(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq \varepsilon\}$$

и

$$B_{\rho}(A, \varepsilon) = \bigcup_{a \in A} B_{\rho}(a, \varepsilon)$$

– открытый и замкнутый шары и  $\varepsilon$ -раздутье множества  $A$  относительно метрики  $\rho$  соответственно ( $\varepsilon > 0$ );

$$A^- = \{F \in \text{exp} X \mid F \cap A \neq \emptyset\}, A^+ = \{F \in \text{exp} X \mid F \subset A\},$$

$$A^{++} = \{F \in \text{exp} X \mid B_{\rho}(F, \varepsilon) \subset A \text{ для некоторого } \varepsilon > 0\}$$

( $A^{++(\rho)}$  при необходимости уточнения),

$$\mathcal{W}_{\rho}(x, \varepsilon) = \{F \in \text{exp} X \mid F \cap D_{\rho}(x, \varepsilon') = \emptyset \text{ для некоторого } \varepsilon' > \varepsilon\} \ (\varepsilon > 0);$$

$\Omega_X$  – множество всех допустимых (т. е. порождающих топологию пространства  $X$ ) метрик на  $X$ . Через

$$\hat{\rho}(F, P) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid B_{\rho}(F, \varepsilon) \supset P \text{ и } B_{\rho}(P, \varepsilon) \supset F\}$$

обозначим метрику Хаусдорфа на  $\text{exp} X$ , соответствующую метрике  $\rho \in \Omega_X$  (возможно  $\hat{\rho}(F, P) = \infty$  для некоторых  $F, P \in \text{exp} X$ , что не влияет на определение топологии  $\tau_{\hat{\rho}}$ ).

Напомним, что топологии Вьеториса  $\tau_V$ , Фелла  $\tau_F$ , Вайсмана  $\tau_{W(\rho)}$  и  $\rho$ -проксимальная  $\tau_{\delta(\rho)}$ ,  $\rho \in \Omega_X$ , на  $\text{exp} X$  задаются предбазами, состоящими из множеств вида:  $U^-$  и  $U^+$  для  $\tau_V$ , где  $U^-$  – открытое в  $X$  множество;  $U^-$  и  $V^+$  для  $\tau_F$ , где  $U$  и  $V$  – открытые в  $X$  множества и  $X \setminus V$  компактно;  $U^-$  и  $\mathcal{W}_{\rho}(x, \varepsilon)$  для  $\tau_{W(\rho)}$ , где  $U$  – открытое в  $X$  множество,  $x \in X$ ;  $U^-$  и  $U^{++}$  для  $\tau_{\delta(\rho)}$ , где  $U$  – открытое в  $X$  множество.

Пространства  $(\text{exp} X, \tau_V)$ ,  $(\text{exp} X, \tau_F)$  и т. п. будем кратко обозначать  $\text{exp}_V X$ ,  $\text{exp}_F X$  и т. п. Будем также употреблять сокращенные записи, например,  $F_n \xrightarrow{\delta(\rho)} F$  вместо  $F_n \xrightarrow{\tau_{\delta(\rho)}} F$  (сходимость относительно топологии  $\tau_{\delta(\rho)}$ ) и т. п.

Говорят, что пространство  $X$  удовлетворяет условию (US) (Unique Sequential limit), или является US-пространством, если в  $X$  не существует последовательности, сходящейся одновременно к различным точкам (в работе авторов [4] для этого условия использовалось обозначение (Lim)).

## 2. Предварительные рассмотрения

Основные соотношения между топологиями  $\tau_V$ ,  $\tau_{\hat{\rho}}$ ,  $\tau_{\delta(\rho)}$ ,  $\tau_{W(\rho)}$  и  $\tau_F$  хорошо известны (см., например, [1]). Приведем соответствующее

**Предложение 2.1.** Для любой метрики  $\rho \in \Omega_X$  справедливы соотношения  $\tau_F \leq \tau_{W(\rho)} \leq \tau_{\delta(\rho)}$  (т. е.  $\tau_F \subset \tau_{W(\rho)} \subset \tau_{\delta(\rho)}$ ),  $\tau_{\delta(\rho)} \leq \tau_V$  и  $\tau_{\delta(\rho)} \leq \tau_{\hat{\rho}}$  (т. е.  $\tau_{\delta(\rho)} \subset \tau_V \cap \tau_{\hat{\rho}}$ ).

Предложение 2.1 влечет

**Следствие 2.2.** Справедливы соотношения  $\tau_F \leq \tau_{W(\text{inf})} \leq \tau_{\delta(\text{inf})} \leq \tau_{H(\text{inf})}$  и  $\tau_{\delta(\text{inf})} \leq \tau_V$ .

Для выяснения условий секвенциальности топологий  $\tau_{\delta(\text{inf})}$  и  $\tau_{W(\text{inf})}$  нам понадобятся следующие утверждения.

**Предложение 2.3 [5].** Инфимум любого семейства секвенциальных топологий является секвенциальной топологией.

**Теорема 2.4 [1].** Пусть  $(X, \rho)$  – метрическое пространство. Пространство  $\text{exp}_{\delta(\rho)} X$  удовлетворяет первой аксиоме счетности тогда и только тогда, когда  $X$  обладает счетной базой.

**Теорема 2.5 [2, th. 2.1.5].** Пространство  $\text{exp}_{W(\rho)} X$  метризуемо тогда и только тогда, когда метрическое пространство  $(X, \rho)$  обладает счетной базой.

**Замечание 2.6.** Теоремы 2.4 и 2.5 остаются справедливыми при замене метрики  $\rho$  на эквивалентную.

**Предложение 2.7 [4].** Топология Фелла на экспоненте  $\text{exp} X$  метризуемого пространства  $X$  удовлетворяет условию (US).

**Замечание 2.8.** В [4] предложение 2.7 доказано в более общей ситуации:  $X$  хаусдорфово и удовлетворяет условию Фреше–Урысона.

Из предложения 2.7 очевидным образом вытекает

**Следствие 2.9.** Пусть  $\tau$  – топология на экспоненте  $\text{exp} X$  метризуемого пространства  $X$  и  $\tau \geq \tau_F$ . Тогда  $\tau$  удовлетворяет условию (US).

**Лемма 2.10.** Пусть  $\mathcal{T}$  – некоторое семейство секвенциальных топологий на экспоненте  $\text{exp} X$  метризуемого пространства  $X$ , причем  $\tau_F \leq \tau \leq \tau_V$  для любой топологии  $\tau \in \mathcal{T}$ . Тогда: 1) пространство  $X$  обладает счетной базой; 2) топология  $\tau_{\text{inf}} = \inf \mathcal{T}$  секвенциальна и удовлетворяет условию (US); 3) если  $F_n \xrightarrow{\tau_{\text{inf}}} F$ , то можно выбрать топологию  $\tau \in \mathcal{T}$  и подпоследовательность  $(F_{n_i})_{i=1}^{\infty}$  такие, что  $F_{n_i} \xrightarrow{\tau} F$ .

**Доказательство.** 1) Допустим, что в  $X$  нет счетной базы. Поскольку по теореме Бинга всякое метризуемое пространство имеет  $\sigma$ -дискретную базу [7, с. 418], то в  $X$  найдется несчетное замкнутое дискретное множество. Введя на нем полный порядок, рассмотрим его подмножество  $A = \{a_\lambda \mid \lambda < \omega_1\}$ , где  $\omega_1$  – первый несчетный ординал ( $a_\alpha \neq a_\beta$  при  $\alpha \neq \beta$ ). Вместе с  $A$  определим также множества  $A_\lambda = \{a_\alpha \in A \mid \alpha < \lambda\}$  и семейство  $\mathcal{H} = \{A_\lambda \mid \lambda < \omega_1\}$ . Фиксируем произвольную топологию  $\tau \in \mathcal{T}$ . Нетрудно видеть, что  $A \in [\mathcal{H}]_\tau$  и, как следствие, соотношения  $\tau \leq \tau_V$ ,  $A \in [\mathcal{H}]_\tau$ . Докажем далее равенство  $[\mathcal{H}]_\tau = \mathcal{H} \cup \{A\}$ .

Пусть  $F \in [\mathcal{H}]_\tau \setminus \mathcal{H}$ . Допустим, что  $F \not\subset A$ . Выберем точку  $x \in F \setminus A$  и ее окрестность  $U$  так, чтобы  $U \cap A = \emptyset$ . Очевидно, что  $F \in U^-$  и  $U^- \cap \mathcal{H} = \emptyset$ . Но поскольку множество  $U^-$  открыто в топологии  $\tau_F$  и  $\tau \geq \tau_F$ , то  $U^-$  – окрестность  $F$  в  $\text{exp}_\tau X$ . Получили противоречие с соотношением  $F \in [\mathcal{H}]_\tau$ . Таким образом,  $F \subset A$ .

Заметим далее, что  $F$  не ограничено в  $A$  (т. е. ни для какого ординала  $\lambda < \omega_1$  множество  $F$  не содержится в  $A_\lambda$ ). Действительно, предположив обратное, выберем минимальный ординал  $\lambda_0$ , при котором  $A_{\lambda_0} \supset F$ . Поскольку  $F \neq A_{\lambda_0}$  (так как  $F \notin \mathcal{H}$ ), то существует  $a_\alpha \in A_{\lambda_0} \setminus F$ . Ввиду минимальности  $\lambda_0$  найдется точка  $a_\beta \in F$ , лежащая «правее» точки  $a_\alpha$  (т. е.  $\alpha < \beta < \lambda_0$ ). Для  $a_\beta$  подберем окрестность  $U$ , которая пересекается с  $A$  исключительно по точке  $a_\beta$ , т. е.  $U \cap A = \{a_\beta\}$ . Рассмотрим в  $\text{exp}_\tau X$  множества  $U^-$  и  $(X \setminus \{a_\alpha\})^+$ . Оба эти множества входят в предбазу топологии Фелла  $\tau_F$ , следовательно (ввиду соотношения  $\tau_F \leq \tau$ ), множество  $\mathcal{O} = (X \setminus \{a_\alpha\})^+ \cap U^-$  является окрестностью  $F$  в  $\text{exp}_\tau X$ . Тогда найдется элемент  $A_\lambda \in \mathcal{H}$ , принадлежащий  $\mathcal{O}$ . В таком случае,  $a_\alpha \notin A_\lambda$  и  $a_\beta \in A_\lambda$ , но из второго включения и соотношения  $\alpha < \beta$  вытекает, что  $a_\alpha \in A_\lambda$ . Получили противоречие.

Докажем равенство  $F = A$ . Пусть существует точка  $a_\alpha \in A \setminus F$ . Поскольку  $F$  не ограничено в  $A$ , то найдется такая точка  $a_\beta \in F$ , что  $\alpha < \beta$ . Тогда, рассмотрев окрестность  $\mathcal{O} = (X \setminus \{a_\alpha\})^+ \cap U^-$  множества  $F$  в  $\text{exp}_\tau X$ , где  $U \cap A = \{a_\beta\}$ , и проведя рассуждения, аналогичные вышеизложенным, приходим к противоречию. Равенство  $F = A$ , а вместе с ним и равенство  $[\mathcal{H}]_\tau = \mathcal{H} \cup \{A\}$  доказаны.

Секвенциальность пространства  $\text{exp}_\tau X$  позволяет выбрать последовательность  $(A_{\lambda_n})_{n=1}^\infty \subset \mathcal{H}$ , сходящуюся к  $A$  относительно  $\tau$ . Далее фиксируем ординал  $\gamma < \omega_1$ ,  $\gamma > \lambda_n$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  (такой ординал существует, см., например, [7, с. 25]), и выберем открытое множество  $U \ni a_\gamma$  так, чтобы  $U \cap A = \{a_\gamma\}$ . Множество  $U^-$  открыто в  $\tau$ , как элемент предбазы топологии Фелла и  $A \in U^-$ , но  $A_{\lambda_n} \notin U^-$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ , что противоречит сходимости  $A_{\lambda_n} \xrightarrow{\tau} A$ .

2) Секвенциальность топологии  $\tau_{\text{inf}}$  и выполнение для  $\tau_{\text{inf}}$  условия  $(US)$  вытекают непосредственно из предложения 2.3, очевидного соотношения  $\tau_{\text{inf}} \geq \tau_F$  и следствия 2.9.

3) Пусть  $F_n \xrightarrow{\tau_{\text{inf}}} F$ . Случай наличия стационарной подпоследовательности (т. е. все члены подпоследовательности – одна и та же точка) тривиален. В противном случае можно считать, что  $F_n \neq F$  и  $F_n \neq F_k$  при  $n \neq k$ . Рассмотрим множество  $\mathcal{H} = \{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Поскольку множество  $\mathcal{H}$  не замкнуто относительно топологии  $\tau_{\text{inf}}$ , оно не замкнуто и относительно некоторой топологии  $\tau \in \mathcal{T}$ , а тогда, вследствие секвенциальности  $\tau$ , существует  $P \in \text{exp} X \setminus \mathcal{H}$  и подпоследовательность  $(F_{n_i})_{i=1}^\infty$  такие, что  $F_{n_i} \xrightarrow{\tau} P$ . Сходимость  $F_{n_i} \xrightarrow{\tau} P$  влечет сходимость  $F_{n_i} \xrightarrow{\tau_{\text{inf}}} P$ . Но в то же время  $F_{n_i} \xrightarrow{\tau_{\text{inf}}} F$ , откуда в силу выполнения для  $\tau_{\text{inf}}$  условия  $(US)$  (см. выше),  $P = F$ . Итак,  $F_{n_i} \xrightarrow{\tau} F$ .  $\square$

Отметим, что доказательство пункта 1) леммы 2.10 (рассмотрение отдельной топологии  $\tau \in \mathcal{T}$ ) позволяет сформулировать частный случай леммы (семейство  $\mathcal{T}$  одноэлементно) как самостоятельное

**Предложение 2.11.** *Если для некоторой секвенциальной топологии  $\tau$  на экспоненте  $\text{exp} X$  метризуемого пространства  $X$  выполняются соотношения  $\tau_F \leq \tau \leq \tau_V$ , то пространство  $X$  имеет счетную базу.*

### 3. Основные результаты

Перейдем к основным результатам.

**Теорема 3.1.** *Пространство  $\text{exp}_{\delta(\text{inf})} X$  секвенциально тогда и только тогда, когда  $X$  обладает счетной базой.*

**Доказательство.** Установим необходимость наличия у пространства  $X$  счетной базы для секвенциальности пространства  $\text{exp}_{\delta(\text{inf})} X$ . Пусть топология  $\tau_{\delta(\text{inf})}$  секвенциальна. Тогда, поскольку  $\tau_F \leq \tau_{\delta(\text{inf})} \leq \tau_V$  (см. следствие 2.2), то в силу предложения 2.11 получаем требуемое. Необходимость доказана.

Установим достаточность. Пусть пространство  $X$  обладает счетной базой. Тогда для любой метрики  $\rho$  пространство  $\text{exp}_{\delta(\rho)} X$  удовлетворяет первой аксиоме счетности (см. теорему 2.4), и, следовательно, секвенциально. В таком случае, топология пространства  $\text{exp}_{\delta(\text{inf})} X$  секвенциальна как инфимум семейства секвенциальных топологий (см. предложение 2.3). Достаточность, а вместе с ней и теорема, доказаны.  $\square$

Аналогичный результат справедлив и для топологии  $\tau_{W(\text{inf})}$ , инфимума семейства топологий Вайсмана  $\mathcal{T}_W = \{\tau_{W(\rho)} \mid \rho \in \Omega_X\}$ .

**Теорема 3.2.** *Пространство  $\text{exp}_{W(\text{inf})} X$  секвенциально тогда и только тогда, когда  $X$  обладает счетной базой.*

**Доказательство.** Достаточность. Наличие у метризуемого пространства  $X$  счетной базы эквивалентно метризуемости топологии  $\tau_{W(\rho)}$  для любой допустимой метрики  $\rho$  (см. теорему 2.5), откуда получаем секвенциальность топологии  $\tau_{W(\text{inf})}$  (см. предложение 2.3).

Установим необходимость. Пусть пространство  $\text{exp}_{W(\text{inf})} X$  секвенциально. Поскольку  $\tau_F \leq \tau_{W(\text{inf})} \leq \tau_V$  (см. следствие 2.2), то, применив предложение 2.11, получаем требуемое.  $\square$

Следствия 2.2, 2.9, теоремы 2.4, 2.5 и лемма 2.10 позволяют выявить некоторые «положительные» свойства сходимости в пространствах  $\text{exp}_{\delta(\text{inf})} X$  и  $\text{exp}_{W(\text{inf})} X$ .

**Предложение 3.3.** *Пространства  $\text{exp}_{\delta(\text{inf})} X$  и  $\text{exp}_{W(\text{inf})} X$  удовлетворяют условию  $(US)$ .*

**Предложение 3.4.** Пусть метризуемое пространство  $X$  обладает счетной базой и последовательность  $(F_n)_{n=1}^\infty$  сходится к  $F$  в  $\text{exp}_{\delta(\text{inf})} X$ . Тогда найдутся метрика  $\rho \in \Omega_X$  и последовательность  $n_1 < n_2 < \dots$  такие, что  $F_{n_i} \xrightarrow{\delta(\rho)} F$ .

**Предложение 3.5.** Пусть метризуемое пространство  $X$  обладает счетной базой и последовательность  $(F_n)_{n=1}^\infty$  сходится к  $F$  в  $\text{exp}_{W(\text{inf})} X$ . Тогда найдутся метрика  $\rho \in \Omega_X$  и последовательность  $n_1 < n_2 < \dots$  такие, что  $F_{n_i} \xrightarrow{W(\rho)} F$ .

Далее рассмотрим случаи совпадения между топологиями  $\tau_{H(\text{inf})}$ ,  $\tau_{\delta(\text{inf})}$  и  $\tau_{W(\text{inf})}$ . Топологии  $\tau_{\delta(\text{inf})}$  и  $\tau_{W(\text{inf})}$  совпадают при достаточно сильном ограничении на топологию исходного пространства  $X$ .

**Теорема 3.6.** Топологии  $\tau_{\delta(\text{inf})}$  и  $\tau_{W(\text{inf})}$  на экспоненте  $\text{exp} X$  метризуемого пространства  $X$  совпадают тогда и только тогда, когда  $X$  компактно.

**Доказательство.** Пусть пространство  $X$  компактно. Тогда равенство  $\tau_{\delta(\text{inf})} = \tau_{W(\text{inf})}$  следует из соотношений  $\tau_F \leq \tau_{W(\text{inf})} \leq \tau_{\delta(\text{inf})} \leq \tau_V$  и совпадения топологий  $\tau_F$  и  $\tau_V$  при компактности пространства  $X$ .

Предположим далее, что пространство  $X$  не компактно, и рассмотрим замкнутое дискретное множество  $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\} \subset X$  ( $a_n \neq a_k$  при  $0 \leq n < k$ ), множества  $A_n = \{a_0, a_n, a_{n+1}, \dots\}$  и множество  $\mathcal{H} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \text{exp} X$ .

Замыкание  $[\mathcal{H}]_F$  множества  $\mathcal{H}$  в топологии Фелла  $\tau_F$  совпадает с множеством  $\mathcal{H} \cup \{\{a_0\}\}$  (доказательство фактически повторяет доказательство равенства  $[\mathcal{H}]_\tau = \mathcal{H} \cup \{A\}$  в пункте 1) леммы 2.10). Поскольку  $\tau_F \leq \tau_{W(\text{inf})} \leq \tau_{\delta(\text{inf})} \leq \tau_{\delta(\rho)}$ , где  $\rho \in \Omega_X$ , то  $\mathcal{H} \cup \{\{a_0\}\}$  замкнуто в топологиях  $\tau_{W(\text{inf})}$ ,  $\tau_{\delta(\text{inf})}$  и  $\tau_{\delta(\rho)}$ .

Выберем далее, пользуясь теоремой Хаусдорфа (см. [7, с. 439]), метрику  $\sigma \in \Omega_X$ , для которой  $\sigma(a_n, a_k) = |n - k|$  ( $0 \leq n < k$ ), откуда получаем сходимость  $A_n \xrightarrow{W(\sigma)} \{a_0\}$ , а следовательно и сходимость  $A_n \xrightarrow{W(\text{inf})} \{a_0\}$ . Таким образом, множество  $\mathcal{H}$  не замкнуто в топологии  $\tau_{W(\text{inf})}$  и  $[\mathcal{H}]_{W(\text{inf})} = \mathcal{H} \cup \{\{a_0\}\}$ .

Рассмотрим далее окрестность  $U_0$  точки  $a_0$ , для которой  $U_0 \cap A = \{a_0\}$ , и множество  $\mathcal{G} = U_0^{++}$  в  $\text{exp}_{\delta(\rho)} X$ , где  $\rho \in \Omega_X$ . Очевидно, что  $\{a_0\} \in \mathcal{G}$ , но  $\mathcal{G} \cap \mathcal{H} = \emptyset$ . Таким образом, множество  $\mathcal{H}$  замкнуто во всех топологиях вида  $\tau_{\delta(\rho)}$ , а следовательно и в топологии  $\tau_{\delta(\text{inf})}$ , т. е.  $[\mathcal{H}]_{\delta(\text{inf})} = \mathcal{H}$ .

Итак, при нашем допущении ( $X$  не компактно) равенство  $\tau_{\delta(\text{inf})} = \tau_{W(\text{inf})}$  невозможно.  $\square$

Учитывая соотношения  $\tau_{W(\text{inf})} \leq \tau_{\delta(\text{inf})} \leq \tau_{H(\text{inf})}$  и совпадение всех трех топологий  $\tau_{H(\text{inf})}$ ,  $\tau_{\delta(\text{inf})}$  и  $\tau_{W(\text{inf})}$  при компактности исходного пространства  $X$ , получаем очевидное

**Следствие 3.7.** Топологии  $\tau_{W(\text{inf})}$  и  $\tau_{H(\text{inf})}$  совпадают тогда и только тогда, когда пространство  $X$  компактно.

Перейдем к топологиям  $\tau_{\delta(\text{inf})}$  и  $\tau_{H(\text{inf})}$ . Нам понадобится следующая лемма, доказательство которой входит в качестве фрагмента в доказательство предложения 5.10 из работы К. Костантини и Р. Витоло [5].

**Лемма 3.8.** Пусть пространство  $X$  обладает счетной базой. Тогда для любой метрики  $\rho \in \Omega_X$  найдется вполне ограниченная метрика  $\sigma \in \Omega_X$ , минорирующая метрику  $\rho$ , т. е.  $\sigma(x, y) \leq \rho(x, y)$  для любых точек  $x, y$  из  $X$ .

**Теорема 3.9.** Топологии  $\tau_{\delta(\text{inf})}$  и  $\tau_{H(\text{inf})}$  совпадают тогда и только тогда, когда пространство  $X$  обладает счетной базой.

**Доказательство.** Пусть  $\tau_{\delta(\text{inf})}$  и  $\tau_{H(\text{inf})}$  совпадают. Тогда наличие у пространства  $X$  счетной базы вытекает из секвенциальности  $\tau_{H(\text{inf})}$  и теоремы 3.1. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть  $X$  имеет счетную базу. Поскольку пространства  $\text{exp}_{\delta(\text{inf})} X$  и  $\text{exp}_{H(\text{inf})} X$  секвенциальны и справедливо соотношение  $\tau_{\delta(\text{inf})} \leq \tau_{H(\text{inf})}$ , то для доказательства совпадения этих топологий достаточно показать сходимость в  $\text{exp}_{H(\text{inf})} X$  любой сходящейся в  $\text{exp}_{\delta(\text{inf})} X$  последовательности. Докажем от противного.

Допустим, что существует последовательность  $(F_n)_{n=1}^\infty$ , сходящаяся к множеству  $F$  в пространстве  $\text{exp}_{\delta(\text{inf})} X$ , но не сходящаяся в  $\text{exp}_{H(\text{inf})} X$ . Не ограничивая общности, можем считать, что некоторая окрестность  $\mathcal{O} \ni F$  в  $\text{exp}_{H(\text{inf})} X$  не содержит ни одного члена последовательности  $(F_n)_{n=1}^\infty$ . Согласно предложению 3.4 для последовательности  $(F_n)_{n=1}^\infty$  можно выбрать метрику  $\rho \in \Omega_X$  и подпоследовательность  $(F_{n_i})_{i=1}^\infty$ , сходящуюся к  $F$  относительно топологии  $\tau_{\delta(\rho)}$ . Для удобства

переобозначим  $F_{n_i} = P_i$ . Итак,  $P_i \xrightarrow{\delta(\rho)} F$ , но  $\{P_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cap \emptyset = \emptyset$ . По лемме 3.8 найдется вполне ограниченная метрика  $\sigma \in \Omega_X$ , минорирующая метрику  $\rho$ . Последнее эквивалентно выполнению включения  $B_\rho(x, \varepsilon) \subset B_\sigma(x, \varepsilon)$  для любых  $\varepsilon > 0$  и точки  $x \in X$ , что, в свою очередь, влечет выполнение включения  $B_\rho(A, \varepsilon) \subset B_\sigma(A, \varepsilon)$  уже для любых  $\varepsilon > 0$  и непустого множества  $A \subset X$ . Ввиду сходимости  $P_i \xrightarrow{\delta(\rho)} F$ , для любого  $\varepsilon > 0$ , начиная с некоторого номера  $N_1$ ,  $P_i \in B_\rho(F, \varepsilon)^{++(\rho)}$ , и, следовательно, имеют место включения

$$P_i \subset B_\rho(F, \varepsilon) \subset B_\sigma(F, \varepsilon).$$

Поскольку метрическое пространство  $(X, \sigma)$  вполне ограничено, то для множества  $F$  существует конечная  $\frac{\varepsilon}{2}$ -сеть  $\mathcal{N} = \{a_1, \dots, a_m\} \subset F$ . Рассмотрим далее произвольную точку  $x \in F$ . Выберем шар  $B_\sigma(a_j, \frac{\varepsilon}{2})$ , содержащий точку  $x$ . Если  $P_i \cap B_\sigma(a_j, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$ , то, очевидно,  $B_\sigma(P_i, \varepsilon) \supset B_\sigma(a_j, \frac{\varepsilon}{2}) \ni x$ . Таким образом, соотношение  $P_i \in \bigcap_{j=1}^m B_\sigma(a_j, \frac{\varepsilon}{2})^-$  влечет включение  $F \subset B_\sigma(P_i, \varepsilon)$ . А в силу сходимости  $P_i \xrightarrow{\delta(\rho)} F$ , указанное соотношение, а следовательно и включение  $F \subset B_\sigma(P_i, \varepsilon)$ , выполняются, начиная с некоторого номера  $N_2$ . Но тогда имеет место сходимость  $P_i \xrightarrow{\frac{\varepsilon}{\delta}} F$ , откуда вытекает сходимость  $P_i \xrightarrow{H(\inf)} F$ , что противоречит соотношению  $\{P_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cap \emptyset = \emptyset$ .  $\square$

### Литература

1. Beer G., Lechicki A., Levi S., Naimpally S. Distance functionals and suprema of hyperspace topologies // *Annali di Matematica pura ed applicata*. 1992. Vol. 162, N 4. P. 367–381.
2. Beer G. *Topologies on closed and closed convex sets*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. 340 p.
3. Beer G., Himmelberg C., Prikry K., van Vleck F. The locally finite topology on  $2^X$  // *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1987. Vol. 101, N 1. P. 168–172.
4. Бедрицкий А. С., Тимохович В. Л. О топологиях экспоненты метризуемого топологического пространства // *Труды Института математики*. 2023. Т. 31, № 2. С. 15–27.
5. Costantini C., Vitolo P. On the infimum of the Hausdorff metric topologies // *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1995. Vol. 70. P. 441–480.
6. Costantini C., Levi S., Zieminska J. Metrics that generate the same hyperspace convergence // *Set-Valued Analysis*. 1993. Vol. 1. P. 141–157.
7. Энгелькинг Р. *Общая топология*. М.: Мир, 1986. 744 с.

### References

1. Beer G., Lechicki A., Levi S., Naimpally S. Distance functionals and suprema of hyperspace topologies. *Annali di Matematica pura ed applicata*, 1992, vol. 162, no. 4, pp. 367–381.
2. Beer G. *Topologies on closed and closed convex sets*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1993. 340 p.
3. Beer G., Himmelberg C., Prikry K., van Vleck F. The locally finite topology on  $2^X$ . *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1987, vol. 101, pp. 168–172.
4. Bedritskiy A. S., Timokhovich V. L. On the topologies of a hyperspace of a metrizable topological space. *Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2023, vol. 31, no. 2, pp. 15–27 (in Russian).
5. Costantini C., Vitolo P. On the infimum of the Hausdorff metric topologies. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1995, vol. 70, pp. 441–480.
6. Costantini C., Levi S., Zieminska J. Metrics that generate the same hyperspace convergence. *Set-Valued Analysis*, 1993, vol. 1, pp. 141–157.
7. Engelking R. *General Topology*. Moscow, Mir, 1986. 744 p. (in Russian).

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Для публикации в журнале принимаются ранее не опубликованные в других изданиях научные статьи. Обзорные статьи публикуются по решению редколлегии.

2. Объем статьи не более 20 журнальных страниц (с учетом таблиц и рисунков, а также списка литературы на 2 языках), объем краткого сообщения – до 5 страниц.

3. Статьи в Журнале публикуются на русском или английском языке.

4. Статья должна быть подготовлена в системе  $\LaTeX$  по образцу, находящемуся на сайте Журнала. Не допускается использование в  $\TeX$ -файлах «нестандартных»  $\TeX$ -команд (т. е. команд, не входящих в стандартную поставку  $\LaTeX$ ), а также переопределение стандартных команд. При подаче статьи автору необходимо указывать рубрику Журнала, к которому относится статья.

5. Текст статьи начинается с индекса УДК, затем следуют название статьи, инициалы и фамилии авторов, а также краткая аннотация (не более 15 строк) и ключевые слова (5–10 слов). Аннотация не должна содержать ссылок на формулы и литературу статьи. Сведения об авторе (авторах), название статьи, аннотация и ключевые слова пишутся на русском и английском языках, остальные элементы оформляются на русском (английском) языке.

6. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их упоминания и даются в квадратных скобках. Использование ссылок на неопубликованные работы не допускается. Необходимо приводить два списка ссылок на использованную в статье литературу – «Литература» и «References».

7. Если присутствует информация о финансировании (поддержке грантами проектов и т. п.), ее следует размещать в конце статьи.

## GUIDELINES FOR AUTHORS

1. Scientific articles not previously published in other publications are accepted for publication in the journal. Review articles are published by decision of the editorial board.

2. The volume of the article is no more than 20 journal pages, taking into account tables and figures, the volume of a short message is up to 5 pages.

3. Articles in the Journal are published in Russian or English.

4. The article must be prepared in the  $\LaTeX$  system according to the model located on the Journal's website. It is not allowed to use "non-standard" in  $\TeX$ files  $\TeX$ commands (i. e. commands not included in the standard  $\LaTeX$  distribution), and also override standard commands. When submitting an article, the author must indicate the category of the Journal to which the article belongs.

5. The text of the paper must begin with the UDC, the title, and the name(s) of the author(s) preceded by initials followed by a short abstract (no more than 15 lines) and keywords (5–10 words). The abstract must not contain numbered references to the formulas and bibliography items. Information about the author (authors), title of the article, abstract and keywords are written in Russian and English, other elements are written in Russian (English).

6. The references in the text are numbered in order of their appearance and in square brackets. The use of references to unpublished works is not permitted. It is necessary to provide two lists of references to the literature used in the article – "References" and "Literature". An example of bibliographic descriptions is given in the model located on the Journal's website.

7. If there is information about financial support for the research (grant support for projects, etc.), it should be placed at the end of the article.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ  
2026. ТОМ 34, № 1

Редактор Т. П. Петрович  
Компьютерная верстка И. В. Блинец

---

Подписано в печать 29.06.2025. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Усл. печ. л. 15,25. Уч.-изд. л. 8,92.  
Государственное научное учреждение «Институт математики Национальной академии наук  
Беларуси».  
220072, г. Минск, ул. Сурганова, д. 11.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1 / 257 от 2 апреля 2014 г.

---

Отпечатано в Республиканском унитарном предприятии «Издательский дом «Беларуская  
навука». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 1 / 18 от 02.08.2013. ЛП № 02330 / 455 от 30.12.2013.  
Ул. Ф. Скорины, 40. 220084, г. Минск.  
Тираж 30 экз. Заказ ....