ISSN 1812-5093

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ

Государственное научное учреждение
«Институт математики Национальной
академии наук Беларуси»

Журнал основан в 1998 г.
До 2024 г. выходил под названием
«Труды Института математики».

PROCEEDINGS OF THE INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE NAS OF BELARUS

State Scientific Institute
«The Institute of Mathematics
of the National Academy of Sciences
of Belarus»

The journal was founded in 1998.
Before 2024, the name of the journal was
«Proceedings of the Institute of Mathematics».

ТОМ 33, № 2
Минск, 2025

ОТ РЕДАКЦИИ

В журнале «Труды Института математики НАН Беларуси» публикуются оригинальные статьи фундаментальной и прикладной математики. Обзорные статьи публикуются по решению редакционной коллегии. Журнал входит в «Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований», утвержденный Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь.

До 2024 г. журнал издавался под названием «Труды Института математики».

Основные разделы журнала:

Алгебра и теория чисел
Вещественный, комплексный и функциональный анализ
Вычислительная математика
Дискретная математика и математическая кибернетика
Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление
Математическое моделирование и численные методы
Математические методы защиты информации
Теория вероятностей и математическая статистика
Краткие сообщения

Адрес редакции:	**Address:**
ул. Сурганова, 11, к. 45	11, Surganov Str., room 45,
220072, г. Минск, Беларусь	Minsk, Belarus, 220072
Тел. +375-17-379-17-84	Phone: +375-17-379-17-84

e-mail: tbusel@im.bas-net.by

EDITOR'S NOTE

The journal "Proceedings of the Institute of Mathematics of the NAS of Belarus" publishes original articles in fundamental and applied mathematics. Publication of review articles requires approval of the editorial board. The journal is approved by the Higher Attestation Commission of the Republic of Belarus for publishing results of dissertation research, and is included in the official list of such publications.

Before 2024, the name of the journal was "Proceedings of the Institute of Mathematics" (Trudy Instituta Matematiki).

Main sections of the journal:

Algebra and number theory
Real, complex and functional analysis
Computational mathematics
Discrete mathematics and mathematical cybernetics
Differential equations, dynamic systems and optimal control
Mathematical modeling and numerical methods
Mathematical methods for information security
Probability theory and mathematical statistics
Brief communications

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ
Минск. 2025. Т. 33. № 2

СОДЕРЖАНИЕ

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Коранчук А. Г. Заметка о конечных группах с субнормальными корадикалами некоторых силовских нормализаторов 7
Гутор А. Г., Тихонов С. В. Многочлены над кольцами с делением 13
Матвеев Г. В., Осиновская А. А. Об одной фундаментальной области в специальной линейной группе 21
Ядченко А. А. О неприводимых линейных группах с абелевыми подгруппами Силова 28
Скрундь В. В., Сафонова И. Н. Приводимые τ-замкнутые σ-локальные формации конечных групп с заданной структурой подформаций 36

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Слиняков П. А., Лыков К. В. Свойство RUC для хаоса случайных величин в равномерной норме 54
Поцейко П. Г., Ровба Е. А. Об одном рациональном сингулярном интеграле Джексона и аппроксимациях функций Маркова 73

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Деменчук А. К., Макаров Е. К. Задача управления асинхронным спектром линейных периодических систем с иррегулярным допустимым множеством – необходимое условие разрешимости 90
Изобов Н. А., Ильин А. В. Двумерный антиперроновский эффект смены различных положительных показателей Ляпунова системы линейного приближения на отрицательный возмущениями высшего порядка малости 96
Шилин А. П. Интегро-дифференциальное уравнение, заданное на кривой в угловой области и содержащее комплексное сопряжение 103

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Евмененко С. Ю. Инвариантность стационарного распределения *G*-сетей с ограниченным временем пребывания относительно распределения времен обслуживания 114

PROCEEDINGS
OF THE INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE NAS OF BELARUS
Minsk. 2025. Vol. 33. N 2

CONTENTS

ALGEBRA AND NUMBER THEORY

Vasil’ev A. F., Vasil’eva T. I., Koranchuk A. G. A note on finite groups with subnormal residuals of some sylow normalizers 7
Goutor A. G., Tikhonov S. V. Polynomials over division rings 13
Matveev G. V., Osinovskaya A. A. On a fundamental domain in the special linear group 21
Yadchenko A. A. On irreducible linear groups with abelian Sylow subgroups 28
Skrundz V. V., Safonova I. N. Reducible τ-closed σ-local formations of finite groups with a given structure of subformations 36

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

Slinyakov P. A., Lykov K. V. RUC property for chaos of random variables in the uniform norm 54
Patseika P. G., Rouba Ya. A. On a rational Jackson singular integral and approximations of Markov functions 73

DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMICAL SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

Demenchuk A. K., Makarov E. K. The problem of control of the asynchronous spectrum of linear periodic systems with an irregular feasible set – a necessary condition for solvability 90
Izobov N. A., Il’in A. V. Two-dimensional anti-Perron effect of changing arbitrary different positive Lyapunov exponents of a linear approximation system to negative ones by higher-order perturbations 96
Shilin A. P. An integro-differential equation defined on a curve in the angular domain and containing a complex conjugate 103

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

Evmenenko S. Yu. Invariance of the stationary distribution of *G*-networks with bounded sojourn time with respect to service time distributions 114

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Том 33. № 2. С. 7–12

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ
ALGEBRA AND NUMBER THEORY

УДК 512.542 EDN: JFHHSG

ЗАМЕТКА О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С СУБНОРМАЛЬНЫМИ КОРАДИКАЛАМИ НЕКОТОРЫХ СИЛОВСКИХ НОРМАЛИЗАТОРОВ

А. Ф. Васильев[1], Т. И. Васильева[2], А. Г. Коранчук[1]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь*
[2]*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*
e-mail: formation56@mail.ru, tivasilyeva@mail.ru, melchenkonastya@mail.ru

Поступила: 22.11.2025 **Исправлена:** 22.11.2025 **Принята:** 15.12.2025

Ключевые слова: конечная группа, p-силовский нормализатор, субнормальная подгруппа, формация, корадикал, сверхразрешимая группа.

Аннотация. Пусть G – группа и множество простых чисел $\tau(G) = \cup\pi(G : M)$ для любой максимальной подгруппы M из G. Для непустой нильпотентной формации $\mathfrak{X}$ доказано, что группа G имеет нильпотентный $\mathfrak{X}$-корадикал тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}$-корадикал p-силовского нормализатора субнормален в G для любого p из $\tau(G)$.

A NOTE ON FINITE GROUPS WITH SUBNORMAL RESIDUALS OF SOME SYLOW NORMALIZERS

A. F. Vasil’ev[1], T. I. Vasil’eva[2], A. G. Koranchuk[1]

[1]*F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus*
[2]*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*
e-mail: formation56@mail.ru, tivasilyeva@mail.ru, melchenkonastya@mail.ru

Received: 22.11.2025 **Revised:** 22.11.2025 **Accepted:** 15.12.2025

Keywords: finite group, p-Sylow normalizer, subnormal subgroup, formation, residual, supersolvable group.

Abstract. Let G be a group and the set of primes $\tau(G) = \cup\pi(G : M)$ for any maximal subgroup M of G. For a non-empty nilpotent formation $\mathfrak{X}$, it is proved that a group G has a nilpotent $\mathfrak{X}$-residual if and only if the $\mathfrak{X}$-residual of the p-Sylow normalizer is subnormal in G for every p from $\tau(G)$.

1. Введение

В заметке под словом группа понимается конечная группа. Пусть p – простое число. Для краткости будем называть *p-силовским нормализатором* нормализатор силовской p-подгруппы группы и *силовским нормализатором* нормализатор силовской подгруппы группы. В 1986 г. в [1] была установлена нильпотентность группы, все силовские нормализаторы которой нильпотентны. В 1999 г. А. Баллестер-Болинше и Л. А. Шеметков [2] доказали, что группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор группы G является p-нильпотентным для любого $p \in \pi(G)$. Здесь $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G.

В работах [1–5] изучались насыщенные формации $\mathfrak{F}$, содержащие группы, все силовские нормализаторы которых являются $\mathfrak{F}$-группами. Однако большинство классических формаций не относится к таким формациям. В частности, в симметрической группе степени 4 все силовские нормализаторы сверхразрешимы, но сама группа не является сверхразрешимой.

В дальнейшем $\mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп, $\mathfrak{A}$ – формация всех абелевых групп. Для формации $\mathfrak{X}$ через $G^{\mathfrak{X}}$ обозначается *$\mathfrak{X}$-корадикал* группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, для которой $G/G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$; $G^{\mathfrak{N}}$ – нильпотентный корадикал G.

В работе [6] были найдены необходимые и достаточные условия, при которых группа со сверхразрешимыми (метанильпотентными, имеющими нильпотентный коммутант) силовскими нормализаторами сверхразрешима (соответственно, метанильпотентна, имеет нильпотентный коммутант). В теореме А [6] было установлено, что для непустой формации $\mathfrak{X}$, состоящей из нильпотентных групп, необходимыми и достаточными условиями принадлежности группы G формации $\mathfrak{N}\mathfrak{X}$ являются разрешимость p-силовского нормализатора и субнормальность в G его $\mathfrak{X}$-корадикала для любого $p \in \pi(G)$. В теореме В [6] было доказано, что для наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ такой, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$, тогда и только тогда группа $G \in \mathfrak{F}$, когда p-силовский нормализатор принадлежит $\mathfrak{F}$ и его нильпотентный корадикал субнормален в G для любого $p \in \pi(G)$. Применяя отмеченный выше результат А. Баллестера-Болинше и Л. А. Шеметкова, в работе [7] было установлено, что в достаточных условиях теоремы А разрешимость силовских нормализаторов можно отбросить.

В [8] для группы G через $\tau(G)$ обозначено множество всех простых чисел p таких, что в G найдется максимальная подгруппа M, для которой p делит $|G:M|$, т. е. $\tau(G) = \cup\pi(G:M)$ для любой максимальной подгруппы M из G. Множество $\tau(G)$ не всегда совпадает с множеством $\pi(G)$, как, например, для группы $G = PSL(2,7)$, в то же время если G – разрешимая группа, то $\tau(G) = \pi(G)$ [8]. Однако из $\tau(G) = \pi(G)$ не всегда следует разрешимость группы G. В качестве примера выступает знакопеременная группа A_5 степени 5, для которой $\tau(A_5) = \{2,3,5\} = \pi(A_5)$.

В [8, теорема 1.2] было установлено, что приведенный выше результат А. Баллестера-Болинше и Л. А. Шеметкова верен для любого $p \in \tau(G)$. Это используется в настоящей заметке при доказательстве следующих результатов.

Теорема 1.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустая формация и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Группа $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$.*

(2) *Любая подгруппа группы G, содержащаяся в $G^{\mathfrak{X}}$, является субнормальной в G.*

(3) *$H^{\mathfrak{X}}$ субнормален в группе G для любой подгруппы H из G.*

(4) *$\mathfrak{X}$-корадикал p-силовского нормализатора субнормален в группе G для любого $p \in \tau(G)$.*

Теорема 1.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустая формация, $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация такая, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{X}$. Группа $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор группы G принадлежит $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$-корадикал p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

Приведем несколько следствий. Для $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}$ из теоремы 1.1 получаются такие результаты соответственно.

Следствие 1.3. *Следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Группа G метанильпотентна.*

(2) *Любая подгруппа, содержащаяся в нильпотентном корадикале группы G, является субнормальной в G.*

(3) *Нильпотентный корадикал любой подгруппы группы G субнормален в G.*

(4) *Нильпотентный корадикал p-силовского нормализатора группы G субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

Следствие 1.4. *Следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Группа G имеет нильпотентный коммутант.*

(2) *Любая подгруппа группы G, содержащаяся в G', является субнормальной в G.*

(3) *Коммутант любой подгруппы группы G субнормален в G.*

(4) *Коммутант p-силовского нормализатора группы G субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

Так как пересечение наследственных насыщенных формаций является наследственной насыщенной формацией, из теорем 1.1 и 1.2 вытекает

Следствие 1.5. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустая формация, $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$. Группа G принадлежит $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор группы G принадлежит $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$-корадикал p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

Следствие 1.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ и имеет нильпотентный корадикал тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор группы G принадлежит $\mathfrak{F}$ и нильпотентный корадикал p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

Следствие 1.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ и имеет нильпотентный коммутант тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор группы G принадлежит $\mathfrak{F}$ и коммутант p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

2. Предварительные сведения

В обозначениях и определениях мы придерживаемся монографий [9; 10].

Теорема 2.1 [8, теорема 1.2]. *Группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда для любого $p \in \tau(G)$ нормализатор каждой силовской p-подгруппы группы G является p-нильпотентным.*

Лемма 2.2 [10, лемма A.8.6(a)]. *Пусть G – группа и π – множество простых чисел. Если K – субнормальная подгруппа группы G и K – π-группа, то $K \leqslant O_\pi(G)$.*

Лемма 2.3 [9, теорема 2.4]. *Любая формация, состоящая из нильпотентных групп, является наследственной формацией.*

Лемма 2.4 [9, лемма 1.2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, K – нормальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$(G/K)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}K/K$;*

(2) *если $G = HK$ для подгруппы H из G , то $H^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}K$;*

(3) *если $G = HK$ и $K \leqslant G^{\mathfrak{F}}$, то $H^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}$.*

Приведем известные свойства класса групп с нильпотентным $\mathfrak{F}$-корадикалом (см., например, [9, с. 36; 10, IV.3, IV.4]).

Лемма 2.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Тогда $\mathfrak{N}\mathfrak{F} = (G \mid G/N \in \mathfrak{F}$ для некоторой $N \trianglelefteq G$ и $N \in \mathfrak{N}) = \mathfrak{N} \circ \mathfrak{F} = (G \mid G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N})$ – насыщенная формация. Если $\mathfrak{F}$ является наследственной, то и $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ является наследственной.*

Лемма 2.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация и группа $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$.*

(1) *Любая подгруппа из G, содержащаяся в $G^{\mathfrak{F}}$, является субнормальной в G.*

(2) *Если $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация, то $H^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа в G для любой подгруппы H из G.*

Доказательство. В нильпотентной группе любая подгруппа является субнормальной. Поэтому утверждение (1) следует из нильпотентности $G^{\mathfrak{F}}$ и нормальности $G^{\mathfrak{F}}$ в G.

(2) Для наследственной формации $\mathfrak{F}$ и любой подгруппы H из G имеем $H^{\mathfrak{F}} \leqslant G^{\mathfrak{F}}$. По утверждению (1) $H^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа в G. □

Лемма 2.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, N – нормальная подгруппа группы G. Если $\mathfrak{F}$-корадикал p-силовского нормализатора группы G субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$, то $\mathfrak{F}$-корадикал q-силовского нормализатора группы G/N субнормален в G/N для любого $q \in \tau(G/N)$.*

Доказательство. Пусть $q \in \tau(G/N)$ и Q/N – силовская q-подгруппа из G/N. Тогда $Q/N = G_qN/N$ для некоторой силовской q-подгруппы G_q из G. По [10, теорема A.6.4(a)] $N_{G/N}(Q/N) = N_G(G_q)N/N$. По лемме 2.4 имеем $N_{G/N}(Q/N)^{\mathfrak{F}} = (N_G(G_q)N/N)^{\mathfrak{F}} = N_G(G_q)^{\mathfrak{F}}N/N$. Так как $q \in \tau(G/N) \subseteq \tau(G)$, $N_G(G_q)^{\mathfrak{F}}$ субнормален в G. Из свойств субнормальных подгрупп следует, что $N_{G/N}(Q/N)^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа в G/N. □

3. Доказательства теорем 1.1 и 1.2

Установим справедливость теоремы 1.1.

Доказательство. По лемме 2.3 $\mathfrak{X}$ – наследственная формация. Ввиду леммы 2.6 имеем $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$. Очевидно, что из (3) следует (4).

Докажем $(4) \Rightarrow (1)$. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой $N_G(G_p)^{\mathfrak{X}}$ субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$, а $G \notin \mathfrak{N}\mathfrak{X}$.

I. G – простая группа. Из субнормальности $N_G(G_p)^{\mathfrak{X}}$ в G для $p \in \tau(G)$ следует, что $N_G(G_p)^{\mathfrak{X}} = 1$. Тогда $N_G(G_p) \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$ и по теореме 2.1 получаем противоречие $G \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{X}$.

II. G не является простой группой. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Из леммы 2.7 следует, что утверждение (4) выполняется для G/N. По выбору G заключаем, что $G/N \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{N}\mathfrak{X}$ – наследственная насыщенная формация, имеем $\Phi(G) = 1$ и N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. В группе G существует максимальная подгруппа M с $\mathrm{Core}_G(M) = 1$ и $G = NM$. Рассмотрим два случая.

1. G – разрешимая группа. Тогда N – абелева p-группа для некоторого простого p. По [10, теорема A.15.6] $N = C_G(N) = F(G)$, $M \cap N = 1$ и $O_p(M) = 1$. Из $G \notin \mathfrak{N}$ следует, что $|\pi(G)| \geqslant 2$.

Покажем, что $F(M)$ является p'-холловой подгруппой группы G. Из $M \cong G/N \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$ и $G \notin \mathfrak{N}\mathfrak{X}$ следует, что $1 \neq M^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{N}$. Поэтому $M^{\mathfrak{X}} \leqslant F(M)$. Если $p \in \pi(F(M))$, то силовская p-подгруппа из $F(M)$ нормальна в M, а следовательно, содержится в $O_p(M)$. Из $O_p(M) = 1$ заключаем, что $p \notin \pi(F(M))$, т. е. $F(M)$ – p'-группа. Из $M/F(M) \cong M/M^{\mathfrak{X}}/F(M)/M^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$ следует, что M имеет нормальную p'-холлову подгруппу, которую обозначим через H. Отметим, что H является p'-холловой подгруппой в G.

Возьмем любое $q \in \pi(H)$ и силовскую q-подгруппу H_q из H. Тогда H_q является силовской q-подгруппой в G. Из $q \in \pi(G) = \tau(G)$ следует, что $N_G(H_q)^{\mathfrak{X}}$ – субнормальная подгруппа в G. Ввиду того, что $H_q \cap N_G(H_q)^{\mathfrak{X}} \trianglelefteq N_G(H_q)^{\mathfrak{X}}$, подгруппа $H_q \cap N_G(H_q)^{\mathfrak{X}}$ субнормальна в G.

По лемме 2.2 $H_q \cap N_G(H_q)^{\mathfrak{X}} \leqslant O_q(G)$. Из $q \neq p$ и $O_q(G) = 1$ следует, что $N_G(H_q)^{\mathfrak{X}}$ – q'-группа.

Обозначим $S = N_G(H_q)^{\mathfrak{X}}$. Если $N_G(H_q) = H_qS$, то S является нормальной q'-холловой подгруппой в $N_G(H_q)$. Допустим, что $N_G(H_q) \neq H_qS$. Отметим, что $N_G(H_q)/S \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$. Тогда $N_G(H_q)/S = H_qS/S \times L_1/S \times \cdots \times L_n/S$, где L_i/S – силовская r_i-подгруппа в $N_G(G_q)/S$ и $r_i \neq q$, $i = 1, \ldots, n$. Отсюда следует, что $L_1 \cdots L_n$ нормальна в $N_G(G_q)$ и является q'-группой.

Так как $N_G(H_q)$ имеет нормальную q'-холлову подгруппу, $N_H(H_q) = N_G(H_q) \cap H$ имеет нормальную q'-холлову подгруппу. Это означает, что $N_H(H_q)$ является q-нильпотентной подгруппой для любого $q \in \pi(H) = \tau(H)$. По теореме 2.1 группа H нильпотентна. Следовательно, $H = F(M)$.

Значит, $M \leqslant N_G(H_q)$. Из максимальности M в G и $\mathrm{Core}_G(M) = 1$ заключаем, что $N_G(H_q) = M$. Тогда $N_G(H_q)^{\mathfrak{X}} = M^{\mathfrak{X}}$ – нильпотентная группа и субнормальна в G. По лемме 2.2 $M^{\mathfrak{X}} \leqslant O_{\pi(H)}(G)$. Так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и N – p-группа, $O_{\pi(H)}(G) = 1$. Получили противоречие с $M^{\mathfrak{X}} \neq 1$.

2. G не является разрешимой. Тогда $|\pi(G)| \geqslant 3$. Из разрешимости G/N следует, что N не является абелевой группой.

Возьмем любое $q \in \tau(G)$ и силовскую q-подгруппу G_q из G. Тогда $N_G(G_q) \neq G$.

Допустим, что $N_G(G_q)^{\mathfrak{X}} \neq 1$. Обозначим $R = G_q \cap N_G(G_q)^{\mathfrak{X}}$. Тогда $R \trianglelefteq N_G(G_q)^{\mathfrak{X}}$. Из субнормальности $N_G(G_q)^{\mathfrak{X}}$ в G следует субнормальность R в G. По лемме 2.2 $R \leqslant O_q(G)$. Ввиду того, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и N неабелева, заключаем $O_q(G) = 1$. Тогда $R = 1$ и $N_G(G_q)^{\mathfrak{X}}$ – q'-группа. Из $N_G(G_q)/N_G(G_q)^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$ следует, что $N_G(G_q)$ имеет нормальную q'-холлову группу, т. е. $N_G(G_q)$ q-нильпотентен.

Если $N_G(G_q)^{\mathfrak{X}} = 1$, то $N_G(G_q)$ нильпотентен.

По теореме 2.1 получаем противоречие $G \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{X}$, которое завершает доказательство. □

Докажем теорему 1.2.

Доказательство. Необходимость. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Для любого $p \in \tau(G)$ из наследственности $\mathfrak{F}$ следует, что $N_G(G_p) \in \mathfrak{F}$. По лемме 2.6(2) $N_G(G_p)^{\mathfrak{X}}$ – субнормальная подгруппа в G.

Достаточность. Предположим, что утверждение неверно. Пусть G – группа наименьшего порядка такая, что $N_G(G_p) \in \mathfrak{F}$, $N_G(G_p)^{\mathfrak{X}}$ – субнормальная подгруппа в G для любого $p \in \tau(G)$, а $G \notin \mathfrak{F}$. По теореме 1.1 группа $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$, а значит, разрешима.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа из G. Из $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что G не является циклической группой, порядок которой есть простое число. Значит, N – абелева p-группа для некоторого простого p. Для любого $q \in \tau(G/N)$ и силовской q-подгруппы Q/N из G/N найдется силовская q-подгруппа G_q из G такая, что $Q/N = G_qN/N$. Так как $q \in \tau(G/N) \subseteq \tau(G)$, по условию $N_G(G_q) \in \mathfrak{F}$. Откуда $N_{G/N}(Q/N) = N_G(G_q)N/N \cong N_G(G_q)/N_G(G_q) \cap N \in \mathfrak{F}$. Ввиду леммы 2.7 для G/N все условия теоремы выполнены. По выбору G получаем, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Так как $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, заключаем, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа из G и $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = NM$ для некоторой максимальной в G подгруппы M. Так как G разрешима и $\mathrm{Core}_G(M) = 1$, по [10, теорема A.15.6] $N = C_G(N) = F(G)$, $M \cap N = 1$ и $O_p(M) = 1$. Ввиду нильпотентности $G^{\mathfrak{X}}$ имеем $G^{\mathfrak{X}} \leqslant F(G)$. Если $G^{\mathfrak{X}} = 1$, то $G \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G. Значит, $G^{\mathfrak{X}} = N$. Тогда $G/N \cong M \in \mathfrak{X}$. Если $p \in \pi(M)$, то в M силовская p-подгруппа является нормальной и содержится в $O_p(M) = 1$. Это противоречие показывает, что $p \notin \pi(M)$. Тогда N – силовская p-подгруппа в G. Так как G разрешима, $p \in \pi(G) = \tau(G)$, по выбору G имеем $G = N_G(N) \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

4. Заключение. Связь с известными результатами

Теоремы 1.1 и 1.2 для разных формаций $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ позволяют получать как новые, так и известные результаты. Теорема 1.1 убирает в достаточных условиях теоремы A из [6] разрешимость силовского нормализатора и уменьшает число силовских p-подгрупп, рассматривая их только для $p \in \tau(G)$. Так как $\tau(G) \subseteq \pi(G)$, из теоремы 1.1 получаются следующие результаты.

Следствие 4.1 [6, теорема A]. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустая формация и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$. Группа $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор разрешим и $\mathfrak{X}$-корадикал p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \pi(G)$.*

Следствие 4.2 [7, теорема 1]. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустая формация и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$. Группа $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}$-корадикал p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \pi(G)$.*

Ввиду того, что $\tau(G) \subseteq \pi(G)$, из теоремы 1.1 вытекает теорема 2 из [11].

Положив $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$, соответственно $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}$, из теоремы 1.2 следуют два таких результата.

Следствие 4.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^2$. Группа $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор принадлежит $\mathfrak{F}$ и нильпотентный корадикал p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

Следствие 4.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Группа $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор принадлежит $\mathfrak{F}$ и коммутант p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

Обозначим через $\mathfrak{D}$ формацию всех дисперсивных по Оре групп. Так как $\mathfrak{D}$ является наследственной насыщенной формацией, из следствия 1.5 вытекает

Следствие 4.5. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустая формация, $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}$. Группа $G \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда когда p-силовский нормализатор принадлежит $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$-корадикал p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

Из принадлежности $\mathfrak{D}$ всех силовских нормализаторов из G не всегда следует, что $G \in \mathfrak{D}$ [7].

Следствие 4.6. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустая формация и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$. Группа $G \in \mathfrak{D} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор дисперсивен по Оре и $\mathfrak{X}$-корадикал p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

Так как $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}^2$ для формации $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп, теорема 1.2 является развитием следующего результата.

Следствие 4.7 [6, теорема B]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$. Группа $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор принадлежит $\mathfrak{F}$ и нильпотентный корадикал p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \pi(G)$.*

Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$, то из теоремы 1.2 получается

Следствие 4.8. *Если $\mathfrak{X}$ – непустая формация и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$, то группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор сверхразрешим и $\mathfrak{X}$-корадикал p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

Отсюда при $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}$ соответственно вытекает

Следствие 4.9. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор сверхразрешим и нильпотентный корадикал (коммутант) p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

Исследования первого и второго авторов выполнены при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант № 20211750 «Конвергенция-2025»), исследования третьего автора выполнены при поддержке БРФФИ (проект Ф23РНФМ-63).

Литература

1. *Bianchi M., Gillio Berta Mauri A., Hauck P.* On finite soluble groups with nilpotent Sylow normalizers // Arch. Math. 1986. Vol. 47, N 3. P. 193–197.

2. *Баллестер-Болинше А., Шеметков Л. А.* О нормализаторах силовских подгрупп в конечных группах // Сиб. матем. журн. 1999. Т. 40, № 1. С. 3–5.

3. *D'Aniello A., De Vivo C., Giordano G.* Saturated formations and Sylow normalizers // Bull. Austral. Math. Soc. 2004. Vol. 69, N 1. P. 25–33.

4. *D'Aniello A., De Vivo C., Giordano G., Pérez-Ramos M. D.* Saturated formations closed under Sylow normalizers // Commun. Algebra. 2005. Vol. 33, N 8. P. 2801–2808.

5. *Kazarin L., Martínez-Pastor A., Pérez-Ramos M. D.* On Sylow normalizers of finite groups // J. Algebra Appl. 2014. Vol. 13, N 3. Art. 1350116–1–20.

6. *Васильева Т. И., Коранчук А. Г.* Конечные группы с субнормальными корадикалами силовских нормализаторов // Сиб. матем. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 805–813.

7. *Монахов В. С.* О нильпотентных корадикалах силовских нормализаторов конечной группы // Сиб. матем. журн. 2025. Т. 66, № 4. С. 683–688. https://doi.org/10.33048/smzh.2025.66.410

8. *Lu J., Meng W.* Finite groups with certain normalizers of Sylow subgroups // J. Algebra Appl. 2019. Vol. 18, N 6. Art. 1950101 (4 p.).

9. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.

10. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter De Gruyter, 1992. 898 p.

11. *Монахов В. С.* Конечные группы с дисперсивными силовскими нормализаторами // Матем. заметки. 2025. Т. 118, № 5. С. 769–778.

References

1. Bianchi M., Gillio Berta Mauri A., Hauck P. On finite soluble groups with nilpotent Sylow normalizers. *Arch. Math.*, 1986, vol. 47, iss. 3, pp. 193–197.

2. Ballester-Bolinches A., Shemetkov L. A. On normalizers of Sylow subgroup in finite groups. *Siberian Mathematical Journal,* 1999, vol. 40, iss. 1, pp. 1–2.

3. D'Aniello A., De Vivo C., Giordano G. Saturated formations and Sylow normalizers. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 2004, vol. 69, iss. 1, pp. 25–33.

4. D'Aniello A., De Vivo C., Giordano G., Pérez-Ramos M. D. Saturated formations closed under Sylow normalizers. *Commun. Algebra*, 2005, vol. 33, iss. 8, pp. 2801–2808.

5. Kazarin L., Martínez-Pastor A., Pérez-Ramos M. D. On Sylow normalizers of finite groups. *J. Algebra Appl.*, 2014, vol. 13, iss. 3, art. 1350116–1–20.

6. Vasilyeva T. I., Koranchuk A. G. Finite groups with subnormal residuals of Sylow normalizers. *Siberian Mathematical Journal*, 2022, vol. 63, iss. 4, pp. 670–676.

7. Monakhov V. S. On nilpotent residuals of Sylow normalizers of a finite group. *Siberian Mathematical Journal*, 2025, vol. 66, iss. 4, pp. 986–990.

8. Lu J., Meng W. Finite groups with certain normalizers of Sylow subgroups. *J. Algebra Appl.*, 2019, vol. 18, iss. 6, art. 1950101 (4 p.).

9. Shemetkov L. A. *Formations of finite groups*. Moscow, Nauka, 1987. 272 p. (in Russian).

10. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups*. Berlin, New York, Walter De Gruyter, 1992. 898 p.

11. Monakhov V. S. Finite groups with dispersive Sylow normalizers. *Mathematical Notes*, 2025, vol. 118, iss. 5, pp. 716–718 (in Russian).

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Том 33. № 2. С. 13–20

УДК 512.552 EDN: CRDMSF

МНОГОЧЛЕНЫ НАД КОЛЬЦАМИ С ДЕЛЕНИЕМ

А. Г. Гутор, С. В. Тихонов

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: goutor7@gmail.com, tikhonovsv@bsu.by

Поступила: 26.05.2025 **Исправлена:** 15.09.2025 **Принята:** 15.12.2025

Ключевые слова: кольцо с делением, корень (правый) многочлена, алгебра обобщенных кватернионов, класс сопряженности элемента, сферический корень.

Аннотация. В работе рассматриваются свойства многочленов с коэффициентами в кольцах с делением. Получена теорема о разложении многочлена с коэффициентами в произвольном кольце с делением. Показано, что если нецентральный элемент не является корнем многочлена над произвольным кольцом с делением, то в классе сопряженности этого элемента бесконечно много элементов, не являющихся корнями этого многочлена. Также в работе получены оценки для количества различных классов сопряженности сферических корней для некоторых типов многочленов над алгебрами кватернионов.

POLYNOMIALS OVER DIVISION RINGS

A. G. Goutor, S. V. Tikhonov

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: goutor7@gmail.com, tikhonovsv@bsu.by

Received: 26.05.2025 **Revised:** 15.09.2025 **Accepted:** 15.12.2025

Keywords: division ring, (right) root of a polynomial, algebra of generalized quaternions, conjugacy class of an element, spherical root.

Abstract. We consider properties of polynomials with coefficients in division rings. A theorem on the decomposition of a polynomial with coefficients in an arbitrary division ring is obtained. It is shown that if a non-central element is not a root of a polynomial over an arbitrary division ring, then the conjugacy class of this element contains infinitely many elements that are not roots of this polynomial. The paper also contains estimates for the number of different conjugacy classes of spherical roots for some types of polynomials over quaternion algebras.

1. Введение и предварительные результаты

Пусть R – некоммутативное ассоциативное кольцо с делением, R^* – его мультипликативная группа. $R[x]$ обозначает кольцо многочленов от переменной x с коэффициентами в R, считаем, что переменная x коммутирует с элементами кольца R. Таким образом, всякий многочлен из $R[x]$ имеет вид

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_0, \ldots, a_n \in R. \tag{1}$$

Сложение и умножение многочленов из $R[x]$ определяется естественным образом. Степень многочлена вида (1) также определяется привычным образом и равна n, если $a_n \neq 0$. В кольце $R[x]$ имеет место теорема о делении справа многочленов с остатком, при этом для многочленов $P(x), S(x) \in R[x]$ определен их наибольший общий правый делитель НОПД$(P(x), S(x))$ (см. [1]).

Основные свойства многочленов над кольцами с делением описаны в [2, Ch. 5, §16] (см. также [3; 4]).

В [5] доказана следующая

Теорема 1.1. *Пусть Q – алгебра кватернионов с делением над полем K. Тогда всякий многочлен $P(x) \in Q[x]$ может быть представлен единственным образом в виде произведения $P(x) = cG(x)H(x)$, где $c \in Q^*$ – старший коэффициент многочлена $P(x)$, $H(x)$ – унитарный многочлен с коэффициентами в K и $G(x) \in Q[x]$ – унитарный многочлен, не делящийся справа ни на какой неконстантный многочлен из $K[x]$. Более того, если $Q[x]$ рассмотреть как свободный модуль ранга 4 над $K[x]$ со стандартным базисом $1, i, j, k$, то $H(x)$ – это наибольший общий делитель (в $K[x]$) координат многочлена $P(x)$ в этом базисе.*

Одной из целей данной статьи является обобщение этой теоремы на случай любых колец с делением (см. теорему 2.4 ниже).

Для $a \in R$ определим $P(a)$ как элемент

$$P(a) = a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1 a + a_0.$$

Назовем элемент $a \in R$ (правым) корнем многочлена $P(x)$, если $P(a) = 0$. Известно, что $a \in R$ является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $x - a$ является правым делителем $P(x)$ в $R[x]$ ([2, предложение 16.2], т. е. $P(x) = H(x)(x - a)$ для некоторого многочлена $H(x)$ из $R[x]$. Заметим, что из равенства $P(x) = H(x)S(x) \in R[x]$ не следует равенство $P(a) = H(a)S(a)$. В частности, если a – корень многочлена $H(x)$, то a может не быть корнем многочлена $P(x)$.

Класс сопряженности элемента $a \in R$, который будем обозначать через $[a]$, состоит из всех элементов вида qaq^{-1}, где q – произвольный ненулевой элемент из R. Кольцо R распадается на непересекающиеся классы сопряженности. Через $R^{(c)}$ будем обозначать множество всех элементов из R, коммутирующих с элементом $c \in R$. $R^{(c)}$ является подкольцом с делением в R.

В случае многочленов над полями всякий многочлен степени n имеет не более n корней. В случае многочленов с коэффициентами в кольцах с делением ситуация другая, многочлен степени n может иметь бесконечно много корней. Теорема Гордона–Моцкина [2, теорема 16.4] говорит, что многочлен степени n из $R[x]$ может иметь корни не более чем в n классах сопряженности кольца R. Кроме того, если $P(x) \in R[x]$ имеет два различных корня в классе сопряженности, то $P(x)$ имеет бесконечно много корней в этом классе (см. [2, теорема 16.11 и 4, предложение 3]). В случае алгебры кватернионов Q получается, что если $P(x) \in Q[x]$ имеет два различных корня в классе сопряженности, то всякий элемент из этого класса является корнем многочлена $P(x)$. Это означает, что у многочленов над алгебрами кватернионов с делением существуют только два типа корней: изолированный и сферический. Корень q многочлена $P(x)$ называется сферическим, если q не принадлежит центру алгебры и любой элемент $d \in [q]$ также является корнем многочлена $P(x)$. Корень q называется изолированным, если класс сопряженности $[q]$ содержит только один корень многочлена $P(x)$. Однако в случае, когда минимальный многочлен класса сопряженности имеет степень больше чем два, ситуация принципиально другая. В [6] для любого класса сопряженности с минимальным многочленом степени > 2 построен квадратичный многочлен, имеющий бесконечно много корней в этом классе, при этом в данном классе сопряженности имеется бесконечно много элементов, не являющихся корнями такого многочлена. В данной статье мы показываем, что если нецентральный элемент c не является корнем многочлена над произвольным кольцом с делением, то в классе $[c]$ бесконечно много элементов, не являющихся корнями этого многочлена (см. теорему 2.5 ниже). Также в статье получены оценки для количества различных классов сопряженности сферических корней для многочленов над алгебрами кватернионов.

2. Многочлены над произвольными кольцами с делением

Пусть R_0 – подкольцо с делением кольца R, $\{c_i\}_{i \in I}$ – базис правого векторного пространства R над R_0. Тогда всякий многочлен $P(x) \in R[x]$ единственным образом можно представить в виде

$$P(x) = \sum_{i \in I} c_i b_i(x), \tag{2}$$

где $b_i(x) \in R_0[x]$ почти все равны нулю. Многочлены $b_i(x)$ получаются следующим образом. Рассмотрим многочлен $P(x)$ вида (1). Разложим каждый коэффициент многочлена $a_i, i = 1, \ldots, n$, по базису $\{c_i\}_{i \in I}$. Тогда

$$P(x) = \left(\sum_{i \in I} c_i a_{n,i}\right) x^n + \left(\sum_{i \in I} c_i a_{n-1,i}\right) x^{n-1} + \cdots + \left(\sum_{i \in I} c_i a_{1,i}\right) x + \left(\sum_{i \in I} c_i a_{0,i}\right) =$$

$$= \sum_{i \in I} c_i (a_{n,i} x^n + a_{n-1,i} x^{n-1} + \ldots + a_{1,i} x + a_{0,i}),$$

где $a_{k,i} \in R_0, k = 0, \ldots, n, i \in I$.

Таким образом, $b_i(x) = a_{n,i}x^n + a_{n-1,i}x^{n-1} + \ldots + a_{1,i}x + a_{0,i}$ в разложении (2). Отметим, что почти все эти многочлены равны 0. В обозначениях выше имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. 1. *Многочлен $h(x) \in R_0[x]$ является правым делителем многочлена $P(x) \in R[x]$ тогда и только тогда, когда $h(x)$ является общим правым делителем многочленов $b_i(x)$, $i \in I$.*

2. *Многочлен $h(x) \in R_0[x]$ является правым делителем наибольшей степени из $R_0[x]$ многочлена $P(x) \in R[x]$ тогда и только тогда, когда $h(x) =$ НОПД$(b_i(x), i \in I)$.*

3. *Элемент $\alpha \in R_0$ является корнем многочлена $P(x) \in R[x]$ тогда и только тогда, когда α – общий корень многочленов $b_i(x), i \in I$.*

4. *Если многочлен $h(x) \in R_0[x]$ является правым делителем наибольшей степени из $R_0[x]$ многочлена $P(x) \in R[x]$, то любой корень из R_0 многочлена $P(x)$ является корнем многочлена $h(x)$.*

Доказательство. 1. Если $h(x)$ делит справа каждый многочлен $b_i(x)$, то $h(x)$ делит справа и $P(x)$.

Пусть теперь $P(x) = G(x)h(x)$ для некоторого многочлена $G(x) \in R[x]$. Для многочлена $G(x)$ существует разложение вида (2):

$$G(x) = \sum_{i \in I} c_i d_i(x),$$

где $d_i(x)$ из $R_0[x]$. Тогда

$$P(x) = \left(\sum_{i \in I} c_i d_i(x)\right) h(x) = \sum_{i \in I} c_i d_i(x) h(x).$$

Таким образом, $b_i(x) = d_i(x)h(x)$ для всех $i \in I$. Следовательно, $h(x)$ является общим делителем многочленов $b_i(x)$, $i \in I$.

2. Следует из 1.

3. Следует из 1, так как α – корень многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $x - \alpha$ – правый делитель многочлена $P(x)$.

4. Следует из 2 и 3. Действительно, если $\alpha \in R_0$ – корень многочлена $P(x)$, то $x - \alpha$ является общим правым делителем многочленов $b_i(x)$, $i \in I$. Тогда $x - \alpha$ является правым делителем их наибольшего правого общего делителя. □

Замечание 2.2. *Если в условиях предыдущей теоремы рассмотреть алгебру с делением, то все корни многочлена $P(x)$ можно искать как корни многочленов из подполей алгебры (например, корень a лежит в подполе $F(a)$). Таким образом, задача поиска корней многочлена с коэффициентами в некоторой алгебре сводится к задаче поиска корней в подполях.*

Замечание 2.3. *Покажем, что утверждение, обратное к пункту* 4 *из теоремы* 2.1*, неверно, т. е. если любой корень из R_0 многочлена $P(x)$ будет корнем и многочлена $h(x) \in R_0[x]$, делящего справа $P(x)$, то не обязательно $h(x)$ – многочлен наибольшей степени из $R_0[x]$, делящий справа $P(x)$. Например, пусть $P(x) = (x^2+1)x \in \mathbb{H}[x]$, где $\mathbb{H}$ – алгебра гамильтоновых кватернионов. Тогда любой корень многочлена $P(x)$ из $\mathbb{R}$ является корнем многочлена $h(x) = x$. Но $h(x)$ не является многочленом наибольшей степени из $\mathbb{R}[x]$, делящим справа $P(x)$.*

В качестве следствия в обозначениях теоремы 2.1 получаем

Теорема 2.4. *Всякий многочлен $P(x) \in R[x]$ может быть однозначно представлен в виде*

$$P(x) = cG(x)H(x),$$

где $c \in R^*$ – старший коэффициент многочлена $P(x)$; $H(x)$ – унитарный многочлен с коэффициентами в подкольце с делением R_0; $G(x) \in R[x]$ – унитарный многочлен, не имеющий правых неконстантных делителей из $R_0[x]$. Более того, $H(x)$ является наибольшим общим правым делителем многочленов $b_i(x)$, $i \in I$.

Теорема 2.5. *Пусть R – кольцо с делением, $P(x) \in R[x]$. Предположим, что c не является центральным элементом и $P(c) \neq 0$. Тогда в классе сопряженности $[c]$ бесконечно много элементов, не являющихся корнями многочлена $P(x)$.*

Доказательство. Теорема Херстейна ([2, теорема 13.26]) говорит, что множество $[c]$ является бесконечным. Таким образом, если $P(x)$ либо не имеет корней в $[c]$, либо имеет конечное число корней в $[c]$, то в классе сопряженности $[c]$ бесконечно много элементов, не являющихся корнями многочлена $P(x)$. Предположим, что $P(x)$ имеет бесконечно много корней в $[c]$. Из [4, предложение 2] следует, что множество всех $y \in R^*$ с условием $P(ycy^{-1}) = 0$ совпадает с множеством

$$V := \{y \in R^* | \sum_{i=0}^{n} a_i y c^i = 0\}.$$

Тогда V – бесконечное множество, поскольку $P(x)$ имеет бесконечно много корней в классе сопряженности $[c]$. Заметим, что $V \cup \{0\}$ является правым векторным пространством над кольцом с делением $R^{(c)}$. Так как c не является корнем многочлена $P(x)$, то $1 \notin V$. Тогда $1 + y \notin V$ для любого $y \in V$, следовательно, $(1+y)c(1+y)^{-1}$ не является корнем многочлена $P(x)$ для всякого $y \in V$.

Пусть $y_1, y_2 \in V$, $y_1 \neq y_2$. Покажем, что

$$(1+y_1)c(1+y_1)^{-1} \neq (1+y_2)c(1+y_2)^{-1}.$$

Действительно, если $(1+y_1)c(1+y_1)^{-1} = (1+y_2)c(1+y_2)^{-1}$, то

$$(1+y_2)^{-1}(1+y_1)c = c(1+y_2)^{-1}(1+y_1).$$

Следовательно, $z = (1+y_2)^{-1}(1+y_1) \in R^{(c)}$ и $1 + y_1 = (1+y_2)z$. Тогда

$$1 = (y_2 z - y_1)(1-z)^{-1}.$$

Что противоречит тому, что $1 \notin V$.

Таким образом, получаем бесконечно много различных элементов вида $(1+y)c(1+y)^{-1}$, принадлежащих $[c]$ и не являющихся корнями многочлена $P(x)$. □

3. Сферические корни многочленов над алгебрами обобщенных кватернионов

Пусть Q – алгебра обобщенных кватернионов с делением над полем F. Нам потребуется следующая

Лемма 3.1 [2, лемма 16.17]. *Пусть Q является алгеброй обобщенных кватернионов с делением над центром F, и пусть B – класс сопряженности алгебры Q с минимальным многочленом $\lambda(x)$ над F. Если $P(x) \in Q[x]$ имеет два корня в B, тогда $P(x) \in Q[x]\lambda(x)$ и $P(x)$ обращается в 0 на любом элементе из B.*

Напомним, что корень q многочлена $P(x)$ называется сферическим, если q не принадлежит центру алгебры и любой элемент $d \in [q]$ также является корнем многочлена $P(x)$. В качестве следствия леммы 3.1 получаем

Лемма 3.2. *Если многочлен $P(x)$ вида (1) с коэффициентами в Q имеет сферические корни $c_1, \dots, c_m$ ($m \leqslant n$), лежащие в различных классах сопряженности, то $P(x)$ делится на произведение минимальных многочленов этих корней.*

Доказательство. Докажем индукцией по числу классов сферических корней. Пусть $f_i(x)$ – минимальный многочлен элемента c_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Из леммы 3.1 следует, что $P(x)$ делится на $f_1(x)$. Предположим, что утверждение верно для k корней. Тогда

$$P(x) = P_1(x) f_k(x) \dots f_1(x)$$

для некоторого $P_1(x) \in Q[x]$.

Докажем утверждение для $k+1$ корней. Так как $f_k(x) \dots f_1(x) \in F[x]$, то

$$P(b) = P_1(b) f_1(b) \dots f_k(b)$$

для любого $b \in Q$. Любой элемент из класса $[c_{k+1}]$ является корнем многочлена $P(x)$, но не является корнем многочлена $f_k(x) \dots f_1(x)$, поскольку $c_1, \dots, c_{k+1}$ лежат в различных классах сопряженности. Тогда c_{k+1} является сферическим корнем многочлена $P_1(x)$. Из леммы 3.1 следует, что $P_1(x) = P_2(x) f_{k+1}(x)$ для некоторого многочлена $P_2(x) \in Q[x]$. Откуда

$$P(x) = P_2(x) f_{k+1}(x) f_k(x) \dots f_1(x).$$ □

Далее получим оценку для количества различных классов сферических корней в зависимости от степени многочлена.

Теорема 3.3. *Многочлен*

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

с коэффициентами в алгебре обобщенных кватернионов Q над центром F имеет не более $n/2$ различных классов сопряженности сферических корней. Если степень многочлена $P(x)$ четная и есть $n/2$ различных классов сопряженности сферических корней, то все коэффициенты многочлена лежат в центре. Если же степень n нечетная и есть $(n-1)/2$ различных классов сопряженности сферических корней, то все коэффициенты лежат в одном подполе алгебры Q.

Доказательство. Пусть степень многочлена $P(x)$ четная. По лемме 3.2 многочлен $P(x)$ делится на произведение минимальных многочленов своих сферических корней. Поскольку степень каждого такого минимального многочлена равна 2, максимальное количество множителей в таком произведении равно $n/2$. Поэтому и различных классов сопряженности сферических корней не может быть больше, чем $n/2$. Если же различных классов сопряженности сферических корней ровно $n/2$, то $P(x)$ равняется произведению многочленов из $F[x]$, а значит коэффициенты $P(x)$ лежат в F.

Пусть теперь степень многочлена $P(x)$ нечетная. Аналогично, по лемме 3.2 получаем, что количество квадратных множителей (минимальных многочленов) многочлена $P(x)$, а значит и различных классов сопряженности сферических корней, не превосходит $(n-1)/2$. Если предположить, что различных классов сопряженности сферических корней ровно $(n-1)/2$, получим, что $P(x)$ имеет вид $P(x) = (x-a)f(x)$, где $f(x) \in F[x]$ – произведение минимальных многочленов сферических корней многочлена $P(x)$, $a \in Q$. Тогда коэффициенты многочлена $P(x)$ лежат в подполе $F(a)$. □

Для многочленов третьей степени получаем простое достаточное условие отсутствия сферических корней.

Следствие 3.4. *Если коэффициенты многочлена $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \in Q[x]$ не лежат в одном подполе алгебры Q, то у многочлена $P(x)$ не может быть сферических корней.*

Доказательство. Пусть многочлен $P(x)$ имеет сферический корень. Тогда, согласно лемме 3.1, он имеет вид $P(x) = (x-a)\lambda(x)$, где $\lambda(x)$ – многочлен второй степени над F (минимальный многочлен этого сферического корня). Отсюда следует, что $P(x) \in F(a)[x]$, т. е. все коэффициенты многочлена $P(x)$ лежат в подполе $F(a)$. □

4. Сферические корни многочленов из алгебры гамильтоновых кватернионов

Известно (см. [2, теорема 16.14]), что всякий неконстантный многочлен с коэффициентами в алгебре гамильтоновых кватернионов $\mathbb{H}$ имеет корень в $\mathbb{H}$. Кроме того, корень является либо изолированным, либо сферическим. В этом разделе применим результаты предыдущих разделов для анализа существования сферических корней некоторых типов многочленов с коэффициентами в $\mathbb{H}$.

Лемма 4.1. *Если x_1 – сферический корень многочлена $P(x) \in \mathbb{H}[x]$, то в каждом максимальном подполе алгебры $\mathbb{H}$ лежит корень многочлена $P(x)$ из класса сопряженности $[x_1]$.*

Доказательство. Элемент x_1 лежит в максимальном подполе $\mathbb{R}(x_1)$ алгебры $\mathbb{H}$. Все максимальные подполя алгебры $\mathbb{H}$ изоморфны полю комплексных чисел $\mathbb{C}$. Тогда по теореме Сколема–Нетер [7, § 12.6] все максимальные подполя сопряжены, т. е., если K – максимальное подполе, то $K = g\mathbb{R}(x_1)g^{-1}$ для некоторого $g \in \mathbb{H}, g \neq 0$. Тогда gx_1g^{-1} – корень многочлена $P(x)$ из класса $[x_1]$, лежащий в K. □

Замечание 4.2. *Если многочлен $P(x) \in \mathbb{H}[x]$ не имеет корней в некотором максимальном подполе $K \subset \mathbb{H}$, то ввиду леммы* 4.1 *этот многочлен не имеет сферических корней. Аналогичный подход для анализа существования сферических корней многочленов можно использовать в случае алгебр кватернионов с делением, в которых имеется лишь конечное число классов изоморфности максимальных подполей. Например, в случае кватернионных алгебр над локальными полями.*

В общем случае нахождение корней многочленов с коэффициентами в алгебре гамильтоновых кватернионов является сложной задачей (см., например, [8–12]), однако для многочленов специального вида можно легко получить оценку для числа классов сферических корней.

Теорема 4.3. *Рассмотрим такой многочлен*

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_kx^k + \ldots + a_mx^m + \ldots + a_1x + a_0 \in \mathbb{H}[x],$$

что все его коэффициенты, кроме, возможно, двух a_k и a_m, лежат в $\mathbb{R}$ (возможен случай $m = 0$). Тогда

1. *Если один из коэффициентов a_k или a_m из $\mathbb{R}$, а второй – нет, то многочлен $P(x)$ не имеет сферических корней;*

2. *Если оба коэффициента a_k и a_m не из $\mathbb{R}$, но лежат в одном подполе, то многочлен $P(x)$ имеет не более $(k-m)/2$ различных классов сферических корней (в частности, если $k = m+1$, то $P(x)$ не имеет сферических корней);*

3. *Если оба коэффициента a_k и a_m не лежат в одном подполе, то многочлен $P(x)$ не имеет сферических корней.*

Доказательство. 1. Пусть $a_m \notin \mathbb{R}$. Найдем корни многочлена $P(x)$, лежащие в максимальном подполе K, $K \neq \mathbb{R}(a_m)$. В качестве базиса алгебры $\mathbb{H}$ над полем K возьмем 1 и a_m. Тогда

$$P(x) = 1(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_k x^k + \ldots + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m+1}x^{m+1} + \ldots + a_1 x + a_0) + a_m x^m =$$

$$= 1b_1(x) + a_m b_2(x),$$

где $b_1(x)$ и $b_2(x)$ из $\mathbb{R}[x] \subset K[x]$. Поскольку $b_2(x) = x^m$ либо не имеет корней, если $m = 0$, либо имеет единственный корень, равный 0, если $m \neq 0$, то и многочлен $P(x)$, согласно теореме 2.1, в поле K не имеет других корней, кроме, возможно, 0. Следовательно, по лемме 4.1 в этом случае у $P(x)$ нет сферических корней. Аналогичное рассуждение, если $a_k \notin \mathbb{R}$.

2. Найдем корни многочлена $P(x)$ в максимальном подполе $K \neq \mathbb{R}(a_m)$. В качестве базиса $\mathbb{H}$ над K можно взять 1 и a_m. Так как $a_k \in \mathbb{R}(a_m)$, то $a_k = u + va_m$, где $u, v \in \mathbb{R}$. Тогда при разложении многочлена $P(x)$ по базису 1 и a_m получаем

$$b_1(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_{k+1}x^{k+1} + ux^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_{m+1}x^{m+1} + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

$b_2(x) = x^m + vx^k$. Имеем, $b_2(x) = x^m + vx^k = x^m(1 + vx^{k-m})$. Таким образом, корни многочлена $P(x)$ в поле K – это либо 0, либо корни многочлена $x^{k-m} + 1/v$. Если у многочлена $x^{k-m} + 1/v$ есть корень в $\mathbb{R}$, то этот корень не является сферическим корнем многочлена $P(x)$. Поскольку $x^{k-m} + 1/v \in \mathbb{R}[x]$, то для всякого корня a этого многочлена, не лежащего в $\mathbb{R}$, сопряженный кватернион $\overline{a}$ также является корнем. Поскольку a и $\overline{a}$ принадлежат одному классу сопряженности, то корней у данного многочлена, лежащих в разных классах сопряженности, не более $(k-m)/2$. Таким образом, $P(x)$ имеет не более $(k-m)/2$ различных классов сферических корней.

3. Будем искать корни многочлена $P(x)$ в поле $\mathbb{R}(a_m)$. Возьмем базис 1 и a_k алгебры $\mathbb{H}$ над полем $\mathbb{R}(a_m)$. Тогда $P(x) = 1b_1(x) + a_k b_2(x)$, где $b_2(x) = x^k$ и $b_1(x)$ – некоторый многочлен из $\mathbb{R}(a_m)[x]$. Поскольку $b_2(x)$ имеет только корень 0, то в поле $\mathbb{R}(a_m)$ у $P(x)$ не может быть других корней, кроме, возможно, 0. Тогда согласно лемме 4.1 у $P(x)$ нет сферических корней в этом случае. $\square$

Далее рассмотрим случай многочленов третьей степени. Отметим, что для многочленов второй степени явные формулы для нахождения корней в случае алгебры гамильтоновых кватернионов получены в [9].

Следствие 4.4. *Многочлен*

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{H}[x]$$

в зависимости от коэффициентов имеет

1. *Не более одного класса сферических корней, если либо а) $a, b, c \in \mathbb{R}$, либо б) $a, c \notin \mathbb{R}, b \in \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}(c)$, либо в) $a, b, c \notin \mathbb{R}, a, c \in \mathbb{R}(b)$;*

2. *Только изолированные корни в остальных случаях.*

Доказательство. 1. Оценка для количества классов сферических корней получается из теоремы 3.3.

2. Если не выполнены условия на коэффициенты многочлена из первого пункта, то возможны следующие случаи:

а) один коэффициент не лежит в поле $\mathbb{R}$, а остальные коэффициенты принадлежат $\mathbb{R}$;

б) $a \in \mathbb{R}$, $b, c \notin \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}(c)$;

в) $c \in \mathbb{R}$, $a, b \notin \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}(b)$;

г) коэффициенты многочлена не лежат в одном подполе алгебры $\mathbb{H}$.

В случае а) отсутствие сферических корней следует из пункта 1 теоремы 4.3. В случае б) и в) отсутствие сферических корней следует из пункта 2 теоремы 4.3. Наконец, отсутствие сферических корней в случае г) получается из следствия 3.4. □

Пример 4.5. Рассмотрим несколько примеров кубических многочленов с коэффициентами, удовлетворяющими условиям из пункта 1 следствия 4.4.

Многочлен $x(x^2-1)$ не имеет сферических корней, а многочлен $x(x^2+1)$ имеет сферический корень i.

У многочлена

$$x^3 - ix^2 - x + i = (x-i)(x^2-1)$$

нет сферических корней, а у многочлена

$$x^3 - ix^2 + x - i = (x-i)(x^2+1)$$

i является сферическим корнем.

Многочлен

$$x^3 + (2-i)x^2 + (1-2i)x - i = (x-i)(x^2+2x+1) = (x-i)(x+1)^2$$

не имеет сферических корней, так как многочлен $(x+1)^2$ имеет корни в $\mathbb{R}$, а у многочлена

$$x^3 + (1-i)x^2 + (1-i)x - i = (x-i)(x^2+x+1)$$

есть сферический корень – это корень многочлена x^2+x+1.

Таким образом, в случае выполнимости условий из пункта 1 следствия 4.4 требуется более тонкое рассуждение для ответа на вопрос о существовании сферического корня у кубического многочлена.

Работа выполнена в рамках НИР «Разработка алгебро-геометрических и представленческих методов исследования конечнопорожденных групп, конечномерных алгебр и квадратичных форм», государственной программы научных исследований «Конвергенция–2025», № ГР 20212390.

Литература

1. *Ore O.* Theory of non-commutative polynomials // Ann. of Math (2). 1933. Vol. 34, N 3. P. 480–508.

2. *Lam T. Y.* A First Course in Noncommutative Rings. Graduate Texts in Mathematics 131. New York: Springer-Verlag, 1991.

3. *Gordon B., Motzkin T. S.* On the zeros of polynomials over division rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 116. P. 218–226.

4. *Bray U., Whaples G.* Polynomials with coefficients from a division ring // Can. J. Math. 1983. Vol. 35. P. 509–515.

5. *Beck B.* Sur les èquations polynomiales dans les quaternions // Enseign. Math. (2). 1979. Vol. 25, N 3–4. P. 193—201.

6. *Goutor A. G., Tikhonov S. V.* Roots of polynomials over division rings // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2024. Т. 68, № 5. С. 359–364. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-5-359-364

7. *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986. 543 с.

8. *Falcão M. I., Miranda F., Severino R., Soares M. J.* Mathematica tools for quaternionic polynomials // Computational Science and its Applications. ICCSA 2017. Part II. Lecture Notes in Comput. Sci., 10405 Springer, Cham, 2017. P. 394–408.

9. *Huang L., So W.* Quadratic formulas for quaternions // Appl. Math. Lett. 2002. Vol. 15, N 5. P. 533–540.

10. *Janovská D., Opfer G.* A note on the computation of all zeros of simple quaternionic polynomials // SIAM J. Numer. Anal. 2010. Vol. 48, N 1. P. 244–256.

11. *Serôdio R., Pereira E., Vitória J.* Computing the zeros of quaternion polynomials // Comput. Math. Appl. 2001. Vol. 42, N 8–9. P. 1229–1237.

12. *Serôdio R., Siu L.-S.* Zeros of quaternion polynomials // Appl. Math. Lett. 2001. Vol. 14, N 2. P. 237–239.

References

1. Ore O. Theory of non-commutative polynomials. *Ann. of Math. (2)*, 1933, vol. 34, no. 3, pp. 480–508.

2. Lam T. Y. *A First Course in Noncommutative Rings.* Graduate Texts in Mathematics 131. New York, Springer-Verlag, 1991.

3. Gordon B., Motzkin T. S. On the zeros of polynomials over division rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1965, vol. 116, pp. 218–226.

4. Bray U., Whaples G. Polynomials with coefficients from a division ring. *Can. J. Math.*, 1983, vol. 35, pp. 509–515.

5. Beck B. Sur les èquations polynomiales dans les quaternions. *Enseign. Math. (2)*, 1979, vol. 25, no. 3–4, pp. 193–201.

6. Goutor A. G., Tikhonov S. V. Roots of polynomials over division rings. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2024, vol. 68, no. 5, pp. 359–364. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-5-359-364

7. Pierce R. S. *Associative Algegras.* New York, Springer, 1982. 436 p.

8. Falcão M. I., Miranda F., Severino R., Soares M. J. Mathematica tools for quaternionic polynomials. *Computational Science and its Applications.* ICCSA 2017. Part II. Lecture Notes in Comput. Sci., 10405 Springer, Cham, 2017, pp. 394–408.

9. Huang L., So W. Quadratic formulas for quaternions. *Appl. Math. Lett.*, 2002, vol. 15, no. 5, pp. 533–540.

10. Janovská D., Opfer G. A note on the computation of all zeros of simple quaternionic polynomials. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2010, vol. 48, no. 1, pp. 244–256.

11. Serôdio R., Pereira E., Vitória J. Computing the zeros of quaternion polynomials. *Comput. Math. Appl.*, 2001, vol. 42, no. 8–9, pp. 1229–1237.

12. Serôdio R., Siu L.-S. Zeros of quaternion polynomials. *Appl. Math. Lett.*, 2001, vol. 14, no. 2, pp. 237–239.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Том 33. № 2. С. 21–27

УДК 512.544.6, 512.71, 519.719.2 EDN: HQZGXB

ОБ ОДНОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ В СПЕЦИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЕ

Г. В. Матвеев[1], А. А. Осиновская[2]

[1]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*
[2]*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*
e-mail: matveev@bsu.by, anna@im.bas-net.by

Поступила: 09.09.2025 **Исправлена:** 13.10.2025 **Принята:** 15.12.2025

Ключевые слова: специальная линейная группа, конгруэнц-подгруппа, фундаментальная область.

Аннотация. Модулярное разделение секрета в группе $SL_2(\mathbb{Z})$ было предложено Янчевским, Матвеевым и Говорушко. В настоящей работе построена в явном виде вся фундаментальная область при действии левыми сдвигами главной конгруэнц-подгруппы на группе $SL_2(\mathbb{Z})$, что представляет дополнительные возможности для построения схем, так как эта область является пространством хранимых секретов схемы разделения секрета.

ON A FUNDAMENTAL DOMAIN IN A SPECIAL LINEAR GROUP

G. V. Matveev[1], A. A. Osinovskaya[2]

[1]*Belarusian State University, Minsk, Belarus*
[2]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
e-mail: matveev@bsu.by, anna@im.bas-net.by

Received: 09.09.2025 **Revised:** 13.10.2025 **Accepted:** 15.12.2025

Keywords: special linear group, congruence subgroup, fundamental domain.

Abstract. Modular secret sharing in the group $SL_2(\mathbb{Z})$ was recently proposed by Yanchevskiy, Matveev, and Govorushko. In this paper we have constructed in explicit form the entire fundamental domain under the action of left shifts of the principal congruence subgroup on the group $SL_2(\mathbb{Z})$, which presents additional possibilities for constructing schemes, since the domain is the space of stored secrets of the secret sharing scheme.

Модулярное разделение секрета в группе $SL_2(\mathbb{Z})$ было недавно предложено в работе [1]. Специальная линейная группа $SL_2(\mathbb{Z})$ – это матрицы над кольцом целых чисел размера 2×2 с единичным определителем. В качестве пространства ключей и хранимого ключа используется фундаментальная область при действии левыми сдвигами главной конгруэнц-подгруппы на группе $SL_2(\mathbb{Z})$. Однако построить всю фундаментальную область нам не удалось. Построена лишь часть, пригодная для реализации алгоритма разделения секрета.

Попытки построить всю фундаментальную область предпринимались и ранее [2], вне связи с разделением секрета, т. е. эта задача интересна и чисто с алгебраической точки зрения. Уместно будет напомнить, что в книге [3, §7.1, с. 438–439] отмечается нетривиальный характер задачи подъема решений уравнения по некоторой системе модулей до целочисленного решения. С нашей точки зрения задача подъема решений – это в точности алгоритм восстановления секрета. Вместе с тем в работах [1; 4] показано, что знание фундаментальной области значительно облегчает восстановление секрета.

В настоящей работе нами построена в явном виде вся фундаментальная область при действии левыми сдвигами главной конгруэнц-подгруппы на группе $SL_2(\mathbb{Z})$, что представляет дополнительные возможности для разделения секрета в этой группе.

Пусть $m \neq 1$ – целое положительное число. Напомним определения конгруэнц-подгрупп в группе $SL_2(\mathbb{Z})$:

$$\Gamma_0(m) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \ : \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \ (\bmod\ m) \right\},$$

$$\Gamma(m) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \ : \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{m} \right\}.$$

Здесь и далее сравнимость матриц по модулю m означает их поэлементную сравнимость. Известно, что $\Gamma_0(m)$ и $\Gamma(m)$ действительно подгруппы и справедливы включения

$$\Gamma(m) \subset \Gamma_0(m) \subset SL_2(\mathbb{Z}).$$

Подгруппа $\Gamma(m)$ называется главной конгруэнц-подгруппой по модулю m.

Главная конгруэнц-подгруппа $\Gamma(m)$ действует левыми сдвигами на группах $\Gamma_0(m)$ и $SL_2(\mathbb{Z})$. Система представителей орбит называется фундаментальной областью. Имеем $\Gamma(m) \lhd SL_2(\mathbb{Z})$ [5, § 2.1]. Две матрицы A и A' принадлежат одной орбите, если $A\Gamma(m) = A'\Gamma(m)$. Это равенство удобно трактовать иначе.

Лемма 1.1 [1]. *Условие $A\Gamma(m) = A'\Gamma(m)$ эквивалентно условию $A \equiv A' \pmod{m}$.*

В свою очередь группа $\Gamma_0(m)$ действует левыми сдвигами на группе $SL_2(\mathbb{Z})$.

Лемма 1.2. *Для матриц*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

условие $A\Gamma_0(m) = A'\Gamma_0(m)$ эквивалентно условию $ac' \equiv a'c \pmod{m}$.

Доказательство. Наше условие означает

$$A^{-1}A' = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \Gamma_0(m),$$

что равносильно сравнению $ac' \equiv a'c \pmod{m}$. □

Лемма 1.3. *Пусть число m составное и $m = aa_1$ – некоторое его разложение на нетривиальные множители. Для любого целого числа c, $0 < c \leqslant a_1$, $(c, a, a_1) = 1$, существует единственное целое число $c_1 \leqslant \frac{m}{(a,a_1)}$ такое, что $(c_1, a) = 1$ и $c_1 \equiv c \pmod{a_1}$.*

Доказательство. По китайской теореме об остатках существует единственное целое число $c_1 \leqslant \frac{m}{(a,a_1)}$, для которого $c_1 \equiv c \pmod{a_1}$ и $c_1 \equiv 1 \pmod{p}$ для любого простого числа p такого, что $p \mid a$ и $p \nmid a_1$. Возьмем теперь любое простое число p со свойствами $p \mid a$ и $p \mid a_1$. Так как $(c, a, a_1) = 1$, то $p \nmid c$. Поскольку $c_1 \equiv c \pmod{p}$, то $p \nmid c_1$. Отсюда следует, что $(c_1, a) = 1$ и c_1 является искомым. Предложение доказано. □

Следствие 1.4. *Если $m = p^k$, где p простое, то $c_1 = c$.*

Рассмотрим произвольный составной модуль m. Для любой пары (a, c), где a – нетривиальный делитель числа m, $m = aa_1$, $0 < c \leqslant a_1$, $(c, a, a_1) = 1$, определим матрицу

$$M(a, c) = \begin{pmatrix} a & b \\ c_1 & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}),$$

где c_1 такое же, как в лемме 1.3. Такие матрицы существуют (хотя и определены неоднозначно). Действительно, поскольку $(a, c_1) = 1$, то можно найти целочисленное разложение $az + c_1w = 1$ НОДа. Положив $d := z$ и $b := -w$, получаем искомую матрицу. Для каждой пары (a, c) фиксируем одну такую матрицу.

Лемма 1.5. *Если $(a, c) \neq (a', c')$, то $M(a, c)\Gamma_0(m) \neq M(a', c')\Gamma_0(m)$.*

Доказательство. Будем доказывать от противного. По лемме 1.2 из $M(a, c)\Gamma_0(m) = M(a, c')\Gamma_0(m)$ следует, что $ac'_1 \equiv ac_1 \pmod{m}$, а значит, $c'_1 \equiv c_1 \pmod{a_1}$. По построению чисел c_1 и c'_1, $c' \equiv c \pmod{a_1}$, откуда получаем $c' = c$, поскольку $0 < c', c \leqslant a_1$.

Пусть теперь $M(a, c)\Gamma_0(m) = M(a', c')\Gamma_0(m)$ при $a \neq a'$. Тогда $ac'_1 \equiv a'c_1 \pmod{m}$. Без ограничения общности можем считать, что $a \nmid a'$. Из предыдущего сравнения получаем, что $ac'_1 = a'c_1 + mk$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Значит, $a \mid a'c_1$. Поскольку $(a, c_1) = 1$, то $a \mid a'$. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Положим

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ N(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \ 0 \leqslant c < m.$$

Для произвольного $m \neq 1$ определим множество

$$\mathcal{M} = \{M, N(c),\ 0 \leqslant c < m,\ M(a,c),\ m = aa_1,\ a, a_1 \neq 1,\ 0 < c \leqslant a_1,\ (c,a,a_1) = 1\}.$$

Заметим, что если m простое, то

$$\mathcal{M} = \{M, N(c),\ 0 \leqslant c < m\}.$$

Теорема 1.6. *Пусть m – некоторый целочисленный модуль. Тогда множество $\mathcal{M}$ составляет фундаментальную область группы $SL_2(\mathbb{Z})$ относительно подгруппы $\Gamma_0(m)$.*

Доказательство. Сначала покажем, что смежные классы для всех этих матриц различны.

Будем доказывать от противного. Воспользуемся леммой 1.2. Если $M\Gamma_0(m) = N(c)\Gamma_0(m)$, то $0 \equiv 1 \pmod{m}$ и мы получаем противоречие. Из $M\Gamma_0(m) = M(a,c)\Gamma_0(m)$ следует, что $0 \equiv a \pmod{m}$, и снова приходим к противоречию. Из $N(c)\Gamma_0(m) = N(c')\Gamma_0(m)$ вытекает $c \equiv c' \pmod{m}$, а значит, $c = c'$. Если $N(c)\Gamma_0(m) = M(a',c')\Gamma_0(m)$, то $c'_1 \equiv a'c \pmod{m}$, что влечет $a' \mid c'_1$, но в то же время $(c'_1, a') = 1$, получаем противоречие. Наконец, по лемме 1.5 из $M(a,c)\Gamma_0(m) = M(a',c')\Gamma_0(m)$ следует, что $(a,c) = (a',c')$.

Установим теперь, что любая матрица

$$A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

лежит в смежном классе для одной из этих матриц.

1) Действительно, если $a' \equiv 0 \pmod{m}$, то по лемме 1.2, $A'\Gamma_0(m) = M\Gamma_0(m)$.

2) Пусть $(a',m) = 1$. Тогда существует целочисленное разложение НОДа $a't + my = 1$. Положим $c = c't \pmod{m}$. Тогда $c < m$, $a'c \equiv a'c't \equiv c'(1-my) \equiv c' \pmod{m}$ и по лемме 1.2, $A'\Gamma_0(m) = N(c)\Gamma_0(m)$.

3) В остальных случаях положим $a := (a',m) > 1$. Тогда существуют целые числа t и y, для которых $a't + my = a$. Отсюда следует, что $\frac{a'}{a}t + a_1 y = 1$, а значит, $(t, a_1) = 1$.

Заметим, что в данном случае $b' \neq 0$, так как иначе $|A'| = a'd' \neq 1$. Если $d' = 0$, то из $|A'| = 1$ следует, что $c' = 1$, $b' = -1$, либо $c' = -1$, $b' = 1$. В обоих случаях $(a',c') = 1$. Если же $d' \neq 0$, то $(a',c') = 1$, поскольку $|A'| = a'd' - b'c' = 1$. Значит, во всех случаях $(a',c') = 1$, откуда вытекает $(a,c') = 1$.

Определим целое число c из равенства $c := c't \bmod a_1$. Пусть $p \mid c$, a и a_1 для некоторого простого p. Тогда $p \mid c't$, а значит $p \mid c'$ либо $p \mid t$. В обоих случаях получаем противоречие. Если $p \mid c'$, то противоречие с $(a,c') = 1$, поскольку $p \mid a$. Если $p \mid t$, то противоречие с $(a_1,t) = 1$, поскольку $p \mid a_1$. Следовательно, $(c,a,a_1) = 1$ и для такой пары (a,c) можно построить матрицу $M(a,c) \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Поскольку $c_1 = c't + a_1 k$, $k \in \mathbb{Z}$, то

$$c_1 a' = c'(a't) + mk\frac{a'}{a} = c'(a - my) + mk\frac{a'}{a} = c'a + m(k\frac{a'}{a} - yc').$$

Из леммы 1.2 вытекает, что $M(a,c)\Gamma_0(m) = A'\Gamma_0(m)$. □

Замечание 1.7. *Известно, что*

$$[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(m)] = m\prod_{p|m}\left(1 + \frac{1}{p}\right). \tag{1}$$

В [5, предложение 2.1.1] *этот индекс найден как частное индексов* $[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(m)]/[\Gamma_0(m) : \Gamma(m)]$. *Из теоремы* 1.6 *следует еще одно, непосредственное, доказательство этого факта.*

Доказательство. Если $m = p^k$, $k \geqslant 1$, то по теореме 1.6 и следствию 1.4

$$[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(p^k)] = |\mathcal{M}| = 1 + p^k + \sum_{i=1}^{k-1}(p^{k-i} - p^{k-i-1}) = p^k + p^{k-1}$$

и мы получили искомое.

Пусть теперь число m имеет следующее каноническое разложение на простые множители:

$$m = p_1^{e_1} \ldots p_r^{e_r}.$$

Оно индуцирует естественное отображение множеств смежных классов

$$\psi : SL_2(\mathbb{Z})\backslash\Gamma_0(m) \to SL_2(\mathbb{Z})\backslash\Gamma_0(p_1^{e_1}) \times \ldots \times SL_2(\mathbb{Z})\backslash\Gamma_0(p_r^{e_r}),$$

задаваемое формулой $A\Gamma_0(m) \mapsto (A\Gamma_0(p_1^{e_1}), \ldots, A\Gamma_0(p_r^{e_r}))$.

Отображение ψ является биекцией. Действительно, рассмотрим две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Если $A\Gamma_0(p_i^{e_i}) = A'\Gamma_0(p_i^{e_i})$ для любого $i, 1 \leqslant i \leqslant r$, то по лемме 1.2 $ac' \equiv a'c \pmod{p_i^{e_i}}$. Применяя китайскую теорему об остатках, получаем, что $ac' \equiv a'c \pmod{m}$. Следовательно, $A\Gamma_0(m) = A'\Gamma_0(m)$ и отображение ψ инъективно.

Докажем сюръективность ψ. Пусть

$$(A_1\Gamma_0(p_1^{e_1}), \ldots, A_r\Gamma_0(p_r^{e_r})) \in SL_2(\mathbb{Z})\backslash\Gamma_0(p_1^{e_1}) \times \ldots \times SL_2(\mathbb{Z})\backslash\Gamma_0(p_r^{e_r}).$$

Применяя китайскую теорему об остатках, можно найти матрицу A' такую, что $A'\Gamma_0(p_i^{e_i}) = A_i\Gamma_0(p_i^{e_i})$ для всех i. Заметим, что A' не обязательно принадлежит группе $SL_2(\mathbb{Z})$, однако из китайской теоремы об остатках следует, что $\det A' \equiv 1 \pmod{m}$. Поскольку отображение $f : SL_2(\mathbb{Z}) \to SL_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ сюрьективно [5, §2.1], существует матрица $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ такая, что $A\Gamma_0(m) = A'\Gamma_0(m)$. Тогда $A\Gamma_0(m)$ является искомым прообразом.

Значит,

$$[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(m)] = [SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(p_1^{e_1})] \cdot \ldots \cdot [SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(p_r^{e_r})],$$

откуда получаем формулу (1). □

Укажем теперь представителей смежных классов группы $SL_2(\mathbb{Z})$ по подгруппе $\Gamma(m)$. Пусть $\varphi(m)$ – количество натуральных чисел $< m$ и взаимно простых с ним (функция Эйлера). Тогда

$$\varphi(m) = m\prod_{p|m}\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Обозначим все такие числа через $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant i \leqslant \varphi(m)$. Тогда для любого ε_i существует число $\varepsilon_i' \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$\varepsilon_i\varepsilon_i' = 1 + mk_i$$

и ε_i', k_i однозначно определяются выбором ε_i. Введем матрицы

$$B_{i,j} = \begin{pmatrix} \varepsilon_i + jm & k_i + j\varepsilon_i' \\ m & \varepsilon_i' \end{pmatrix},$$

где $i = 1, \ldots, \varphi(m),\ j = 0, \ldots, m-1$,

$$C_{i,j,l} = \begin{pmatrix} \varepsilon_i + jm & k_i + j\varepsilon_i' \\ m + (\varepsilon_i + jm)l & \varepsilon_i' + (k_i + j\varepsilon_i')l \end{pmatrix},$$

где $i = 1,\ \ldots,\ \varphi(m),\ j, l = 0,\ \ldots,\ m-1$, и

$$D_{i,j} = \begin{pmatrix} -m & -\varepsilon_i' \\ \varepsilon_i + jm & k_i + j\varepsilon_i' \end{pmatrix},$$

где $i = 1,\ \ldots,\ \varphi(m),\ j = 0,\ \ldots,\ m-1$.

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{B_{i,j} \mid i = 1, \ldots, \varphi(m),\ j = 0, \ldots, m-1\}, \\ \mathcal{C} &= \{C_{i,j,l} \mid i = 1, \ldots, \varphi(m),\ j, l = 0, \ldots, m-1\}, \\ \mathcal{D} &= \{D_{i,j} \mid i = 1, \ldots, \varphi(m),\ j = 0, \ldots, m-1\}. \end{aligned}$$

Лемма 1.8. *Пусть m – произвольный модуль.*
(i) $\mathcal{B} \subset \Gamma_0(m)$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D} \subset SL_2(\mathbb{Z})$.
(ii) Матрицы $C_{i,j,l}$ и $D_{i,j}$ попарно несравнимы по модулю m.

(iii) *Множество $\mathcal{B}$ составляет фундаментальную область группы $\Gamma_0(m)$ относительно подгруппы $\Gamma(m)$.*

Доказательство. (i) Определитель матрицы $C_{i,j,l}$ равен

$$(\varepsilon_i + jm)(\varepsilon_i' + (k_i + j\varepsilon_i')l) - (m + (\varepsilon_i + jm)l)(k_i + j\varepsilon_i') =$$

$$= (\varepsilon_i + jm)(\varepsilon_i' + (k_i + j\varepsilon_i')l - l(k_i + j\varepsilon_i')) - m(k_i + j\varepsilon_i') =$$

$$= (\varepsilon_i + jm)\varepsilon_i' - m(k_i + j\varepsilon_i') = \varepsilon_i\varepsilon_i' - mk_i = 1.$$

Поскольку $B_{i,j} = C_{i,j,0}$, отсюда получаем, что $|B_{i,j}| = 1$. Очевидно, $B_{i,j} \in \Gamma_0(m)$. Также очевидно, что $|D_{i,j}| = |C_{i,j,0}| = 1$.

(ii) Докажем от противного, что матрицы $C_{i,j,l}$ попарно несравнимы при различных i, j, l. Действительно, если $i_1 \neq i_2$, то

$$\varepsilon_{i_1} + j_1 m \equiv \varepsilon_{i_2} + j_2 m (\bmod\ m) \Leftrightarrow \varepsilon_{i_1} \equiv \varepsilon_{i_2} (\bmod\ m).$$

Если $i_1 = i_2 = i$, но $j_1 \neq j_2$, то

$$k_i + j_1\varepsilon_i' \equiv k_i + j_2\varepsilon_i' (\bmod\ m) \Leftrightarrow j_1\varepsilon_i' \equiv j_2\varepsilon_i' (\bmod\ m) \Leftrightarrow j_1 \equiv j_2 (\bmod\ m).$$

Если $i_1 = i_2 = i$, $j_1 = j_2 = j$, но $l_1 \neq l_2$, то

$$m + (\varepsilon_i + jm)l_1 \equiv m + (\varepsilon_i + jm)l_2 (\bmod\ m) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_i l_1 \equiv \varepsilon_i l_2 (\bmod\ m) \Leftrightarrow l_1 \equiv l_2 (\bmod\ m).$$

Во всех случаях приходим к противоречию. Аналогично получаем, что матрицы $D_{i,j}$ попарно несравнимы при различных i, j. Докажем теперь, что $C_{i_1,j_1,l_1} \neq D_{i_2,j_2}$ при любых i_1, i_2, j_1, j_2, l_1. Действительно, $\varepsilon_{i_1} + j_1 m \neq -m$, поскольку $m \nmid \varepsilon_{i_1}$.

(iii) Это доказано в [1]. □

Теорема 1.9. *Если $m = p$, то множество $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ составляет всю фундаментальную область группы $SL_2(\mathbb{Z})$ относительно подгруппы $\Gamma(p)$.*

Доказательство. Действительно, согласно [5, предложение 2.1.1]

$$[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(p)] = p(p^2 - 1),$$

а это в точности число всех матриц $D_{i,j}$ и $C_{i,j,l}$. □

Тем самым для простого модуля получены представители фундаментальной области в виде, удобном для реализации в схеме разделения секрета.

Теорема 1.10. *Пусть m – некоторый целочисленный модуль. Тогда матрицы AB для $A \in \mathcal{M}$ и $B \in \mathcal{B}$ составляют фундаментальную область группы $SL_2(\mathbb{Z})$ по подгруппе $\Gamma(m)$.*

Доказательство. Утвержение следует из теоремы 1.6 и леммы 1.8 (iii). □

Пример 1.11. Приведем в явном виде пример фундаментальной области для $m = 6$. Согласно предложению 2.1.1 из [5]

$$[\Gamma_0(6) : \Gamma(6)] = 12,\ [SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(6)] = 12.$$

Имеем

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1+6j & j \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5+6j & 4+5j \\ 6 & 5 \end{pmatrix},\ j = 0, \dots, 5 \right\};$$

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix},\ c = 0, \dots, 5,\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Тогда по теореме 1.10 фундаментальная область состоит из произведений матриц из этих множеств.

На основе найденной фундаментальной области можно построить схему разделения секрета с большим пространством хранимых ключей, чем в работе [1]. Для этого удобно использовать матрицы $\mathcal{C}$, имеющие хорошую параметризацию. Они занимают большую часть фундаментальной области группы $SL_2(\mathbb{Z})$ относительно подгруппы $\Gamma(m)$ поскольку их количество равно $m^2\varphi(m)$, а при этом [5, предложение 2.1.1]

$$[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(m)] = m^2 \varphi(m) \prod_{p|m} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

С помощью этих матриц построим в группе $SL_2(\mathbb{Z})$ аналог модулярной пороговой схемы разделения секрета по Миньотту [6]. Пусть у нас имеется k участников и разрешенным является всякое подмножество, если число участников в нем не меньше, чем t.

Выберем систему $m_1 < m_2 < \ldots < m_k$ попарно взаимно простых модулей, для которой выполнено условие Миньотта

$$M_1 = m_{k-t+2} m_{k-t+3} \ldots m_k < m_1 m_2 \ldots m_t = M_2.$$

Одновременно требуется, чтобы разность $M_2 - M_1$ была по возможности большой.

В качестве открытых ключей берутся главные конгруэнц-подгруппы $\Gamma(m_1), \ldots, \Gamma(m_k)$, где модули $m_1, \ldots, m_k$ те же, что и в пороговой модулярной схеме Миньотта.

Секретом является матрица $S = C_{i,j,l} \in \mathcal{C}$, где $m = m_1 \ldots m_k$, $i = 1, \ldots, \varphi(m)$, причем $M_1 < < \varepsilon_i < M_2$, $M_1 < j, l < M_2$.

Частичными секретами участников являются поэлементные вычеты этой матрицы по модулям $m_1, \ldots, m_k$. Например, частичным секретом первого участника будет образ матрицы S при каноническом эпиморфизме

$$SL_2(\mathbb{Z}) \to SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma(m_1) \cong SL_2(\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z}),$$

что является аналогом обычного частичного секрета в схеме Миньотта.

Теорема 1.12. *Секрет S однозначно восстанавливается по частичным секретам подмножества участников A, где $|A| \geqslant t$.*

Доказательство. Модуль m находится автоматически.

Поскольку нам известны $\varepsilon_i + jm \equiv \varepsilon_i (\bmod\ m_r)$, $r \in A$, по китайской теореме об остатках находим $\varepsilon_i (\bmod \prod_{r \in A} m_r)$. Найденное решение в силу выбора ε_i будет одним и тем же по модулям $\prod_{r \in A} m_r$ и m, так как $\varepsilon_i < \prod_{r \in A} m_r \leqslant M_2$.

Решив сравнение $\varepsilon_i \varepsilon_i' \equiv 1 \ (\bmod\ m)$, находим ε_i'. Напомним, что все модули $m_1, \ldots, m_k$ известны участникам.

Число k_i однозначно восстанавливается по формуле $k_i = \frac{\varepsilon_i \varepsilon_i' - 1}{m}$.

Нам известны $k_i + j\varepsilon_i' \ (\bmod\ m_r)$, $r \in A$, Используя китайскую теорему об остатках, находим $k_i + j\varepsilon_i' (\bmod \prod_{r \in A} m_r)$. Поскольку $(\varepsilon_i', m) = 1$, то значение j по модулю $\prod_{r \in A} m_r$ восстанавливается однозначно. Так как $j < M_2$, отсюда получаем j.

Аналогично из $m + (\varepsilon_i + jm)l \equiv \varepsilon_i l \ (\bmod\ m_r)$, $r \in A$, находим $\varepsilon_i l \ (\bmod \prod_{r \in A} m_r)$. Используя тот факт, что $(\varepsilon_i, m) = 1$ и $l < M_2$, получаем l.

Таким образом, матрица S восстановлена корректно. □

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ, договор № Ф25-012.

Литература

1. *Янчевский В. И., Говорушко И. О., Матвеев Г. В.* Разделение секрета в специальной линейной группе // Информатика. 2024. Т. 21, № 3. С. 23–31. https://doi.org/10.37661/1816-0301-2024-21-3-23-31

2. *Harcos G.* CEU lecture notes: a set of representatives for $\Gamma_0(q)\backslash SL_2(\mathbb{Z})$ [Electronic resourse]. – Mode of access: https://users.renyi.hu/g̃Harcos/CEU_Gamma0(q).pdf

3. *Платонов В. П., Рапинчук А. С.* Алгебраические группы и теория чисел. М. : Наука, 1991. 656 с.

4. *Матвеев Г. В., Осиновская А. А., Янчевский В. И.* Фундаментальная область в специальной линейной группе $SL_2(\mathbb{F}_p[x])$ и схема разделения секрета на ее основе // Труды Института математики НАН Беларуси. 2024. Т. 32, № 2. С. 7–16.

5. *Di Matteo G.* The action of $SL_2(\mathbb{Z})$ on the upper-half complex plane[Electronic resourse]. – Mode of access: https://www.dimatteo.is/Mathematics/Courses/Modular-forms/02-SL2Z.pdf

6. *Mignotte M.* How to share a secret // Lecture Notes in Computer Science. 1983. Vol. 149. P. 371–375.

References

1. Yanchevskiy V. I., Govorushko I. O., Matveev G. V. Secret sharing in the special linear group. *Informatics*, 2024, vol. 21, no. 3, pp. 23–31 (in Russian). https://doi.org/10.37661/1816-0301-2024-21-3-23-31

2. *Harcos G. CEU lecture notes: a set of representatives for* $\Gamma_0(q)\backslash SL_2(\mathbb{Z})$ [Electronic resourse]. – Mode of access: https://users.renyi.hu/g̃Harcos/CEU_Gamma0(q).pdf

3. Platonov V., Rapinchuk A. *Algebraic groups and number theory*. Pure and Applied Mathematics, 139. Boston, Academic Press Inc., 1994. xii+614 p.

4. *Di Matteo G. The action of* $SL_2(\mathbb{Z})$ *on the upper-half complex plane* [Electronic resourse]. – Mode of access: https://www.dimatteo.is/Mathematics/Courses/Modular-forms/02-SL2Z.pdf

5. Matveev G. V., Osinovskaya A. A., Yanchevskii V. I. A fundamental domain in the special linear group and secret sharing on its basis. *Proceedings of the Institute of Mathathematics of the NAS of Belarus*, 2024, vol. 32, no. 2, pp. 23–31 (in Russian).

6. Mignotte M. How to share a secret. *Lecture Notes in Computer Science*, 1983, vol. 149, pp. 371–375.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Том 33. № 2. С. 28–35

УДК 512.542 EDN: IKDBHR

О НЕПРИВОДИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУППАХ С АБЕЛЕВЫМИ ПОДГРУППАМИ СИЛОВА

А. А. Ядченко

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
e-mail: yadchenko_56@mail.ru

Поступила: 17.11.2025 **Исправлена:** 11.12.2025 **Принята:** 15.12.2025

Ключевые слова: конечные группы, степени характеров, нормальные подгруппы.

Аннотация. Для π-разрешимых не π-замкнутых неприводимых комплексных линейных групп G степени n с π-холловой TI-подгруппой H нечетного порядка, большего 3, найдены условия, при которых n делится на $|H|$ или на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv 1(\mathrm{mod}\ |H|)$.

ON IRREDUCIBLE LINEAR GROUPS WITH ABELIAN SYLOW SUBGROUPS

A. A. Yadchenko

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
e-mail: yadchenko_56@mail.ru

Received: 17.11.2025 **Revised:** 11.12.2025 **Accepted:** 15.12.2025

Keywords: finite groups, degrees of characters, normal subgroups.

Abstract. For finite π -solvable non-π-closed irreducible complex linear groups of degree n with an π -Hall TI-subgroup H of odd order greater than 3 conditions are found under which n is divisible by $|H|$ or by a power $f > 1$ of some prime number such that $f \equiv 1(\mathrm{mod}\ |H|)$.

1. Введение

Пусть G – конечная группа, A – такая группа ее автоморфизмов, что $(|A|,|G|) = 1$. Тогда A называется группой *копростых* автоморфизмов группы G. Если $C_G(a) = C_G(A)$ для каждого элемента $a \in A^{\#}$, то A называется *сильноцентрализуемой группой копростых автоморфизмов* группы G.

Заметим, что для $|A| = p$ – простое число, условие сильноцентрализуемости выполняется. Для случая, когда группа A имеет нечетный порядок в [1] сформулирована гипотеза о том, что для неприводимых комплексных линейных групп $\Gamma = AG$ произвольной степени n справедливо утверждение, что n делится на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv -1$ или $1(\mathrm{mod}\ |A|)$.

В [2] эта гипотеза была доказана при условии, что силовская 2-подгруппа группы G абелева. В [3] она решена положительно без дополнительного условия. При $|A| = p$ она же совпадает с проблемой, сформулированной Айзексом [4] и доказанной Ньютоном [5].

Из теоремы 4.1 [6] вытекает, что степень $n = 2p-2$ не p-замкнутой неприводимой линейной группы G является степенью 2. А из теоремы 2 [7] следует, что ее силовская 2-подгруппа G_2 не может быть абелевой. Рассмотрим неприводимые линейные группы G степени n, у которых силовская q-подгруппа G_q является абелевой, если степень $f = q^{\alpha} \leqslant n_q$, $\alpha \in \mathbf{N}$, и $f \equiv -1(\mathrm{mod}\ |A|)$.

Пусть $\pi(n^*)$ – множество таких простых делителей числа n, хотя бы одна степень $f > 1$ которых делит n и для нее выполняется условие: $f \equiv -1(\mathrm{mod}\ |A|)$. Предположим, что подгруппа A нечетного порядка, большего 3, и для $q \in \pi(n^*)$ силовская q-подгруппа G_q группы G абелева.

В теореме 1.2 для группы Γ и числа n сформулировано и доказано более сильное утверждение, чем в [2], [3] и [5].

С помощью теоремы 1.2 доказываются теорема 1.3 и теорема 1.4. Теорема 1.3 также усиливает соответствующий результат из [2], [3] и [5]. Теорема 1.4 для разрешимых групп ранее была доказана Романовским [8].

Условие 1.1. Скажем, что для Γ, A, G, C, χ и n выполнено условие 1.1, если $\Gamma = AG$, $G \lhd \Gamma$, $(|A|,|G|) = 1$, A – группа нечетного порядка, большего 3, которая не является нормальной в группе Γ, $C_G(a) = C_G(A) = C$ для каждого элемента $a \in A^{\#}$, для каждого $q \in \pi(n^*)$ подгруппа G_q абелева и группа G имеет точный неприводимый комплексный характер χ степени n, который является a-инвариантным хотя бы для одного элемента $a \in A^{\#}$.

Теорема 1.2. *Если для группы* Γ, A, G, C, χ *и* n *выполнено условие* 1.1, *то* n *делится на такую степень* $f > 1$ *некоторого простого числа, что* $f \equiv 1(\mathrm{mod}\ |A|)$.

Теорема 1.3. *Пусть* π*-разрешимая не* π*-замкнутая группа* G *с* π*-холловой* TI*-подгруппой* H *нечетного порядка, большего* 3, *имеет точный неприводимый комплексный характер степени* n. *Если для каждого* $q \in \pi(n^*)$ *подгруппа* G_q *абелева, то* n *делится на* $|H|$ *или на такую степень* $f > 1$ *некоторого простого числа, что* $f \equiv 1(\mathrm{mod}\ |H|)$.

Теорема 1.4. *Пусть* p*-разрешимая не* p*-замкнутая группа* G *для простого числа* $p > 3$ *имеет точный неприводимый комплексный характер степени* n. *Если для каждого* $q \in \pi(n^*)$ *подгруппа* G_q *абелева, то* n *делится на* p *или на такую степень* $f > 1$ *некоторого простого числа, что* $f \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$.

2. Некоторые обозначения и предварительные результаты

$\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел; если $n \in \mathbf{N}$ и q – простое натуральное число, то $n = n_q n_{q'}$; если ψ – характер некоторой группы X, то $\mathrm{Irr}(\psi)$ обозначает множество всех неприводимых компонент характера ψ; $\pi = \pi(A)$; если $X \subseteq \Gamma$, то $\pi' = \pi(X) \setminus \pi$; $X_{\pi'}$ – холлова π'-подгруппа группы X. Если $X \lhd \Gamma$ и φ – неприводимый характер подгруппы X, то условие, что φ g-инвариантен для некоторого элемента $g \in \Gamma \setminus X$, запишем для краткости в виде $I_\Gamma(\varphi) \neq X$. Все остальные обозначения и определения обычны и их можно найти, например, в [9] или [10]. Всюду под характером группы будем понимать комплексный характер, а под группой – конечную группу.

Пусть $\Gamma = AB$ – группа, для которой подгруппа $B \lhd \Gamma$, $(|A|,|B|) = 1$, т. е. A – группа *копростых автоморфизмов группы* B и $|A|$ нечетен. Тогда она удовлетворяет условию теоремы 13.1 [10]. Согласно этой теореме существует взаимно-однозначное соответствие $\pi(B,A) : \mathrm{Irr}_A(B) \longrightarrow \mathrm{Irr}(C_B(A))$ между множеством всех A-инвариантных неприводимых характеров группы B и множеством всех неприводимых характеров подгруппы $C_B(A)$, которое обладает рядом свойств, зависящих, в частности, от свойств подгруппы A. Пусть $\varphi \in \mathrm{Irr}_A(B)$. Тогда по лемме 13.3 [10] существует такой единственный неприводимый характер $\widehat{\varphi}$ группы Γ, что $\widehat{\varphi}_B = \varphi$ и $A \subseteq \ker(\det \widehat{\varphi})$. Он называется *каноническим продолжением характера* φ *на группу* Γ. В дальнейшем под $\widehat{\varphi}$ будем понимать именно такой характер.

Приведем ряд вспомогательных лемм.

Лемма 2.1 [3, лемма 2.7]. *Пусть* A *– группа копростых автоморфизмов группы* B. *Тогда* $B = [B,A]C_B(A)$.

Лемма 2.2 [11, лемма 11]. *Пусть* A *– сильноцентрализуемая группа копростых автоморфизмов группы* B. *Предположим, что для некоторой* A*-инвариантной подгруппы* $B_1 \subseteq B$ *число* $|B : B_1|$ *не делится на такую степень* $f > 1$ *простого числа, что* $f \equiv 1(\mathrm{mod}|A|)$. *Тогда* $B = B_1 C_B(A)$.

Лемма 2.3 [3, лемма 2.9]. *Пусть* $\Gamma = AB$ *– группа, где* $B \lhd \Gamma$, $(|A|,|B|) = 1$, A *– разрешима и* $C_B(a) = C_B(A)$ *для каждого элемента* $a \in A^{\#}$. *Если* $\varphi \in \mathrm{Irr}(B)$ *и* $I_\Gamma(\varphi) \neq B$, *то* $\varphi \in \mathrm{Irr}_A(B)$.

Лемма 2.4. *Пусть* $\Gamma = AB$ *– группа, где* $B \lhd \Gamma$, $(|A|,|B|) = 1$ *и* $C_B(a) = C_B(A)$ *для каждого элемента* $a \in A^{\#}$. *Тогда* A *–* TI*-подгруппа в* Γ *и, если* $\varphi \in \mathrm{Irr}(B)$ *и* $I_\Gamma(\varphi) \neq B$, *то группа* Γ *имеет такой неприводимый характер* $\widehat{\varphi}$ π'*-степени, что* $\widehat{\varphi}_B = \varphi$. *Группа* $\Gamma = AO_{\pi'}(\Gamma)$.

Доказательство. По лемме 2.6 [3] A – TI-подгруппа в Γ. По лемме 2.3 $\varphi \in \mathrm{Irr}_A(B)$. Поэтому существует каноническое продолжение $\widehat{\varphi}$ характера φ на Γ. Ясно, что степень этого характера – π'-число. Последняя фраза леммы очевидна. □

Лемма 2.5 [3, лемма 2.8]. *Пусть* $\Gamma = AB$ *– группа, где* $B \lhd \Gamma$, $(|A|,|B|) = 1$ *и* $C_B(a) = C_B(A)$ *для каждого элемента* $a \in A^{\#}$. *Если* $K \lhd \Gamma$ *такая подгруппа, что* AK/K *не является нормальной в* Γ/K, *то* $A \cap K = 1$, *а если* $AK/K \lhd \Gamma/K$, *то* $B = K_{\pi'} C_B(A)$.

В дальнейшем при рассмотрении случаев, когда факторгруппа AK/K не является нормальной в Γ/K для некоторой нормальной подгруппы K в Γ, мы будем учитывать, что $A \cap K = 1$ и, следовательно, $|AK/K| = |A/A \cap K| = |A|$.

Лемма 2.6 [3, лемма 2.5]. *Пусть $t \geqslant 5$ – натуральное число, p – простое число и m – любое положительное число кратное t. Тогда для каждого целого положительного числа n существует такой простой делитель s числа $\Phi_n(p^m)$, что $s > n+1$ и $s \equiv 1 (\bmod\, t)$.*

3. Основная часть

3.1. Доказательство теоремы 1.2

Так как по условию 1.1 характер χ является a-инвариантным для некоторого $a \in A^{\#}$, то $I_\Gamma(\chi) \neq G$. Поскольку $\chi \in \mathrm{Irr}_A(G)$ по лемме 2.3, то по лемме 2.4 группа Γ имеет такой неприводимый характер $\widehat{\chi}$, что $(\widehat{\chi})_G = \chi$. Ясно, что $\widehat{\chi}(1) = n$.

Доказательство теоремы проведем индукцией по порядку группы Γ. Пусть Γ – группа наименьшего порядка, для которой выполняется условие 1.1, но в то же время n не делится на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv 1 (\bmod\, |A|)$. Заметим, что если некоторая силовская подгруппа группы Γ абелева, то такими являются любые ее подгруппа и факторгруппа. В случае применения индукции, это обстоятельство будем учитывать.

Лемма 3.1. *Характер $\widehat{\chi}$ точный.*

Доказательство. Предположим, что $\ker\widehat{\chi} \neq 1$. Поскольку характер $(\widehat{\chi})_G = \chi$ точный по условию 1.1, то $\ker\widehat{\chi} \subseteq A$. Так как A – TI-подгруппа в Γ по лемме 2.4, то $A \lhd \Gamma$. Это противоречит условию 1.1. □

Лемма 3.2. $O^{\pi'}(\Gamma) = \Gamma$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. $S = O^{\pi'}(\Gamma) \neq \Gamma$. По факторизационной лемме Чунихина [12, лемма 2.2.1]

$$\Gamma = N_\Gamma(A)S. \tag{1}$$

По теореме Клиффорда

$$(\widehat{\chi})_S = e\sum_{x\in T}\psi^x, \tag{2}$$

где $\psi \in \mathrm{Irr}(S)$; e – число, делящее $\widehat{\chi}(1)$ и T – полное множество представителей всех смежных классов группы Γ по подгруппе $I = I_\Gamma(\psi)$. Поскольку $n = e|T|\psi(1)$, то $\psi(1)$ делит n.

Допустим, что

$$\overline{A} = A\ker\psi/\ker\psi \lhd S/\ker\psi = \overline{S}.$$

Тогда $A\ker\psi \lhd S$ и, следовательно, $(A\ker\psi)^t \lhd S^t$ для всех $t \in T$. Следовательно,

$$\cap_{t\in T}(A\ker\psi)^t \lhd S^t = S.$$

Отсюда получаем, что

$$\cap_{t\in T}A^t(\ker\psi)^t \lhd S.$$

Поскольку, согласно выражению (1), можем считать, что $t \in N_\Gamma(A)$, то

$$\cap_{t\in T}A(\ker\psi)^t \lhd S.$$

Так как $\cap_{t\in T}(\ker\psi)^t = \ker(\widehat{\chi})_S = 1$, то $A \lhd S$. Видим, что $A \lhd \Gamma$. Мы получили противоречие с выбором группы Γ.

Пусть теперь $\overline{A} \ntriangleleft \overline{S}$.

Покажем, что для $\overline{S}, \overline{A}, \overline{S}_{\pi'}, C_{\overline{S}_{\pi'}}(\overline{A}), \overline{\psi}_{\overline{S}_{\pi'}}$ и $\overline{\psi}_{\overline{S}_{\pi'}}(1)$ выполняется условие 1.1. Здесь $\overline{\psi}$ – точный неприводимый характер факторгруппы $\overline{S}$ в смысле леммы 2.22 [10]. Очевидно, $\overline{S}_{\pi'} \lhd \overline{S}$.

Покажем, что $C_{\overline{S}_{\pi'}}(\overline{a}) = C_{\overline{S}_{\pi'}}(\overline{A})$ для всех $\overline{a} \in \overline{A}^{\#}$. Пусть $\overline{s} \in C_{\overline{S}_{\pi'}}(\overline{a}_1)$ для некоторого неединичного элемента $\overline{a}_1$ из $\overline{A}$. Тогда $\overline{a}_1 \in \overline{A} \cap (\overline{A})^{\overline{s}}$. Поскольку из леммы 2.4 вытекает, что A в группе S и, следовательно, $\overline{A}$ в факторгруппе $\overline{S}$ является TI-подгруппой, то $\overline{A} = (\overline{A})^{\overline{s}}$, т. е. $\overline{s} \in N_{\overline{S}}(\overline{A})$. Отсюда видим, что $\overline{s} \in C_{\overline{S}_{\pi'}}(\overline{A})$. Следовательно, $C_{\overline{S}_{\pi'}}(\overline{a}) \subseteq C_{\overline{S}_{\pi'}}(\overline{A})$ для всех $\overline{a} \in (\overline{A})^{\#}$. Поскольку обратное включение очевидно, то желаемое равенство установлено.

Так как $\overline{A} \ntriangleleft \overline{S}$, то к группе S и ее нормальной подгруппе $K = \ker\psi$ можем применить лемму 2.5. По ней $A \cap K = 1$. Значит, $\overline{A} \simeq A$.

Поскольку $\overline{\psi}(1)$ делит n, то $\overline{\psi}(1)$ – π'-число. Тогда видим, что $\overline{\psi}_{\overline{S}_{\pi'}} \in \mathrm{Irr}_{\overline{A}}(\overline{S}_{\pi'})$.

Итак, для $\overline{S}$, $\overline{A}$, $\overline{S}_{\pi'}$, $C_{\overline{S}_{\pi'}}(\overline{A})$, $\overline{\psi}_{\overline{S}_{\pi'}}$ и $\overline{\psi}_{\overline{S}_{\pi'}}(1)$ выполняется условие 1.1. Так как $|\overline{S}| < |\Gamma|$, то по индукции $\overline{\psi}(1)$ делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv 1(\mathrm{mod}\ |\overline{A}|)$. Поскольку $\overline{A} \simeq A$, то, отсюда и того, что $\overline{\psi}(1)$ делит n, замечаем, что и n делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv 1(\mathrm{mod}\ |A|)$. Полученное противоречие с минимальностью группы Γ указывает на то, что наше предположение о том, что $S = O^{\pi'}(\Gamma) \neq \Gamma$ ошибочно. Стало быть, $O^{\pi'}(\Gamma) = \Gamma$. □

Лемма 3.3. *Если L – максимальная нормальная в G A-инвариантная подгруппа, то $L \subseteq C$.*

Доказательство. Мы можем положить, что $L \neq 1$. По теореме Клиффорда

$$(\widehat{\chi})_L = e \sum_{x \in T} \psi^x,$$

где $\psi \in \mathrm{Irr}(L)$, e и T соответствуют обозначениям в выражении (2). По теореме 6.11 [10] $\widehat{\chi} = \psi_1^{\Gamma}$ для такого характера $\psi_1 \in \mathrm{Irr}(I)$, что $(\psi_1)_L = e\psi$. Поскольку $\widehat{\chi}(1) = |\Gamma : I|\psi_1(1)$ и $\widehat{\chi}(1) = \chi(1) = n$ является π'-числом, то и $\psi_1(1)$ также π'-число. Мы можем также считать, что $A \subseteq I$.

Предположим поначалу, что $I \neq \Gamma$. Так как $|\Gamma : I|$ делит n, то из предположения, что $|\Gamma : I|$ делится на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv 1(\mathrm{mod}\ |A|)$ вытекает, что и n делится на такую же степень с таким же свойством. В этом случае теорема верна и мы получим противоречие с выбором группы Γ. Следовательно, мы полагаем, что $|\Gamma : I|$ не делится на такую степень. По лемме 2.2

$$G = I_{\pi'}C. \tag{3}$$

Пусть, как и ранее, $\overline{A} = A\ker\psi_1/\ker\psi_1$ и $\overline{I} = I/\ker\psi_1$. Нетрудно видеть, что характер $(\psi_1)_{I_{\pi'}}$ неприводим, т. е. $(\psi_1)_{I_{\pi'}} \in \mathrm{Irr}_A(I_{\pi'})$. Тогда $(\overline{\psi_1})_{\overline{I}_{\pi'}} \in \mathrm{Irr}_{\overline{A}}(\overline{I}_{\pi'})$. Здесь $\overline{\psi_1}$ – точный неприводимый характер факторгруппы $\overline{I}$ в смысле леммы 2.22 [10].

Предположим также, что $\overline{A} \ntriangleleft \overline{I}$. Как и ранее устанавливаем, что для $\overline{I}$, $\overline{A}$, $\overline{I}_{\pi'}$, $C_{\overline{I}_{\pi'}}(\overline{A})$, $(\overline{\psi}_1)_{\overline{I}_{\pi'}}$ и $(\overline{\psi}_1)_{\overline{I}_{\pi'}}(1)$ выполняется условие 1.1.

Так как $|\overline{I}| < |\Gamma|$, то, согласно минимальности группы Γ, мы получаем, что $\overline{\psi}_1(1)$ делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv 1(\mathrm{mod}\ |\overline{A}|)$. Поскольку $\overline{\psi}_1(1)$ делит $\widehat{\chi}(1) = n$ и $|\overline{A}| = |A|$, что следует из леммы 2.5, то видим, что f делит n и $f \equiv 1(\mathrm{mod}\ |A|)$. Мы получили противоречие с минимальностью группы Γ.

Рассмотрим теперь случай, когда $\overline{A} \triangleleft \overline{I}$. Поскольку $\ker\psi_1 \triangleleft I$, то по лемме 2.5 $I_{\pi'} = (\ker\psi_1)_{\pi'}C_{I_{\pi'}}(A)$. Откуда, с учетом формулы (3), получаем, что $G = (\ker\psi_1)_{\pi'}C$. Поэтому $g = kc$ для всех элементов $g \in G$ и для соответствующих им элементов $k \in \ker\psi_1$ и $c \in C$. Поэтому

$$[g,a] = [k,a] \in (\ker\psi_1)_{\pi'}$$

для всех $g \in G$ и для всех $a \in A$. Значит, $[G,A] \subseteq (\ker\psi_1)_{\pi'}$. Поскольку по предположению $I \neq \Gamma$, т. е. $(\ker\psi_1)_{\pi'} \neq G$, то $[G,A] \neq G$. Это означает, что $A[G,A] \neq \Gamma$. Так как из леммы 2.1 вытекает, что $A[G,A] \triangleleft \Gamma$, то мы получили противоречие с леммой 3.2.

Пусть теперь $I = \Gamma$. Тогда $\widehat{\chi}_L = e\psi$.

Если $A \triangleleft AL$, то $L \subseteq C$ и лемма верна.

Поэтому $A \ntriangleleft AL$. Легко заметить, что для AL, A, L, $C_L(A)$, ψ и $\psi(1)$ выполняется условие 1.1. Так как $|AL| < |\Gamma|$, то по индукции $\widehat{\psi}(1)$ делится на такую степень f некоторого простого числа, что $f \equiv 1(\mathrm{mod}\ |A|)$. Тогда и n делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv 1(\mathrm{mod}\ |A|)$. Мы вновь получили противоречие с минимальностью группы Γ. □

Лемма 3.4. $L \subseteq Z(\Gamma)$ *для подгруппы L из леммы* 3.3 *и* $\overline{G} = G/L$ *– главный фактор группы* Γ.

Доказательство. По лемме 3.3 $L \subseteq C$, т. е. $A \subseteq C_\Gamma(L)$. Так как $C_\Gamma(L) \triangleleft \Gamma$, то из леммы 3.2 следует, что $C_\Gamma(L) = \Gamma$. Значит, $L \subseteq Z(\Gamma)$. Поскольку L является максимальной нормальной в G A-инвариантной подгруппой, то $\overline{G}$ является главным фактором группы Γ. □

Лемма 3.5. *Группа $\overline{G}$ – неразрешима.*

Доказательство. По лемме 3.4 $\overline{G}$ – либо элементарная абелева q-группа для некоторого простого числа q, т. е. разрешима, либо является прямым произведением простых неабелевых групп.

Допустим она разрешима. Из леммы 3.4 вытекает, что, $\Gamma = AG_q \times G_{q'}$, где $G_{q'} \subseteq Z(\Gamma)$. Так как n – π'-число, то по теореме 6.15 [10] n является степенью простого числа q, т. е. $n = q^{\alpha}$.

Если $\alpha = 0$, то $n = 1$. Тогда группа Γ циклическая. Значит, $A \lhd \Gamma$. Это противоречит условию 1.1.

Следовательно, $\alpha > 0$. Легко видеть, что характер $\widehat{\chi}_{AG_q}$ неприводим и неприводим характер $\widehat{\chi}_{G_q}$, ибо он имеет π'-степень. Тогда подгруппа G_q не является абелевой.

Допустим, что $q^{\alpha_1} \equiv -1(\mathrm{mod}\ |A|)$ для некоторого числа $\alpha_1 \leqslant \alpha$. Тогда по условию 1.1 подгруппа G_q абелева. Противоречие. Отсюда и из теоремы 1 [13] следует, что $q^{\alpha_1} \equiv 1(\mathrm{mod}\ |A|)$ для некоторого числа $\alpha_1 \leqslant \alpha$. □

Лемма 3.6. *Группа $\overline{G}$ – неабелева простая группа.*

Доказательство. По лемме 3.3 $L \subseteq C$, т. е. $A \subseteq C_{\Gamma}(L)$. Так как $C_{\Gamma}(L) \lhd \Gamma$, то из леммы 3.2 следует, что $C_{\Gamma}(L) = \Gamma$. Значит, $L \subseteq Z(\Gamma)$. Поскольку L является максимальной нормальной подгруппой в Γ, то $\overline{G}$ является главным фактором группы $\overline{\Gamma}$. Согласно теореме 1 [13] мы можем предположить, что $\overline{G}$ неразрешима.

Предположим, что $\overline{G}$ не является простой группой. Тогда $\overline{G}$ – прямое произведение $|A|$ копий, изоморфных некоторой простой неабелевой группе. Значит, G – центральное произведение $|A|$ изоморфных групп. Из леммы 3 [5] следует, что $n = m^{|A|}$ для некоторого натурального числа m. Тогда $p^{|A|}$ делит n для некоторого простого числа p, делящего n. Поскольку по теореме Эйлера из теории чисел $p^{\varphi(|A|)} \equiv 1(\mathrm{mod}\ |A|)$, где $\varphi(|A|)$ – количество натуральных чисел меньших $|A|$ и взаимнопростых с $|A|$, и $p^{\varphi(|A|)}$ делит n, то мы получили противоречие с минимальностью Γ. Поэтому группа $\overline{G}$ простая. □

Пусть $\overline{\Gamma} = \Gamma/L$ и так как $\overline{A} = AL/L \simeq A/A \cap L = A$, то можем записать, что $\overline{\Gamma} = A\overline{G}$.

Из леммы 3.6 и из леммы 5 [5] вытекает, что $\overline{G}$ – простая группа типа Ли над некоторым конечным полем F. Пусть $q = p^m$ – число элементов этого поля. Так как мы можем рассматривать A как группу автоморфизмов поля F по лемме 5 [5], то делаем вывод, что $|A|$ делит m.

По условию $|A| \geqslant 5$. Поэтому $m \geqslant 5$. Применим лемму 6 [5]. Предположим, что q делит n. Тогда $p^{|A|}$ делит n. Ранее мы убедились, что в этом случае мы приходим к противоречию с минимальностью группы Γ. Значит, как следует из леммы 6 [5], существуют такие целые числа d и k, что dn делится на $\Phi_k(q)$.

Положив $t = |A|$, из леммы 2.6 получаем, что dn делится на такое простое число s, что $s \equiv 1(\mathrm{mod}\ |A|)$ и $s > k+1$.

Если $\overline{G}$ группа не типа $A_l(q)$ или ${}^2A_l(q)$ для некоторого положительного числа l, то d не делится на любое простое число, большее чем 5. Так как $|A| \geqslant 5$, что отмечено выше, то $s > 5$ и, значит, s делит n.

Пусть теперь $\overline{G}$ группа типа $A_l(q)$ или ${}^2A_l(q)$. Тогда d не делится на любое простое число, большее чем $l+1$, и мы можем взять число k, большее или равное l. В этом случае $s > l+1$ и мы вновь имеем, что s делит n. Это последнее противоречие доказывает теорему 1.2.

3.2. Доказательство теоремы 1.3

Используем индукцию по порядку группы G. Пусть G – группа минимального порядка среди всех групп, для которых условие теоремы выполняется, а заключение нет. Представлению группы G как неприводимой линейной группы степени n отвечает точный неприводимый характер χ.

Лемма 3.7. *H не содержится в такой собственной нормальной подгруппе M группы G, что M имеет нормальное π-дополнение.*

Доказательство. Обозначим $M = O^{\pi'}(\Gamma)$ и повторим доказательство леммы 3.2. □

Поскольку группа G – π-разрешима и подгруппа H – TI-множество, то справедлива

Лемма 3.8. $O_{\pi'}(G) \neq 1$.

Лемма 3.9. $G = HO_{\pi'}(G)$.

Доказательство. Рассмотрим подгруппу $O_{\pi',\pi}(G)$. По определению

$$O_{\pi',\pi}(G)/O_{\pi'}(G) = O_{\pi}(G/O_{\pi'}(G)).$$

Так как группа $G/O_{\pi'}(G)$ – π-разрешима и согласно теореме 6.3.1 [9] $O_{\pi'}(G/O_{\pi'}(G)) = 1$, то

$$O_{\pi}(G/O_{\pi'}(G)) \neq 1.$$

Поскольку $HO_{\pi'}(G)/O_{\pi'}(G)$ – холлова π-подгруппа с тривиальным пересечением в $G/O_{\pi'}(G)$, то

$$O_{\pi',\pi}(G) = HO_{\pi'}(G).$$

Осталось лишь заметить, что $O_{\pi',\pi}(G) \lhd G$, и применить лемму 3.7. □

Так как по лемме 3.9 $G = HO_{\pi'}(G)$ и $C_{O_{\pi'}((G)}(h) = C_{O_{\pi'}(G)}(H)$ для всех $h \in H^{\#}$, то для G, H, $O_{\pi'}(G)$, $C_{O_{\pi'}(G)}(h)$, точного неприводимого характера $\chi_{O_{\pi'}(G)}$ и n выполнено условие 1.1. По теореме 1.2 n делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv 1(\mathrm{mod}\ |H|)$. Получили противоречие с минимальностью группы G. Это последнее противоречие доказывает теорему 1.3.

3.3. Доказательство теоремы 1.4

Пусть χ данный в условии теоремы точный неприводимый характер группы G степени n. Доказательство теоремы проведем индукцией по порядку группы G. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой выполняются условия теоремы 1.4, но в то же время n не делится на p и не делится на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$.

Как в лемме 3.2 мы убеждаемся в том, что $S = O^{p'}(G) = G$.

Далее. Поскольку группа G является p-разрешимой, то либо $O_p(G) \neq 1$, либо $O_{p'}(G) \neq 1$.

Допустим поначалу, что $O_p(G) \neq 1$. Пусть M – такая максимальная нормальная подгруппа в G, что $O_p(G) \subseteq N \lhd G$ и M/N – главный фактор группы G. Заметим, что факторгруппа G/M также является главным фактором группы G. Поэтому G/M – p-группа либо p'-группа.

Поскольку $S = G$, то G/M – p-группа. Тогда $M_{p'} = G_{p'}$ и $|G/M| = p^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{N}$. Чуть ранее мы отметили, что $\chi(1)$ не делится на простое число p. Тогда характер χ_M неприводим. Поэтому неприводим и характер χ_{M_1}, где M_1 такая подгруппа, что $M \subseteq M_1 \lhd G$ и $|G : M_1| = p$.

И, если подгруппа M_1 не p-замкнута, то по индукции n делится на p или на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$. Это противоречит выбору группы G.

Поэтому подгруппа M_1 p-замкнута. Очевидно, $O_p(M_1) = O_p(G)$ и $|\overline{G}_p| = p$, $\overline{G}_p = G_p/O_p(G)$. Мы можем положить, что $M_1 = M$. Мы также видим, что $M = M_{p'}O_p(G)$ и $M_{p'} = G_{p'}$, т. е. $M = G_{p'}O_p(G)$.

Напомним, что $O_p(G) \neq 1$. По теореме Клиффорда к характеру $\chi_{O_p(G)}$ применима формула (2). В ее обозначениях по теореме 6.17 [10] существует такой неприводимый характер ψ_1 подгруппы I, что $(\psi_1)_{O_p(G)} = e\psi$ для некоторого неприводимого характера ψ группы $O_p(G)$ и $\chi = (\psi_1)^G$. Отсюда видим, что $\chi(1) = \psi_1(1)|G : I|$, и что $\psi_1(1)$ и $|G : I|$ не делятся на p и на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$. Следовательно, $\psi(1) = 1$ и, значит, подгруппа $O_p(G)$ абелева. Мы также можем утверждать, что $G_p \subseteq I$, т. е. $G_p = I_p$.

Предположим вначале, что $I \neq G$.

Пусть $G_p \ker\psi_1/\ker\psi_1 \not\lhd I/\ker\psi_1$. Легко видеть, что группа $I/\ker\psi_1$ и ее точный неприводимый характер ψ_1 в смысле леммы 2.22 [10] удовлетворяют условиям теоремы 1.4. Тогда по индукции $\psi_1(1)$ делится на p или на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$, что не так.

Поэтому $G_p \ker\psi_1/\ker\psi_1 \lhd I/\ker\psi_1$ и, значит, $G_p \ker\psi_1 \lhd I$.

Рассмотрим факторгруппу

$$\overline{G} = G/O_p(G) = \overline{G}_p\overline{M}, \quad \overline{M} = M/O_p(G).$$

Мы видим, что группа $\overline{G}_p$ имеет порядок p, $\overline{M} \lhd \overline{G}$ и является p'-группой, и поэтому $\overline{G}_p$ является сильноцентрализуемой группой копростых автоморфизмов группы $\overline{M}$. А поскольку $G = MI$, то также мы видим, что

$$\overline{G} = \overline{MI}, \quad \bar{I} = I/O_p(G),$$

и что

$$|G : I| = |\overline{G} : \bar{I}| = \frac{\frac{|\overline{M}||\bar{I}|}{|\overline{M} \cap \bar{I}|}}{|\bar{I}|} = |\overline{M} : \overline{M} \cap \bar{I}_{p'}|.$$

По лемме 2.2

$$\overline{M} = \bar{I}_{p'} C_{\overline{M}}(\overline{G}_p).$$

Пусть

$$\overline{M} = \langle mO_p(G), | m \in M\rangle, \quad \overline{G}_p = \langle nO_p(G), | n \in G_p\rangle.$$

Тогда

$$C_{\overline{M}}(\overline{G}_p) = \langle m \in M | [m,n] \in O_p(G), n \in G_p\rangle$$

и, значит,

$$G = IC_{\overline{M}}(\overline{G}_p).$$

Поскольку $[C_{\overline{M}}(\overline{G}_p), G_p] \subseteq O_p(G) \subseteq G_p$, то $C_{\overline{M}}(\overline{G}_p) \subseteq N_G(G_p)$ и, следовательно,

$$G = IN_G(G_p).$$

Так как $G_p \ker\psi_1 \lhd I$, то по факторизационной лемме Чунихина $I = N_I(G_p)\ker\psi_1$. Поскольку $N_I(G_p) \subseteq N_G(G_p)$, то

$$G = N_G(G_p)\ker\psi_1.$$

Поскольку $G_p \ntriangleleft G$, то $\ker\psi_1 \neq 1$.

Допустим, что $(\ker\psi_1)_p = G_p \cap \ker\psi_1 = 1$. Тогда $\ker\psi_1 \subseteq C_G(O_p(G))$. Заметим, что $C_G(O_p(G)) \lhd G$.

Предположим, что $C_G(O_p(G)) = G$. Тогда $O_p(G) \subseteq Z(G)$ и, следовательно, подгруппа $I = G$, что не так по предположению.

Поэтому $C_G(O_p(G)) \neq G$. Отсюда и из последней выделенной формулы вытекает, что $G_pC_G(O_p(G)) \lhd G$. Однако ранее мы отметили, что $S = O^{p'}(G) = G$.

Следовательно, $(\ker\psi_1)_p = G_p \cap \ker\psi_1 \neq 1$. Так как $(\ker\psi_1)_p \lhd G_p$, то $Z = (\ker\psi_1)_p \cap Z(G_p) \neq$ $\neq 1$ и поскольку $T \subseteq N_G(G_p)$ и $Z(G_p) \lhd N_G(G_p)$, то $Z^t \subseteq Z(G_p) \subseteq I$ для всех $t \in T$. Здесь T из формулы (2). Поэтому для $1 \neq z \in Z$ получаем, что

$$\chi(z) = (\psi_1)^G(z) = \sum_{t\in T}(\psi_1)^0(tzt^{-1}) = \sum_{t\in T}\psi_1(tzt^{-1}) = |T|\psi_1(z) = |T|\psi_1(1) = \chi(1),$$

ибо $z \in \ker\psi_1$. Здесь $(\psi_1)^0(x) = \psi_1(x)$, если $x \in I$ и $(\psi_1)^0(x) = 0$, если $x \notin I$. Мы получили противоречие с точностью характера χ.

Рассмотрим теперь случай, когда $I = G$. Поскольку по выбору группы G число n не делится на p, то $\chi_{O_p(G)} = \chi(1)\lambda$ для линейного неприводимого характера λ подгруппы $O_p(G)$. Тогда $O_p(G) \subseteq$ $\subseteq Z(G)$. Значит, $M = M_{p'} \times O_p(G)$ и, так как $M_{p'} = G_{p'}$, то видим, что $G = G_pG_{p'}$, где $G_{p'} \lhd G$ и $|G_p : O_p(G)| = p$. Замечаем, что характер χ и группа G удовлетворяют условиям леммы 2 [7]. По этой лемме группа G имеет неприводимый характер χ' степени n и $\ker\chi' = O_p(G)$. Рассмотрим факторгруппу $\overline{G} = G/O_p(G)$. Она и ее точный неприводимый характер χ' в смысле леммы 2.22 [10] удовлетворяют условиям теоремы 1.4. Поскольку $|\overline{G}| < |G|$, то по индукции $\chi'(1)$ делится на p или на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$. Поскольку $\chi'(1) = n$, то мы получили противоречие с выбором группы G.

Осталось рассмотреть случай, когда $O_p(G) = 1$. По теореме 6.3.2 [9] $C_G(O_{p'}(G)) \subseteq O_{p'}(G)$. Допустим, что $O_{p,p'}(G) \neq G$. По теореме Клиффорда все неприводимые компоненты характера $\chi_{O_{p,p'}(G)}$ имеют одинаковую степень, делящую n. Если группа $O_{p,p'}(G)$ не p-замкнута, то мы придем к тому, что n делится на p или на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$. Поскольку это противоречит выбору группы G, то делаем вывод, что группа $O_{p,p'}(G)$ является p-замкнутой. Это противоречит тому, что $O_p(G) = 1$.

Делаем вывод, что $O_{p,p'}(G) = G$ и $|G : O_{p'}(G)| = p$. Мы видим, что группа $G = G_pO_{p'}(G)$, G_p, $O_{p'}(G)$, $C_{O_{p'}(G)}(G_p)$, $\chi_{O_{p'}(G)}$ и n удовлетворяют условию 1.1. По теореме 1.2 n делится на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$.

Теорема 1.4 доказана.

Работа поддержана Институтом математики НАН Беларуси в рамках государственной программы «Конвергенция–2025».

Литература

1. *Ядченко А. А.* О П-разрешимых неприводимых линейных группах с холловой TI-подгруппой нечетного порядка III // Труды Института математики. 2010. Т. 18, № 2. С. 94–114.

2. *Ядченко А. А.* Об автоморфизмах неприводимых линейных групп с абелевой силовской 2-подгруппой // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 1. С. 121–139.

3. *Ядченко А. А.* К проблеме Айзекса // Матем. сборник. 2013. Т. 204, № 12. С. 147–156.

4. *Isaacs I. M.* Characters of solvable groups // The Santa Cruz Conference on Finite Groups. Proc. Symp. Pure Math. 1980. Vol. 37. P. 377–384.

5. *Newton B.* On the degrees of complex p-solvable linear groups // J. Algebra. 2005. Vol. 288. P. 384–391.

6. *Isaacs I. M.* Complex p-solvable linear groups // J. Algebra. 1973. Vol. 24, N 3. P. 513–530.

7. *Романовский А. В., Ядченко А. А.* О силовских подгруппах линейных групп // Матем. сборник. 1988. Т. 137(179), № 4(12). С. 568–573.

8. *Романовский А. В.* О конечных разрешимых линейных группах // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1975. С. 129–132.

9. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Harper and Row, 1968. 527 p.

10. *Isaacs I. M.* Character theory of finite groups. New York: Academic Press, 1976. 303 p.

11. *Ядченко А. А.* О факторизации некоторых П-разрешимых неприводимых линейных групп // Труды Института математики. 2019. Т. 27, № 1–2. С. 79–107.

12. *Чунихин С. А.* Подгруппы конечных групп. Минск: Наука и техника, 1964. 158 с.

13. *Ядченко А. А.* Разрешимые неприводимые линейные группы произвольной степени с холловской TI-подгруппой // Матем. заметки. 1990. Т. 48, № 2. С. 137–144.

14. *Романовский А. В., Ядченко А. А.* Мономиальные характеры и нормальные подгруппы конечных групп // Укр. матем. журнал. 1991. Т. 43, № 7–8. С. 991–996.

References

1. Yadchenko A. A. On the π-solvable irreducible linear groups with Hall TI-subgrops of odd order III. *Proceedings of the Institute of Mathematics,* 2010, vol. 18, no. 2, pp. 94–114 (in Russian).

2. Yadchenko A. A. On automorphisms of irreducible linear groups with an Abelian Sylow 2-subgroup. *Math. Notes*, 2007, vol. 99, no. 1, pp. 121–139 (in Russian).

3. Yadchenko A. A. On Isaacs' problem. *Matem. sbornik,* 2013, vol. 204, no. 12, pp. 147–156 (in Russian).

4. *Isaacs I. M.* Characters of solvable groups. *The Santa Cruz Conference on Finite Groups. Proc. Symp. Pure Math.,* 1980, vol. 37, pp. 377–384.

5. *Newton B.* On the degrees of complex p-solvable linear groups. *J. Algebra,* 2005, vol. 288, pp. 384–391.

6. *Isaacs I. M.* Complex p-solvable linear groups. *J. of Algebra,* 1973, vol. 24, no. 3, pp. 513–530.

7. Romanovskiy A. V., Yadchenko A. A. On Sylow subgrops of linear groups. *Matem. sbornik,* 1988, vol. 137(179), no. 4(12), pp. 568–573 (in Russian).

8. Romanovskiy A. V. On finite solvable linear groups. *Finite Groups*. Minsk, Nauka i Tekhnika, 1975, pp. 129–132 (in Russian).

9. Gorenstein D. *Finite groups*. New York, Harper and Row, 1968. 527 p.

10. Yadchenko A. A. On factorization of some П-solvable irreducible linear groups *Proceedings of the Institute of Mathematics,* 2019, vol. 27, no. 1–2, pp. 79–107 (in Russian).

11. Isaacs I. M. *Character theory of finite groups*. New York, Academic Press, 1976. 303 p.

12. Chunihin S. A. *Subgroup of finite groups*. Minsk, Nauka i Tekhnika, 1975. 158 p. (in Russian).

13. Yadchenko A. A. Solvable irreducible linear groups of arbitrary degree with Hall TI-subgroup. *Math. Notes*, 1990, vol. 48, no. 2, pp. 137–144 (in Russian).

14. Romanovskiy A. V., Yadchenko A. A. Monomial characters and normal subgroups of finite groups. *Ukrainian Mathem. Journal*, 1991, vol. 43, no. 7–8, pp. 991–996 (in Russian).

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Том 33. № 2. С. 36–53

UDC 512.542 EDN: OLYGHB

REDUCIBLE τ-CLOSED σ-LOCAL FORMATIONS OF FINITE GROUPS WITH A GIVEN STRUCTURE OF SUBFORMATIONS

V. V. Skrundz, I. N. Safonova

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: vallik@mail.ru, in.safonova@mail.ru

Received: 04.11.2025 **Revised:** 11.12.2025 **Accepted:** 15.12.2025

Keywords: finite group, subgroup functor, τ-closed σ-local formation, critical τ-closed σ-local formation, $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect of τ-closed σ-local formation.

Abstract. Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be some τ-closed σ-local formations of finite groups. By $\mathfrak{F}/_\sigma^\tau\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}$ we denote the lattice of all τ-closed σ-local formations $\mathfrak{X}$ such that $\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{F}$. The length of the lattice $\mathfrak{F}/_\sigma^\tau\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}$ is called the $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-*defect*, and for $\mathfrak{H}=(1)$ it is the formation of all identity groups, l_σ^τ-*length* of $\mathfrak{F}$. The general properties of the $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect of τ-closed σ-local formations are studied, and a description of the structural structure of reducible τ-closed σ-local formations with $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect $\leqslant 2$ and l_σ^τ-length $\leqslant 3$ is obtained.

ПРИВОДИМЫЕ τ-ЗАМКНУТЫЕ σ-ЛОКАЛЬНЫЕ ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ЗАДАННОЙ СТРУКТУРОЙ ПОДФОРМАЦИЙ

В. В. Скрундь, И. Н. Сафонова

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: vallik@mail.ru, in.safonova@mail.ru

Поступила: 04.11.2025 **Исправлена:** 11.12.2025 **Принята:** 15.12.2025

Ключевые слова: конечная группа, подгрупповой функтор, τ-замкнутая σ-локальная формация, критическая τ-замкнутая σ-локальная формация, $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-дефект формации, l_σ^τ-длина формации.

Аннотация. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – некоторые τ-замкнутые σ-локальные формации конечных групп. Через $\mathfrak{F}/_\sigma^\tau\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}$ обозначают решетку всех τ-замкнутых σ-локальных формаций $\mathfrak{X}$ таких, что $\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{F}$. Длину решетки $\mathfrak{F}/_\sigma^\tau\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}$ называют $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-*дефектом*, а при $\mathfrak{H}=(1)$ – формация всех единичных групп, l_σ^τ-*длиной* формации $\mathfrak{F}$. Изучены общие свойства $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-дефекта τ-замкнутых σ-локальных формаций, получено описание структурного строения приводимых τ-замкнутых σ-локальных формаций, имеющих $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-дефект $\leqslant 2$ и l_σ^τ-длину $\leqslant 3$.

1. Introduction

All groups under consideration are finite. We adhere to the terminology and notation adopted in [1–4].

The study and classification of formations with given restrictions on the lattices of their subformations is one of the most interesting and meaningful problems in the theory of formations of finite groups.

In 1986, A. N. Skiba [5] proved that the lattice of all formations, as well as the lattice of all local formations, are modular. This result made it possible to apply the methods and constructions of general lattice theory to the study of the structural structure of formations of finite groups. The study of the structural structure of a local formation $\mathfrak{F}$ based on the properties of its well-studied subformation was first carried out by A. N. Skiba and E. A. Targonskii [6]. This approach was based on their concept of the $\mathfrak{H}$-defect of a local formation. In the paper [6], the basic properties of the $\mathfrak{H}$-defect of a local formation were studied, and a classification of local formations of nilpotent defect $\leqslant 2$ was obtained. Subsequently, this method was widely used in studying the structural structure of not only local formations, but also formations of other types, such as τ-closed multiply and totally local formations, partially saturated and partially composition formations, etc. Moreover, $\mathfrak{H}$ was considered not only as the formation of all nilpotent groups, but also other fairly well-known classes (the class of all π-decomposable, π-nilpotent, metanilpotent, soluble, supersoluble groups, etc.).

In this paper, we study the structural structure of τ-closed σ-local formations based on the ideas and results of [2; 6]. Following [2; 6], we introduce the concept of the $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect of a τ-closed σ-local formation, as well as the l_σ^τ-length of a τ-closed σ-local formation, study the basic properties of the $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect of a formation, and investigate the structural structure of τ-closed σ-local formations of finite $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect and l_σ^τ-length.

The following main results are obtained in the paper: a description of minimal τ-closed σ-local not $\mathfrak{H}$-formations for an arbitrary τ-closed σ-local σ-nilpotent formation $\mathfrak{H}$, i. e. irreducible τ-closed σ-local formations of $\mathfrak{H}^{\tau}_{\sigma}$-defect 1 is given; the existence of $\mathfrak{H}^{\tau}_{\sigma}$-critical formations for every τ-closed σ-local formation $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ is proved; a characterization of τ-closed σ-local formations of $\mathfrak{H}^{\tau}_{\sigma}$-defect 1 is obtained; a description of the structure of τ-closed σ-local formations of $\mathfrak{H}^{\tau}_{\sigma}$-defect $\leqslant 2$ and l^{τ}_{σ}-length $\leqslant 3$ is given.

We prove the main results of the paper in Sections 3–7 and also consider some of the most interesting consequences of the obtained results.

2. Basic definitions and some auxiliary results

The basic concepts of the theory of σ-properties of groups, as well as general properties of τ-closed σ-local formations and their lattices are presented in the papers [1; 4; 7–23].

Let σ be some partition of the set of all primes $\mathbb{P}$, i. e. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, where $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ for all $i \neq j$, G be a group, and $\mathfrak{F}$ be a class of groups. Then $\sigma(G) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \bigcap \pi(G) \neq \varnothing\}$ and $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G\in\mathfrak{F}} \sigma(G)$.

The group G is called [1]: σ-*primary* if G is a σ_i-group for some i; σ-*nilpotent* if every chief factor H/K from G is σ-central in G, that is, the semidirect product $(H/K)\rtimes(G/C_G(H/K))$ is σ-primary; σ-*soluble* if $G = 1$ or $G \neq 1$ and each chief factor from G is σ-primary.

The symbol $\mathfrak{S}_\sigma$ denotes the class of all σ-soluble groups and $\mathfrak{N}_\sigma$ denotes the class of all σ-nilpotent groups. For any $\sigma_i \in \sigma$ the symbol $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ denotes the class of all σ_i-groups.

Recall that a class of groups $\mathfrak{F}$ is called *a formation* if: 1) $G/N \in \mathfrak{F}$ when $G \in \mathfrak{F}$, and 2) $G/N \cap K \in \mathfrak{F}$ when $G/N \in \mathfrak{F}$ and $G/K \in \mathfrak{F}$.

Every function f of the form $f : \sigma \to \{\text{formations of groups}\}$ is called *a formation* σ*-function* [4]. For any formation σ-function f the class $LF_\sigma(f)$ defined as follows:

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ or } G \neq 1 \text{ and } G/O_{\sigma'_i,\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ for all } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

If for some formation σ-function f we have $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, then the class $\mathfrak{F}$ is called σ-*local*, and f called σ-*local definition* of $\mathfrak{F}$.

Let $\tau(G)$ be a set of subgroups of G such that $G \in \tau(G)$. Then τ is called a *subgroup functor* [2] if for every epimorphism $\varphi : A \to B$ and any groups $H \in \tau(A)$ and $T \in \tau(B)$ we have $H^{\varphi} \in \tau(B)$ and $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

The subgroup functor τ is called [2]: *trivial*, if for any group G we have $\tau(G) = \{G\}$; *identity*, if for any group G we have $\tau(G) = s(G)$ is the collection of all subgroups of G.

A formation $\mathfrak{F}$ is called τ-*closed*, if $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ for any group $G \in \mathfrak{F}$. In particular, a formation is called: *hereditary*, if it is τ-closed, where $\tau = s$ is a identity subgroup functor; *normally hereditary*, if its is τ-closed, where $\tau(G) = s_n(G)$ is the collection of all normal subgroups of G for any group G.

The collection of all τ-closed σ-local formations denote by l^{τ}_{σ}. Formations from l^{τ}_{σ} we call l^{τ}_{σ}*-formations.* In particular, if τ is a trivial subgroup functor [2], that is $\tau(G) = \{G\}$ for all G, the symbol τ we omits and denotes by l_σ the collection of all σ-local formations.

If f is a formation σ-function, then the symbol $\mathrm{Supp}(f)$ denotes the support of f, that is, the set of all σ_i such that $f(\sigma_i) \neq \varnothing$. A formation σ-function f is called: τ-*valued*, if $f(\sigma_i)$ is τ-closed formation for each $\sigma_i \in \mathrm{Supp}(f)$; *integrated* if $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$ for all i; *full* if $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ for all i. If F is a full integrated formation σ-function and $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$, then F is called the *canonical* σ*-local definition* of $\mathfrak{F}$.

We also use $\cap_{j\in J} f_j$ to denote a formation σ-function h such that $h(\sigma_i) = \cap_{j\in J} f_j(\sigma_i)$, in particular, $h(\sigma_i) = (f_1 \cap f_2)(\sigma_i) = f_1(\sigma_i) \cap f_2(\sigma_i)$, for all i.

Let $\{f_j \mid j \in J\}$ be a set of all τ-valued σ-local definitions of $\mathfrak{F}$. Then we say that $f = \cap_{j\in J} f_j$ is *the smallest* τ*-valued* σ*-local definition* of $\mathfrak{F}$.

For any set of groups $\mathfrak{X}$ the symbol $l^{\tau}_{\sigma}\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ denotes *a* τ*-closed* σ*-local formation generated by* $\mathfrak{X}$, that is, $l^{\tau}_{\sigma}\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ is the intersection of all τ-closed σ-local formations containing $\mathfrak{X}$. If $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\sigma}\mathrm{form}\,G$ for some group G, then $\mathfrak{F}$ is called a *one-generated* τ*-closed* σ*-local formation*.

Let $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ be some collection of τ-closed σ-local formations. Then we put $\vee^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = l^{\tau}_{\sigma}\mathrm{form}\,(\cup_{j\in J}\mathfrak{F}_j)$. In particular, for any two l^{τ}_{σ}-formations $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{H}$ we set $\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\sigma} \mathfrak{H} = l^{\tau}_{\sigma}\mathrm{form}\,(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$.

For an arbitrary set of groups $\mathfrak{X}$ and any $\sigma_i \in \sigma$, the symbol $\mathfrak{X}(\sigma_i)$ [9, p. 962] denotes the class of groups defined as follows: $\mathfrak{X}(\sigma_i) = (G/O_{\sigma'_i,\sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$, if $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{X}(\sigma_i) = \varnothing$, if $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{X})$.

Following [24; 25], by a *minimal* τ*-closed* σ*-local not* $\mathfrak{H}$*-formation* or an $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$*-critical formation* we mean a τ-closed σ-local formation $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, all of whose proper τ-closed σ-local subformations are contained in the class of groups $\mathfrak{H}$.

Recall [2, p. 12] that a non-empty set of formations θ is called a *complete lattice of formations* if the intersection of any set of formations from θ again belongs to θ, and the set θ contains a formation $\mathfrak{M}$ such that $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$ for all $\mathfrak{H} \in \theta$. Any formation from θ is called a θ*-formation.*

For any two θ-formations $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{H}$, where $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, we denote by $\mathfrak{H}/_\theta\mathfrak{M}$ [2, p. 168] the lattice of θ-formations $\mathfrak{X}$ such that $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. In particular, $\mathfrak{H}/_\sigma^\tau\mathfrak{M}$ denotes the lattice of τ-closed σ-local formations $\mathfrak{X}$ such that $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$.

Let θ be some complete modular lattice of formations. For any two θ-formations $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{M}$ [2, p. 192], where $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, $|\mathfrak{F} : \mathfrak{M}|_\theta$ denote the length of the lattice $\mathfrak{F}/_\theta\mathfrak{M}$ of θ-formations contained between $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{F}$. Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be arbitrary θ-formations. Then the $\mathfrak{H}_\theta$*-defect* of the formation $\mathfrak{F}$ is the lattice length $\mathfrak{F}/_\theta\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ (finite or infinite) and is denoted by $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\theta$.

Let 0_θ be the zero of the lattice θ, $\mathfrak{F} \in \theta$. Then the θ*-length* [2, p. 212] of the formation $\mathfrak{F}$ is the cardinal number $|\mathfrak{F} : 0_\theta|_\theta$. In particular, the *length* of the formation $\mathfrak{F}$ is the number $l(\mathfrak{F}) = |\mathfrak{F} : \varnothing|$; the *length* of the local formation $\mathfrak{F}$ is the number $l_1(\mathfrak{F}) = |\mathfrak{F} : (1)|_l$.

Following [2, p. 192] an $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$*-defect* of a τ-closed σ-local formation $\mathfrak{F}$, we will call the lattice length $\mathfrak{F}/_\sigma^\tau\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ and denote it by $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma^\tau$. Similarly, following [2, p. 212], an l_σ^τ*-length* of a τ-closed σ-local formation $\mathfrak{F}$ is the number $l_\sigma^\tau(\mathfrak{F}) = |\mathfrak{F} : (1)|_\sigma^\tau$.

Let us also recall the concept of direct decomposition of a formation (see [2, p. 171]). Let $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ be some nonempty set of subclasses of $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}$ such that $\mathfrak{F}_{j_1} \cap \mathfrak{F}_{j_2} = (1)$ for any $j_1 \neq j_2$ in J. If, in addition, every group $G \in \mathfrak{F}$ has the form $G = A_{j_1} \times \ldots \times A_{j_t}$, where $A_{j_1} \in \mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, A_{j_t} \in \mathfrak{F}_{j_t}$ for some $j_1, \ldots, j_t \in J$, then we write that $\mathfrak{F} = \oplus_{j \in J}\mathfrak{F}_j$ (in particular, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{F}_t$, if $J = \{1, \ldots, t\}$).

A subformation $\mathfrak{M}$ of a formation $\mathfrak{F}$ is called *complemented* [2, p. 170] in $\mathfrak{F}$ if $\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$ and $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$ for some subformation $\mathfrak{H}$ of $\mathfrak{F}$. In this case, the subformation $\mathfrak{H}$ is called *complement* of $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{F}$.

To prove the main result of the paper, we need the following known facts from formation theory.

A special case of Theorem 1.15 [16] is the following lemma.

Lemma 2.1 [16, Theorem 1.15]. *The set* l_σ^τ *of all* τ*-closed* σ*-local formations forms an algebraic modular lattice of formations.*

Lemma 2.2 [26, Chapter II, §8, Theorem 16]. *Let* $\mathcal{L}$ *be a lattice of finite length. Then the following conditions are equivalent:*

(i) *the modular law holds in* $\mathcal{L}$*;*

(ii) $\mathcal{L}$ *is upper and lower semimodular;*

(iii) $\mathcal{L}$ *satisfies the Jordan-Dedekind chain condition and* $h[x] + h[y] = h[x \vee y] + h[x \wedge y]$.

Lemma 2.3 [17, Lemma 2.1]. *Let* Π *be a nonempty subset of* σ. *Then* $\mathfrak{G}_\Pi$ *of all* Π*-groups and the class* $\mathfrak{N}_\Pi$ *of all* σ*-nilpotent* Π*-groups are* σ*-local formations and the following statements hold.*

(1) $\mathfrak{G}_\Pi = LF_\sigma(g)$, *where* g *is the canonical* σ*-local definition of the formation* $\mathfrak{G}_\Pi$. *Moreover,* $g(\sigma_i) = \mathfrak{G}_\Pi$ *for all* $\sigma_i \in \Pi$ *and* $g(\sigma_i) = \varnothing$ *for all* $\sigma_i \in \Pi'$;

(2) $\mathfrak{N}_\Pi = LF_\sigma(n) = LF_\sigma(N)$, *where* n *and* N *are, respectively, the smallest and canonical* σ*-local definitions of the formation* $\mathfrak{N}_\Pi$. *Moreover,* $n(\sigma_i) = (1)$ *for all* $\sigma_i \in \Pi$ *and* $n(\sigma_i) = \varnothing$ *for all* $\sigma_i \in \Pi'$, $N(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ *for all* $\sigma_i \in \Pi$ *and* $N(\sigma_i) = \varnothing$ *for all* $\sigma_i \in \Pi'$.

Lemma 2.4 [21, Theorem]. *Let* $\mathfrak{F}$ *be a nonempty formation. Then the following statements are equivalent:*

(i) $\mathfrak{F}$ *is* τ*-closed n-multiply* σ*-local* $(n \geqslant 1)$;

(ii) $\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{F}^\tau_{\sigma_{n-1}}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ *for all* $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$;

(iii) $\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\cup_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})}\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{F}^\tau_{\sigma_{n-1}}(\sigma_i))$.

Lemma 2.5 [15, p. 2372]. *Let* $\mathfrak{F} = \oplus_{j \in J}\mathfrak{F}_j$, *where* $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ *is the set of formations such that* $\sigma(\mathfrak{F}_a) \cap \sigma(\mathfrak{F}_b) = \varnothing$ *for any* $a, b \in J$, $a \neq b$. *If and only if the formation* $\mathfrak{F}$ *is n-multiply* σ*-local* $(n \geqslant 1)$, $\mathfrak{F}_j$ *is n-multiply* σ*-local formation for all* j.

Lemma 2.6 [26, Ch. II, §7, Theorem 12]. *If* a, b, c *are elements of the modular lattice* $\mathcal{M}$, *then if either of the two equalities* $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ *or* $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ *holds, the triple* $\{a, b, c\}$ *is distributive.*

Lemma 2.7 is a special case of Lemma 2.6 [9].

Lemma 2.7 [9, Lemma 2.6]. *Let $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \mathrm{form}(\mathfrak{X}) = LF_\sigma(f)$ – τ-closed σ-local formation generated by $\mathfrak{X}$ and $\Pi = \sigma(\mathfrak{X})$. Let m be a formation σ-function such that $m(\sigma_i) = \tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}(\sigma_i))$ for all $\sigma_i \in \Pi$ and $m(\sigma_i) = \varnothing$ for all $\sigma_i \in \Pi'$. Then:*

(1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$;

(2) *m is a τ-valued σ-local definition of $\mathfrak{F}$; and*

(3) *$m(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ for all i.*

The following lemma is a special case of Lemma 3.1 [16].

Lemma 2.8 [16, Lemma 3.1]. *Let $\mathfrak{F}_j = LF_\sigma(f_j)$ for all $j \in J$, where f_j is the τ-valued σ-local definition of $\mathfrak{F}_j$, $\mathfrak{F} = \cap_{j\in J}\mathfrak{F}_j$, and $f = \cap_{j\in J} f_j$. Then:*

(1) $\sigma(\mathfrak{F}) = \cap_{j\in J}\sigma(\mathfrak{F}_j) = \mathrm{Supp}(f)$*;*

(2) *$\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ is a τ-closed σ-local formation, where f is a τ-valued formation σ-function.*

Furthermore, if f_j is an integrated τ-valued formation σ-function for all $j \in J$, then f is also an integrated τ-valued formation σ-function.

Lemma 2.9 [23, Theorem]. *Let $\mathfrak{H}$ be a σ-local formation of classical type and h be its canonical σ-local definition. Then $\mathfrak{F}$ is a minimal τ-closed σ-local non-$\mathfrak{H}$-formation if and only if $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \mathrm{form}\, G$, where G is a monolithic $\overline{\tau}$-minimal non-$\mathfrak{H}$-group with monolith $P = G^{\mathfrak{H}}$, and one of the following conditions holds:*

1) *$G = P$ is a simple σ_i-group such that $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$ and $\tau(G) = \{1, G\}$;*

2) *P is a non-σ-primary group and G is a $\overline{\tau}$-minimal non-$h(\sigma_i)$-group with $P = G^{h(\sigma_i)}$ for all $\sigma_i \in \sigma(P)$;*

3) *$G = P \rtimes K$, where $P = C_G(P)$ is a p-group, $p \in \sigma_i$, and K is either a monolithic $\overline{\tau}$-minimal non-$h(\sigma_i)$-group with monolith $Q = K^{h(\sigma_i)} \not\subseteq \Phi(K)$, where $\sigma_i \notin \sigma(Q)$, or a minimal non-$h(\sigma_i)$-group of one of the following types:* a) *the quaternion group of order* 8*, if $2 \notin \sigma_i$;* b) *an extraspecial group of order q^3 of prime odd exponent $q \notin \sigma_i$;* c) *a cyclic q-group, $q \notin \sigma_i$.*

Lemma 2.10 [9, Lemma 2.1]. *Let f and h be formation σ-functions and let $\Pi = \mathrm{Supp}(f)$. Let us assume that $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f) = LF_\sigma(h)$. Then:*

(1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$;

(2) *$\mathfrak{F} = (\cap_{\sigma_i\in\Pi}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_\Pi$. Therefore, $\mathfrak{F}$ is a saturated formation;*

(3) *If every group in $\mathfrak{F}$ is σ-soluble, then $\mathfrak{F} = (\cap_{\sigma_i\in\Pi}\mathfrak{S}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{S}_\Pi$;*

(4) *If $\sigma_i \in \Pi$, then $\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$;*

(5) *$\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$, where F is the unique formation σ-function such that $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ for all $\sigma_i \in \Pi$ and $F(\sigma_i) = \varnothing$ for all $\sigma_i \in \Pi'$. Furthermore, $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$ for all i.*

Lemma 2.11 is a special case of Corollary 3.1 [14].

Lemma 2.11 [14, Corollary 3.1]. *Let f_j be the smallest τ-valued σ-local definition of $\mathfrak{F}_j$, $j = 1, 2$. Then $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ if and only if $f_1 \leqslant f_2$.*

Lemma 2.12 [1, Lemma 18.8]. *If a group G has only one minimal normal subgroup and $O_p(G) = 1$ (p is some prime number), then there exists a faithful irreducible F_pG-module, where F_p is a field of p elements.*

Lemma 2.13 [16, Corollary 3.7]. *For any σ-localformations $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{H}$, there is a lattice isomorphism $\mathfrak{M} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{H}/_\sigma^\tau \mathfrak{M} \simeq \mathfrak{H}/_\sigma^\tau \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}$.*

Lemma 2.14 [2, Theorem 4.3.2]. *Let $\mathfrak{M}$ be a nonempty subformation of $\mathfrak{F}$. Then if $\mathfrak{H}$ is the complement of $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{F}$, then $\mathfrak{F} = \{A \times B \mid A \in \mathfrak{M}, B \in \mathfrak{H}\}$.*

3. $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect formation

Let $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{F}$ be τ-closed σ-local formations. Following [2, p. 192] an $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-*defect* of $\mathfrak{F}$ we will call the lattice length $\mathfrak{F}/_\sigma^\tau \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ and denote it by $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma^\tau$.

By Lemma 2.1 the following two statements are special cases (for $\theta = l_\sigma^\tau$) of Lemmas 5.2.8 and 5.2.7 [2], respectively.

Lemma 3.1. *Let $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{X}$, and $\mathfrak{H}$ be τ-closed σ-local formations, and $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{X}$. Then if m, r, and t are, respectively, $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defects of the formations $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$, and $\mathfrak{F}$, and m, $r < \infty$, then $t \leqslant m + r$.*

Lemma 3.2. *Let $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$, and $\mathfrak{H}$ be τ-closed σ-local formations, and $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{F}$. Then* $|\mathfrak{M}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}|^{\tau}_{\sigma}\leqslant|\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}|^{\tau}_{\sigma}$.

An element a of the lattice $\mathfrak{L}$ is called *neutral* (otherwise *distributive*) [26, p. 96], if for any $b,\ c\in\mathfrak{L}$ the triple a,b,c generates a distributive sublattice in the lattice $\mathfrak{L}$.

Lemma 3.3. *Let $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{F}$ be τ-closed σ-local formations of finite $\mathfrak{H}^{\tau}_{\sigma}$-defect, where $\mathfrak{H}$ is the neutral element of the lattice of τ-closed σ-local formations. Then for the $\mathfrak{H}^{\tau}_{\sigma}$-defect of the formation $\mathfrak{M}\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{F}$ the following equality holds:*

$$|\mathfrak{M}\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{M}\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{F})|^{\tau}_{\sigma}=|\mathfrak{M}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}|^{\tau}_{\sigma}+|\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}|^{\tau}_{\sigma}-|\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F})|^{\tau}_{\sigma}.$$

Proof. Let $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$, and $\mathfrak{H}$ be σ-local formations satisfying the condition of the lemma. Let $\mathfrak{X}=\mathfrak{M}\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{F}$, $\mathfrak{L}=\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}$, $t=|\mathfrak{X}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{X}|^{\tau}_{\sigma}$, $m=|\mathfrak{M}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}|^{\tau}_{\sigma}$, $k=|\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}|^{\tau}_{\sigma}$ and $l=|\mathfrak{L}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{L}|^{\tau}_{\sigma}$. By Lemma 3.1, we have $t\leqslant m+k$.

Let now $\mathfrak{X}_1:=\mathfrak{X}\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}_1:=\mathfrak{M}\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}_1:=\mathfrak{F}\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{L}_1:=\mathfrak{L}\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{H}$. By virtue of Lemmas 3.1 and 3.2, equality $|\mathfrak{X}_1:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{X}_1|^{\tau}_{\sigma}=t$, $|\mathfrak{M}_1:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}_1|^{\tau}_{\sigma}=m$, $|\mathfrak{F}_1:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}_1|^{\tau}_{\sigma}=k$ and $|\mathfrak{L}_1:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{L}_1|^{\tau}_{\sigma}=l$. Therefore, the lattice length $\mathfrak{X}_1/^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{X}_1\cap\mathfrak{H})=\mathfrak{X}\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{H}/^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{H}$ is equal to t. Note also that the formations $\mathfrak{M}_1$ and $\mathfrak{F}_1$ are elements of the lattice $\mathfrak{X}\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{H}/^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{H}\simeq\mathfrak{X}/^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{X}\cap\mathfrak{H}$ and an $\mathfrak{H}^{\tau}_{\sigma}$-defect is a function of the lattice height $\mathfrak{X}/^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{X}\cap\mathfrak{H}$. Therefore, by Lemma 2.2 the following holds equality

$$|\mathfrak{M}_1\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{F}_1:\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{M}_1\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{F}_1)|^{\tau}_{\sigma}=|\mathfrak{M}_1:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}_1|^{\tau}_{\sigma}+|\mathfrak{F}_1:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}_1|^{\tau}_{\sigma}-|\mathfrak{M}_1\cap\mathfrak{F}_1:\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{M}_1\cap\mathfrak{F}_1)|^{\tau}_{\sigma}.\quad(*)$$

Because $\mathfrak{M}_1\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{F}_1=(\mathfrak{M}\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{H})\vee^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{F}\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{H})=\mathfrak{X}\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{H}$, that $|\mathfrak{M}_1\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{F}_1:\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{M}_1\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{F}_1)|^{\tau}_{\sigma}=t$. Furthermore, by hypothesis, $\mathfrak{H}$ is a neutral element of the lattice of τ-closed σ-local formations, therefore $\mathfrak{M}_1\cap\mathfrak{F}_1=(\mathfrak{M}\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{H})\cap(\mathfrak{F}\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{H})=(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F})\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{H}=\mathfrak{L}\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{H}=\mathfrak{L}_1$.

Finally, since $|\mathfrak{L}_1:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{L}_1|^{\tau}_{\sigma}=l=|\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F})|^{\tau}_{\sigma}$, then from $(*)$ we get

$$|\mathfrak{M}\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{M}\vee^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{F})|^{\tau}_{\sigma}=|\mathfrak{M}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}|^{\tau}_{\sigma}+|\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}|^{\tau}_{\sigma}-|\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F})|^{\tau}_{\sigma}.\qquad\square$$

Lemma 3.4. *Let $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$, and $\mathfrak{H}$ be τ-closed σ-local formations such that $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{M}$. Then the $\mathfrak{H}^{\tau}_{\sigma}$-defect of $\mathfrak{F}$ is finite if and only if the $\mathfrak{H}^{\tau}_{\sigma}$-defect of the formation $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{M}^{\tau}_{\sigma}$-defect formations $\mathfrak{F}$, in this case*

$$|\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}|^{\tau}_{\sigma}=|\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F})|^{\tau}_{\sigma}+|\mathfrak{F}:\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}|^{\tau}_{\sigma}.$$

Proof. Necessity. Assume that the $\mathfrak{H}^{\tau}_{\sigma}$-defect of $\mathfrak{F}$ is finite and let $|\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}|^{\tau}_{\sigma}=n$. Then, by Lemma 3.2, the inequality $|\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F})|^{\tau}_{\sigma}\leqslant|\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}|^{\tau}_{\sigma}$. Therefore, the $\mathfrak{H}^{\tau}_{\sigma}$-defect $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}$ is also finite. Let $k=|\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F})|^{\tau}_{\sigma}$. By the definition of $\mathfrak{H}^{\tau}_{\sigma}$-defect and by Lemma 2.1, the modularity of the lattice l^{τ}_{σ}, implies that there exist chains

$$\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_0\subset\mathfrak{F}_1\subset\ldots\subset\mathfrak{F}_{n-1}\subset\mathfrak{F}_n=\mathfrak{F},$$

$$\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F})=\mathfrak{L}_0\subset\mathfrak{L}_1\subset\ldots\subset\mathfrak{L}_{k-1}\subset\mathfrak{L}_k=\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}$$

from $\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}$ to $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}$ respectively, which $\mathfrak{F}_i$ is the maximal τ-closed σ-local subformation in $\mathfrak{F}_{i+1}$ and $\mathfrak{L}_j$ is the maximal τ-closed σ-local subformation in $\mathfrak{L}_{j+1}$ for all $i=0,1,\ldots,n-1$ and $j=0,1,\ldots,k-1$. Since $\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}$, then, by Lemma 2.1 from the modularity of the lattice l^{τ}_{σ} It follows that there exists a chain $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}=\mathfrak{X}_0\subset\mathfrak{X}_1\subset\ldots\subset\mathfrak{X}_{t-1}\subset\mathfrak{X}_t=\mathfrak{F}$ of length $t=n-k$ such that $\mathfrak{X}_i$ is the maximal τ-closed σ-local subformation in $\mathfrak{X}_{i+1}$, $i=0,1,\ldots,t-1$. Therefore, the lattice $\mathfrak{F}/^{\tau}_{\sigma}\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}$ has finite length equal to t. Then $t=|\mathfrak{F}:\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}|^{\tau}_{\sigma}$ by the definition of the $\mathfrak{M}^{\tau}_{\sigma}$-defect.

Sufficiency. Let $k=|\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F})|^{\tau}_{\sigma}$ and $t=|\mathfrak{F}:\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}|^{\tau}_{\sigma}$. Then we have

$$\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}=\mathfrak{X}_0\subset\mathfrak{X}_1\subset\ldots\subset\mathfrak{X}_{t-1}\subset\mathfrak{X}_t=\mathfrak{F},$$

$$\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F})=\mathfrak{L}_0\subset\mathfrak{L}_1\subset\ldots\subset\mathfrak{L}_{k-1}\subset\mathfrak{L}_k=\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F},$$

where $\mathfrak{X}_i$ and $\mathfrak{L}_j$ are the maximal τ-closed σ-local subformation in $\mathfrak{X}_{i+1}$ and $\mathfrak{L}_{j+1}$, respectively, $i=0,1,\ldots,t-1$ and $j=0,1,\ldots,k-1$. Therefore, there exists a maximal chain of τ-closed σ-local formations of length $k+t$ from $\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}$ to $\mathfrak{F}$. By Lemma 2.1, the latter implies that $|\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}|^{\tau}_{\sigma}=k+t$, i. e.

$$|\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}|^{\tau}_{\sigma}=|\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F})|^{\tau}_{\sigma}+|\mathfrak{F}:\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}|^{\tau}_{\sigma}.\qquad\square$$

Lemma 3.5. *Let $\mathfrak{H}$ be a τ-closed σ-local formation such that $(1)\neq\mathfrak{H}\subset\mathfrak{N}_{\sigma}$. Then $\mathfrak{H}=\mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{H})}$.*

Proof. Let $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$ and $\mathfrak{G}_\Pi$ be the class of all Π-groups. By Lemma 2.3(1), the formation $\mathfrak{G}_\Pi$ is σ-local. Moreover, since the formation $\mathfrak{G}_\Pi$ is hereditary, it is τ-closed for any subgroup functor τ. Therefore, the inclusion $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}_\Pi \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_\Pi$.

On the other hand, in view of Lemma 2.4(ii), we have $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{H}^\tau_{\sigma_0}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$ for all $\sigma_i \in \Pi$. Thus, taking into account Lemma 2.5 we have $\mathfrak{N}_\Pi = \oplus_{\sigma_i\in\Pi}\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{H}$. Thus, $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\Pi$, where $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$. □

Lemma 3.6. *Every σ-nilpotent τ-closed σ-local formation is a neutral element of the lattice l^τ_σ. In particular, the formation $\mathfrak{N}_\sigma$ of all σ-nilpotent groups is a neutral element of the lattice l^τ_σ.*

Proof. Let $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$, and $\mathfrak{M}$ be some τ-closed σ-local formations, where $\mathfrak{H}$ is σ-nilpotent. By Lemmas 2.1 and 2.6, to prove the assertion of the lemma, it suffices to show that $\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{F}\vee^\tau_\sigma\mathfrak{M}) = (\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\vee^\tau_\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M})$.

If $\mathfrak{H} = (1)$, then the statement is obvious. Let $\mathfrak{H} \neq (1)$ and $\Pi_1 = \sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})$ and $\Pi_2 = \sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M})$. Since $(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\vee^\tau_\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}) = l^\tau_\sigma\mathrm{form}((\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\cup(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}))$, then by Lemma 2.7(1) we have

$$\sigma((\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\vee^\tau_\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M})) = \sigma((\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\cup(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M})) = \sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\cup\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}) = \Pi_1\cup\Pi_2.$$

Since $(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\vee^\tau_\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{H}\cap(\mathfrak{F}\vee^\tau_\sigma\mathfrak{M})$, then $\sigma((\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\vee^\tau_\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M})) \subseteq \sigma(\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{F}\vee^\tau_\sigma\mathfrak{M}))$, i. e. $\Pi_1\cup\Pi_2 \subseteq \sigma(\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{F}\vee^\tau_\sigma\mathfrak{M}))$.

On the other hand, $\mathfrak{F}\vee^\tau_\sigma\mathfrak{M} = l^\tau_\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{F}\cup\mathfrak{M})$ and again by Lemma 2.7(1) we have

$$\sigma(\mathfrak{F}\vee^\tau_\sigma\mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{F}\cup\mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{F})\cup\sigma(\mathfrak{M}).$$

By Lemma 2.8(2), the formation $\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{F}\vee^\tau_\sigma\mathfrak{M})$ is a τ-closed σ-local formation. Now, if $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{F}\vee^\tau_\sigma\mathfrak{M}))$, then $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{H}\cap(\mathfrak{F}\vee^\tau_\sigma\mathfrak{M})$ by Lemma 2.4(ii). Therefore,

$$\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})\cap\sigma(\mathfrak{F}\vee^\tau_\sigma\mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{H})\cap(\sigma(\mathfrak{F})\cup\sigma(\mathfrak{M})).$$

Hence, $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq (\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\cup(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M})$. Therefore,

$$\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\cup\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}) = \Pi_1\cup\Pi_2.$$

Thus, $\sigma((\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\vee^\tau_\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M})) = \sigma(\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{F}\vee^\tau_\sigma\mathfrak{M}))$. Since in this case both formations $(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\vee^\tau_\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M})$ and $\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{F}\vee^\tau_\sigma\mathfrak{M})$ are σ-nilpotent τ-closed σ-local formations, then by Lemma 3.5 we have $(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\vee^\tau_\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}) = \mathfrak{N}_\Pi = \mathfrak{H}\cap(\mathfrak{F}\vee^\tau_\sigma\mathfrak{M})$, where $\Pi = \Pi_1\cup\Pi_2$. Therefore, τ-closed σ-local formations $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$, and $\mathfrak{M}$ form a distributive triple in the lattice l^τ_σ, and therefore $\mathfrak{H}$ is the identity element of l^τ_σ. In particular, if $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\sigma$, we obtain the second part of the lemma. □

The next lemma is a direct consequence of Lemmas 3.3 and 3.6.

Lemma 3.7. *Let $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{F}$ be τ-closed σ-local formations of finite $\mathfrak{H}^\tau_\sigma$-defect, where $\mathfrak{H}$ is a σ-nilpotent τ-closed σ-local formation. Then, for $\mathfrak{H}^\tau_\sigma$-defect of the formation $\mathfrak{M}\vee^\tau_\sigma\mathfrak{F}$, we have*

$$|\mathfrak{M}\vee^\tau_\sigma\mathfrak{F} : \mathfrak{H}\cap(\mathfrak{M}\vee^\tau_\sigma\mathfrak{F})|^\tau_\sigma = |\mathfrak{M} : \mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}|^\tau_\sigma + |\mathfrak{F} : \mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}|^\tau_\sigma - |\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F} : \mathfrak{H}\cap(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F})|^\tau_\sigma.$$

In particular, if $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\sigma$, then for the σ-nilpotent l^τ_σ-defect of the formation $\mathfrak{M}\vee^\tau_\sigma\mathfrak{F}$ we have

$$|\mathfrak{M}\vee^\tau_\sigma\mathfrak{F} : \mathfrak{N}_\sigma\cap(\mathfrak{M}\vee^\tau_\sigma\mathfrak{F})|^\tau_\sigma = |\mathfrak{M} : \mathfrak{N}_\sigma\cap\mathfrak{M}|^\tau_\sigma + |\mathfrak{F} : \mathfrak{N}_\sigma\cap\mathfrak{F}|^\tau_\sigma - |\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F} : \mathfrak{N}_\sigma\cap(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F})|^\tau_\sigma.$$

4. l^τ_σ-Formations of $\mathfrak{H}^\tau_\sigma$-defect 1

Let $\mathfrak{F}$ be a τ-closed σ-local formation. Following [2, p. 200], a formation $\mathfrak{F}$ will be called an *irreducible τ-closed σ-local formation* (or an *l^τ_σ-irreducible formation*) if $\mathfrak{F} \neq l^\tau_\sigma\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{X}_i) = \vee^\tau_\sigma(\mathfrak{X}_i \mid i \in I)$, where $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ is the set of all proper τ-closed σ-local subformations of $\mathfrak{F}$. If there exist such proper τ-closed σ-local subformations $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{H}$ of $\mathfrak{F}$, such that $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\vee^\tau_\sigma\mathfrak{H}$, then the formation $\mathfrak{F}$ will be called a *reducible τ-closed σ-local* (or an *l^τ_σ-reducible*) formation.

Since every minimal τ-closed σ-local non-$\mathfrak{H}$-formation $\mathfrak{F}$ is obviously an l^τ_σ-irreducible formation and its unique maximal τ-closed σ-local subformation is contained in $\mathfrak{H}$, the $\mathfrak{H}^\tau_\sigma$-defect of the formation $\mathfrak{F}$ is equal to 1. Thus, every $\mathfrak{H}^\tau_\sigma$-critical formation is an l^τ_σ-irreducible formation of $\mathfrak{H}^\tau_\sigma$-defect 1.

Theorem 4.1. *Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be τ-closed σ-local formations such that $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$. If and only if $\mathfrak{F}$ is a minimal τ-closed σ-local non-$\mathfrak{H}$-formation, $\mathfrak{F} = l^\tau_\sigma\mathrm{form}\,G$ and one of the following conditions holds:*

(1) *G is a simple σ_i-group such that $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$ and $\tau(G) = \{1, G\}$;*

(2) *G is a simple non-σ-primary τ-minimal non-$\mathfrak{G}_{\sigma_i}$-group for any $\sigma_i \in \sigma(G)$, $\sigma(G) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$;*

(3) *$G = P \rtimes K$, where $P = C_G(P)$ is an abelian p-group for some $p \in \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$, and K is a simple σ_j-group ($j \neq i$) such that $\tau(K) = \{1, K\}$.*

Proof. Necessity. Let $\mathfrak{F}$ be a minimal τ-closed σ-local non- $\mathfrak{H}$-formation. By Lemma 3.5, we have $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\Pi$, where $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$. By Lemma 2.3(2), we have $\mathfrak{N}_\Pi = LF_\sigma(n)$, where n is the least σ-local definition of the formation $\mathfrak{N}_\Pi$ and $n(\sigma_i) = (1)$ for all $\sigma_i \in \Pi$, $n(\sigma_i) = \varnothing$ for all $\sigma_i \in \Pi'$. Thus, $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\Pi$ is a σ-local formation of classical type. Let h be the canonical σ-local definition of the formation $\mathfrak{H}$.

By Lemma 2.9, we have $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \mathrm{form}\, G$, where G is a monolithic $\overline{\tau}$-minimal non-$\mathfrak{H}$-group with monolith $P = G^{\mathfrak{H}}$, and one of the following conditions holds:

1) $G = P$ is a simple σ_i-group such that $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$ and $\tau(G) = \{1, G\}$;

2) P is a non-σ-primary group and G is a $\overline{\tau}$-minimal non-$h(\sigma_i)$-group with $P = G^{h(\sigma_i)}$ for all $\sigma_i \in \sigma(P)$;

3) $G = P \rtimes K$, where $P = C_G(P)$ is a p-group, $p \in \sigma_i$, and K is either a monolithic $\overline{\tau}$-minimal non-$h(\sigma_i)$-group with monolith $Q = K^{h(\sigma_i)} \not\subseteq \Phi(K)$, where $\sigma_i \notin \sigma(Q)$, or a minimal non-$h(\sigma_i)$-group of one of the following types: a) the quaternion group of order 8, if $2 \notin \sigma_i$; b) an extraspecial group of order q^3 of prime odd exponent $q \notin \sigma_i$; c) a cyclic q-group, $q \notin \sigma_i$.

If condition 1) holds for G, then, obviously, G satisfies condition (1) of the theorem.

Let condition 2) hold for G. It follows from Lemma 2.3(2) that $h(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ for all $\sigma_i \in \Pi$ and $h(\sigma_i) = \varnothing$ for all $\sigma_i \in \Pi'$. We show that in this case $G = P$ is a simple non-σ-primary τ-minimal non-$\mathfrak{G}_{\sigma_i}$-group for any $\sigma_i \in \sigma(G)$ and $\sigma(G) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$.

Indeed, since $P = G^{h(\sigma_i)}$ for all $\sigma_i \in \sigma(P)$, we have $h(\sigma_i) \neq \varnothing$. Therefore, $\sigma(P) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$ by Lemma 2.10(5). On the other hand, since $|\sigma(P)| > 1$, then for $\sigma_i, \sigma_j \in \sigma(P)$, where $i \neq j$, we have

$$G/P \in h(\sigma_i) \cap h(\sigma_j) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \cap \mathfrak{G}_{\sigma_j} = (1).$$

Therefore, and since G is monolithic, we conclude that $G = P$ is a simple non-σ-primary group such that $\sigma(G) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$. Since $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ is a hereditary formation, $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ is a τ-closed formation for any subgroup functor τ. Therefore, by [2, Remark 2.2.12], the $\overline{\tau}$-minimality condition for G can be replaced by the τ-minimality condition. This means that G is a τ-minimal non-$\mathfrak{G}_{\sigma_i}$-group for all $\sigma_i \in \sigma(P)$. Consequently, G satisfies condition (2) of the theorem.

Finally, let condition 3) hold for G. Since $Q = K^{h(\sigma_i)}$, then $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$ and $\Phi(K) = 1$ since $h(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ is a saturated formation.

Let us show that K is a simple σ_j-group, $j \neq i$. Indeed, since $K \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$, it follows that $K = Q$ is a simple σ-primary group due to the monolithicity and σ-nilpotency of K. Consequently, K is a σ_j-group, where $j \neq i$. Moreover, since K is an $\overline{\tau}$-minimal non-$\mathfrak{G}_{\sigma_i}$-group, it follows that $\tau(K) = \{1, K\}$. Therefore, G satisfies condition (3) of the theorem.

Sufficiency. Let $\mathfrak{F}$ be a formation satisfying the conditions of the theorem, h be the canonical σ-local definition of the formation $\mathfrak{H}$. By Lemmas 3.5 and 2.3(2), we have $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{H})}$ and $h(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ for all $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$, $h(\sigma_i) = \varnothing$ for all $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$.

If condition (1) holds for $\mathfrak{F}$, then obviously, by the condition 1) Lemma 2.9, the formation $\mathfrak{F}$ is a minimal τ-closed σ-local non- $\mathfrak{H}$-formation.

Suppose that condition (2) holds for $\mathfrak{F}$. Since $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ is a τ-closed formation, by [2, Remark 2.2.12] G is an $\overline{\tau}$-minimal non-$\mathfrak{G}_{\sigma_i}$-group for any $\sigma_i \in \sigma(G)$. Therefore, G satisfies condition 2) of Lemma 2.9, and hence $\mathfrak{F}$ is a minimal τ-closed σ-local non-$\mathfrak{H}$-formation.

Now let condition (3) hold for the formation $\mathfrak{F}$. We show that in this case, conditions 3) of Lemma 2.9 hold for $\mathfrak{F}$. Indeed, since $h(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ and $h(\sigma_j) = \mathfrak{G}_{\sigma_j}$, it follows that $K = K^{h(\sigma_i)}$ is a monolithic τ-minimal non-$h(\sigma_i)$-group, $\sigma_i \notin \sigma(K)$. Moreover, $\Phi(K) = 1$ and $1 = K^{h(\sigma_j)} \subseteq K$. Consequently, conditions 3) of Lemma 2.9 are satisfied for the group G. Therefore, $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \mathrm{form}\, G$ is a minimal τ-closed σ-local non-$\mathfrak{H}$-formation. $\square$

In the case where $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\sigma$ is the formation of all σ-nilpotent groups, Theorem 4.1 has the following special case.

Theorem 4.2. *If and only if $\mathfrak{F}$ is a minimal τ-closed σ-local non-σ-nilpotent formation, then $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \mathrm{form}\, G$ and one of the following conditions holds:*

1) *G is a simple non-σ-primary τ-minimal non-$\mathfrak{G}_{\sigma_i}$-group for any $\sigma_i \in \sigma(G)$;*

2) *$G = P \rtimes K$, where $P = C_G(P)$ is a p-group, $p \in \sigma_i$, and K is a simple σ_j-group $(j \neq i)$ such that* $\tau(K) = \{1, K\}$.

In the case where τ is a trivial subgroup functor, we have

Corollary 4.3 [17, Corollary 2.9]. *If and only if $\mathfrak{F}$ is a minimal σ-local non-σ-nilpotent formation when $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}\, G$ and one of the following conditions holds:*

1) *G is a simple non-σ-primary group;*

2) *$G = P \rtimes K$, where $P = C_G(P)$ is a p-group, $p \in \sigma_i$, and K is a simple σ_j-group, $j \neq i$.*

In particular, if $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$, from Theorem 4.1 we obtain

Corollary 4.4. *Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be τ-closed local formations such that $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$. If and only if $\mathfrak{F}$ is a minimal τ-closed local non-$\mathfrak{H}$-formation when $\mathfrak{F} = \tau^l\mathrm{form}\, G$, where G is one of the following groups:*

(1) *a group of prime order $p \notin \pi(\mathfrak{H})$;*

(2) *a simple non-abelian τ-minimal non-$\mathfrak{N}_p$-group for any $p \in \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$;*

(3) *a Schmidt group, $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$.*

If τ is the trivial subgroup functor, then we have

Corollary 4.5. *Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be local formations such that $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$. If and only if $\mathfrak{F}$ is a minimal local non-$\mathfrak{H}$-formation, then $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}\, G$, where G is one of the following groups:*

(1) *a group of prime order $p \notin \pi(\mathfrak{H})$;*

(2) *a simple non-abelian group, $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$;*

(3) *a Schmidt group, $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$.*

Furthermore, if $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$ is the formation of all nilpotent groups from Theorem 4.1 we obtain the following well-known result.

Corollary 4.6 [2, Corollary 2.4.4]. *If and only if $\mathfrak{F}$ is a minimal τ-closed local non-nilpotent formation when $\mathfrak{F} = \tau^l\mathrm{form}\, G$ where G is either a simple non-abelian τ-minimal non- $\mathfrak{N}_p$-group for any $p \in \pi(G)$, or a Schmidt group.*

If τ is a trivial subgroup functor, then we have

Corollary 4.7 [1, Corollary 19.10]. *If and only if $\mathfrak{F}$ is a minimal local non-nilpotent formation, then $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}\, G$ and one of the following conditions holds:*

(1) *G is a Schmidt group;*

(2) *G is a simple non-abelian group.*

The question of the existence of $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-critical formations, in the case where $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$, is decided by

Theorem 4.8. *Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be τ-closed σ-local formations such that $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$ Then $\mathfrak{F}$ contains at least one minimal τ-closed σ-local non-$\mathfrak{H}$-subformation.*

Proof. Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be τ-closed σ-local formations from the hypothesis of the theorem. If there exists a σ_k such that $\sigma_k \in \sigma(\mathfrak{F}) \setminus \sigma(\mathfrak{H})$, then by Lemma 2.10 we have $\mathfrak{G}_{\sigma_k} \subseteq \mathfrak{F}$ and $\mathfrak{G}_{\sigma_k} \nsubseteq \mathfrak{H}$. Since $\mathfrak{G}_{\sigma_k}$ is a τ-closed σ-local formation, and its only proper σ-local subformation is $(1) \subseteq \mathfrak{H}$, then $\mathfrak{G}_{\sigma_k}$ is the desired $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ is a critical formation from $\mathfrak{F}$.

In what follows, we will assume that $\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$.

By Lemma 3.5, we have $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{H})}$. Let h be the canonical σ-local definition of $\mathfrak{H}$. By Lemma 2.3(2), we have $h(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ for all $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$ and $h(\sigma_i) = \varnothing$ for all $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$. Since $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{H}$, by Lemma 2.11 there exists at least one $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$ such that $f(\sigma_i) \nsubseteq h(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. We choose a group K_i of minimal order in $f(\sigma_i) \setminus \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Since the formation $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ is τ-closed, K_i is a monolithic τ-minimal non-$\mathfrak{G}_{\sigma_i}$-group with monolith $Q_i = K_i^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}}$. Among all such groups K_i, we choose a group K_j of smallest order. Let $K := K_j$. Then K is a monolithic τ-minimal non-$\mathfrak{G}_{\sigma_j}$-group with monolith $Q = K^{\mathfrak{G}_{\sigma_j}}$.

Assume that Q is not a σ-primary group and let $\sigma_k \in \sigma(Q) \setminus \{\sigma_j\}$. Then $O_{\sigma_k, \sigma_k'}(K) = 1$ due to the monolithicity of K. Since $K \in \mathfrak{F}$, then $K \simeq K/O_{\sigma_j, \sigma_j'}(K) \in f(\sigma_j)$. It is clear that $K \notin \mathfrak{G}_{\sigma_k} = h(\sigma_k)$. Therefore, $K \in f(\sigma_k) \setminus h(\sigma_k)$. If, in addition, $K/Q \notin h(\sigma_k)$, then $K/Q \in f(\sigma_k) \setminus h(\sigma_k)$. The latter contradicts the choice of the group K, since $|K/Q| < |K|$. Therefore, $K/Q \in h(\sigma_k) = \mathfrak{G}_{\sigma_k}$. Thus, $K/Q \in \mathfrak{G}_{\sigma_j} \cap \mathfrak{G}_{\sigma_k} = (1)$. Consequently, K is a simple non-σ-primary τ-minimal non-$\mathfrak{G}_{\sigma_j}$-group.

Now let $H \in \tau(K) \setminus \{K\}$. Then $H \in f(\sigma_k)$, since $K \in f(\sigma_k)$ and $f(\sigma_k)$ is a τ-closed formation. Suppose that $H \notin h(\sigma_k)$. Then since $|H| < |K|$, we obtain a contradiction with the choice of $|K|$. Thus, K is a simple non-σ-primary τ-minimal non-$\mathfrak{G}_{\sigma_k}$-group for any $\sigma_k \in \sigma(K)$. Thus, the group K satisfies condition (2) of Theorem 4.1. Therefore, $\mathfrak{L} = l_\sigma^\tau\mathrm{form}\, K$ is the desired $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-critical formation from $\mathfrak{F}$.

Now let Q be a σ-primary group, i. e., a σ_k-group for some $k \neq j$. Then $K \neq Q$, since $\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$. Moreover, $Q = O_{\sigma_k,\sigma_k'}(K) = O_{\sigma_k}(K)$ since Q is a monolith of K and $k \neq j$. Since $K \in \mathfrak{F}$, then $K/Q = K/O_{\sigma_k,\sigma_k'}(K) \in f(\sigma_k)$. Therefore, $K/Q \in f(\sigma_k) \cap \mathfrak{G}_{\sigma_j} \neq \varnothing$. Let A be a group of minimal order in $f(\sigma_k) \cap \mathfrak{G}_{\sigma_j}$. Then A is a simple σ_j-group and $\tau(A) = \{1, A\}$.

Let $p \in \sigma_k$. Since $O_p(A) = 1$, by Lemma 2.12 there exists a faithful irreducible F_pA-module P, where F_p is a field of p elements. Let $G = P \rtimes A$. Then $P = C_G(P)$ and the group G satisfies condition (3) of Theorem 4.1. Consequently, $\mathfrak{L} = l_\sigma^\tau \mathrm{form}\, G$ is the desired $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-critical formation from $\mathfrak{F}$. □

In particular, if τ is the trivial subgroup functor from Theorem 4.8, we obtain

Corollary 4.9 [22, Theorem 3.8]. *Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be σ-local formations such that $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$. Then $\mathfrak{F}$ has at least one minimal σ-local non-$\mathfrak{H}$-subformation.*

If $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\sigma$ is the formation of all σ-nilpotent groups, then we obtain the following important special case of Theorem 4.8.

Theorem 4.10. *Let $\mathfrak{F}$ be a non-σ-nilpotent τ-closed σ-local formation. Then $\mathfrak{F}$ has at least one minimal τ-closed σ-local non-σ-nilpotent subformation.*

If τ is a trivial subgroup functor, we obtain

Corollary 4.11 [22, Corollary 3.9]. *Let $\mathfrak{F}$ be a non-σ-nilpotent σ-local formation. Then $\mathfrak{F}$ has at least one minimal σ-local non-σ-nilpotent subformation.*

Recall that if $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{H}$ are formations such that $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Then the formation $\mathfrak{M}$ is called a subformation of $\mathfrak{H}$ or, alternatively, an $\mathfrak{H}$-subformation.

Theorem 4.12. *Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be l_σ^τ-formations such that $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$. Then and only if the $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect of $\mathfrak{F}$ is* 1, *when $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{L}$, where $\mathfrak{M}$ is a τ-closed σ-local subformation of $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}$ is a minimal τ-closed σ-local non-$\mathfrak{H}$-formation, such that:*

(1) *every τ-closed $\mathfrak{H}$-subformation of $\mathfrak{F}$ is contained in $\mathfrak{M} \vee_\sigma^\tau (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{H})$;*

(2) *every l_σ^τ-formation $\mathfrak{X}$ from $\mathfrak{F}$ such that $\mathfrak{X} \not\subseteq \mathfrak{H}$, has the form $\mathfrak{L} \vee_\sigma^\tau (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{H})$.*

Proof. Necessity. Let $\mathfrak{F}$ be a τ-closed σ-local formation with $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect 1. Since $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, then by Theorem 4.8 $\mathfrak{F}$ contains some minimal τ-closed σ-local not $\mathfrak{H}$-formation $\mathfrak{L}$. By the hypothesis of the theorem, $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ is the maximal l_σ^τ-subformation of $\mathfrak{F}$. Therefore, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{L}$.

Sufficiency. Let $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{L}$, where $\mathfrak{L}$ is a minimal τ-closed σ-local non-$\mathfrak{H}$-formation, and $\mathfrak{M}$ is an l_σ^τ-formation of $\mathfrak{H}$. Then, by Lemma 3.3, $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect of $\mathfrak{F}$ is equal to 1.

We now show that statements (1) and (2) hold. Since $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{H}$ is a maximal τ-closed σ-local subformation of $\mathfrak{L}$, it follows from Lemmas 2.1 and 2.13 of the lattice isomorphism

$$\mathfrak{F}/_\sigma^\tau(\mathfrak{M} \vee_\sigma^\tau (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{H})) = (\mathfrak{M} \vee_\sigma^\tau (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{H}) \vee_\sigma^\tau \mathfrak{L})/_\sigma^\tau(\mathfrak{M} \vee_\sigma^\tau (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{H})) \simeq$$

$$\simeq \mathfrak{L}/_\sigma^\tau(\mathfrak{L} \cap ((\mathfrak{L} \cap \mathfrak{H}) \vee_\sigma^\tau \mathfrak{M})) = \mathfrak{L}/_\sigma^\tau((\mathfrak{L} \cap \mathfrak{H}) \vee_\sigma^\tau (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M})) = \mathfrak{L}/_\sigma^\tau \mathfrak{L} \cap \mathfrak{H}$$

we get that $\mathfrak{M} \vee_\sigma^\tau (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{H})$ is the maximal l_σ^τ-subformation of $\mathfrak{F}$. Since $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, then every $\mathfrak{H}$-subformation of $\mathfrak{F}$ is included in $(\mathfrak{L} \cap \mathfrak{H}) \vee_\sigma^\tau \mathfrak{M}$. Therefore, assertion (1) holds.

Let us now show that in $\mathfrak{F}$ there are no minimal τ-closed σ-local non-$\mathfrak{H}$-formations different from $\mathfrak{L}$. Suppose that this is false, and let $\mathfrak{L}_1$ be the minimal τ-closed σ-local non-$\mathfrak{H}$-formation in $\mathfrak{F}$ such that $\mathfrak{L}_1 \neq \mathfrak{L}$. Since the $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defects of $\mathfrak{L}$ and $\mathfrak{L}_1$ are equal to 1 and $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{H}$, by Lemma 2.9 we have

$$|\mathfrak{L} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{L}_1 : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{L} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{L}_1)|_\sigma^\tau = |\mathfrak{L} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}|_\sigma^\tau + |\mathfrak{L}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}_1|_\sigma^\tau - |\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}_1 : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}_1)|_\sigma^\tau = 2.$$

The latter contradicts Lemma 3.2, since $\mathfrak{L} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Thus, in the formation $\mathfrak{F}$ there are no minimal τ-closed σ-local non-$\mathfrak{H}$-formations distinct from $\mathfrak{L}$.

Now let $\mathfrak{X}$ be an arbitrary l_σ^τ-subformation of $\mathfrak{F}$ such that $\mathfrak{X} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Then, by what was proved above and Theorem 4.8, we conclude that $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{X}$. Since $\mathfrak{X}$ has $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect equal to 1, $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}$ is the maximal τ-closed σ-local subformation of $\mathfrak{X}$. Therefore, $\mathfrak{X} = \mathfrak{L} \vee_\sigma^\tau (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{H})$, i. e., assertion (2) holds. □

In the case when $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\sigma$, from Theorem 4.12 we obtain the following result.

Theorem 4.13. *Let $\mathfrak{F}$ be a τ-closed σ-local non-σ-nilpotent formation. If and only if the σ-nilpotent l_σ^τ-defect of a formation $\mathfrak{F}$ is* 1 *when $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{L}$, where $\mathfrak{M}$ is a σ-nilpotent τ-closed σ-local subformation of $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{L}$ is a minimal τ-closed σ-local non-σ-nilpotent formation, and:*

(1) *every σ-nilpotent τ-closed subformation of $\mathfrak{F}$ is included in $\mathfrak{M} \vee_\sigma^\tau (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{N}_\sigma)$;*

(2) *every non-σ-nilpotent l_σ^τ-subformation $\mathfrak{X}$ of $\mathfrak{F}$ has the form $\mathfrak{L} \vee_\sigma^\tau (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}_\sigma)$.*

In the case where $\tau = s$ is the identity subgroup functor, Theorem 4.12 implies

Corollary 4.14. *Let $\mathfrak{F}$ be a hereditary σ-local non-σ-nilpotent formation. If and only if the σ-nilpotent l_σ^s-defect of $\mathfrak{F}$ is* 1 *when $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma^s \mathfrak{L}$, where $\mathfrak{M}$ is a σ-nilpotent hereditary σ-local subformation of $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{L}$ is a minimal hereditary σ-local non-σ-nilpotent formation, and:*

(1) *every σ-nilpotent hereditary subformation of $\mathfrak{F}$ is included in $\mathfrak{M} \vee_\sigma^s (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{N}_\sigma)$;*

(2) *every non-σ-nilpotent l_σ^s-subformation $\mathfrak{X}$ of $\mathfrak{F}$ has the form $\mathfrak{L} \vee_\sigma^s (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}_\sigma)$.*

If $\tau(G) = s_n(G)$ is the set of all normal subgroups of G for any group G, then we obtain

Corollary 4.15. *Let $\mathfrak{F}$ be a normally hereditary σ-local non- σ-nilpotent formation. If and only if the σ-nilpotent $l_\sigma^{s_n}$-defect of $\mathfrak{F}$ is* 1 *when $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma^{s_n} \mathfrak{L}$, where $\mathfrak{M}$ is a σ-nilpotent σ-local subformation of $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{L}$ is a minimal normally hereditary σ-local non-σ-nilpotent formation, and:*

(1) *every σ-nilpotent $l_\sigma^{s_n}$-subformation of $\mathfrak{F}$ is in the $\mathfrak{M} \vee_\sigma^{s_n} (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{N}_\sigma)$;*

(2) *every non-σ-nilpotent $l_\sigma^{s_n}$-subformation of $\mathfrak{X}$ of $\mathfrak{F}$ has the form $\mathfrak{L} \vee_\sigma^{s_n} (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}_\sigma)$.*

In particular, if $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\{5\},\ldots\}$ from Theorem 4.12 we obtain

Corollary 4.16. *Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be τ-closed local formations such that $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$. If and only if the $\mathfrak{H}_l^\tau$-defect of the formation $\mathfrak{F}$ is* 1, *when $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l^\tau \mathfrak{L}$, where $\mathfrak{M}$ is a τ-closed local subformation of $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}$ is the minimal τ-closed local not $\mathfrak{H}$-formation, for In this case:*

(1) *every τ-closed $\mathfrak{H}$-subformation of $\mathfrak{F}$ is contained in $\mathfrak{M} \vee_l^\tau (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{H})$;*

(2) *every τ-closed local subformation $\mathfrak{X}$ of $\mathfrak{F}$ such that $\mathfrak{X} \not\subseteq \mathfrak{H}$ has the form $\mathfrak{L} \vee_l^\tau (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{H})$.*

If τ is a trivial subgroup functor, then

Corollary 4.17. *Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be local formations such that $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$. If and only if the $\mathfrak{H}_l$-defect of the formation $\mathfrak{F}$ is* 1, *when $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{L}$, where $\mathfrak{M}$ is a local subformation of $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}$ is the minimal local not $\mathfrak{H}$ is a formation, and:*

(1) *every $\mathfrak{H}$-subformation of $\mathfrak{F}$ is contained in $\mathfrak{M} \vee_l (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{H})$;*

(2) *every local subformation $\mathfrak{X}$ of $\mathfrak{F}$ such that $\mathfrak{X} \not\subseteq \mathfrak{H}$ has the form $\mathfrak{L} \vee_l (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{H})$.*

Furthermore, if $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$ is the formation of all nilpotent groups from Theorem 4.12, we obtain the following well-known result.

Corollary 4.18 [1, Lemma 20.5]. *Then precisely the nilpotent defect of a local formation $\mathfrak{F}$ is equal to* 1 *when $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{L}$, where $\mathfrak{M}$ is a nilpotent local formation, $\mathfrak{L}$ is a minimal local non-nilpotent formation, and:*

(1) *every nilpotent subformation of $\mathfrak{F}$ is contained in $\mathfrak{M} \vee_l (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{N})$;*

(2) *every non-nilpotent local subformation $\mathfrak{X}$ of $\mathfrak{F}$ has the form $\mathfrak{L} \vee_l (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N})$.*

Theorem 4.19. *Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be τ-closed σ-local formations such that $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$. Then if $\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$, then the following conditions are equivalent:*

(1) $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma^\tau = 1$;

(2) *in $\mathfrak{F}$ each of its τ-closed σ-local non-$\mathfrak{H}$-subformation is complemented;*

(3) *in $\mathfrak{F}$ each of its τ-closed σ-local subformations $\mathfrak{M}$ with $|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma^\tau = 1$ is complemented.*

Proof. Let (1) hold and $\mathfrak{M}$ is a τ-closed σ-local subformation of $\mathfrak{F}$. Then if $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{H}$, then by Theorem 4.12 we have $\mathfrak{M} = \mathfrak{L} \vee_\sigma^\tau (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$, where $\mathfrak{L}$ is the minimal τ-closed σ-local not $\mathfrak{H}$-formation. Let $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$, $\Pi_1 = \sigma(\mathfrak{M})$ and $\Pi_2 = \Pi \setminus \Pi_1$. We show that $\mathfrak{N}_{\Pi_2}$ is the complement of $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{F}$. It is clear that $\mathfrak{N}_{\Pi_2} \cap \mathfrak{M} = (1)$. We show that $\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}_{\Pi_2}) = \mathfrak{F}$.

By Theorem 4.12 we have $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{M}_1$, where $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. On the other hand,

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{L} \vee_\sigma^\tau (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{L} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{N}_{\Pi_1},$$

because $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_{\Pi_1}$. Now in force Lemmas 2.14 and 2.5 we have

$$\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}_{\Pi_2}) = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}_{\Pi_2} = \mathfrak{M} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{N}_{\Pi_2} = (\mathfrak{L} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{N}_{\Pi_1}) \vee_\sigma^\tau \mathfrak{N}_{\Pi_2} = \mathfrak{L} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{N}_\Pi = \mathfrak{F}.$$

Thus, the formation $\mathfrak{N}_{\Pi_2}$ is the complement of $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{F}$.

Clearly, if assertion (2) holds, then assertion (3) holds, since any τ-closed σ-local subformation of $\mathfrak{M}$ with $|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma^\tau = 1$ is not an $\mathfrak{H}$-subformation of $\mathfrak{F}$.

Now let (3) hold. We will show that condition (1) is satisfied. By the hypothesis of the theorem, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Therefore, by Lemma 2.4, $\mathfrak{F}$ has a minimal τ-closed σ-local non-$\mathfrak{H}$-formation $\mathfrak{L}$. Let $\mathfrak{M} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ and $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{M} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{L}$. By Theorem 4.12, we have $|\mathfrak{F}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma^\tau = 1$.

Therefore, by the hypothesis of the theorem, $\mathfrak{F}$ contains a subformation $\mathfrak{M}_1$ such that $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{F}_1 = (1)$ and $\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{M}_1)$. Now applying Lemmas 2.14 and 2.5, we obtain that $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{M}_1$ and the formation $\mathfrak{M}_1$ τ-closed and σ-local.

Suppose that $\mathfrak{M}_1 \neq (1)$. Then if $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{M}_1)$, then $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$ by the hypothesis of the theorem. Therefore, by Lemma 2.4(ii), the inclusions hold

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{M}_1 \cap (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{F}_1 = (1).$$

The resulting contradiction shows that $\mathfrak{M}_1 = (1)$. Therefore, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F}_1$. Therefore, $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma^\tau = 1$. □

Remark 4.20. *The condition $\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$ in Theorem 4.19 cannot be omitted, since the presence of a complement in $\mathfrak{F}$ for each of its τ-closed σ-local non- $\mathfrak{H}$-subformations, as well as the presence of a complement in $\mathfrak{F}$ for each τ-closed σ-local subformation $\mathfrak{M}$ of $\mathfrak{F}$ with $|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma^\tau = 1$ does not imply the equality $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma^\tau = 1$. Indeed, let $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ and $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{G}_{\sigma_j} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{G}_{\sigma_k}$, where $\sigma_j, \sigma_k \in \sigma \setminus \{\sigma_i\}$, $j \neq k$. Then, by Lemmas 2.5 and 2.14 we have $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{G}_{\sigma_j} \oplus \mathfrak{G}_{\sigma_k}$. By Theorem 4.1 and Lemma 3.3 we have $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma^\tau = 2$. However, as is easy to see, every τ-closed σ-local non-$\mathfrak{H}$-subformation of $\mathfrak{F}$, as well as every τ-closed σ-local subformation of $\mathfrak{F}$ with $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect 1, have complement in $\mathfrak{F}$.*

However, the following holds:

Corollary 4.21. *Let $\mathfrak{F}$ be a τ-closed σ-local non-σ-nilpotent formation. Then the following conditions are equivalent:*

(1) $|\mathfrak{F} : \mathfrak{N}_\sigma \cap \mathfrak{F}|_\sigma^\tau = 1$;

(2) *in $\mathfrak{F}$ each of its τ-closed σ-local non-σ-nilpotent subformations is complemented;*

(3) *in $\mathfrak{F}$ each of its τ-closed σ-local subformations $\mathfrak{M}$ with $|\mathfrak{M} : \mathfrak{N}_\sigma \cap \mathfrak{M}|_\sigma^\tau = 1$ is complemented.*

In particular, if $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$, from Theorem 4.19 we have

Corollary 4.22. *Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be such local formations such that $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$. Then if $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$, then the following conditions are equivalent:*

(1) $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_l = 1$;

(2) *in $\mathfrak{F}$ each of its local non- $\mathfrak{H}$-subformations is complemented;*

(3) *in $\mathfrak{F}$ each of its local subformations $\mathfrak{M}$ with $|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_l = 1$ is complemented.*

Moreover, if $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$, from Theorem 4.19 we obtain the following well-known result.

Corollary 4.23 [2, Corollary 5.2.12]. *Let $\mathfrak{F}$ be a non-nilpotent τ-closed local formation. Then the following conditions are equivalent:*

(1) $|\mathfrak{F} : \mathfrak{N} \cap \mathfrak{F}|_l^\tau = 1$;

(2) *In $\mathfrak{F}$ every non-nilpotent τ-closed local subformation is τ-complemented;*

(3) *In $\mathfrak{F}$ every τ-closed local subformation $\mathfrak{M}$ with $|\mathfrak{M} : \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}|_l^\tau = 1$ is τ-complemented.*

5. Reducible l_σ^τ-formations of bounded $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect

The main result of this section is the following theorem, which describes reducible τ-closed σ-local formations of finite $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect.

Theorem 5.1. *Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be τ-closed σ-local formations such that $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$ and let $\mathfrak{F}$ be l_σ^τ-reducible. If and only if $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect of formation $\mathfrak{F}$ is equal to k, when $\mathfrak{F}$ satisfies one of the following conditions:*

(1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{M}$, *where $\mathfrak{L}$ is an irreducible τ-closed σ-local formation $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect t, $1 \leqslant t \leqslant k-1$, and $\mathfrak{M}$ is such a τ-closed σ-local formation $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect $k-1$, such that $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$ is the maximal τ-closed σ-local subformation of the formation $\mathfrak{L}$;*

(2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{M}$, *where $\mathfrak{L}$ is an irreducible τ-closed σ-local formation $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect k, $\mathfrak{M}$ is such τ-closed σ-local formation such that $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ and $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{L}$.*

Proof. Sufficiency. Let $\mathfrak{F}$ satisfy condition (1). Since $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$ is the unique maximal τ-closed σ-local subformation of $\mathfrak{L}$, it follows that $|\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M})|_\sigma^\tau = t-1$. Therefore, by Lemma 3.3 we have

$$|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma^\tau = |\mathfrak{L} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}|_\sigma^\tau + |\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma^\tau - |\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M})|_\sigma^\tau = t + k - 1 - (t-1) = k.$$

Now let the formation $\mathfrak{F}$ satisfy condition (2). Then by Lemma 3.3 we get

$$|\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}|_{\sigma}^{\tau}=|\mathfrak{L}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{L}|_{\sigma}^{\tau}+|\mathfrak{M}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}|_{\sigma}^{\tau}-|\mathfrak{L}\cap\mathfrak{M}:\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{L}\cap\mathfrak{M})|_{\sigma}^{\tau}=k+0-0=k.$$

Thus, we have $|\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}|_{\sigma}^{\tau}=k$.

Necessity. We prove the necessity by induction on k. Let $k=1$ and $\mathfrak{F}$ be a τ-closed σ-local formation with $\mathfrak{H}_{\sigma}^{\tau}$-defect 1. Since $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{H}$, then by Theorem 4.8 $\mathfrak{F}$ contains some minimal τ-closed σ-local not $\mathfrak{H}$ is a subformation of $\mathfrak{L}$. Since the $\mathfrak{H}_{\sigma}^{\tau}$-defect of $\mathfrak{F}$ is 1, $\mathfrak{M}=\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ is the maximal τ-closed σ-local subformation of $\mathfrak{F}$. Therefore, $\mathfrak{F}=\mathfrak{L}\vee_{\sigma}^{\tau}\mathfrak{M}$ and the formation $\mathfrak{F}$ satisfies condition (2) of the theorem.

Let $k>1$ and assume that the theorem holds for $k-1$. Let $\mathfrak{M}$ denote the maximal τ-closed σ-local subformation of $\mathfrak{F}$ whose $\mathfrak{H}_{\sigma}^{\tau}$-deficit is $k-1$.

Suppose that in $\mathfrak{F}$ there exists an irreducible τ-closed σ-local subformation $\mathfrak{X}$ such that $\mathfrak{X}\not\subseteq\mathfrak{M}$ and $1\leqslant|\mathfrak{X}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{X}|_{\sigma}^{\tau}\leqslant k-1$. Then $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_{\sigma}^{\tau}\mathfrak{X}$. Let $t=|\mathfrak{X}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{X}|_{\sigma}^{\tau}$. If $t=1$, then $\mathfrak{X}\cap\mathfrak{H}$ is the unique maximal τ-closed σ-local subformation of $\mathfrak{X}$. Since $\mathfrak{M}$ is maximal, we have $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H}=\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$. Therefore, $\mathfrak{X}\cap\mathfrak{H}=\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H}$. Therefore, $\mathfrak{X}\cap\mathfrak{M}=\mathfrak{X}\cap\mathfrak{H}$ and the formation $\mathfrak{F}$ satisfies condition (1) of the theorem.

Now let $2\leqslant t\leqslant k-1$ and let any irreducible τ-closed σ-local subformation of $\mathfrak{F}$ with $\mathfrak{H}_{\sigma}^{\tau}$-defect less than t be contained in $\mathfrak{M}$. Let $\mathfrak{X}_1$ be a maximal τ-closed σ-local subformation of $\mathfrak{X}$ such that $|\mathfrak{X}_1:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{X}_1|_{\sigma}^{\tau}=t-1$. If $\mathfrak{X}_1$ is l_{σ}^{τ}-irreducible, then by assumption $\mathfrak{X}_1\subseteq\mathfrak{M}$. Therefore, $\mathfrak{X}\cap\mathfrak{M}=\mathfrak{X}_1$ and $\mathfrak{F}$ satisfies condition (1) of the theorem.

Let $\mathfrak{X}_1$ be a reducible τ-closed σ-local formation. Since $t-1<k-1$, then by the induction hypothesis for the formation $\mathfrak{X}_1$ the theorem is true. Therefore, the formation $\mathfrak{X}_1$ satisfies one of the following conditions:

(a) $\mathfrak{X}_1=\mathfrak{L}_1\vee_{\sigma}^{\tau}\mathfrak{M}_1$, where $\mathfrak{L}_1$ is an irreducible τ-closed σ-local formation and $|\mathfrak{L}_1:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{L}_1|_{\sigma}^{\tau}=s$, $1\leqslant s\leqslant k-2$, and $\mathfrak{M}_1$ is a τ-closed σ-local formation such that $|\mathfrak{M}_1:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}_1|_{\sigma}^{\tau}=k-2$ and $\mathfrak{L}_1\cap\mathfrak{M}_1$ is the maximal τ-closed σ-local subformation of the formation $\mathfrak{L}_1$;

(b) $\mathfrak{X}_1=\mathfrak{L}_1\vee_{\sigma}^{\tau}\mathfrak{M}_1$, where $\mathfrak{M}_1\subseteq\mathfrak{H}$, and $\mathfrak{L}_1$ is an irreducible τ-closed σ-local formation such that $|\mathfrak{L}_1:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{L}_1|_{\sigma}^{\tau}=k-1$ and $\mathfrak{M}_1\not\subseteq\mathfrak{L}_1$.

Let (b) hold. Then, by assumption, $\mathfrak{L}_1\subseteq\mathfrak{M}$. Moreover, since $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H}=\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$, we have $\mathfrak{M}_1\subseteq\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{X}_1=\mathfrak{L}_1\vee_{\sigma}^{\tau}\mathfrak{M}_1\subseteq\mathfrak{M}$. Consequently, $\mathfrak{X}\cap\mathfrak{M}=\mathfrak{X}_1$ and the formation $\mathfrak{F}$ satisfies condition (1) of the theorem.

Now let (a) hold. If the formation $\mathfrak{M}_1$ is l_{σ}^{τ}-irreducible, then by assumption the formations $\mathfrak{M}_1$ and $\mathfrak{L}_1$ must be contained in $\mathfrak{M}$. Therefore, $\mathfrak{X}\cap\mathfrak{M}=\mathfrak{X}_1$ and the formation $\mathfrak{F}$ satisfies condition (1) of the theorem.

If the formation l_{σ}^{τ}-reducible, then by induction the theorem holds for it. Repeating the above arguments for $\mathfrak{M}_1$ and so on, after a finite number of steps (since the $\mathfrak{H}_{\sigma}^{\tau}$-defect of the formations under consideration is finite and strictly decreasing), we obtain that $\mathfrak{X}\cap\mathfrak{M}=\mathfrak{X}_1$. Therefore, the formation $\mathfrak{F}$ satisfies condition (1) of the theorem.

Now suppose that every irreducible τ-closed σ-local subformation of $\mathfrak{F}$ with $\mathfrak{H}$-defect less than k is contained in $\mathfrak{M}$. Since $\mathfrak{F}$ is a reducible τ-closed σ-local formation, it follows that $\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{M}$ contains a group G such that $\mathfrak{L}=l_{\sigma}^{\tau}\mathrm{form}(G)\neq\mathfrak{F}$. Then $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_{\sigma}^{\tau}\mathfrak{L}$. By Lemma 3.2 we have $d=|\mathfrak{L}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{L}|_{\sigma}^{\tau}\leqslant k$. Assume that $d<k$.

If $\mathfrak{L}$ is l_{σ}^{τ}-irreducible, then by assumption $\mathfrak{L}\subseteq\mathfrak{M}$, which is impossible. This means that $\mathfrak{L}$ is a reducible τ-closed σ-local formation. But then, by induction, the theorem holds for the formation $\mathfrak{L}$. Given the assumption of irreducible τ-closed σ-local subformations with $\mathfrak{H}_{\sigma}^{\tau}$-defect less than k, and the fact that $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}=\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H}$, we again conclude that $\mathfrak{L}\subseteq\mathfrak{M}$. A contradiction. Therefore, $d=k$.

Let $\mathfrak{D}$ be an irreducible τ-closed σ-local subformation of $\mathfrak{M}$ such that $\mathfrak{D}\not\subseteq\mathfrak{L}$. By Lemma 3.2, we have $m=|\mathfrak{D}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{D}|_{\sigma}^{\tau}\leqslant k$. Since the formations $\mathfrak{L}$ and $\mathfrak{D}$ are contained in $\mathfrak{F}$, we have $\mathfrak{K}=\mathfrak{L}\vee_{\sigma}^{\tau}\mathfrak{D}\subseteq\mathfrak{F}$ and by Lemma 3.2 we have $d=|\mathfrak{K}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{K}|_{\sigma}^{\tau}\leqslant k$.

On the other hand, by Lemma 3.5 we have the equality

$$d=k+m-b,\ \text{where } b=|\mathfrak{L}\cap\mathfrak{D}:\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{L}\cap\mathfrak{D})|_{\sigma}^{\tau}.$$

Since $\mathfrak{D}\not\subseteq\mathfrak{L}$, then $b\leqslant m-1$. Therefore, $a\geqslant k+m-(m-1)=k+1$. Contradiction. Thus, any irreducible τ-closed σ-local subformation of $\mathfrak{M}$ is contained in $\mathfrak{L}$. Therefore, if $\mathfrak{M}$ is an irreducible τ-closed σ-local formation, then $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{L}$. But then $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_{\sigma}^{\tau} \mathfrak{M} = \mathfrak{L}$, which contradicts the definition of the formation $\mathfrak{L}$. Therefore, the formation $\mathfrak{M}$ is l_{σ}^{τ}-reducible.

Suppose that $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Since $|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_{\sigma}^{\tau} = k-1$, then by induction the theorem is true for the formation $\mathfrak{M}$. Therefore, the formation $\mathfrak{M}$ can be represented as (a) or (b). Given that every irreducible τ-closed σ-local non- $\mathfrak{H}$-subformation of $\mathfrak{M}$ is contained in $\mathfrak{L}$, we obtain that $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{L}$. A contradiction. Thus, $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Since $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, it follows that $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \nsubseteq \mathfrak{L} \cap \mathfrak{H}$.

Let $\mathfrak{L}$ be an irreducible τ-closed σ-local formation. Then, using the representation of the formation $\mathfrak{M}$ in the form (a) or (b) and taking into account that any irreducible τ-closed σ-local formation with $\mathfrak{H}_{\sigma}^{\tau}$-defect less than k is contained in $\mathfrak{L}$ we obtain that $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_{\sigma}^{\tau} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$. Thus, the formation $\mathfrak{F}$ satisfies condition (2) of the theorem.

Now let $\mathfrak{L}$ be a reducible τ-closed σ-local formation. Then, since $\mathfrak{L} \nsubseteq \mathfrak{M}$, by Theorem 4.8, $\mathfrak{L}$ contains at least one $\mathfrak{M}_{\sigma}^{\tau}$-critical formation $\mathfrak{X}$. Since any irreducible τ-closed σ-local formation with $\mathfrak{H}_{\sigma}^{\tau}$-defect less than k is contained in $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, it follows that $|\mathfrak{X} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}|_{\sigma}^{\tau} = k$. Note also that any irreducible τ-closed σ-local formation in $\mathfrak{L}$ with $\mathfrak{H}_{\sigma}^{\tau}$-defect less than k is contained in $\mathfrak{X}$, since otherwise the formation $\mathfrak{F}$ would contain an l_{σ}^{τ}-subformation with $\mathfrak{H}_{\sigma}^{\tau}$-defect greater than k, which is impossible in view of Lemma 3.1. Since the formation $\mathfrak{M}$ is maximal, we have $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{\sigma}^{\tau} \mathfrak{X}$. Since $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \nsubseteq \mathfrak{L} \cap \mathfrak{H}$, then $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \nsubseteq \mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}$. Therefore, given the representation of the formation $\mathfrak{M}$ in form (a) or (b), we have $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{\sigma}^{\tau} \mathfrak{X} = \mathfrak{X} \vee_{\sigma}^{\tau} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$.

Thus, the formation $\mathfrak{F}$ satisfies condition (2) of the theorem. □

In the case where $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\sigma}$, we obtain the following special case of Theorem 5.1.

Corollary 5.2. *Let $\mathfrak{F}$ be a reducible τ-closed σ-local formation. If and only if the σ-nilpotent l_{σ}^{τ}-defect of a formation $\mathfrak{F}$ is equal to k when $\mathfrak{F}$ satisfies one of the following conditions:*

(1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_{\sigma}^{\tau} \mathfrak{M}$, *where $\mathfrak{L}$ is an irreducible τ-closed σ-local formation of σ-nilpotent l_{σ}^{τ}-defect t, $1 \leqslant t \leqslant k-1$, and $\mathfrak{M}$ is such τ-closedσ-local formation of σ-nilpotent l_{σ}^{τ}-defect $k-1$, such that $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$ is the maximal τ-closed σ-local subformation of $\mathfrak{L}$;*

(2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_{\sigma}^{\tau} \mathfrak{M}$, *where $\mathfrak{L}$ is an irreducible τ-closed σ-local formation of σ-nilpotent l_{σ}^{τ}-defect k, $\mathfrak{M}$ is a τ-closed σ-local formation such that $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ and $\mathfrak{M} \nsubseteq \mathfrak{L}$.*

In particular, if $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ from Theorem 5.1 we obtain

Corollary 5.3. *Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be τ-closed local formations such that $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$ and let $\mathfrak{F}$ be reducible. If and only if the $\mathfrak{H}_l$-defect of a formation $\mathfrak{F}$ is equal to k when $\mathfrak{F}$ satisfies one of the following conditions:*

(1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_l \mathfrak{M}$, *where $\mathfrak{L}$ is an irreducible τ-closed local formation of $\mathfrak{H}_l$-defect t, $1 \leqslant t \leqslant k-1$, and $\mathfrak{M}$ is a τ-closed local formation $\mathfrak{H}_l$-defect $k-1$ such that $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$ is the maximal τ-closed local subformation of $\mathfrak{L}$;*

(2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_l \mathfrak{M}$, *where $\mathfrak{L}$ is an irreducible τ-closed local formation of $\mathfrak{H}_l$-defect k, $\mathfrak{M}$ is a τ-closed local formation such that $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ and $\mathfrak{M} \nsubseteq \mathfrak{L}$.*

Moreover, if $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$ is the formation of all nilpotent groups from Theorem 5.1, we obtain the following well-known result.

Corollary 5.4 [27]. *Let $\mathfrak{F}$ be a reducible τ-closed local formation. If and only if the nilpotent l^{τ}-defect of a formation $\mathfrak{F}$ is equal to k when $\mathfrak{F}$ satisfies one of the following conditions:*

(1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_l \mathfrak{M}$, *where $\mathfrak{L}$ is an irreducible τ-closed local formation of nilpotent l^{τ}-defect t, $1 \leqslant t \leqslant$ $\leqslant k-1$, and $\mathfrak{M}$ is a τ-closed local formation of nilpotent l^{τ}-defect $k-1$ such that $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$ is a maximal τ-closed local subformation of $\mathfrak{L}$;*

(2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_l \mathfrak{M}$, *where $\mathfrak{L}$ is an irreducible τ-closed local formation of nilpotent l^{τ}-defect k, $\mathfrak{M}$ is a τ-closed local formation such that $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ and $\mathfrak{M} \nsubseteq \mathfrak{L}$.*

Let $\mathfrak{F}$ – τ-closed σ-local formation. Following [2, p. 212], *l_{σ}^{τ}-length* of $\mathfrak{F}$ we define the number $l_{\sigma}^{\tau}(\mathfrak{F}) = |\mathfrak{F} : (1)|_{\sigma}^{\tau}$.

In the case when $\mathfrak{H} = (1)$, from Theorem 5.1 we obtain the following result.

Theorem 5.5. *Let $\mathfrak{F}$ be a reducible τ-closed σ-local formation. If and only if the l_{σ}^{τ}-length of a formation $\mathfrak{F}$ is equal to k when $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_{\sigma}^{\tau} \mathfrak{M}$, where $\mathfrak{L}$ is an irreducible τ-closed σ-local formation l_{σ}^{τ}-length t, $1 \leqslant t \leqslant k-1$, and $\mathfrak{M}$ is a τ-closed σ-local formation l_{σ}^{τ}-length $k-1$, such that $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$ is maximal τ-closed σ-local subformation of $\mathfrak{L}$.*

If τ is a trivial subgroup functor, then from Theorem 5.5 we obtain

Corollary 5.6. *Let $\mathfrak{F}$ be a reducible σ-local formation. If and only if the l_σ-length of a formation $\mathfrak{F}$ is k when $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{M}$, where $\mathfrak{L}$ is an irreducible σ-local formation of l_σ-length t, $1 \leqslant t \leqslant k-1$, and $\mathfrak{M}$ is a σ-local formation of l_σ-length $k-1$, such that $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$ is a maximal σ-local subformation of $\mathfrak{L}$.*

Let $\tau = s$ is the identity subgroup functor. Then Theorem 5.5 implies

Corollary 5.7. *Let $\mathfrak{F}$ be a reducible hereditary σ-local formation. If and only if the l_σ^s-length of a formation $\mathfrak{F}$ is equal to k when $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma^s \mathfrak{M}$, where $\mathfrak{L}$ is an irreducible hereditary σ-local formation of l_σ^s-length t, $1 \leqslant t \leqslant k-1$, and $\mathfrak{M}$ is a hereditary σ-local formation of l_σ^s-length $k-1$, such that $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$ is a maximal hereditary σ-local subformation of the formation $\mathfrak{L}$.*

In the case where $\tau = s_n$ from Theorem 5.5 we have

Corollary 5.8. *Let $\mathfrak{F}$ be a reducible normally hereditary σ-local formation. If and only if the $l_\sigma^{s_n}$-length of a formation $\mathfrak{F}$ is equal to k when $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma^{s_n} \mathfrak{M}$, where $\mathfrak{L}$ is an irreducible normally hereditary σ-local formation $l_\sigma^{s_n}$-length t, $1 \leqslant t \leqslant k-1$, and $\mathfrak{M}$ is a normally hereditary σ-local formation $l_\sigma^{s_n}$-length $k-1$, such that $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$ is a maximal normally hereditary formation σ-local subformation of $\mathfrak{L}$.*

In particular, if $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\{5\},\ldots\}$ from Theorem 5.5 we have

Corollary 5.9. *Let $\mathfrak{F}$ be a reducible τ-closed local formation. If and only if the l^τ-length of a formation $\mathfrak{F}$ is equal to k when $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_l \mathfrak{M}$, where $\mathfrak{L}$ is an irreducible τ-closed local formation of l^τ-length t, $1 \leqslant t \leqslant k-1$, and $\mathfrak{M}$ is a τ-closed local formation of l^τ-length $k-1$ such that $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$ is a maximal τ-closed local subformation of $\mathfrak{L}$.*

6. Reducible τ-closed σ-local formations of $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect 2

In this section, using Theorem 5.1, we give a description of reducible τ-closed σ-local formations with $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect 2, and also consider some special cases and consequences of the following main result of this section.

Theorem 6.1. *Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be τ-closed σ-local formations such that $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$ and let $\mathfrak{F}$ be l_σ^τ-reducible. If and only if $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect of a formation $\mathfrak{F}$ is 2 when $\mathfrak{F}$ satisfies one of the following conditions:*

(1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L}_1 \vee_\sigma^\tau \mathfrak{L}_2 \vee_\sigma^\tau \mathfrak{M}$, *where $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, and $\mathfrak{L}_1$ and $\mathfrak{L}_2$ are distinct minimal τ-closed σ-local non-$\mathfrak{H}$-formations;*

(2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{M}$, *where $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, and $\mathfrak{L}$ is an irreducible τ-closed σ-local formation $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect of 2, $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{L}$.*

Proof. By Theorem 5.1, one of the following conditions holds for $\mathfrak{F}$:

(1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{M}$, where $\mathfrak{L}$ is an irreducible τ-closed σ-local formation $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect 1, and $\mathfrak{M}$ is a τ-closed σ-local formation $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect 1 such that $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$ is a maximal τ-closed σ-local subformation of $\mathfrak{L}$;

(2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{M}$, where $\mathfrak{L}$ is an irreducible τ-closed σ-local formation $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect 2, $\mathfrak{M}$ is a τ-closed σ-local formation such that $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ and $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{L}$.

Let $\mathfrak{F}$ be a formation satisfying condition (1). Since $\mathfrak{L}$ is an irreducible τ-closed σ-local formation of $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-defect 1, $\mathfrak{L}$ is the minimal τ-closed σ-local non- $\mathfrak{H}$-formation. Moreover, since $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$ is the maximal τ-closed σ-local subformation of $\mathfrak{L}$, it follows that $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. By Theorem 4.12 we have $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \vee_\sigma^\tau \mathfrak{L}_1$, where $\mathfrak{M}_1$ is a τ-closed σ-local subformation of $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}_1$ is the minimal τ-closed σ-local non- $\mathfrak{H}$-formation. Note also that since $\mathfrak{L} \not\subseteq \mathfrak{M}$, then $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{L}_1$. Means,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{M} = \mathfrak{L} \vee_\sigma^\tau (\mathfrak{M}_1 \vee_\sigma^\tau \mathfrak{L}_1) = \mathfrak{L} \vee_\sigma^\tau \mathfrak{L}_1 \vee_\sigma^\tau \mathfrak{M}_1,$$

where $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$, a $\mathfrak{L}$ and $\mathfrak{L}_1$ are distinct minimal τ-closed σ-local non- $\mathfrak{H}$-formations. Thus, the formation $\mathfrak{F}$ satisfies condition (1) of the theorem.

If condition (2) holds for $\mathfrak{F}$, then $\mathfrak{F}$ obviously satisfies condition (2) of the theorem. □

Theorem 6.1 has many different special cases and consequences for specific subgroup functors τ, formations $\mathfrak{H}$, and partitions σ. Let us consider some of them.

Thus, if $\tau = s$ is the identity subgroup functor, then the following holds.

Corollary 6.2. *Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be hereditary σ-local formations such that $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$ and let $\mathfrak{F}$ be an l_σ^s-reducible formation. If and only if $\mathfrak{H}_\sigma^s$-defect of a formation $\mathfrak{F}$ is 2 when $\mathfrak{F}$ satisfies one of the following conditions:*

(1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L}_1 \vee^s_\sigma \mathfrak{L}_2 \vee^s_\sigma \mathfrak{M}$, *where* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, *and* $\mathfrak{L}_1$ *and* $\mathfrak{L}_2$ *are distinct minimal s-closed* σ*-local non-*$\mathfrak{H}$*-formations;*

(2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee^\tau_\sigma \mathfrak{M}$, *where* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, *and* $\mathfrak{L}$ *is an irreducible* τ*-closed* σ*-local formation* $\mathfrak{H}^s_\sigma$*-defect of* 2, $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{L}$.

If $\tau(G) = s_n(G)$ is the set of all normal subgroups of G for any group G, then we obtain the following statement.

Corollary 6.3. *Let* $\mathfrak{F}$ *and* $\mathfrak{H}$ *be normally hereditary* σ*-local formations such that* $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$ *and let* $\mathfrak{F}$ *be* $l^{s_n}_\sigma$*-reducible. If and only if* $\mathfrak{H}^{s_n}_\sigma$*-defect of a formation* $\mathfrak{F}$ *is* 2 *when* $\mathfrak{F}$ *satisfies one of the following conditions:*

(1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L}_1 \vee^{s_n}_\sigma \mathfrak{L}_2 \vee^{s_n}_\sigma \mathfrak{M}$, *where* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, *and* $\mathfrak{L}_1$ *and* $\mathfrak{L}_2$ *are distinct minimal* s_n*-closed* σ*-local non-*$\mathfrak{H}$*-formations;*

(2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee^{s_n}_\sigma \mathfrak{M}$, *where* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, *and* $\mathfrak{L}$ *is an irreducible* s_n*-closed* σ*-local formation* $\mathfrak{H}^{s_n}_\sigma$*-defect of* 2, $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{L}$.

In the case where $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\sigma$, we obtain the following special case of Theorem 6.1.

Theorem 6.4. *Let* $\mathfrak{F}$ *be an* l^τ_σ*-reducible* τ*-closed* σ*-local formation. If and only if the* σ*-nilpotent* l^τ_σ*-defect of a formation* $\mathfrak{F}$ *is* 2 *when* $\mathfrak{F}$ *satisfies one of the following conditions:*

(1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L}_1 \vee^\tau_\sigma \mathfrak{L}_2 \vee^\tau_\sigma \mathfrak{M}$, *where* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$, *and* $\mathfrak{L}_1$ *and* $\mathfrak{L}_2$ *are distinct minimal* τ*-closed* σ*-local non-*σ*-nilpotent formations;*

(2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee^\tau_\sigma \mathfrak{M}$, *where* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$, *and* $\mathfrak{L}$ *is an irreducible* τ*-closed* σ*-local formation with* σ*-nilpotent* l^τ_σ*-defect equal to* 2, $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{L}$.

In the case where $\tau = s$ is the identity subgroup functor, Theorem 6.4 implies

Corollary 6.5. *Let* $\mathfrak{F}$ *be an* l^s_σ*-reducible hereditary* σ*-local formation. If and only if the* σ*-nilpotent* l^s_σ*-defect of a formation* $\mathfrak{F}$ *is* 2 *when* $\mathfrak{F}$ *satisfies one of the following conditions:*

(1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L}_1 \vee^s_\sigma \mathfrak{L}_2 \vee^s_\sigma \mathfrak{M}$, *where* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$, *and* $\mathfrak{L}_1$ *and* $\mathfrak{L}_2$ *are distinct minimal s-closed* σ*-local non-*σ*-nilpotent formations;*

(2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee^s_\sigma \mathfrak{M}$, *where* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$, *and* $\mathfrak{L}$ *is an irreducible s-closed* σ*-local formation* $\mathfrak{H}^s_\sigma$*-defect of* 2, $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{L}$.

If $\tau(G) = s_n(G)$, then from Theorem 6.4 we obtain

Corollary 6.6. *Let* $\mathfrak{F}$ *be an* $l^{s_n}_\sigma$*-reducible, non-*σ*-nilpotent normally hereditary* σ*-local formation. If and only if the* σ*-nilpotent* $l^{s_n}_\sigma$*-defect of a formation* $\mathfrak{F}$ *is* 2 *when* $\mathfrak{F}$ *satisfies one of the following conditions:*

(1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L}_1 \vee^{s_n}_\sigma \mathfrak{L}_2 \vee^{s_n}_\sigma \mathfrak{M}$, *where* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$, *and* $\mathfrak{L}_1$ *and* $\mathfrak{L}_2$ *are distinct minimal* s_n*-closed* σ*-local non-*σ*-nilpotent formations;*

(2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee^{s_n}_\sigma \mathfrak{M}$, *where* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$, *and* $\mathfrak{L}$ *is an irreducible* τ*-closed* σ*-local formation* $\mathfrak{H}^{s_n}_\sigma$*-defect of* 2, $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{L}$.

In the classical case, when $\sigma = \sigma^1$, from Theorem 6.4 we obtain

Corollary 6.7 [2, Theorem 5.2.19]. *Let* $\mathfrak{F}$ *be a reducible* τ*-closed local formation. Then the nilpotent* l^τ*-defect of a formation* $\mathfrak{F}$ *is equal to* 2 *if and only if one of the following conditions holds:*

(1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L}_1 \vee^\tau_l \mathfrak{L}_2 \vee^\tau_l \mathfrak{M}$, *where* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, *and* $\mathfrak{L}_1$ *and* $\mathfrak{L}_2$ *are distinct minimal* τ*-closed local non-nilpotent formations;*

(2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee^\tau_l \mathfrak{M}$, *where* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, *and* $\mathfrak{L}$ *is a* τ^l*-irreducible* τ*-closed local formation with nilpotent* l^τ*-defect equal to* 2, $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{L}$.

If, in addition, τ is a trivial subgroup functor, then we have

Corollary 6.8 [1, Theorem 20.6]. *Let* $\mathfrak{F}$ *be a reducible local formation. Then the nilpotent defect of a formation* $\mathfrak{F}$ *is equal to* 2 *if and only if* $\mathfrak{F}$ *satisfies one of the following conditions:*

(1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L}_1 \vee_l \mathfrak{L}_2 \vee_l \mathfrak{M}$, *where* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, *and* $\mathfrak{L}_1$ *and* $\mathfrak{L}_2$ *are distinct minimal local non-nilpotent formations;*

(2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee^\tau_l \mathfrak{M}$, *where* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, *and* $\mathfrak{L}$ *is an irreducible local formation with nilpotent defect* 2, $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{L}$.

7. τ-Closed σ-local formations of l^{τ}_{σ}-length $\leqslant 3$

Let $\mathfrak{F}$ be a τ-closed σ-local formation. Following [2, p. 212], an *l^{τ}_{σ}-length* of a formation $\mathfrak{F}$ we define the number $l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{F}) = |\mathfrak{F} : (1)|^{\tau}_{\sigma}$.

In this section, we apply Theorem 4.2 to describe τ-closed σ-local formations with l^{τ}_{σ}-length $\leqslant 3$.

Lemma 7.1. *Let $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{F}_k$, where $\mathfrak{F}_j$ is a non-identity τ-closed σ-local formation with $l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{F}_j) = m_j < \infty$. Then $l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{F}) = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$. In particular, if $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma}$ and $|\sigma(\mathfrak{F})| < \infty$, then $l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{F}) = |\sigma(\mathfrak{F})|$.*

Proof. We prove the lemma by induction on k. For $k = 1$, the lemma is true. Now let $k \geqslant 1$ and assume that the lemma is true for $k-1$. Then, by induction, for the formation $\mathfrak{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{F}_{k-1}$ we have $l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{F}_{k-1}) = m_1 + m_2 + \cdots + m_{k-1}$. By Lemma 2.13, the lattice isomorphism

$$\mathfrak{F}/\mathfrak{F}_k = \mathfrak{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{F}_k /^{\tau}_{\sigma} \mathfrak{F}_k = ((\mathfrak{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{F}_{k-1}) \vee^{\tau}_{\sigma} \mathfrak{F}_k)/^{\tau}_{\sigma} \mathfrak{F}_k \simeq$$

$$\simeq \mathfrak{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{F}_{k-1} /^{\tau}_{\sigma} (\mathfrak{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{F}_{k-1} \cap \mathfrak{F}_k) = \mathfrak{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{F}_{k-1} /^{\tau}_{\sigma} (1).$$

Therefore, $l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{F}) = l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{F}_{k-1}) + l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{F}_k) = (m_1 + m_2 + \cdots + m_{k-1}) + m_k$.

In particular, if the formation $\mathfrak{F}$ is σ-nilpotent and $|\sigma(\mathfrak{F})| < \infty$, then $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_{i_1}} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{G}_{\sigma_{i_t}}$, where $\{\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_t}\} = \sigma(\mathfrak{F})$. Therefore, from the first part of the lemma, we obtain $l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{F}) = |\sigma(\mathfrak{F})|$. □

Lemma 7.2. *Every τ-closed σ-local formation of l^{τ}_{σ}-length 2 is reducible.*

Proof. Let $\mathfrak{F}$ be an irreducible τ-closed σ-local formation. Assume that the l^{τ}_{σ}-length of $\mathfrak{F}$ is 2. Since $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_{\sigma} = \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F})}$ by Lemma 3.5, it follows that $|\sigma(\mathfrak{F})| = l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F})})$ by Lemma 7.1. Clearly, $|\sigma(\mathfrak{F})| > 1$. Since the formation $\mathfrak{F}$ is l^{τ}_{σ}-irreducible, it follows that $\mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F})} \subset \mathfrak{F}$. Therefore, $\mathfrak{F}$ contains a proper τ-closed σ-local subformation of l^{τ}_{σ}-length $\geqslant 2$. This contradicts Lemma 3.2. □

Lemma 7.3. *Let $\mathfrak{F}$ be a τ-closed σ-local formation. If $\mathfrak{F}$ is an l^{τ}_{σ}-irreducible formation of l^{τ}_{σ}-length 3, then $|\sigma(\mathfrak{F})| = 2$.*

Proof. Let $\mathfrak{F}$ be an l^{τ}_{σ}-irreducible formation of l^{τ}_{σ}-length 3 and $\mathfrak{M}$ be its unique maximal τ-closed σ-local subformation. Then $l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{M}) = 2$. Now applying Lemmas 7.2 and 7.1 we have $|\sigma(\mathfrak{M})| = 2$. Since the formation $\mathfrak{F}$ is l^{τ}_{σ}-irreducible, any proper τ-closed σ-local subformation of $\mathfrak{F}$ is contained in $\mathfrak{M}$. Therefore, $\sigma(\mathfrak{F}) = \sigma(\mathfrak{M})$. □

Theorem 7.4. *Let $\mathfrak{F}$ be a τ-closed σ-local formation. Then the following statements hold:*

(1) *$l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{F}) \leqslant 2$ if and only if $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\Pi}$, where $|\Pi| \leqslant 2$;*

(2) *$l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{F}) = 3$ if and only if $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\Pi}$, where $|\Pi| = 3$, or $\mathfrak{F}$ is a minimal τ-closed σ-local non-σ-nilpotent formation, $|\sigma(\mathfrak{F})| = 2$.*

Proof. (1) If $|\sigma(\mathfrak{F})| = 1$, then $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ for some i. Then $l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{F}) = 1$ by Lemma 7.1. Suppose that $\mathfrak{F}$ is not σ-nilpotent. Then $\mathfrak{F}$ is not a σ-primary formation, and hence there exist σ_i and σ_j such that $\sigma_i, \sigma_j \in \sigma(\mathfrak{F})$ $(i \neq j)$. By Lemma 2.4, we have $\mathfrak{G}_{\sigma_i}, \mathfrak{G}_{\sigma_j} \subseteq \mathfrak{F}$. Therefore, $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \oplus \mathfrak{G}_{\sigma_j} \subseteq \mathfrak{F}$. By Lemma 7.1 we have $l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{G}_{\sigma_i} \oplus \mathfrak{G}_{\sigma_j}) = 2$. Therefore, $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \oplus \mathfrak{G}_{\sigma_j} = \mathfrak{F}$. Contradiction. This means that (1) holds.

(2) Let $l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{F}) = 3$. If $\mathfrak{F}$ is σ-nilpotent, then $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\Pi}$, where $|\Pi| = 3$, by Lemmas 3.5 and 7.1. Suppose that $\mathfrak{F}$ is not σ-nilpotent. Then, by Theorem 4.10, $\mathfrak{F}$ has a minimal τ-closed σ-local non-σ-nilpotent subformation $\mathfrak{H}$. By Theorem 4.2, we have $|\sigma(\mathfrak{H})| \geqslant 2$. Since $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}_{\sigma} = \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{H})}$ by Lemma 3.5, it follows that $l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}_{\sigma}) \geqslant 2$. Since at the same time $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}_{\sigma}$ and $l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{F}) = 3$, then $l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}_{\sigma}) = 2$. Therefore, $l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{H}) = 3$ and $|\sigma(\mathfrak{H})| = 2$. This means $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$.

Let $\mathfrak{F}$ be either a τ-closed σ-local σ-nilpotent formation with $|\sigma(\mathfrak{F})| = 3$, or a minimal τ-closed σ-local non-σ-nilpotent formation and $|\sigma(\mathfrak{F})| = 2$. Then in the first case $l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{F}) = 3$ by Lemma 7.1. In the second case, the formation $\mathfrak{F}$ has a unique maximal τ-closed σ-local subformation $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_{\sigma}$. By Lemma 3.5, we have $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_{\sigma} = \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F})}$. Therefore, $|\sigma(\mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F})})| = 2$ and, therefore, $l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F})}) = 2$ by Lemma 7.1. But then $l^{\tau}_{\sigma}(\mathfrak{F}) = 3$. □

In particular, if is a trivial subgroup functor, then we have

Corollary 7.5. *Let $\mathfrak{F}$ be a σ-local formation. Then the following statements hold:*

(1) *$l_{\sigma}(\mathfrak{F}) \leqslant 2$ if and only if $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\Pi}$, where $|\Pi| \leqslant 2$;*

(2) *$l_{\sigma}(\mathfrak{F}) = 3$ if and only if $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\Pi}$, where $|\Pi| = 3$, or $\mathfrak{F}$ is a minimal σ-local non-σ-nilpotent formation.*

Using Theorem 4.2 from Theorem 7.4, we obtain the following description of τ-closed σ-local formations of l^τ_σ-length $\leqslant 3$.

Theorem 7.6. *Let $\mathfrak{F}$ be a τ-closed σ-local formation. Then the following statements hold:*

(1) $l^\tau_\sigma(\mathfrak{F}) \leqslant 2$ *if and only if* $\mathfrak{F} = l^\tau_\sigma \mathrm{form}\, G$, *where G is a σ-nilpotent group with* $|\sigma(G)| \leqslant 2$*;*

(2) $l^\tau_\sigma(\mathfrak{F}) = 3$ *if and only if* $\mathfrak{F} = l^\tau_\sigma \mathrm{form}\, G$, *where G is either a σ-nilpotent group with* $|\sigma(G)| = 3$, *or a simple non-σ-primary group with* $\tau(G) = \{1, G\}$ *and* $|\sigma(G)| = 2$, *or* $G = P \rtimes K$, *where* $P = C_G(P)$ *is a p-group,* $p \in \sigma_i$, *and K is a simple* σ_j*-group* $(j \neq i)$ *such that* $\tau(K) = \{1, K\}$.

Proof. Let $\mathfrak{F}$ be a τ-closed σ-local formation and $l^\tau_\sigma(\mathfrak{F}) \leqslant 3$. Then, by Theorem 7.4, one of the following statements holds for $\mathfrak{F}$: a) $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\Pi$, where $|\Pi| \leqslant 2$; b) $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\Pi$, where $|\Pi| = 3$, or $\mathfrak{F}$ is a minimal τ-closed σ-local non-σ-nilpotent formation, $|\sigma(\mathfrak{F})| = 2$.

Suppose that $\mathfrak{F}$ is σ-nilpotent, $|\sigma(\mathfrak{F})| \leqslant 3$. And let G be a σ-nilpotent group in $\mathfrak{F}$ such that $\sigma(G) = \sigma(\mathfrak{F})$. Then $l^\tau_\sigma \mathrm{form}\, G = \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F})} = \mathfrak{F}$ by Lemma 3.5.

Now let $\mathfrak{F}$ be a minimal τ-closed σ-local non-σ-nilpotent formation, $|\sigma(\mathfrak{F})| = 2$. Then, by Theorem 4.2, we have $\mathfrak{F} = l^\tau_\sigma \mathrm{form}\, G$ and one of the following conditions holds:

1) G is a simple, non-σ-primary, τ-minimal, non-$\mathfrak{G}_{\sigma_i}$-group for any $\sigma_i \in \sigma(G)$;

2) $G = P \rtimes K$, where $P = C_G(P)$ is a p-group, $p \in \sigma_i$, and K is a simple σ_j-group $(j \neq i)$ such that $\tau(K) = \{1, K\}$.

Let G satisfy condition 1). Then if $\sigma_i, \sigma_j \in \sigma(\mathfrak{F})$ and $H \in \tau(G) \setminus \{G\}$, then $H \in \mathfrak{G}_{\sigma_i} \cap \mathfrak{G}_{\sigma_j} = (1)$. Consequently, $\tau(G) = \{1, G\}$ and the group G satisfies Condition (2) of the theorem.

If Condition 2) is satisfied for G, then obviously G satisfies Condition (2) of the theorem. □

In particular, if τ is the trivial subgroup functor, then the following holds.

Corollary 7.7. *Let $\mathfrak{F}$ be a σ-local formation. Then the following statements hold:*

(1) $l_\sigma(\mathfrak{F}) \leqslant 2$ *if and only if* $\mathfrak{F} = l_\sigma \mathrm{form}\, G$, *where G is a σ-nilpotent group with* $|\sigma(G)| \leqslant 2$*;*

(2) $l_\sigma(\mathfrak{F}) = 3$ *if and only if* $\mathfrak{F} = l_\sigma \mathrm{form}\, G$, *where G is either a σ-nilpotent group with* $|\sigma(G)| = 3$, *or a simple non-σ-primary group with* $|\sigma(G)| = 2$, *or* $G = P \rtimes K$, *where* $P = C_G(P)$ *is a p-group,* $p \in \sigma_i$, *and K is a simple* σ_j*-group,* $j \neq i$.

In the classical case, when $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$ From Theorem 7.6 follows

Corollary 7.8 [2, Lemma 5.3.11]. *Let $\mathfrak{F}$ be a τ-closed local formation. Then the following statements hold:*

1) $l^\tau(\mathfrak{F}) \leqslant 2$ *if and only if $\mathfrak{F}$ is nilpotent and* $|\pi(\mathfrak{F})| \leqslant 2$*;*

2) $l^\tau(\mathfrak{F}) = 3$ *if and only if* $\mathfrak{F} = \tau^l \mathrm{form}\, G$, *where G is either a Schmidt group or a nilpotent group with* $|\pi(G)| = 3$.

The research was carried out within the framework of the State Scientific Research Program "Convergence–2025" with the financial support of the Ministry of Education of the Republic of Belarus (project 20211328).

The authors express their gratitude to the reviewer for careful reading of the article and useful comments.

References

1. Shemetkov L. A., Skiba A. N. *Formations of Algebraic Systems*. Moscow, Nauka, 1989. 255 p. (in Russian).

2. Skiba A. N. *Algebra of formations*. Minsk, Belaruskaya Navuka, 1997. 240 p. (in Russian).

3. Skiba A. N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups. *Journal of Algebra*, 2015, vol. 436, pp. 1–16. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.04.010

4. Skiba A. N. On one generalization of the local formations. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2018, no. 34(1), pp. 79–82.

5. Skiba A. N. On local formations of length 5. *Arithmetic and subgroup structure of finite groups: Proceedings of the Gomel Seminar*. Minsk, Science and Technics, 1986, pp. 135–149 (in Russian).

6. Skiba A. N.,Targonskii E. A. Classification of local formations of finite groups with nilpotent defect 2. *Mathematical Notes*, 1987, vol. 41, no. 4, pp. 490–499 (in Russian).

7. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. On one application of the theory of n-multiply σ-local formations of finite groups. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2018, no. 2(35), pp. 85–88.

8. Zhang Ch., Skiba A. N. On Σ_t^σ-closed classes of finite groups. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2019, vol. 70, no. 2, pp. 1966–1977. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01619-6

9. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. On *n*-multiply σ-local formations of finite groups. *Communications in Algebra*, 2019, vol. 47, no. 3, pp. 957–968. https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1498875

10. Tsarev A. Laws of the lattices of σ-local formations of finite groups. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2020, vol. 17, no. 3, art. 75. https://doi.org/10.1007/s00009-020-01510-w

11. Safonova I. N., Safonov V. G. On some properties of the lattice of totally σ-local formations of finite groups. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2020, no. 3, pp. 1–14. https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-6-16

12. Safonova I. N. On minimal σ-local non-$\mathfrak{H}$-formations of finite groups. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2020, no. 4(45), pp. 105–112 (in Russian).

13. Vorob'ev N. N., Stasel'ko I. I., Khodzhagulyev A. O. Separable lattices of multiply σ-local formations. *Siberian Mathematical Journal*, 2021, vol. 62, no. 4, pp. 586–597. https://doi.org/10.1134/S0037446621040029

14. Safonova I. N. Some properties of *n*-multiply σ-local formations of finite groups. *Asian-European Journal of Mathematics*, 2022, vol. 15, no. 7, art. 2250138 (12 p.). https://doi.org/10.1142/S1793557122501388

15. Safonova I. N. A criterion for σ-locality of a nonempty formation. *Communications in Algebra*, 2022, vol. 50, no. 6, pp. 2366–2376. https://doi.org/10.1080/00927872.2021.2006210

16. Safonova I. N. On properties of the lattice of all τ-closed *n*-multiply σ-local formations. *Communications in Algebra*, 2023, vol. 51, no. 10, pp. 4454–4461. https://doi.org/10.1080/00927872.2023.2210678

17. Safonova I. N. On critical σ-local formations of finite groups. *Trudy Instituta matematiki Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Belarus*, 2023, vol. 31, no. 2, pp. 63–80 (in Russian).

18. Safonova I. N. On σ-inductive lattices of *n*-multiply σ-local formations of finite groups. *Journal of Algebra and Its Applications*, 2024, vol. 23, no. 1, art. 2450017 (13 p.). https://doi.org/10.1142/S0219498824500178

19. Safonova I. N. On the τ-closedness of *n*-multiply σ-local formation. *Advances in Group Theory and Applications*, 2024, vol. 18, pp. 123–136. https://doi.org/10.32037/agta-2024-005

20. Safonova I. N. On separability of the lattice of τ-closed *n*-multiply σ-local formations. *Communications in Algebra*, 2024, vol. 52, no. 2, pp. 3309–3318. https://doi.org/10.1080/00927872.2024.2317458

21. Safonova I. N. On *n*-multiply σ-locality of a nonempty τ-closed formation of finite groups. *Trudy Instituta matematiki Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Belarus*, 2024, vol. 32, no. 1, pp. 32–38 (in Russian).

22. Safonova I. N., Skrundz V. V. On σ-local formations of finite groups with bounded $\mathfrak{H}_\sigma$-defect. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2025, no. 1(62), pp. 87–101 (in Russian).

23. Safonova I. N., Skrundz V. V. Minimal τ-closed σ-local non-$\mathfrak{H}$-formation of finite groups. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2025, vol. 69, no. 5, pp. 359–366. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2025-69-5-359-366 (in Russian).

24. Shemetkov L. A. Screens of stepped formations. *Proceedings of the VI All-Union Symposium on Group Theory*. Kyiv, Naukova Dumka, 1980, pp. 37–50 (in Russian).

25. Skiba A. N. On critical formations. *Izv. AN BSSR. Ser. phys.-math. sci.*, 1980, no. 4, pp. 27–33 (in Russian).

26. Birkhoff G. *Lattice theory*. Moscow, Nauka, 1984. 568 p. (in Russian).

27. Safonov V. G. On multiply local formations of finite groups with bounded nilpotent defect. *Voprosy algebry*, 1996, no. 9, pp. 161–175 (in Russian).

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Том 33. № 2. С. 54–72

UDC 517.98:519.21, 519.651 EDN: RXOTNQ

RUC PROPERTY FOR CHAOS OF RANDOM VARIABLES IN THE UNIFORM NORM

P. A. Slinyakov[1,2], **K. V. Lykov**[1,2]

[1]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
[2]*Belarusian State University, Minsk, Belarus*
e-mail: slinakovp@gmail.com, alkv@list.ru

Received: 09.07.2025 **Revised:** 16.09.2025 **Accepted:** 15.12.2025

Keywords: uniform norm, random unconditional convergence (RUC), Banach spaces geometry, Rademacher chaos, polynomial chaos, symmetric random variables.

Abstract. Let $X = \{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a sequence of independent symmetric bounded random variables. This paper investigates systems of the form $\{X_iX_j\}_{i<j}$, $\{X_iX_jX_k\}_{i<j<k}, \ldots$, finite unions of such systems, and systems close to them, in the space L_∞ of bounded random variables. Series over such systems do not hold the property of unconditionality: the convergence of the series depends on the ordering of the terms. At the same time, as we demonstrate in the paper, such systems posess a very close property of random unconditional convergence (or RUC-property).

СВОЙСТВО RUC ДЛЯ ХАОСА СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В РАВНОМЕРНОЙ НОРМЕ

П. А. Слиняков[1,2], **К. В. Лыков**[1,2]

[1]*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*
[2]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*
e-mail: slinakovp@gmail.com,alkv@list.ru,

Поступила: 09.07.2025 **Исправлена:** 16.09.2025 **Принята:** 15.12.2025

Ключевые слова: равномерная норма, случайная безусловная сходимость, геометрия банаховых пространств, хаос Радемахера, полиномиальный хаос, симметричные случайные величины.

Аннотация. Пусть $X = \{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность независимых симметричных и ограниченных случайных величин. В работе рассматриваются системы вида $\{X_iX_j\}_{i<j}$, $\{X_iX_jX_k\}_{i<j<k}, \ldots$, конечные объединения таких систем и близкие к ним системы в пространстве L_∞ ограниченных случайных величин. Ряды по таким системам не обладают свойством безусловности: сходимость рядов зависит от порядка, в котором нумеруются элементы системы. В то же время, как показано в работе, такие системы обладают очень бизким свойством случайной безусловной сходимости.

1. Introduction

Investigating the behavior of special sequences is a cornerstone of geometric Banach space theory [1; 2]. The properties associated with random sequences and series are particularly important [3; 4]. The simplest version of such random constructions arises by applying random signs to the terms of a series and studying norm changes of the sum under such arrangements. Another probabilistic method can be used when the Banach space itself consists of random variables, such as the Lebesgue space of measurable functions on the interval. Here, one studies sequences of independent random variables or polynomial forms from such sequences [5–11]. The independence of sequence elements allows for the application of general and strong results for sums over such terms, related to distribution estimates, moments, and limit theorems. At the same time, these sequences provide a rich source of examples and counterexamples that illuminate the geometry of the underlying space. By considering sums in Banach spaces of random variables with random coefficients, we can combine these two approaches of applying probabilistic methods to study the geometry of subspaces in such spaces.

We follow papers [12; 13], which initiated the study of sums over Rademacher chaos within the space $L_\infty[0,1]$. This space is viewed as the set of bounded random variables on the unit interval with the Lebesgue measure. The authors investigated the stability properties of norms for such sums under a random arrangement of signs. Let us recall the basic concepts and formulate some results from these works. Rademacher functions $r_k(t)$, for $t \in [0,1]$ and $k \in \mathbb{N}$, can be defined as follows:

$$r_k(t) = (-1)^{[2^k t]},\ k = 1,2,...,$$

where $[x]$ denotes the integer part of the number $[x]$. Rademacher functions are used in a large number of fundamental and applied problems[14–17]. The following fact was proved in [13]. For any $n \in \mathbb{N}$ and any real coefficients $a_{i,j}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, it holds that

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_\theta \left\| \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \theta_{ij} a_{ij} r_i r_j \right\|_{L_\infty([0,1])} &\asymp \min_{\theta_{i,j}=\pm 1} \left\| \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \theta_{ij} a_{ij} r_i r_j \right\|_{L_\infty([0,1])} \asymp \\ &\asymp \max \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}, \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}^2 \right)^{1/2} \right\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Here, $r_i = r_i(t)$ are Rademacher functions, θ_{ij} are independent signs (i. e., ± 1 valued random variables), and E_θ denotes the expectation with respect to these signs. The notation $X \asymp Y$ means that $c_1 Y \leqslant X \leqslant c_2 Y$ for some universal constants $c_1, c_2 > 0$. This result establishes *the random unconditional convergence (RUC) property* for the second-degree Rademacher chaos in L_∞ and connects its norm to one special norm of the coefficient matrix. RUC property was introduced by Billard, Kwapien, Pelczynski and Samuel in [18]. It shows that although the system may not be an unconditional basic sequence (basis), there holds a certain relaxation.

The nature of Rademacher random variables (we then use term rvs) gives the idea that results concerning it can be extended to similar random variables, such as symmetric bounded random variables. Moreover, the identical distribution of such rvs is not necessary for properties under investigation. A primary objective of this work is to extend the aforementioned L_∞-norm equivalences and the RUC property to polynomial chaos constructed from sequences $(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$ of real-valued independent symmetric random variables with $\|X_i\|_{L_\infty} = C_i > 0$. We demonstrate that these extensions hold, with the key modification being a rescaling of the chaos coefficients by the respective bounding constants C_i. In addition, the paper shows that chaoses of different degrees can be combined while maintaining the property of random unconditional convergence.

The paper is organized as follows.

In Section 2 we present general definitions, some results from previous works that we will rely on, and auxiliary statements.

In Section 3 we consider systems formed by mixing the first- and second-degree Rademacher chaos. We examine two variants of such mixing. The first, more simple variant uses three independent copies of the Rademacher sequences $\{r_k\}, \{r'_i\}, \{r'_j\}$ and examines the behavior in L_∞ of sums of the form

$$S_{\text{sep}}(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k r_k(t) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} r'_i(t) r''_j(t).$$

The index "sep" in S_{sep} means that we are considering *separated* (or *decoupled*) chaos, i. e. chaos constructed from independent copies of the original sequence of independent random variables. In the second case, we work with ordinary (or *unseparated*) Rademacher chaos, i. e., we study the behavior of sums of the form

$$S(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k r_k(t) + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij} r_i(t) r_j(t).$$

The key property that allows us to transfer the results for homogeneous chaos from papers [12; 13] to the mixed chaos we consider is the complementedness of homogeneous chaos in mixed chaos. This property can also be obtained from the work of [19]. We, however, also consider a direct proof of the complementedness property, which is especially simple in the considered case of first- and second-degree chaos.

In Section 4 we extend the results of Section 3 to systems constructed from a sequence of independent symmetric bounded random variables, not necessarily identically distributed. The main idea is that the subspaces $\mathcal{X} := \operatorname{span}[\{X_k\}, \{X_i X_j\}]$ and $\mathcal{Y} := \operatorname{span}[\{Y_k\}, \{Y_i Y_j\}]$ generated by different systems of independent random variables are isometric to each other in the case of $\|X_k\|_{L_\infty} = \|Y_k\|_{L_\infty}, k = 1,2\ldots$:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} b_k X_k + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij} X_i X_j\right\|_{L_\infty} = \left\|\sum_{k=1}^{n} b_k Y_k + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij} Y_i Y_j\right\|_{L_\infty},$$

and the same equalities are valid for chaos of arbitrary degree. Formally, we prove this equality for homogeneous separated chaos. The result is then extended to the unseparated chaos via the decoupling method and finally to the mixed chaos by using the complementedness of homogeneous parts.

Rademacher chaos, discussed in Section 3, is a special case of the more general chaos studied in Section 4. Moreover, results for the general case can be proved independently of Rademacher chaos. However, we stress the case of the Rademacher chaos due to its particular importance for applications. Bilinear and quadratic binary forms, equivalent to separated and unseparated Rademacher chaos, respectively, are important in neural network models of associative memory [20–22], energy analysis of spin glasses [23; 24], and adiabatic quantum computing [25].

2. Preliminaries and auxiliary results

A sequence $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ of elements in a Banach space X is called *basic* if it is a Schauder basis for its closed linear span $\overline{\mathrm{span}}\{x_k\}$. A basic sequence $\{x_k\}$ is an *unconditional basic sequence* if for any $x = \sum_k a_k x_k \in \overline{\mathrm{span}}\{x_k\}$ and any sequence of signs $\epsilon_k = \pm 1$, the series $\sum_k \epsilon_k a_k x_k$ converges. In this case there exists a constant $C_u \geqslant 1$, not dependent on x, such that

$$\left\|\sum_k \epsilon_k a_k x_k\right\|_X \leqslant C_u \left\|\sum_k a_k x_k\right\|_X.$$

The elements of the unconditional basis sequence form a basis in $\overline{\mathrm{span}}\{x_k\}$ under any permutation. This is equivalent to the property of convergence of series for all arrangements of signs, indicated in our definition of unconditionality. For basic and unconditional basic sequences we refer to [2]. Note that we also use the "inverse" form of the previous inequality

$$\left\|\sum_k a_k x_k\right\|_X \leqslant C_u \left\|\sum_k \epsilon_k a_k x_k\right\|_X.$$

Equivalence follows since both inequalities must be valid for any a_k and ϵ_k.

It is known that the Rademacher system $\{r_k\}$, as well as systems consisting of products of Rademacher functions $\{r_i r_j\}$, $\{r_i r_j r_k\}$ ..., is an unconditional basic sequence in $L_p([0,1])$ for $1 \leqslant p < \infty$ [26]. It is obvious that the Rademacher system will retain the property of unconditionality in the space $L_\infty[0,1]$, since the distribution of this system does not change when its elements are rearranged. However, this is not the case for the system of products [27; 28].

We follow ([13, Remark 1], [18]) to give the following definition. A sequence of elements $\{x_k\}$ in a Banach space X is said to possess the *Random Unconditional Convergence (RUC) property* if there exist universal constants such that for any finite sequence of scalars $\{a_k\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\mathsf{E}_\theta \left\|\sum_{k=1}^{n} \theta_k a_k x_k\right\|_X \asymp \min_{\theta_k=\pm 1} \left\|\sum_{k=1}^{n} \theta_k a_k x_k\right\|_X.$$

where $\{\theta_k\}$ is a sequence of independent Rademacher signs, i. e. for the probabilities of values of random variables θ_k the condition $\mathsf{P}\{\theta_k = 1\} = \mathsf{P}\{\theta_k = -1\} = 1/2$ is satisfied. This shows that the expectation of the norm behaves like the minimum, so they are "close". We note that in definition of the RUC property we consider finite sums only and consequently the order of elements of the sequence does not matter.

We consider Rademacher chaos polynomials. A d-th degree *homogeneous unseparated Rademacher chaos* (or *homogeneous Rademacher chaos*) is a system consisting of functions of variable $t \in [0,1]$ of the form

$$(r_{j_1} \ldots r_{j_d})(t) = r_{j_1}(t) \ldots r_{j_d}(t), \quad j_1 < j_2 < \ldots < j_d.$$

We then consider polynomials constructed from these functions of the form

$$P(t) = \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_d\leqslant n} a_{j_1,\dots,j_d} r_{j_1}(t)\dots r_{j_d}(t),$$

where $a_{j_1,\dots,j_d}$ are real coefficients. We will call such functions *homogeneous Rademacher chaos polynomials*. The *homogeneous multiple Rademacher system of degree d* (also referred to as separated or decoupled Rademacher chaos of d-th degree) consists of functions of d variables $(t_1,\dots,t_d)\in[0,1]^d$:

$$(r_{j_1}\otimes\dots\otimes r_{j_d})(t_1,\dots,t_d) = r_{j_1}(t_1)\dots r_{j_d}(t_d).$$

A linear combination of such elements,

$$P_{\text{sep}}(t_1,\dots,t_d) = \sum_{1\leqslant j_1,\dots,j_d\leqslant n} a_{j_1,\dots,j_d} r_{j_1}(t_1)\dots r_{j_d}(t_d),$$

we will call a d-th degree *homogeneous multiple Rademacher system polynomial*.

The L_∞-norm of a function $f:[0,1]^d\to\mathbb{R}$ is $||f||_{L_\infty} = \sup_{(t_1,\dots,t_d)\in[0,1]^d} |f(t_1,\dots,t_d)|$. For d-th degree multiple Rademacher system polynomial $P_{\text{sep}}(t_1,\dots,t_d)$, this is equivalent to the maximum over all 2^n sign combinations $\epsilon = (\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)\in\{\pm1\}^n$:

$$\|P_{\text{sep}}\|_{L_\infty} = \max_{\epsilon\in\{\pm1\}^n}\left|\sum_{1\leqslant j_1,\dots,j_d\leqslant n} a_{j_1,\dots,j_d}\epsilon_{j_1}\dots\epsilon_{j_d}\right|.$$

Analagous relation holds for Rademacher chaos polynomial, but signs may dependent in that case.

We will need the following decoupling argument.

Lemma 2.1 (Decoupling for L_∞-norms, cf. [13, Corollary 1; 29, Theorem 3.1.1]). *Let $d,n\in\mathbb{N}$ with $d\leqslant n$. Let $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ be a sequence of bounded independent random variables, and let $(\xi_1^{(k)},\dots,\xi_n^{(k)})$, for $k=1,\dots,d$, be d independent copies of this sequence. Suppose that coefficients $d_{j_1,\dots,j_d}$ are symmetric, i. e. $d_{j_1,\dots,j_d} = d_{j_{\pi(1)},\dots,j_{\pi(d)}}$ for each multi-index $(j_1,\dots,j_d)\in\tilde{N}_n^d := \{(i_1,\dots,i_d)\in\{1,\dots,n\}^d : i_p\neq i_q \text{ if } p\neq q\}$ and every permutation π of $\{1,\dots,d\}$. Then,*

$$\begin{aligned} c_d\left\|\sum_{(i_1,\dots,i_d)\in\tilde{N}_n^d} d_{i_1,\dots,i_d}\xi_{i_1}^{(1)}\dots\xi_{i_d}^{(d)}\right\|_{L_\infty(\Omega_1\times\dots\times\Omega_d)} &\leqslant \left\|\sum_{(i_1,\dots,i_d)\in\tilde{N}_n^d} d_{i_1,\dots,i_d}\xi_{i_1}\dots\xi_{i_d}\right\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant \left\|\sum_{(i_1,\dots,i_d)\in\tilde{N}_n^d} d_{i_1,\dots,i_d}\xi_{i_1}^{(1)}\dots\xi_{i_d}^{(d)}\right\|_{L_\infty(\Omega_1\times\dots\times\Omega_d)}, \end{aligned}$$

where c_d is constant depending only on d, and the L_∞-norms are essential suprema over the respective probability spaces Ω (for ξ_k) and $\Omega_1\times\dots\times\Omega_d$ (for $\xi_k^{(j)}$).

Note that the right inequality in Lemma 2.1 is elementary: the set of essential values of the random variable $\sum d_{i_1,\dots,i_d}\xi_{i_1}\dots\xi_{i_d}$ is included in the set of essential values of the random variable $\sum d_{i_1,\dots,i_d}\xi_{i_1}^{(1)}\dots\xi_{i_d}^{(d)}$.

Let $d,n\in\mathbb{N}$ with $1\leqslant d\leqslant n$. Let $\mathbb{N}_n^d$ be the set of multi-indices $J=(j_1,\dots,j_d)$ such that $j_k\in[n]$, where $[n]:=\{1,2,\dots,n\}$. For $k\in\{1,\dots,d\}$, let J_k' denote the multi-index $(j_1,\dots,j_{k-1},j_{k+1},\dots,j_d)$, and also denote $t_k' = (t_1,\dots,t_{k-1},t_{k+1},\dots,t_d)$. The *multiple Rademacher system of degree d* is $\{r_J^\otimes\}_{J\in\mathbb{N}_n^d}$, where $r_J^\otimes(t_1,\dots,t_d) = r_{j_1}(t_1)\dots r_{j_d}(t_d)$.

Then we define Δ^d be the set of multi-indices $J=(j_1,\dots,j_d)$ such that $1\leqslant j_1<j_2<\dots<j_d$. *The (homogeneous) Rademacher chaos of degree d* is a function $\{\mathbf{r}_J\}_{J\in\Delta^d}$, where $\mathbf{r}_J(t) = r_{j_1}(t)\dots r_{j_d}(t)$, $t\in[0,1]$. By Δ_n^d we denote the set $\{J=(j_1,j_2,\dots,j_d): 1\leqslant j_1<j_2<\dots<j_d\leqslant n\}$.

Also we use elements of the multiple Rademacher system of the form

$$r_{J_k'}^\otimes(t_k') = r_{j_1}(t_1)\dots r_{j_{k-1}}(t_{k-1})r_{j_{k+1}}(t_{k+1})\dots r_{j_d}(t_d).$$

Finally, for every $d,n\in\mathbb{N}, k=1,2,\dots,d$ and $l=1,2,\dots,n$ we put

$$\mathbb{N}_n^d(k,l) = \{J=(j_1,\dots,j_d)\in\mathbb{N}_n^d : j_k = l\}.$$

Now we discuss the two central theorems for our paper. They establish the RUC property of the multiple Rademacher system and Rademacher chaos of degree d in L_∞.

Theorem 2.2 [13, Theorem 4]. *For every $d \in \mathbb{N}$ the multiple Rademacher system $\{r_J^{\otimes}\}_{J\in\mathbb{N}^d}$ has the RUC property in $L_\infty([0,1]^d)$. More precisely, for all $n \in \mathbb{N}$ and $a_J \in \mathbb{R}^d, J \in \mathbb{N}_n^d$ the following inequalities hold:*

$$\Big\|\sum_{J\in\mathbb{N}_n^d} a_J r_J^{\otimes}\Big\|_{L_\infty([0,1]^d)} \geqslant 2^{\frac{1-d}{2}} \max_{k\in[d]} \sum_{l=1}^{n} \Bigg(\sum_{J\in\mathbb{N}_n^d(k,l)} a_J^2\Bigg)^{1/2}, \tag{2}$$

and

$$\mathsf{E}_\theta \Big\|\sum_{J\in\mathbb{N}_n^d} a_J \theta_J r_J^{\otimes}\Big\|_{L_\infty([0,1]^d)} \leqslant \sum_{k=1}^{d} 2^{k-1} \sum_{l=1}^{n} \Bigg(\sum_{J\in\mathbb{N}_n^d(k,l)} a_J^2\Bigg)^{1/2}, \tag{3}$$

where $(\theta_J)_{J\in\mathbb{N}_n^d}$ is a system of independent random signs, i. e. $\mathsf{P}\{\theta_J = 1\} = \mathsf{P}\{\theta_J = -1\} = 1/2$, $J \in \mathbb{N}_n^d$.

Theorem 2.3 [13, Corollary 7]. *Let $d,n \in \mathbb{N}$, $d \leqslant n$. There exist universal constant C'_d (depending only on d) such that for any real coefficients $(a_J)_{J\in\Delta_n^d}$,*

$$\min_\theta \Big\|\sum_{J\in\Delta_n^d} \theta_J a_J \boldsymbol{r}_J\Big\|_{L_\infty([0,1])} \leqslant \mathsf{E}_\theta \Big\|\sum_{J\in\Delta_n^d} \theta_J a_J \boldsymbol{r}_J\Big\|_{L_\infty([0,1])} \leqslant C'_d \Big\|\sum_{J\in\Delta_n^d} a_J \boldsymbol{r}_J\Big\|_{L_\infty([0,1])}, \tag{4}$$

where $(\theta_J)_{J\in\Delta_n^d}$ is a sequence of independent random signs.

Let us briefly describe the main ideas from [13] used in proving these results. We consider the case $d = 2$. For the lower bound on $\|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \theta_{i,j}a_{i,j}r_i\otimes r_j\|_{L_\infty([0,1]^2)}$, one can use Szarek's refinement of Khintchine's inequality for L_1-norms [30]. We choose t_1, argument of the first function of products $r_i\otimes r_j = r_i(t_1)r_j(t_2)$, in an appropriate way, and the problem is reduced to estimating the L_1-norm of a Rademacher sum of degree 1 with respect to the remaining variable. Applying Khintchine's inequality then yields a lower bound in terms of $L_{2,1}$-norm:

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_i\otimes r_j\Big\|_{L_\infty([0,1]^2)} \geqslant \sum_{i=1}^{n}\int_0^1\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}r_j(t)\Big|dt \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\Bigg)^{1/2}.$$

The L_∞-norm of left hand side of (2) is thus bounded below. As we have symmetry in indices i and j, swapping them, we get another lower bound. For the upper bound (3) explanation authors use such techniques as the symmetrization trick and Ledoux–Talagrand contraction principle. It should be noted that the specific method of applying these techniques to obtain the upper bound was taken from paper [31]. For more thorough explanations we refer to [13]. Now, having these estimates and using Lemma 2.1, we proceed to RUC property for Rademacher chaos, i. e. (4).

We will consider multilinear and polynomial forms constructed from systems of random variables, which are defined on a probability space $([0,1],\mu)$ with standard Lebesgue measure, or on products of such probability spaces. It is easy to see that the main results remain valid when replacing the segment $[0,1]$ with an arbitrary probability space.

Let us agree on the terminology used.

Let $X = (X_k)$ be a sequence of independent random variables, and $X^{(1)} = (X_k^{(1)})$, $X^{(2)} = (X_k^{(2)})$, …, $X^{(d)} = (X_k^{(d)})$ be its independent copies. This means that the systems $X, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(d)}$ are identically distributed and independent in the aggregate. We will call the system $\{X_{j_1}^{(1)}X_{j_2}^{(2)}\dots X_{j_d}^{(d)}\}_{(j_1,j_2,\dots,j_d)\in\mathbb{N}^d}$ a *homogeneous multiple random system of degree d*, and the union of such homogeneous and mutually independent systems of degrees $1,2,\dots,d$ – a *mixed multiple random system of degree d*.

We will also consider systems generated by a single sequence X, without using its independent copies. We will call the system $\{X_{j_1}X_{j_2}\dots X_{j_d}\}_{(j_1,j_2,\dots,j_d)\in\Delta^d}$ a *homogeneous chaos of degree d*, and the union of such homogeneous systems of degrees $1,2,\dots,d$ – a *mixed chaos of degree d*.

Thus, the homogeneous multiple Rademacher system and homogeneous Rademacher chaos defined above, which appear in Theorems 2.2 and 2.3, respectively, turn out to be special cases of a homogeneous multiple random system and homogeneous chaos. We note that the precise ordering of elements of these systems is not relevant for the RUC-property discussed in the article. However, it should be noted that such systems will form basic sequences if they are numbered using the lexicographic order on the index set [32].

Next, we will work with polynomials, by which we mean finite linear combinations of some elements of the introduced system. To specify the underlying system for a given polynomial, we will use a corresponding prefix. For example, a 3-degree homogeneous chaos polynomial will look like this:

$$P_3(X) = \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} a_{ijk}X_iX_jX_k.$$

And a 2-degree mixed multiple random system polynomial will look like this:

$$S_{\text{sep}}(X^{(1)},X^{(2)},X^{(3)}) = \sum_{k=1}^{n} b_kX_k^{(1)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_i^{(2)}X_j^{(3)}.$$

Note also that Lemma 2.1 involves both a homogeneous chaos polynomial and a homogeneous multiple random system polynomial. The distributions of these polynomials are different, but the lemma shows that their L_∞-norms are equivalent. Along with the notations $P_3(X), S_{\text{sep}}(X^{(1)},X^{(2)},X^{(3)})$, as above, in which we emphasize the dependence of our polynomials on a system of independent rvs, we will also use notations of the form $P_3(t), S_{\text{sep}}(t_1,t_2,t_3)$, in which we consider our polynomials as random variables (functions) of the variables $t\in[0,1]$, $(t_1,t_2,t_3)\in[0,1]^3$.

It is also worth noting that every mixed chaos polynomial $Q(X)$ of degree d can be uniquely represented as the sum of its homogeneous parts:

$$Q(X) = \sum_{k=1}^{d} Q_k(X),$$

where $Q_k(X)$ is a k-th degree homogeneous chaos polynomial (or the k-th homogeneous component of Q). An important result of Kwapien [19, Lemma 2] states that the mean values of a mixed chaos polynomial $Q(X)$ constructed from a symmetric vector X dominate the mean values of its homogeneous components.

Lemma 2.4 (Kwapien, [19, Lemma 2]) . *Let F be a vector space, and let $\varphi : F\to\mathbb{R}^+$ be a convex function such that $\varphi(-x)=\varphi(x)$ for all $x\in F$. Let $Q(\eta)$ be a mixed chaos polynomial of degree d with coefficients in F, where $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_n)$ is a vector of independent symmetric random variables. Let $Q_k(\eta)$ denote its k-th homogeneous component, for $1\leqslant k\leqslant d$. Then there exists a constant K_d, depending only on d, such that*

$$\mathsf{E}\left[\varphi(Q_k(\eta))\right] \leqslant \mathsf{E}\left[\varphi(K_dQ(\eta))\right].$$

We will use the following corollary.

Corollary 2.5. *There is a constant K_d, depending only on d, such that for every mixed chaos polynomial $Q(\eta)$ of degree d, for every homogeneous component $Q_k(\eta)$ of this polynimial and every vector $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_n)$ of independent bounded symmetric random variables we have*

$$\|Q_k(\eta)\|_{L_\infty} \leqslant K_d\|Q(\eta)\|_{L_\infty}. \tag{5}$$

Proof. The function $\varphi(x)=|x|^p$ for $x\in[0,1]$ satisfies all conditions of Lemma 2.4. Applying the lemma and taking the p-th root, we have

$$\left(\mathsf{E}|Q_k(\eta)|^p\right)^{1/p} \leqslant K_d\left(\mathsf{E}|Q(\eta)|^p\right)^{1/p}.$$

Passing to the limit as $p\to\infty$, this yields the L_∞ estimate (5). □

Remark 2.6. *It is known that K_d can be taken as 2^d, which is also cited by Kwapien.*

This paper considers chaoses constructed from a sequence of independent symmetric bounded random variables, which we will denote as $(X_k)_{k=1}^\infty$, such that for each k, $\|X_k\|_{L_\infty}=C_k>0$.

3. RUC property for mixed multiple Rademacher system and mixed Rademacher chaos

In this section we extend the results of papers [12; 13] about homogeneous Rademacher chaos to the case of mixed Rademacher chaos. Thus we will consider 2-th degree polynomials of the form

$$S(t) = \sum_{k=1}^{n} b_kr_k(t) + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}r_i(t)r_j(t), \tag{6}$$

where b_k and a_{ij} are real coefficients. We denote the first-degree homogeneous part of $S(t)$ as $P_1(t)$ and the second-degree part as $P_2(t)$, so $S(t) = P_1(t) + P_2(t)$.

We also consider "separated" version of chaos, in which different degree terms are generated by independent copies of Rademacher sequences. More precisely, we will consider mixed multiple Rademacher system polinomials of the form

$$S_{\text{sep}}(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k r_k(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} r'_i(t) r''_j(t), \tag{7}$$

where r, r', and r'' are three mutually independent Rademacher sequences. Note that this function has the same distribution as following function, defined on $[0,1]^3$:

$$S_{\text{sep}}(t_0,t_1,t_2) = \sum_{k=1}^{n} b_k r_k(t_0) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_i(t_1) r_j(t_2). \tag{8}$$

We will use this fact of equivalence of distributions in our proofs.

We first consider the simpler case of mixed multiple Rademacher system, where the components of different degrees are generated by independent Rademacher sequences.

3.1. RUC property for mixed multiple Rademacher system

Proposition 3.1. *Let $S_{\text{sep}}(t) = P_1(t) + P_2(t)$ be a mixed Rademacher multiple system polynomial of second degree, where*

$$P_1(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k r_k(t), \quad P_2(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} r'_i(t) r''_j(t).$$

Then

$$\|S_{\text{sep}}\|_{L_\infty[0,1]} = \|P_1\|_{L_\infty[0,1]} + \|P_2\|_{L_\infty[0,1]}. \tag{9}$$

Proof. We use equimeasurability of $S_{\text{sep}}(t)$ and $S_{\text{sep}}(t_1,t_2,t_3)$, which follows from (7) and (8). We know that for mixed Rademacher system polynomial of second degree their L_∞-norm is the absolute value of their sum for certain signs arrangement, i. e. there exists a sign configurations $(\epsilon_k, \epsilon'_i, \epsilon''_j) \in \in \{-1,1\}^n \times \{-1,1\}^n \times \{-1,1\}^n$ which corresponds to such t_0^*, t_1^*, t_2^*, where maximum is attained, such that:

$$\|P_1\|_{L_\infty([0,1])} = \max_{t_0\in[0,1]} |\sum_{k=1}^{n} b_k r_k(t_0)| = \max_{\epsilon_k} |\sum_{k=1}^{n} b_k \epsilon_k|$$

and

$$\|P_2\|_{L_\infty([0,1]^2)} = \max_{t_1,t_2\in[0,1]^2} |\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_i(t_1) r_j(t_2)| = \max_{\epsilon'_i,\epsilon''_j} |\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\epsilon'_i\epsilon''_j|.$$

These maxima we denote correspondingly by M_1 and M_2. Let also s_1 and s_2 denote the sign of the sum under the module in points t_0^*, t_1^*, t_2^*. Now we consider the symmetry argument which later be modified to the Rademacher chaos case. Because we choose t_0 independently of t_1, t_2, we can always have $s := s_1 = s_2$. Indeed, if these signs are different, we just take t_0^{**} such that $r_k(t_0^{**}) = -r_k(t_0^*)$ for all k. Such point always exists, because it corresponds to $(-\epsilon_k)$ sequence of signs. Therefore, we change the sign of P_1 without changing its absolute value. Therefore, we have

$$|P_1(t_0^*) + P_2(t_1^*, t_2^*)| = |sM_1 + sM_2| = |s(M_1 + M_2)| = M_1 + M_2.$$

Taking maxima of both sides of the equation, we get

$$\|S_{\text{sep}}\|_{L_\infty} = \max_{t_0,t_1,t_2} |P_1(t_0) + P_2(t_1,t_2)| \geqslant M_1 + M_2.$$

On the other hand,

$$\|S_{\text{sep}}\|_{L_\infty} = \max_{t_0,t_1,t_2} |P_1(t_0) + P_2(t_1,t_2)| \leqslant \max_{t_0,t_1,t_2} \{|P_1(t_0)| + |P_2(t_1,t_2)|\} \leqslant M_1 + M_2.$$

Combining the two inequalities, we obtain the desired equality. (9) □

Corollary 3.2. *For mixed multiple Rademacher system polynomial as in Proposition* 3.1 *we have*

$$\|P_1\|_{L_\infty} \leqslant \|S_{sep}\|_{L_\infty},$$
$$\|P_2\|_{L_\infty} \leqslant \|S_{sep}\|_{L_\infty}.$$

From this we conclude that the following is true.

Theorem 3.3. *For all $n \in \mathbb{N}$ and $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, we have the following two-sided estimates with equivalence constants independent of n, a_{ij}*

$$\mathsf{E}_{\theta_k,\theta_{ij}}\left[\Big\|\sum_{k=1}^{n}\theta_k b_k r_k+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_{ij}a_{ij}r_i\otimes r_j\Big\|_{L_\infty}\right] \asymp \min_{\Theta_1,\Theta_2}\left[\Big\|\sum_{k=1}^{n}\theta_k b_k r_k+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_{ij}a_{ij}r_i\otimes r_j\Big\|_{L_\infty}\right] \asymp \tag{10}$$
$$\asymp \sum_{k=1}^{n}|b_k| + \max\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{1/2}, \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{1/2}\right\},$$

where $\Theta_1 = (\theta_k)$ and $\Theta_2 = (\theta_{ij})$ are independent sequences of Rademacher signs.

As consequence, the mixed multiple Rademacher system has the RUC property.

Proof. We firstly prove the RUC property. If $\Theta_1 = (\theta_k) \in \{-1,1\}^n$ and $\Theta_2 = (\theta_{ij}) \in \{-1,1\}^n \times \times \{-1,1\}^n$ are independent random sign, then we put

$$\Theta_1 P_1 := \sum_{k=1}^{n}\theta_k b_k r_k, \quad \Theta_2 P_2 := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_{ij}a_{ij}r_i\otimes r_j.$$

Now, because always $\mathsf{E}_{\Theta_1,\Theta_2}\|\Theta_1 P_1+\Theta_2 P_2\|_{L_\infty} \geqslant \min_{\Theta_1,\Theta_2}\|\Theta_1 P_1+\Theta_2 P_2\|_{L_\infty}$, it is enough for us to get an upper bound of expectation on signs:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_{\Theta_1,\Theta_2}\|\Theta_1 P_1+\Theta_2 P_2\|_{L_\infty} &= \mathsf{E}_{\theta_k,\theta_{ij}}\left[\|\sum_{k=1}^{n}\theta_k b_k r_k\|_{L_\infty}+\|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_{ij}a_{ij}r_i\otimes r_j\|_{L_\infty}\right] = \\
&= \mathsf{E}_{\theta_k}\|\sum_{k=1}^{n}\theta_k b_k r_k\|_{L_\infty}+\mathsf{E}_{\theta_{ij}}\|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_{ij}a_{ij}r_i\otimes r_j\|_{L_\infty} \leqslant \\
&\leqslant \min_{\theta_k}\|\sum_{k=1}^{n}\theta_k b_k r_k\|_{L_\infty}+C_{RUC}\min_{\theta_{ij}}\|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_{ij}a_{ij}r_i\otimes r_j\|_{L_\infty} \leqslant \\
&\leqslant C_{RUC}\min_{\Theta_1,\Theta_2}(\|\Theta_1 P_1\|_{L_\infty}+\|\Theta_2 P_2\|_{L_\infty}) \leqslant \\
&\leqslant C_{RUC}\min_{\Theta_1,\Theta_2}\|\Theta_1 P_1+\Theta_2 P_2\|_{L_\infty},
\end{aligned}$$

where the first equality comes by taking expectations on (Θ_1,Θ_2) from both sides of (9), the second equality by linearity of expectation and independence of (Θ_1,Θ_2), and third inequality from symmetric property of Rademacher system and from RUC property of second-degree homogeneous multiple Rademacher systems (by Theorem 2.2). In fact, the L_∞ norm of the first-degree Rademacher system with random signs is equal to sum of absolute values b_k, which corresponds to symmetric property of this system in L_∞. And then we use known properties of minima of functions and in the final inequality we use (9) again. Thus, the mixed multiple Rademacher system possesses the RUC property.

Now, to prove the second part of (10), we again use the Proposition 3.1 and the following simple fact:

$$\|\Theta_1 P_1\|_{L_\infty} = \sum_{k=1}^{n}|\theta_k b_k| = \|(b_k)\|_{l_1}. \tag{11}$$

Now, if we take $\tilde{b_k} = \theta_k b_k$ for fixed combinations of signs $\Theta_1 = (\theta_k)$, the same holds true. Then we unfix the signs and take expectation from both sides of the equality:

$$\mathsf{E}_{\Theta_1}\|\Theta_1 P_1\|_{L_\infty} = \mathsf{E}_{\theta_k}\sum_{k=1}^{n}|\theta_k b_k| = \|b_k\|_{l_1}. \tag{12}$$

For the second-degree homogeneous multiple Rademacher system polynomial $\Theta_2 P_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} r_i \otimes r_j$, by Theorem 2.2, its average L_∞-norm is equivalent to the matrix norm:

$$\mathsf{E}_{\Theta_2} \|\Theta_2 P_2\|_{L_\infty} \asymp \max\left\{ \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}, \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2} \right\}. \tag{13}$$

Combining relations (12) and (13) with Proposition 3.1, we obtain the right-hand side of relation (10).

□

3.2. RUC property for mixed Rademacher chaos

Now we consider the mixed Rademacher chaos polynomials, as in (6). Let $S(t) = P_1(t) + P_2(t)$ be such a polynomial, with $P_1(t) = \sum_{k=1}^n b_k r_k(t)$ and $P_2(t) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij} r_i(t) r_j(t)$. In this case, the simple additivity of L_∞-norms observed in Proposition 3.1 no longer holds due to the mutual dependence between $P_1(t)$ and $P_2(t)$. However, a crucial relationship still provides control over the norm of its components by the norm of the total sum.

Proposition 3.4. *Let*

$$P_1(t) = \sum_{k=1}^n b_k r_k(t), \quad P_2(t) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij} r_i(t) r_j(t),$$

and $S(t) = P_1(t) + P_2(t)$ *is a mixed Rademacher chaos polynomial of second degree as it defined in* (6). *Then,*

$$\|P_1\|_{L_\infty} \leqslant \|S\|_{L_\infty}, \quad \|P_2\|_{L_\infty} \leqslant \|S\|_{L_\infty}. \tag{14}$$

As consequence,

$$\|S\|_{L_\infty} \leqslant \|P_1\|_{L_\infty} + \|P_2\|_{L_\infty} \leqslant 2\|S\|_{L_\infty}.$$

Proof. Let t^* be a point where $|P_1(t^*)| = \|P_1\|_{L_\infty}$. Without loss of generality, assume $P_1(t^*) = \|P_1\|_{L_\infty} \geqslant 0$. Consider another point t^{**} such that $r_k(t^{**}) = -r_k(t^*)$ for all $k = 1,\dots,n$. Then $P_1(t^{**}) = \sum b_k(-r_k(t^*)) = -P_1(t^*)$. However, $P_2(t^{**}) = \sum_{i<j} a_{ij}(-r_i(t^*))(-r_j(t^*)) = \sum_{i<j} a_{ij} r_i(t^*) r_j(t^*) = P_2(t^*)$. Thus, we have two values for $S(t)$: $S(t^*) = P_1(t^*) + P_2(t^*)$ and $S(t^{**}) = -P_1(t^*) + P_2(t^*)$. At least one of $P_1(t^*)$ or $-P_1(t^*)$ must have the same sign as $P_2(t^*)$.

If $P_1(t^*)$ and $P_2(t^*)$ have the same sign, then

$$|S(t^*)| = |P_1(t^*) + P_2(t^*)| = |P_1(t^*)| + |P_2(t^*)| \geqslant |P_1(t^*)| = \|P_1\|_{L_\infty}.$$

If $P_1(t^*)$ and $P_2(t^*)$ have opposite signs, then

$$|S(t^{**})| = |-P_1(t^*) + P_2(t^*)| = |P_1(t^*)| + |P_2(t^*)| \geqslant |P_1(t^*)| = \|P_1\|_{L_\infty}$$

In either case,

$$\|S\|_{L_\infty} = \max_t |S(t)| \geqslant \|P_1\|_{L_\infty}.$$

Thus, we get the first inequality in (14), and for the second inequality we can apply the similar argument.

Next, using inequalities (14) we get:

$$\|P_1\|_{L_\infty} + \|P_2\|_{L_\infty} \leqslant 2\|S\|_{L_\infty},$$

and by triangle inequality

$$\|S\|_{L_\infty} \leqslant \|P_1\|_{L_\infty} + \|P_2\|_{L_\infty}.$$

□

Corollary 3.5. *Let* $X_1 = \overline{\operatorname{span}}\{r_k : k = 1,2,3,\dots\}$ *be the closed subspace of first-degree homogeneous Rademacher chaos in* $L_\infty([0,1])$, $X_2 = \overline{\operatorname{span}}\{r_i r_j : i<j, i,j = 1,2,3,\dots\}$ *be the closed subspace of second-degree homogeneous Rademacher chaos in* $L_\infty([0,1])$, *and* $X_{1,2} = \overline{\operatorname{span}}\{r_i r_j, r_k : i<j, i,j,k = 1,2,3,\dots\}$ *be the closed subspace of second-degree mixed Rademacher chaos in* $L_\infty([0,1])$. *Then there is an isomorphism of Banach spaces:*

$$X_{1,2} \cong X_1 \oplus X_2,$$

where

$$X_1 \oplus X_2 := \{x = x_1 + x_2 : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}, \quad \|x_1 + x_2\|_{X_1 \oplus X_2} := \|x_1\|_{X_1} + \|x_2\|_{X_2}.$$

Thus X_1 and X_2 are complemented subspaces of $X_{1,2}$.

Proof. Mixed chaos is a basic sequence in lexicographic order in the space L_∞ [32, Theorem 2]. Therefore, the space $X_{1,2}$ consists of those elements $x_{1,2} \in L_\infty$ which can be represented in the form

$$x_{1,2}(t) = b_1 r_1(t) + b_2 r_2(t) + b_{1,2} r_1(t) r_2(t) + b_3 r_3(t) + b_{1,3} r_1(t) r_3(t) + b_{2,3} r_2(t) r_3(t) + \ldots, \tag{15}$$

where the series converges in the L_∞-norm. Similarly, the spaces X_1 and X_2 consist, respectively, of elements which are represented as sums of the form

$$x_1 = a_1 r_1(t) + a_2 r_2(t) + a_3 r_3(t) + \ldots \quad \text{and} \quad x_2 = a_{1,2} r_1(t) r_2(t) + a_{1,3} r_1(t) r_3(t) + a_{2,3} r_2(t) r_3(t) + \ldots$$

Let us consider two arbitrary elements $x_1 \in X_1$ and $x_2 \in X_2$. It is easy to see that from the convergence of the series for x_1 and x_2 follows the convergence of the series

$$x_1 + x_2 = a_1 r_1(t) + a_2 r_2(t) + a_{1,2} r_1(t) r_2(t) + a_3 r_3(t) + a_{1,3} r_1(t) r_3(t) + a_{2,3} r_2(t) r_3(t) + \ldots,$$

therefore $X_1 + X_2 \subset X_{1,2}$. Then we note that convergence in L_∞ implies convergence in L_2, in which the spaces X_1 and X_2 are orthogonal. Therefore $X_1 \cap X_2 = \{0\}$, and the space $X_1 \oplus X_2$ is well defined. Moreover,

$$\|x_1 + x_2\|_{X_{1,2}} = \|x_1 + x_2\|_{L_\infty} \leqslant \|x_1\|_{L_\infty} + \|x_2\|_{L_\infty} = \|x_1 + x_2\|_{X_1 \oplus X_2}.$$

Now let $x_{1,2} \in X_{1,2}$ and $S_{1,2}^{(n)}$ be the partial sum of the corresponding series (15). Then $S_{1,2}^{(n)} = S_1^{(n_1)} + S_2^{(n_2)}$, where $S_1^{(n_1)}$ is some finite sum according to system $\{r_k\}$, and $S_2^{(n_2)}$ is a finite sum according to system $\{r_i r_j\}$. As n increases, new terms will be added to the sums $S_1^{(n_1)}$ and $S_2^{(n_2)}$ in a certain order determined by the lexicographic numbering of the combined system of $\{r_k\}$ and $\{r_i r_j\}$. The sequence of sums $S_1^{n_1}$ will form the series

$$b_1 r_1(t) + b_2 r_2(t) + b_3 r_3(t) + \ldots,$$

and, similarly, the sequence of sums $S_2^{(n_2)}$ will form the series

$$b_{1,2} r_1(t) r_2(t) + b_{1,3} r_1(t) r_3(t) + b_{2,3} r_2(t) r_3(t) + \ldots.$$

Both of these series will converge. This follows from the convergence of the series for $x_{1,2}$ and inequalities

$$\left\|S_1^{(m_1)} - S_1^{(n_1)}\right\|_{L_\infty} \leqslant \left\|S_{1,2}^{(m)} - S_{1,2}^{(n)}\right\|_{L_\infty} \quad \text{and} \quad \left\|S_2^{(m_2)} - S_2^{(n_2)}\right\|_{L_\infty} \leqslant \left\|S_{1,2}^{(m)} - S_{1,2}^{(n)}\right\|_{L_\infty}, \quad n < m,$$

which are valid by virtue of Proposition 3.4. Hence $x_{1,2} = x_1 + x_2$, where $x_i \in X_i$, and $X_{1,2} \subset X_1 \oplus X_2$. By virtue of the already established continuous embedding $X_1 \oplus X_2 \subset X_{1,2}$ and Banach's inverse operator theorem, embedding $X_{1,2} \subset X_1 \oplus X_2$ is also continuous. Moreover, passing to the limit in inequalities

$$\left\|S_1^{(n_1)}\right\|_{L_\infty} \leqslant \left\|S_{1,2}^{(n)}\right\|_{L_\infty} \quad \text{and} \quad \left\|S_2^{(n_2)}\right\|_{L_\infty} \leqslant \left\|S_{1,2}^{(n)}\right\|_{L_\infty}, \quad n < m,$$

which are valid according to Proposition 3.4, we obtain

$$\|x_{1,2}\|_{X_{1,2}} \leqslant \|x_{1,2}\|_{X_1 \oplus X_2} \leqslant 2\|x_{1,2}\|_{X_{1,2}}.$$

□

Now we prove the RUC property for mixed Rademacher chaos. We proceed similarly to Theorem 3.3.

Theorem 3.6. *For all $n \in \mathbb{N}$ and $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, we have the following two-sided estimates with equivalence constants independent of n, a_{ij}*

$$\mathsf{E}_{\Theta_1,\Theta_2} \left\| \sum_{k=1}^n \theta_k b_k r_k + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \theta_{ij} a_{ij} r_i r_j \right\|_{L_\infty} \asymp \min_{\Theta_1,\Theta_2} \left\| \sum_{k=1}^n \theta_k b_k r_k + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \theta_{ij} a_{ij} r_i r_j \right\|_{L_\infty} \asymp \tag{16}$$

$$\asymp \sum_{k=1}^n |b_k| + \max\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}, \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}^2 \right)^{1/2} \right\},$$

where $\Theta_1 = (\theta_k)$ and $\Theta_2 = (\theta_{ij})$ are independent sequences of Rademacher signs.

As consequence, the mixed Rademacher chaos has the RUC property.

Proof. Let us denote

$$\Theta_1 P_1 := \sum_{k=1}^{n} \theta_k b_k r_k, \quad \Theta_2 P_2 := \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \theta_{ij} a_{ij} r_i(t) r_j(t),$$

as in the proof of Theorem 3.3, we obtain

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_{\Theta_1,\Theta_2}\|(\Theta_1 P_1)+(\Theta_2 P_2)\|_{L_\infty} &\leqslant \mathsf{E}_{\theta_k,\theta_{ij}}\left[\|\sum_{k=1}^{n}\theta_k b_k r_k\|_{L_\infty} + \|\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\theta_{ij}a_{ij}r_i r_j\|_{L_\infty}\right] = \\
&= \mathsf{E}_{\theta_k}\|\sum_{k=1}^{n}\theta_k b_k r_k\|_{L_\infty} + \mathsf{E}_{\theta_{ij}}\|\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\theta_{ij}a_{ij}r_i r_j\|_{L_\infty} \leqslant \\
&\leqslant \min_{\theta_k}\|\sum_{k=1}^{n}\theta_k b_k r_k\|_{L_\infty} + C_{RUC}\min_{\theta_{ij}}\|\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\theta_{ij}a_{ij}r_i r_j\|_{L_\infty} \leqslant \\
&\leqslant C_{RUC}\min_{\Theta_1,\Theta_2}(\|\Theta_1 P_1\|_{L_\infty} + \|\Theta_2 P_2\|_{L_\infty}) \leqslant \\
&\leqslant 2C_{RUC}\min_{\Theta_1,\Theta_2}\|\Theta_1 P_1 + \Theta_2 P_2\|_{L_\infty},
\end{aligned}$$

where final inequality comes from Proposition 3.4. From this we obtain the RUC-property for the mixed Rademacher chaos.

To prove the second equivalence in (16), we again use Proposition 3.4. Thus we get

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_{\Theta_1,\Theta_2}\|\Theta_1 P_1 + \Theta_2 P_2\|_{L_\infty} &\asymp \mathsf{E}_{\theta_k}\|\sum_{k=1}^{n}\theta_k b_k r_k\|_{L_\infty} + \mathsf{E}_{\theta_{ij}}\|\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\theta_{ij}a_{ij}r_i r_j\|_{L_\infty} \asymp \\
&\asymp \sum_{k=1}^{n}|b_k| + \max\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}^2\right)^{1/2}, \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1}a_{ij}^2\right)^{1/2}\right\},
\end{aligned}$$

where we used relations (11) and (1). □

4. RUC property for multiple random system and chaos of symmetric bounded random variables

In this section we extend results from Section 3 obtained for second-degree mixed multiple Rademacher system and mixed Rademacher chaos to broader class of d-th degree mixed multiple random system and mixed chaos of symmetric bounded (a. e.) rvs.

4.1. RUC property for homogeneous multiple random system and homogeneous chaos

First we will establish equality between L_∞-norm of homogeneous multiple random system polinomial and the L_∞-norm of homogeneous multiple Rademacher system polynomial of degree d. As before, we will denote by $X^{(1)},\dots,X^{(d)}$ independent copies of the sequence $X=(X_k)$.

Theorem 4.1. *Let $\{X_{j_1}^{(1)}\dots X_{j_d}^{(d)}\}$ be a d-homogeneous multiple random system formed by the sequence $X=(X_k)$ of independent symmetric bounded random variables, and $\|X_k\|_{L_\infty}=C_k>0$. Let*

$$P(X^{(1)},\dots,X^{(d)}) = \sum_{J\in\mathbb{N}_n^d} a_J X_{j_1}^{(1)}\dots X_{j_d}^{(d)}$$

is a polynomial by this system. Then,

$$\|P(X^{(1)},\dots,X^{(d)})\|_{L_\infty} = \left\|\sum_{J\in\mathbb{N}_n^d}\left(a_J\prod_{l\in J}C_l\right)r_J^{\otimes}\right\|_{L_\infty},$$

where $r_J^{\otimes}$ denotes the elements of the d-th degree multiple Rademacher system.

Proof. We remind that we work on a probability space (Ω, A, P) with $\Omega = [0,1]$ an $\mathsf{P} = \mu$, where μ is a standard Lebesgue measure. Let us consider an auxiliary multilinear form

$$P_h(x^{(1)},\dots,x^{(d)}) := \sum_{J\in\mathbb{N}_n^d} a_J x_{j_1}^{(1)}\dots x_{j_d}^{(d)},$$

which depends on variables $x^{(1)} = (x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$, ..., $x^{(d)} = (x_1^{(d)},\dots,x_n^{(d)})$, and each $x^{(k)}$, $k\in[d]$, changes on a Cartesian product $\prod_{i=1}^n[-C_i,C_i]$. We show that the L_∞-norm of the d-homogeneous multiple random system polynomial formed by independent symmetric bounded random variables X_k coincides with the L_∞-norm of this multilinear form.

To show that $\|P_h\|_{L_\infty} = \|\sum_{J\in\mathbb{N}_n^d} a_J X_{j_1}^{(1)}\dots X_{j_d}^{(d)}\|_{L_\infty}$, we proof two inequalities, which will give us the desired equality when combined.

Firstly, we note that the inequality $\|P_h\|_{L_\infty} \geqslant \|\sum_{J\in\mathbb{N}_n^d} a_J X_{j_1}^{(1)}\dots X_{j_d}^{(d)}\|_{L_\infty}$ holds true, because the co-domain of random variable $P(X^{(1)},\dots,X^{(d)})$ is included in the co-domain of $P_h(x^{(1)},\dots,x^{(d)})$ almost surely. Note that this holds for arbitrary independent symmetric bounded rvs (X_i) with norm $\|X_i\|_{L_\infty} = C_i > 0$.

Now we prove the inverse inequality. By multilinearity of the form P_h we have that

$$M := \|P_h\|_{L_\infty} = \max_{|x_{j_k}^{(k)}|=C_{j_k}} \left| \sum_{J\in\mathbb{N}_n^d} a_J x_{j_1}^{(1)}\dots x_{j_d}^{(d)} \right| = \sum_{J\in\mathbb{N}_n^d} a_J C_{1,j_1}^*\dots C_{d,j_d}^*,$$

where we note C_{i,j_i}^* equal to C_{j_i} or $-C_{j_i}$, depending on where the maximum is attained.

We consider the following family of sets:

$$\Omega_{i,j_i,\epsilon} := \left\{\omega\in\Omega \mid X_{j_i}^{(i)}(\omega)\in\Delta_{i,j_i,\epsilon}\right\}, \quad i\in[d], j_i\in[n],$$

where by $\Delta_{i,j_i,\epsilon}$ we denote either the interval $[C_{i,j_i}^* - \epsilon, C_{i,j_i}^*]$ or the interval $[C_{i,j_i}^*, C_{i,j_i}^* + \epsilon]$, again, depending on the sign of C_{i,j_i}^*. By definition of essential supremum, we have that $\mathsf{P}(\Omega_{i,j_i,\epsilon}) > 0$.

Let us consider the set

$$\Omega_\epsilon = \bigcap_{i=1}^d \bigcap_{j_i=1}^n \Omega_{i,j_i,\epsilon}.$$

By independence rvs from the system $\{(X_k^{(i)})_k\}_i$, we have that

$$\mathsf{P}(\Omega_\epsilon) = \prod_{i=1}^d \prod_{j_i=1}^n \mathsf{P}(\Omega_{i,j_i,\epsilon}),$$

so that $\mathsf{P}(\Omega_\epsilon) > 0$ as the product of positive measures. By definition of Ω_ϵ we have inclusions

$$\left\{P(X^{(1)},\dots,X^{(d)}) \mid \omega\in\Omega_\epsilon\right\} \subset \left\{P_h \mid x_{j_i}^{(i)}\in\Delta_{i,j_i,\epsilon}\right\} = [M-\delta(\epsilon), M],$$

with some $\delta(\epsilon)$. Moreover, $\delta(\epsilon)\to 0$ with $\epsilon\to 0$ by continuity of P_h.

From here we have that

$$|P(X^{(1)},\dots,X^{(d)}| \geqslant M - \delta(\epsilon)$$

on a set with positive measure. From this we get

$$\|P(X^{(1)},\dots,X^{(d)}\|_{L_\infty} \geqslant \lim_{\epsilon\to 0}\{M-\delta(\epsilon)\} = M.$$

Thus,

$$\begin{aligned}
\|P(X^{(1)},\dots,X^{(d)})\|_{L_\infty} &= \sup_{|x_{j_k}^{(k)}|=C_{j_k}} \left|\sum_J a_J x_{j_1}^{(1)}\dots x_{j_d}^{(d)}\right| = \\
&= \max_{\epsilon_k^{(m)}\in\{\pm 1\}} \left|\sum_J a_J (C_{j_1}\epsilon_{j_1}^{(1)})\dots(C_{j_d}\epsilon_{j_d}^{(d)})\right| = \\
&= \max_{\epsilon_k^{(m)}\in\{\pm 1\}} \left|\sum_J \left(a_J\prod_{l\in J} C_l\right)\epsilon_{j_1}^{(1)}\dots\epsilon_{j_d}^{(d)}\right|.
\end{aligned}$$

The last expression is precisely the L_∞-norm of the d-th degree multiple Rademacher system with modified coefficients $\tilde a_J = a_J \prod_{l\in J} C_l$. Therefore,

$$\|P(X^{(1)},\dots,X^{(d)})\|_{L_\infty} = \left\| \sum_{J\in\mathbb{N}_n^d} \left(a_J \prod_{l\in J} C_l\right) r_J^{\otimes} \right\|_{L_\infty}.$$

□

The following statement follows from Theorem 4.1, Theorem 2.2 and averaging over cyclic permutations of the index k in inequality (3).

Theorem 4.2. *The d-degree homogeneous multiple random system formed by the sequence $X = (X_k)$ of independent symmetric bounded rvs has the RUC property. Moreover, for all $n \in \mathbb{N}$ and $a_J \in \mathbb{R}^d, J \in \mathbb{N}_n^d$ the following inequalities hold:*

$$\left\| \sum_{J=(j_1,j_2,\dots,j_d)\in\mathbb{N}_n^d} a_J X_{j_1}^{(1)} X_{j_2}^{(2)} \dots X_{j_d}^{(d)} \right\|_{L_\infty([0,1]^d)} \geqslant 2^{\frac{1-d}{2}} \max_{k\in[d]} \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{J\in\mathbb{N}_n^d(k,l)} \tilde a_J^2 \right)^{1/2},$$

and

$$\mathsf{E}_\theta \left\| \sum_{J=(j_1,j_2,\dots,j_d)\in\mathbb{N}_n^d} a_J \theta_J X_{j_1}^{(1)} X_{j_2}^{(2)} \dots X_{j_d}^{(d)} \right\|_{L_\infty([0,1]^d)} \leqslant \frac{2^d-1}{d} \sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{J\in\mathbb{N}_n^d(k,l)} \tilde a_J^2 \right)^{1/2},$$

where $(\theta_J)_{J\in\mathbb{N}_n^d} = \pm 1$ is a system of independent symmetric random signs, $\tilde a_J = a_J \prod_{l\in J} C_l$, $C_l = \|X_l\|_{L_\infty} > 0$.

Using the last fact for a homogeneous multiple random system and Lemma 2.1, we can establish the RUC property for homogeneous chaos.

Theorem 4.3. *The d-degree homogeneous chaos formed by the sequence $X = (X_k)$ of independent symmetric bounded rvs, $\|X_k\|_{L_\infty} = C_k > 0$, has the RUC property. Moreover, the following relations are valid with constants depending only on d*

$$\mathsf{E}_\theta \left\| \sum_{J\in\Delta_n^d} \theta_J a_J X_J \right\|_{L_\infty} \asymp \min_\theta \left\| \sum_{J\in\Delta_n^d} \theta_J a_J X_J \right\|_{L_\infty} \asymp \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{\substack{J=(j_1,j_2,\dots,j_d)\in\Delta_n^d:\\ \exists k\in[d]:\ j_k=j}} \tilde a_J^2 \right)^{1/2}, \tag{17}$$

where $(\theta_J)_{J\in\Delta_n^d} = \pm 1$ is a system of independent symmetric random signs, $\tilde a_J = a_J \prod_{l\in J} C_l$, $X_J = X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_d}$.

Proof. For the proof we will use Theorem 4.2 and Lemma 2.1. Let b_J for $J \in \mathbb{N}_n^d$ be defined as following:

$$b_{j_1,\dots,j_d} = \frac{1}{d!} a_{j_{\sigma_1}} \dots a_{j_{\sigma_d}}, \text{if all } j_i \text{ are pairwise different,}$$

where σ is permutation of $[d]$ such that $j_{\sigma_1} < j_{\sigma_2} < \dots < j_{\sigma_d}$, and $b_{j_1,\dots,j_d} = 0$ if there exists a pair (j_{i_1}, j_{i_2}) such that $j_{i_1} = j_{i_2}$ for $i_1 \neq i_2$. These coefficients satisfy conditions of Lemma 2.1, and

$$\sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_d=1}^{n} b_{j_1,\dots,j_d} X_{j_1} \dots X_{j_d} = \sum_{1<i_1<i_2<\dots<i_d} a_{j_1,\dots,j_d} X_{j_1} \dots X_{j_d}.$$

Let $\tilde b_J = b_J \prod_{l\in J} C_l$. By Lemma 2.1 and Theorem 4.2, we get

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{1<i_1<i_2<\dots<i_d} a_{j_1,\dots,j_d} X_{j_1} \dots X_{j_d} \right\|_{L_\infty} &\geqslant c_d \left\| \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_d=1}^{n} b_{j_1,\dots,j_d} X_{j_1}^{(1)} \dots X_{j_d}^{(d)} \right\|_{L_\infty} \geqslant \\ &\geqslant c_d 2^{\frac{1-d}{2}} \max_{k\in[d]} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{J\in\mathbb{N}_n^d(k,j)} \tilde b_J^2 \right)^{1/2} = \\ &= c_d 2^{\frac{1-d}{2}} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{J\in\mathbb{N}_n^d(1,j)} \tilde b_J^2 \right)^{1/2},\end{aligned}$$

where the last equality follows from the symmetry of the system of coefficients $\{\tilde{b}_J\}_{J\in\mathbb{N}_n^d}$. Further, due to the same symmetry,

$$\sum_{J\in\mathbb{N}_n^d(1,j)} \tilde{b}_J^2 = \sum_{J\in\mathbb{N}_n^d:\, j_1=j} \tilde{b}_J^2 = \frac{1}{d} \sum_{\substack{J=(j_1,j_2,\ldots,j_d)\in\mathbb{N}_n^d:\\ \exists k\in[d]:\, j_k=j}} \tilde{b}_J^2 = \frac{1}{d} \sum_{\substack{J=(j_1,j_2,\ldots,j_d)\in\Delta_n^d:\\ \exists k\in[d]:\, j_k=j}} \tilde{a}_J^2.$$

Hence

$$\Big\| \sum_{1<i_1<i_2<\cdots<i_d} a_{j_1,\ldots,j_d} X_{j_1}\ldots X_{j_d} \Big\|_{L_\infty} \geqslant \frac{c_d}{\sqrt{d}2^{\frac{d-1}{2}}} \sum_{j=1}^n \Bigg(\sum_{\substack{J=(j_1,j_2,\ldots,j_d)\in\Delta_n^d:\\ \exists k\in[d]:\, j_k=j}} \tilde{a}_J^2 \Bigg)^{1/2}.$$

To obtain the upper estimate for the expectation E_θ, we cannot directly use the decoupling method. The difficulty arises because moving to separated chaos requires averaging over signs Θ_J by all multi-indices $J\in\mathbb{N}_n^d$, not just ascending ones from Δ_n^d. To overcome this, we use the reasoning following Lemma 2.1 and establish the inequality:

$$\Big\| \sum_{J\in\Delta_n^d} \theta_J a_J X_J \Big\|_{L_\infty} \leqslant \Big\| \sum_{J\in\Delta_n^d} \theta_J a_J X_{j_1}^{(1)} X_{j_2}^{(2)}\ldots X_{j_d}^{(d)} \Big\|_{L_\infty}$$

for each set of signs $\{\theta_J\}_{J\in\Delta_n^d}$. Therefore, by Theorem 4.2, where we put $\tilde{a}_J=0$ for $J\notin\Delta_n^d$,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_\theta \Big\| \sum_{J\in\Delta_n^d} \theta_J a_J X_J \Big\|_{L_\infty} &\leqslant \mathsf{E}_\theta \Big\| \sum_{J\in\Delta_n^d} \theta_J a_J X_{j_1}^{(1)} X_{j_2}^{(2)}\ldots X_{j_d}^{(d)} \Big\|_{L_\infty} \leqslant \\
&\leqslant \frac{2^d-1}{d} \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^n \Bigg(\sum_{J\in\mathbb{N}_n^d(k,j)} \tilde{a}_J^2 \Bigg)^{1/2} = \\
&= \frac{2^d-1}{d} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^d \Bigg(\sum_{\substack{J=(j_1,j_2,\ldots,j_d)\in\Delta_n^d:\\ j_k=j}} \tilde{a}_J^2 \Bigg)^{1/2} \leqslant \\
&\leqslant \frac{2^d-1}{\sqrt{d}} \sum_{j=1}^n \Bigg(\sum_{k=1}^d \sum_{\substack{J=(j_1,j_2,\ldots,j_d)\in\Delta_n^d:\\ j_k=j}} \tilde{a}_J^2 \Bigg)^{1/2} = \\
&= \frac{2^d-1}{\sqrt{d}} \sum_{j=1}^n \Bigg(\sum_{\substack{J=(j_1,j_2,\ldots,j_d)\in\Delta_n^d:\\ \exists k\in[d]:\, j_k=j}} \tilde{a}_J^2 \Bigg)^{1/2}.
\end{aligned}$$

□

Corollary 4.4. *Let $d\geqslant 2$. The d-degree homogeneous chaos is not an unconditional system. This means that there is no constant C such that for all $n\in\mathbb{N}$, $a_J\in\mathbb{R}^d$ and $\theta_J=\pm1$, $J\in\Delta_n^d$, the following inequality holds:*

$$\Big\| \sum_{J\in\Delta_n^d} a_J X_J \Big\|_{L_\infty} \leqslant C \Big\| \sum_{J\in\Delta_n^d} \theta_J a_J X_J \Big\|_{L_\infty}.$$

Similary, the d-degree homogeneous multiple random system is not an unconditional system.

Proof. Without loss of generality, we can assume that $\|X_k\|_{L^\infty}=1$, $k=1,2,\ldots$. Let us take $a_J=1$. Then

$$\Big\| \sum_{J\in\Delta_n^d} a_j X_J \Big\|_{L_\infty} = \Big\| \sum_{J\in\Delta_n^d} X_J \Big\|_{L_\infty} = C_n^d,$$

where $C_n^d=\frac{n!}{d!(n-d)!}$. This follows from the fact that for any $\epsilon>0$

$$\mathsf{P}\Bigg(\prod_{k=1}^n \{X_k>1-\epsilon\} \Bigg) > 0,$$

and from the continuity of the polynomial form

$$\sum_{J\in\Delta_n^d} x_J, \quad x_J = x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_d}.$$

On the other hand, according to (17),

$$\min_{\theta}\left\|\sum_{J\in\Delta_n^d}\theta_J X_J\right\|_{L_\infty} \leqslant C\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{\substack{J=(j_1,j_2,\dots,j_d)\in\Delta_n^d:\\ \exists k\in[d]:\, j_k=j}} 1^2\right)^{1/2} = Cn\sqrt{C_{n-1}^{d-1}},$$

with some constant C that does not depend on n. Since

$$C_n^d \asymp n^d, \quad cn\sqrt{C_{n-1}^{d-1}} \asymp n^{\frac{d+1}{2}},$$

where the equivalence constants depend only on d, the unconditional inequality cannot be satisfied, as for $d \geqslant 2$ we get $d > \dfrac{d+1}{2}$. □

An analogous fact can be established for the d-degree homogeneous multiple system by using a similar argument.

4.2. RUC property for mixed multiple random system and mixed chaos

We will first establish a key property for the L_∞-norm of mixed multiple system polynomial generated by symmetric bounded random variables, analogous to Proposition 3.1 for Rademacher variables.

Proposition 4.5. *Let*

$$S_{sep}(X^{(1)},X^{(2)},\dots,X^{(\frac{d(d+1)}{2})}) = P_1(X^{(1)}) + P_2(X^{(2)},X^{(3)}) + \dots + P_d(X^{(1+\frac{d(d-1)}{2})},X^{(2+\frac{d(d-1)}{2})},\dots,X^{(\frac{d(d+1)}{2})})$$

be a d-degree mixed multiple system polynomial, where $X^{(1)},X^{(2)},\dots X^{(d(d+1)/2)}$ are independent copies of a sequence $X=(X_k)$ of independent symmetric bounded variables. Then,

$$\|S_{sep}\|_{L_\infty} = \|P_1\|_{L_\infty} + \|P_2\|_{L_\infty} + \dots + \|P_d\|_{L_\infty}.$$

The assertion follows easily from the mutual independence of the terms $P_1, P_2, \dots$, and the following simple property.

Lemma 4.6. *Let ξ and η be independent symmetric bounded random variables. Then*

$$\|\xi+\eta\|_{L_\infty} = \|\xi\|_{L_\infty} + \|\eta\|_{L_\infty}.$$

Proof. Let

$$A = \|\xi\|_{L_\infty}, \quad B = \|\eta\|_{L_\infty}.$$

Due to the symmetry of random variables ξ and η, for any $\varepsilon > 0$, events

$$\Omega_{\xi,\varepsilon} := \{\xi\in[A-\varepsilon, A]\} \quad \text{and} \quad \Omega_{\eta,\varepsilon} := \{\eta\in[B-\varepsilon, B]\}$$

have positive measure. From the independence of ξ and η it follows that

$$\mathsf{P}(\Omega_{\xi,\varepsilon}\cap\Omega_{\eta,\varepsilon}) > 0.$$

Moreover,

$$(\xi+\eta)(\Omega_{\xi,\varepsilon}\cap\Omega_{\eta,\varepsilon}) \subset [A+B-2\varepsilon, A+B].$$

Hence

$$\|\xi+\eta\|_{L_\infty} \geqslant \lim_{\varepsilon\to 0}(A+B-2\varepsilon) = A+B.$$

The opposite inequality coincides with the triangle inequality. □

Now, analogously to the proof of Theorem 3.3 from Proposition 4.5 and Theorem 4.2 we conclude that the following is true.

Theorem 4.7. *The mixed multiple random system from the sequence (X_k) of independent symmetric bounded rvs has the RUC property. Moreover, let*

$$S_{sep}(X^{(1)},X^{(2)},\dots,X^{(\frac{d(d+1)}{2})},\Theta) =$$

$$= \Theta_1 P_1(X^{(1)}) + \Theta_2 P_2(X^{(2)}, X^{(3)}) + \ldots + \Theta_d P_d(X^{(1+\frac{d(d-1)}{2})}, X^{(2+\frac{d(d-1)}{2})}, \ldots, X^{(\frac{d(d+1)}{2})}),$$

where

$$\Theta_m P_m := \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_m) \in \mathbb{N}_n^m} \theta_{j_1 j_2 \ldots j_m} a_{j_1 j_2 \ldots j_m} X_{j_1}^{(1+\frac{m(m-1)}{2})} X_{j_2}^{(2+\frac{m(m-1)}{2})} \ldots X_{j_m}^{(\frac{m(m+1)}{2})}.$$

Then

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_\Theta \|S_{sep}(X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(\frac{d(d+1)}{2})}, \Theta)\|_{L_\infty} &\asymp \min_\Theta \|S_{sep}(X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(\frac{d(d+1)}{2})}, \Theta)\|_{L_\infty} \asymp \\ &\asymp \sum_{m=1}^d \max_{k \in [m]} \sum_{l=1}^n \left(\sum_{J \in \mathbb{N}_n^m(k,l)} \tilde{a}_J^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

where Θ is the system of independent signs $\theta = \pm 1$, $\tilde{a}_J = a_J \prod_{l \in J} C_l$, $C_l = \|X_l\|_{L_\infty} > 0$, and a constants in the designated equivalences do not depend on n and real numbers $\{a_{j_1 j_2 \ldots j_m}\}_{m=1}^d$ (but depend on d).

In the special case of mixed chaos of the second degree we obtain the following statement.

Corollary 4.8. *The mixed multiple random system $\{X_k^{(1)}, X_i^{(2)} X_j^{(3)}\}$ from independent symmetric bounded rvs has the RUC property, and we have the following inequalities:*

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_{\theta_k, \theta_{ij}} \left\| \sum_{k=1}^n \theta_k b_k X_k^{(1)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} a_{ij} X_i^{(2)} X_j^{(3)} \right\|_{L_\infty} &\asymp \min_{\theta_k, \theta_{ij}} \left\| \sum_{k=1}^n \theta_k b_k X_k^{(1)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} a_{ij} X_i^{(2)} X_j^{(3)} \right\|_{L_\infty} \asymp \\ &\asymp \sum_{k=1}^n |\tilde{b}_k| + \max \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}^2 \right)^{1/2}, \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ij}^2 \right)^{1/2} \right\}, \end{aligned}$$

where $\tilde{b}_k = C_k b_k, \tilde{a}_{ij} = C_i C_j a_{ij}$, $C_k = \|X_k\|_{L_\infty} > 0$.

To obtain an analogue of Theorem 4.7 for mixed chaos, we first note the following statement, similar to Proposition 4.5.

Proposition 4.9. *Let*

$$S(X) = P_1(X) + P_2(X) + \ldots + P_d(X)$$

be a d-degree mixed chaos polynomial, decomposed into the sum of its homogeneous components $P_m(X)$, where $X = (X_k)$ is a sequence of independent symmetric bounded variables. Then,

$$\|S\|_{L_\infty} \asymp \|P_1\|_{L_\infty} + \|P_2\|_{L_\infty} + \ldots + \|P_d\|_{L_\infty}.$$

Proof. From Corollary 2.5 we obtain

$$\|P_1\|_{L_\infty} + \|P_2\|_{L_\infty} + \ldots + \|P_d\|_{L_\infty} \leqslant d K_d \|S\|_{L_\infty}.$$

The opposite estimate is obtained from the triangle inequality. □

From Proposition 4.9 and Theorem 4.3 we get

Theorem 4.10. *The mixed chaos from the sequence (X_k) of independent symmetric bounded rvs has the RUC property. Morever, let*

$$S(X, \Theta) = \Theta_1 P_1(X) + \Theta_2 P_2(X) + \ldots + \Theta_d P_d(X),$$

where

$$\Theta_m P_m := \sum_{J \in \Delta_n^m} \theta_J a_J X_J, \quad X_J = X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_m}.$$

Then

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_\Theta \|S(X, \Theta)\|_{L_\infty} &\asymp \min_\Theta \|S(X, \Theta)\|_{L_\infty} \asymp \\ &\asymp \sum_{m=1}^d \sum_{j=1}^n \left(\sum_{\substack{J = (j_1, j_2, \ldots, j_m) \in \Delta_n^m : \\ \exists k \in [d] : j_k = j}} \tilde{a}_J^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

where Θ *is the system of independent signs* $\theta = \pm 1$, $\tilde{a}_J := a_J \prod_{l\in J} C_l$, $C_l = \|X_l\|_{L_\infty} > 0$, *and a constants in the designated equivalences do not depend on n and real numbers* $\{\{a_J\}_{J\in\Delta_n^m}\}_{m=1}^d$ *(but depend on d).*

Corollary 4.11. *Let* (X_k) *is a sequence of independent symmetric bounded rvs. We have the following two-sided estimates*

$$\mathsf{E}_{\theta_k,\theta_{i,j}} \left\| \sum_{k=1}^n \theta_k b_k X_k + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \theta_{ij} a_{ij} X_i X_j \right\|_{L_\infty} \asymp \min_{\theta_k,\theta_{i,j}} \left\| \sum_{k=1}^n \theta_k b_k X_k + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \theta_{ij} a_{ij} X_i X_j \right\|_{L_\infty} \asymp$$
$$\asymp \sum_{k=1}^n |\tilde{b}_k| + \max\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^n \tilde{a}_{ij}^2 \right)^{1/2}, \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{a}_{ij}^2 \right)^{1/2} \right\},$$

where $(\theta_k = \pm 1, \theta_{i,j} = \pm 1)$ *is the system of independent signs,* $\tilde{b}_k = C_k b_k, \tilde{a}_{ij} = C_i C_j a_{ij}$, $C_k = \|X_k\|_{L_\infty} > 0$.

Summary

This paper investigates systems composed of products of independent random variables and their properties related to the additive decomposition of other random variables over such systems. These representations are closely related to the well-known Polynomial Chaos Expansion (PCE, see [33]) and are a special case of the generalized polynomial chaos (see [34–36]), which has numerous applications in mathematical modeling and machine learning. We show that for symmetric bounded random variables, these product systems, while failing to be unconditional convergence systems in the space L_∞ of bounded random variables, nonetheless possess the closely related property of Random Unconditional Convergence (RUC). Following the principle of moving from particular and simple cases to more general and complex ones, we sequentially examine the cases of Rademacher random variables (in Section 3) and arbitrary symmetric bounded random variables (in Section 4). We consider two variants of these product systems. In the first, simpler variant, each product involves factors from different independent copies of the generating sequence of random variables (Theorems 3.3, 4.2, and 4.7). In the second variant, each product consists of factors from one common sequence (Theorems 3.6, 4.3, and 4.10), which creates a more complex dependence structure between the elements of the constructed system. We also made a transition from homogeneous systems, where all products consist of the same number of factors (Theorems 2.2, 2.3, 4.2, and 4.3), to mixed systems, which are unions of several homogeneous systems (Theorems 3.3, 3.6, 4.7, and 4.10).

The next stage of our research is to study the behavior of chaoses in arbitrary symmetric spaces. The class of symmetric spaces in which the homogeneous Rademacher chaos forms an unconditional sequence is characterized in papers [27; 28]. However, even for the special case of Rademacher chaos, a similar question regarding the property of random unconditional convergence remains open.

The work was supported by the State Research Programme “Convergence–2025” of the National Academy of Sciences of Belarus (assignment 1.3.05).

References

1. Lindestrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach Spaces I and II*. Heidelberg, Springer Berlin, 1996. https://doi.org/10.1007/978-3-662-53294-2

2. Albiac F., Kalton N. J. *Topics in Banach space theory*. New York, Springer, 2006. https://doi.org/10.1007/0-387-28142-8

3. Vakhania N. N., Tarieladze V. I., Chobanyan S. A. *Probability Distributions on Banach Spaces*. Springer Dordrecht, 1987. https://doi.org/10.1007/978-94-009-3873-1

4. Kahane J.-P. *Some Random Series of Functions, 2nd ed.* Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge, New York, England, 1985.

5. Kashin B. S., Saakyan A. A. *Orthogonal Series.* Translations of Mathematical Monographs, vol. 75. AMS, 1989.

6. Braverman M. Sh. *Independent Random Variables and Rearrangement Invariant Spaces.* London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1994. https://doi.org/10.1017/CBO9780511662348

7. Dilworth S. J. Some probabilistic inequalities with applications to functional analysis in Banach spaces. *Banach spaces*, eds. Bor-Luh Lin and William B. Johnson, AMS Book series Contemporary Mathematics, 1993, vol. 144, pp. 53–67. https://doi.org/10.1090/conm/144

8. Kwapien S., Woyczynski W. *Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple*. Birkhäuser Boston, MA, 1992.

9. Novikov S. Ya. *Sequences of Functions in Symmetric Spaces.* Samara, Samara University, 2008 (in Russian).

10. Astashkin S. V., Sukochev F. A. Independent functions and the geometry of Banach spaces. *Russian Math. Surveys*, 2010, vol. 65, no. 6, pp. 1003–1081. https://doi.org/10.1070/RM2010v065n06ABEH004715

11. Astashkin S. V. Sequences of independent functions and structure of rearrangement invariant spaces. *Russian Math. Surveys,* 2024, vol. 79, no. 3, pp. 375–457. https://doi.org/10.4213/rm10171e

12. Astashkin S. V., Lykov K. V. One property of the multiple Rademacher system and its applications to problems of graph discrepancy. *Russian Math. Surveys,* 2024, vol. 79, no. 4, pp. 727–729. https://doi.org/10.4213/rm10185e

13. Astashkin S. V., Lykov K. V. Random unconditional convergence of Rademacher chaos in L_∞ and sharp estimates for discrepancy of weighted graphs and hypergraphs. *Mathematische Annalen*, 2025, vol. 393, no. 1, pp. 407–438. https://doi.org/10.1007/s00208-025-03257-9

14. Ledoux M., Talagrand M. *Probability in Banach spaces.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1991. https://doi.org/10.1007/978-3-642-20212-4

15. Bartlett P. L., Mendelson S. Rademacher and Gaussian Complexities: Risk Bounds and Structural Results. *Journal of Machine Learning Research*, 2002, vol. 3, pp. 463–482. https://dl.acm.org/doi/10.5555/944919.944944

16. Mohri M., Rostamizadeh A., Talwalkar A. *Foundations of Machine Learning.* MIT Press, 2018.

17. Astashkin S. V. *The Rademacher System in Function Spaces.* Birkhäuser, Switzerland, 2020. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47890-2

18. Billard P., Kwapien, S. Pelchynski A., Samuel Ch. Biorthogonal systems of random unconditional convergence in Banach spaces. *Longhorn Notes. Texas Funct. Anal. Seminar*, Texas, Austin, 1985–1986. pp. 13–35.

19. Kwapien S. Decoupling inequalities for polynomial chaos. *Ann. Probab.*, 1987, vol. 15, no. 3, pp. 1062–1071. https://doi.org/10.1214/aop/1176992081

20. Hebb D. O. *The Organization of Behavior.* New York, Wiley & Sons, 1949.

21. Hopfield J. J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA,* 1982, vol. 79, no. 8, pp. 2554–2558. https://doi.org/10.1073/pnas.79.8.2554

22. Salakhutdinov R., Hinton G. Deep Boltzmann Machine. *Proceedings of the Twelfth International Conference on Artificial Intelligence and Statistics,* PMLR, 2009, vol. 5. pp. 448–455.

23. Talagrand M. *Mean field models for spin glasses.* Berlin, Heidelberg, Springer, 2011. https://doi.org/10.1007/978-3-642-15202-3

24. Talagrand M. *Spin Glasses: A Challenge for Mathematicians. Cavity and Mean Field Models.* Berlin, Heidelberg, Springer, 2003.

25. McGeoch C. C. *Adiabatic Quantum Computation and Quantum Annealing.* Springer Nature Switzerland AG, 2014. https://doi.org/10.1007/978-3-031-02518-1

26. Bonami A. Étude des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$. *Ann. Inst. Fourier*, 1970, vol. 20, pp. 335–402. https://doi.org/10.5802/aif.357

27. Astashkin S. V. Rademacher chaos in symmetric spaces, II. *East J. Approx.*, 2000, vol. 6, no. 1, pp. 71–86.

28. Astashkin S. V., Lykov K. V. On unconditionality of fractional Rademacher chaos in symmetric spaces. *Izvestiya: Mathematics*, 2024, vol. 88, no. 1, pp. 1–17. https://doi.org/10.4213/im9406e

29. De la Pena V. H., Gine E. *Decoupling: from dependence to independence*. Berlin, Springer-Verlag, 1999. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0537-1

30. Szarek S. J. On the best constant in the Khinchin inequality. *Studia Math.*, 1976, vol. 58, no. 2, pp. 197–208.

31. Adamczak R., Prochno J., Strzelecka M., Strzelecki M. Norms of structured random matrices. *Mathematische Annalen*, 2024, vol. 388, no. 4, pp. 3463–3527. https://doi.org/10.1007/s00208-023-02599-6

32. Astashkin S. V., Lykov K. V. Sparse Rademacher chaos in symmetric spaces. *St. Petersburg Math. J.*, 2017, vol. 28, no. 1, pp. 1–20. https://doi.org/10.1090/spmj/1436

33. Winer N. The Homogeneous Chaos. *American Journal of Mathematics*, 1938, vol. 60, no. 4, pp. 897–936. https://doi.org/10.2307/2371268

34. Xiu D., Karniadakis G. E. The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2002, vol. 24, no. 2, pp. 619–644. https://doi.org/10.1137/S1064827501387826

35. Ernst O. G., Mugler A., Starkloff H.-J., Ullmann E. On the convergence of generalized polynomial chaos expansions. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2012, vol. 46, no. 2, pp. 317–339. https://doi.org/10.1051/m2an/2011045

36. Oladyshkin S., Nowak W. Data-driven uncertainty quantification using the arbitrary polynomial chaos expansion. *Reliability Engineering & System Safety*, 2012, vol. 106, pp. 179–190. https://doi.org/10.1016/j.ress.2012.05.002

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Том 33. № 2. С. 73–89

УДК 517.5 EDN: RBMQLB

ОБ ОДНОМ РАЦИОНАЛЬНОМ СИНГУЛЯРНОМ ИНТЕГРАЛЕ ДЖЕКСОНА И АППРОКСИМАЦИЯХ ФУНКЦИЙ МАРКОВА

П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
e-mail: pahamatby@gmail.com, rovba.ea@gmail.com

Поступила: 28.07.2025 **Исправлена:** 10.10.2025 **Принята:** 15.12.2025

Ключевые слова: функции Маркова, рациональные интегральные операторы Фурье–Чебышёва, сингулярный интеграл Джексона, асимптотические оценки, метод Лапласа, точные константы.

Аннотация. Вводится рациональный сингулярный интеграл Джексона, представляющий собой линейную комбинацию рациональных интегральных операторов Фурье–Чебышёва с соответствующей треугольной матрицей коэффициентов и фиксированным количеством геометрически различных полюсов. Устанавливается его интегральное представление.

Исследуются рациональные аппроксимации функций Маркова на отрезке $[-1,\ 1]$ введенным методом. Устанавливается интегральное представление приближений и оценка сверху равномерных приближений.

Изучаются аппроксимации функций Маркова с абсолютно непрерывной мерой, производная которой асимптотически равна некоторой степенной функции. В этом случае найдены оценки сверху поточечных и равномерных приближений и асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений.

Устанавливаются оптимальные значения параметров, при которых обеспечиваются наилучшие равномерные приближения функций Маркова рациональными сингулярными интегралами Джексона. С этой целью решается соответствующая экстремальная задача. Показано, что при специальном выборе параметров равномерные рациональные приближения имеют более высокую скорость убывания в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами. В качестве следствия рассмотрены аппроксимации некоторых элементарных функций, представимых функциями Маркова на отрезке $[-1,\ 1]$.

ON A RATIONAL JACKSON SINGULAR INTEGRAL AND APPROXIMATIONS OF MARKOV FUNCTIONS

P. G. Patseika, Ya. A. Rouba

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus
e-mail: pahamatby@gmail.com, rovba.ea@gmail.com

Received: 28.07.2025 **Revised:** 10.10.2025 **Accepted:** 15.12.2025

Keywords: Markov functions, Fourier–Chebyshev rational integral operators, Jackson singular integral, asymptotic estimates, Laplace method, exact constants.

Abstract. The rational Jackson singular integral is introduced, which is a linear combination of Fourier–Chebyshev rational integral operators with a corresponding triangular matrix of coefficients and a fixed number of geometrically different poles. Its integral representation is established.

Rational approximations of Markov functions on the segment $[-1,\ 1]$ are investigated by the introduced method. An integral representation of approximations and an upper bound of uniform approximations are established.

Approximations of Markov functions with an absolutely continuous measure whose derivative is asymptotically equal to a function with a power singularity are studied. In this case, top-down estimates of pointwise and uniform approximations and an asymptotic expression of the majorant of uniform approximations are found.

Optimal values of the parameters of rational Jackson singular integrals are established, at which the best uniform approximations of Markov functions are provided by this method. For this purpose, the corresponding extreme problem is solved. It is shown that with a special choice of parameters, uniform rational approximations have a higher rate of decrease in comparison with the corresponding polynomial analogues. As a corollary, approximations of some elementary functions represented by Markov functions on the segment $[-1,\ 1]$ are considered.

1. Введение

Пусть μ – положительная борелевская мера с компактным носителем $F = \operatorname{supp}\mu \subset \mathbb{R}$. Преобразование Коши меры μ

$$\hat{\mu}(z) = \int_F \frac{d\mu(t)}{t-z}, \quad z \in \bar{\mathbb{C}} \backslash F,$$

называется функцией Маркова. Функции Маркова голоморфны в $\overline{\mathbb{C}} \backslash F$ и исследование их рациональных аппроксимаций является хорошо известной классической задачей. Одной из первых в этом направлении является работа А. А. Маркова [1]. Позднее данной тематике посвятили свои статьи А. А. Гончар [2], Т. Ганелиус [3], Дж.-Е. Андерссон [4], А. А. Пекарский [5]. Н. С. Вячеславов и Е. П. Мочалина [6] изучили аппроксимации функций Маркова в пространствах Харди $H_p,\ p \in (0, +\infty)$, при определенных условиях на меру μ. А. П. Старовойтовым и Ю. А. Лабыч [7] для функции Маркова, порожденной положительными борелевскими мерами степенного типа, установлена асимптотика поведения строчных последовательностей ее таблицы Паде. Последнее позволило найти точные порядки убывания наилучших приближений функций Маркова рациональными функциями с фиксированным числом полюсов. Отметим недавнюю работу Т. С. Мардвилко [8], в которой исследованы наилучшие равномерные рациональные приближения четного и нечетного продолжения функций со степенной особенностью при помощи функций Маркова. Отметим, что при решении указанных выше задач не применялись методы, основанные на классических рядах Фурье и методах их суммирования.

В работе [9] исследованы аппроксимации функций Маркова в единичном круге частичными суммами рядов Фурье по системам рациональных функций, введенных С. Такенакой [10] и Ф. Мальмквистом [11], а также на отрезке $[-1,\ 1]$ по системам рациональных функций, введенных М. М. Джрбашяном и А. А. Китбаляном [12]. В работе [13] эти исследования были продолжены: найдены асимптотические оценки равномерных рациональных приближений указанными методами при фиксированном числе геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции. Отметим, что впервые аппроксимации с ограничениями на количество геометрически различных полюсов изучались в работах К. Н. Лунгу (см., напр., [14; 15]).

Д. Джексон [16] для решения задачи аппроксимации 2π-периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица, тригонометрическими полиномами, вводит сингулярный интегральный оператор, образом которого является тригонометрический полином. Эта конструкция впоследствии получила название сингулярного интеграла Джексона с ядром Джексона. Полиномиальный тригонометрический сингулярный интеграл Джексона к настоящему времени достаточно хорошо изучен и нашел широкое применение при решении практических задач теории аппроксимаций [17; 18] и других направлений [19; 20]. Г. П. Сафроновой [21] установлено, что сингулярный интеграл Джексона является методом суммирования тригонометрического ряда Фурье с некоторой треугольной матрицей коэффициентов и найдено явное представление этих коэффициентов. Позже А. К. Покало [22] применил найденное представление сингулярного интеграла Джексона для решения задач аппроксимации на ряде функциональных классов. Воспользовавшись результатом Г. П. Сафроновой, в работе [23] было установлено представление сингулярного интеграла Джексона на отрезке $[-1,\ 1]$, ассоциированного с системой полиномов Чебышёва первого рода, линейной комбинацией частичных сумм полиномиального ряда Фурье–Чебышёва:

$$U_{2n}^{(0)}(f,\,x) = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} b_k s_k(f,\,x) + \sum_{k=0}^{n} b_{n+k} s_{n+k}(f,\,x) \right], \quad x \in [-1,\ 1],$$

где

$$\gamma_{n+1} = \frac{2\,(n+1)\,(2(n+1)^2+1)}{3},$$

$$b_k = \begin{cases} -3k^2 + (4n+1)\,k + 2\,(n+1), & k = 0,1,\ldots,n-1, \\ k^2 - k(2n+3) + (n+1)(n+2), & k = n, n+1, \ldots, 2n, \end{cases} \tag{1}$$

$s_k(f,\ x)$ – частичные суммы ряда Фурье–Чебышёва соответствующих степеней. Последнее позволило найти новые аппроксимационные свойства сингулярного интеграла Джексона на классах функций со степенной особенностью на отрезке $[-1,\ 1]$.

В. Н. Русак [24; 25] ввел рациональные интегральные операторы типа Джексона на вещественной оси и исследовал некоторые их аппроксимационные свойства. Впоследствии А. А. Пекарский [26] применил эти операторы для получения новых оценок равномерных рациональных приближений непрерывных функций. Направление исследований, связанное с построением рациональных интегральных операторов, являющихся аналогами известных полиномиальных периодических операторов типа Фурье, Фейера, Джексона, Валле Пуссена, и изучением их аппроксимационных свойств является актуальным и продолжается в трудах других математиков. Е. А. Ровба [27] ввел рациональные интегральные операторы типа Джексона на отрезке $[-1,\ 1]$ и получил оценки равномерных рациональных приближений непрерывных функций этим методом в терминах модулей непрерывности. К. А. Смотрицкий [28] изучил аппроксимационные свойства рациональных интегральных операторов типа Джексона на классах выпуклых на отрезке функций. Им было установлено, что для данного класса функций равномерные приближения в этом случае имеют порядок наилучшего. Основываясь на результатах работы [23], был построен [29] сингулярный интеграл Джексона на отрезке $[-1,\ 1]$, ассоциированный с системой рациональных функций Чебышёва–Маркова с двумя геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости, и изучены его аппроксимационные свойства на классах функций со степенной особенностью.

В 1979 г. Е. А. Ровба [30] ввел рациональный оператор, ассоциированный с системой рациональных функций Чебышёва–Маркова, который является обобщением полиномиального оператора Фурье–Чебышёва и представляет собой рациональную функцию порядка n с произвольным количеством полюсов. Пусть задано произвольное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, где a_k либо являются действительными и $|a_k|<1$, либо попарно комплексно сопряженными. На множестве суммируемых на отрезке $[-1,\ 1]$ с весом $1/\sqrt{1-x^2}$ функций $f(x)$ рассмотрим рациональный интегральный оператор типа Фурье–Чебышёва порядка не выше n (см. [30]):

$$s_n(f,\ x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v)\frac{\sin\left(\dfrac{v-u}{2}+\lambda_n(u,\ v)\right)}{\sin\dfrac{v-u}{2}}\,dv,\quad x=\cos u, \tag{2}$$

где

$$\lambda_n(u,\ v)=\int\limits_u^v \lambda_n(y)\,dy,\quad \lambda_n(y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{1+2|z_k|\cos(y-\arg z_k)+|z_k|^2},\quad z_k=\frac{a_k}{1+\sqrt{1-a_k^2}},\ |z_k|<1.$$

Оператор $s_n: f\to\mathbb{R}_n(A)$, где $\mathbb{R}_n(A)$ – множество рациональных функций вида

$$\frac{p_n(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_kx)},\quad p_n\in\mathbb{N},$$

A – множество параметров $(a_1,\ldots,a_n)$, и $s_n(1,\ x)\equiv 1$. В частности, если положить $a_k=0,\ k=1,\ldots,n$, то $s_n(f,\ x)$ – есть частичная сумма ряда Фурье по многочленам Чебышёва первого рода.

В работе [31] изучены рациональные аппроксимации функции Маркова на отрезке $[-1,\ 1]$ интегральными операторами (2) с фиксированным количеством геометрически различных полюсов. В частности, когда $\operatorname{supp}\mu=[1,a]$, $a>1$, мера μ абсолютно непрерывна на $[1,a]$, $a>1$, и удовлетворяет условиям: $d\mu(t)=\varphi(t)\,dt$ и $\varphi(t)\asymp(t-1)^{\alpha}$ на $[1,a]$, получены асимптотические оценки равномерных приближений в случае четной кратности полюсов аппроксимирующей функции. Установлено, что специальным выбором параметров аппроксимирующей функции достигается более высокая скорость убывания равномерных приближений на изучаемых классах в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами. В [32] изучены аппроксимационные свойства сумм Абеля–Пуассона рациональных интегральных операторов (2) в приближениях функций Маркова. Аналогичная задача для сумм Фейера и Валле Пуссена решена в [33] и [34] соответственно.

Представляет интерес исследовать аппроксимационные свойства сингулярного интеграла Джексона как метода суммирования рациональных интегральных операторов Фурье–Чебышёва (2) на классах функций Маркова. В настоящей работе вводятся суммы рациональных интегральных операторов Фурье–Чебышёва (2) с фиксированным количеством геометрически различных полюсов, представляющие собой сингулярный интеграл Джексона, и изучаются аппроксимации функций Маркова на отрезке $[-1,\ 1]$ этим методом. В работе получены соответствующие оценки равномерных приближений. Установлено, что введенный рациональный сингулярный интеграл Джексона при определенном выборе полюсов обеспечивает скорости равномерных приближений на кассах функций Маркова лучшие в смысле порядка чем соответствующие полиномиальные.

2. Рациональный сингулярный интеграл Джексона

Пусть q – произвольное натуральное число. A_q – есть множество параметров из A таких, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ровно q различных и кратность каждого параметра равна $m, n = mq$, т. е. $A_q = (\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_q, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_q}_{m \text{ раз}})$. Составим сумму

$$U_{2n,q}(f,\ x) = \frac{1}{\gamma_{m+1}} \sum_{k=0}^{2m} b_k s_{kq,q}(f,\ x), \quad x \in [-1,\ 1],\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{3}$$

где коэффициенты b_k и константа Джексона γ_{m+1} определены в (1), $s_{kq,q}(\cdot,\cdot), k = 0, 1, \ldots, 2m,$ – рациональные интегральные операторы Фурье–Чебышёва (2), образом которых являются рациональные функции порядка kq. Выражение (3) естественно назвать рациональным сингулярным интегралом Джексона.

Из представления (3) очевидно, что суммы $U_{2n,q} : f \to \mathbb{R}_{2n}(A_q)$, где $\mathbb{R}_{2n}(A_q)$ – множество рациональных функций вида

$$\frac{\pi_{2n}(x)}{\left(\prod_{k=1}^{q}(1 + a_k x)\right)^{2m}}, \quad a_k = \frac{2z_k}{1 + z_k^2},\ n = mq,\ \pi_{2n}(x) \in \mathbb{P}_{2n}.$$

Причем $U_{2n,q}(1,\ x) \equiv 1$.

Таким образом будем вести речь об аппроксимации рациональными функциями с q геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости кратности $2m$ каждый.

Теорема 2.1. *Для сингулярного интеграла Джексона на отрезке* $[-1,\ 1]$, *ассоциированного с системой рациональных функций Чебышёва–Маркова, с* q *геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости, имеет место интегральное представление*

$$U_{2n,q}(f,\ x) = -\frac{1}{8\pi\gamma_{m+1}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \frac{P_{n,q}(u,\ v)}{\sin\dfrac{v-u}{2}\sin^3\dfrac{\lambda_q(u,\ v)}{2}}\, dv, \quad x = \cos u,\ n = mq, \tag{4}$$

где

$$P_{n,q}(u,\ v) = (m+1)\cos\left(\frac{3\lambda_q(u,\ v)}{2} - \frac{v-u}{2}\right) - 3\cos\left(\frac{\lambda_q(u,\ v)}{2} - \frac{v-u}{2}\right) -$$

$$-(m+1)\cos\left(\frac{\lambda_q(u,\ v)}{2} + \frac{v-u}{2}\right) + 4\cos\left(\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_q(u,\ v) + \frac{v-u}{2}\right) -$$

$$-\cos\left(\left(2m + \frac{3}{2}\right)\lambda_q(u,\ v) + \frac{v-u}{2}\right),$$

величина $\lambda_q(u,\ v)$ *определена в* (2).

Доказательство. Воспользуемся представлением (3). Известно [30], что для рационального интегрального оператора Фурье–Чебышёва порядка $kq, k = 0, 1, 2, \ldots,$ с q геометрически различными полюсами имеет место интегральное представление

$$s_{kq,q}(f,\,x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\cos v)\frac{\zeta\left(\dfrac{\omega_q(\zeta)}{\omega_q(\xi)}\right)^k-\xi\left(\dfrac{\omega_q(\xi)}{\omega_q(\zeta)}\right)^k}{\zeta-\xi}\,dv,$$

где

$$\omega_q(y)=\prod_{k=1}^{q}\frac{y+z_k}{1+z_k y},\qquad \xi=\mathrm{e}^{iu},\ \zeta=\mathrm{e}^{iv},\ x=\cos u. \tag{5}$$

Подставим последнее интегральное представление в (3) и поменяем порядок суммирования и интегрирования. Тогда

$$U_{2n,q}(f,\,x)=\frac{1}{2\pi\gamma_{m+1}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\cos v)}{\zeta-\xi}\left[\zeta\sum_{k=0}^{2m}b_k\left(\frac{\omega_q(\zeta)}{\omega_q(\xi)}\right)^k-\xi\sum_{k=0}^{2m}b_k\left(\frac{\omega_q(\xi)}{\omega_q(\zeta)}\right)^k\right]dv,$$

где коэффициенты $b_k,\ k=0,1,\ldots,2m$, определены в (1).
Учитывая известные равенства

$$\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q},\qquad \sum_{k=0}^{n}kq^k=q\frac{1+nq^{n+1}-(n+1)\,q^n}{(1-q)^2},\quad q\neq 1,$$

$$\sum_{k=0}^{n}k^2q^k=q\frac{1+q-(n+1)^2q^n+\left(2n^2+2n-1\right)q^{n+1}-n^2q^{n+2}}{(1-q)^3},\quad q\neq 1,$$

чтобы прийти к представлению (4) достаточно выполнить соответствующие преобразования. □

Отметим, что интегральное представление сумм Джексона, установленное в теореме 2.1, позволяет ассоциировать исследуемый метод суммирования с рациональными интегральными операторами, и, в частности, с рациональным сингулярным интегралом Джексона.

Следствие 2.2. *Для сингулярного интеграла Джексона на отрезке $[-1,\ 1]$, ассоциированного с системой полиномов Чебышёва первого рода, имеет место интегральное представление*

$$U_{2n,q}(f,\,x)=\frac{1}{\pi\gamma_{n+1}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\cos v)\left(\frac{\sin\dfrac{n+1}{2}(v-u)}{\sin\dfrac{v-u}{2}}\right)^4dv,\quad x=\cos u.$$

Доказательство. Достаточно в представлении (4) положить $z_k=0, k=1,2,\ldots,q$. Тогда $n=m$, $q=1$, $\lambda_q(u,\,v)=v-u$ и останется выполнить некоторые тригонометрические преобразования. □

Изучим приближения функции Маркова $\hat{\mu}(x)$ на отрезке $[-1,\ 1]$ сингулярным интегралом Джексона (3). Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon_{2n}(x,\,A_q)=\hat{\mu}(x)-U_{2n,q}(\hat{\mu},\,x),\quad x\in[-1,\ 1],$$

$$\varepsilon_{2n}(A_q)=\left\|\hat{\mu}(x)-U_{2n,q}(\hat{\mu},\,x)\right\|_{C[-1,\ 1]},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Будем полагать, что $\operatorname{supp}\mu\subset[1,+\infty)$ и

$$\int\frac{d\mu(t)}{t-1}<\infty. \tag{6}$$

Теорема 2.3. *Пусть мера μ удовлетворяет условию* (6), *а мера ν определяется соотношением*

$$d\nu(y)=\frac{4y^2}{1-y^2}d\mu(\eta(y)),\quad y\in(0,1],\quad \eta(y)=\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right). \tag{7}$$

Тогда для равномерных приближений функций Маркова $\hat{\mu}(x)$ на отрезке $[-1,\ 1]$ суммами Джексона (3) *имеет место оценка сверху*

$$\varepsilon_{2n}(A_q)\leqslant\varepsilon_{2n}^{*}(A_q),\quad n\in\mathbb{N}, \tag{8}$$

где

$$\varepsilon_{2n}^{*}(A_q)=\frac{1}{\gamma_{m+1}}\int\limits_{\operatorname{supp}\nu}\frac{(m+1)-3|\omega_q(y)|-(m+1)|\omega_q(y)|^2+4|\omega_q(y)|^{m+2}-|\omega_q(y)|^{2m+3}}{(1-|\omega_q(y)|)^3(1-y)}|d\nu(y)|.$$

Доказательство. Рассмотрим приближения на отрезке $[-1,1]$ функций Маркова рациональным интегральным оператором типа Фурье–Чебышёва (2) в случае q геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции

$$\delta_{kq}(x,A_q)=\hat{\mu}(x)-s_{kq,q}(\hat{\mu},x),\quad x\in[-1,\ 1],\ k=1,2,\ldots,\ 2m,\ n=mq.$$

Умножим на коэффициенты $b_k,\ k=0,1,\ldots,2n$, правую и левую части последнего равенства, просуммируем по k от 0 до $2m$ и разделим их на γ_{m+1}. Тогда

$$\frac{1}{\gamma_{m+1}}\sum_{k=0}^{2m}b_k\delta_{kq}(x,\ A_q)=\hat{\mu}(x)-\frac{1}{\gamma_{m+1}}\sum_{k=0}^{2m}b_k s_{kq,q}(\hat{\mu},\ x)=\varepsilon_{2n}(x,\ A_q),\quad x\in[-1,\ 1],\tag{9}$$

где $\varepsilon_{2n}(x,\ A_q)$ – приближения функций Маркова суммами Джексона.

С другой стороны, известно [31], что в рассматриваемом случае для приближений $\delta_{kq}(x,\ A_q)$ имеет место оценка сверху

$$|\delta_{kq}(x,\ A_q)|\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{\operatorname{supp}\nu}\frac{|\omega_q(y)|^k\,|d\nu(y)|}{\sqrt{1-2y\cos u+y^2}},$$

где $\xi=e^{iu}$, $x=\cos u$, $\nu(y)$ из (7). Подставив последнее представление в соотношение (9), воспользовавшись формулами для конечных сумм, которые были применены при доказательстве теоремы 2.1, и выполнив соответствующие преобразования, получим

$$|\varepsilon_{2n}(x,\ A_q)|\leqslant\frac{1}{\gamma_{m+1}}\int\limits_{\operatorname{supp}\nu}\frac{(m+1)-3|\omega_q(y)|-(m+1)|\omega_q(y)|^2+4|\omega_q(y)|^{m+2}-|\omega_q(y)|^{2m+3}}{(1-|\omega_q(y)|)^3}\times$$

$$\times\frac{|d\nu(y)|}{\sqrt{1-2y\cos u+y^2}},\quad x=\cos u.\tag{10}$$

Из последнего неравенства очевидным образом следует оценка (8). □

3. Приближения сингулярным интегралом Джексона функций Маркова в случае меры специального вида

При исследовании приближений функций Маркова часто рассматривается случай, когда производная меры $\mu(t)$ слабо эквивалентна некоторой степенной функции [4; 5]. Решим подобную задачу. Пусть мера μ абсолютно непрерывна, $\operatorname{supp}\mu\in[1,\ a], a>1,\ d\mu(t)\sim(t-1)^{\gamma}\,dt, \gamma>0$. Изучим оценку (8) в этом случае. Будем полагать также, что параметры аппроксимирующей рациональной функции $a_k\in[0,1),\ k=1,2,\ldots,q$, и для большей наглядности сделаем замену $z_k\mapsto-\alpha_k,\ k=1,2\ldots$ $\ldots,q,\ \alpha_k\in[0,1)$, где $z_k=a_k/(1+\sqrt{1-a_k^2}),\ k=1,2,\ldots,q$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\operatorname{supp}\nu\in[d,1],\ 0<d<1, d=a-\sqrt{a^2-1},\ a>1,\ d\mu(t)=\varphi(t)dt$ *и* $\varphi(t)\sim$ $\sim(t-1)^{\gamma},\gamma\in(0,\ 1)$. *Тогда в условиях теоремы* 2.3 *для приближений функции* $\hat{\mu}(x)$ *сингулярным интегралом Джексона справедливы*

1) *оценка поточечных приближений*

$$|\varepsilon_{2n}(x,\ A_q)|\leqslant\frac{2^{1-\gamma}}{\gamma_{m+1}}\int\limits_{d}^{1}\frac{(1-y)^{2\gamma}y^{-\gamma}}{\sqrt{1-2yx+y^2}}\times$$

$$\times\frac{(m+1)-3|\omega_q(y)|-(m+1)|\omega_q(y)|^2+4|\omega_q(y)|^{m+2}-|\omega_q(y)|^{2m+3}}{(1-|\omega_q(y)|)^3}\,dy,\tag{11}$$

2) *оценка равномерных приближений*

$$\varepsilon_{2n}(A_q)\leqslant\varepsilon_{2n}^{*}(A_q),\quad n\in\mathbb{N},\tag{12}$$

где

$$\varepsilon_{2n}^*(A_q) = \frac{2^{1-\gamma}}{\gamma_{m+1}} \int_d^1 (1-y)^{2\gamma-1} y^{-\gamma} \times$$
$$\times \frac{(m+1) - 3|\omega_q(y)| - (m+1)|\omega_q(y)|^2 + 4|\omega_q(y)|^{m+2} - |\omega_q(y)|^{2m+3}}{(1-|\omega_q(y)|)^3} \, dy, \tag{13}$$

$$\omega_q(y) = \prod_{k=1}^{q} \frac{y-\alpha_k}{1-\alpha_k y}, \quad \alpha_k \in [0,1), \; m = 0,1,\ldots.$$

Доказательство. В случае $d\mu(t) = \varphi(t)dt$ и $\varphi(t) \sim (t-1)^\gamma$, из оценки (10) и условия (7) сразу же приходим к соотношению (11). Оценка (12) легко следует из соотношения (11). □

В теореме 3.1 положим $\alpha_k = 0$, $k = 1,2,\ldots, q$. Тогда $A_q = (0,0,\ldots,0) = O$ и величина $\varepsilon_{2n}(O) = \varepsilon_{2n}^{(0)}$ представляет собой равномерные приближения функций Маркова с мерой $\hat{\mu}$, удовлетворяющей условиям теоремы 3.1, сингулярным интегралом Джексона, ассоциированным с системой полиномов Чебышёва первого рода.

Следствие 3.2. *Справедлива оценка сверху*

$$\varepsilon_{2n}^{(0)} \leqslant \frac{2^{1-\gamma}}{\gamma_{n+1}} \int_d^1 (1-y)^{2\gamma-1} y^{-\gamma} \frac{(n+1) - 3y - (n+1)y^2 + 4y^{n+2} - y^{2n+3}}{(1-y)^3} \, dy, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. Асимптотика мажоранты равномерных приближений

Исследуем асимптотическое поведение при $n \to \infty$ величины (13). С этой целью в интеграле выполним замену переменного по формуле $y = (1-u)/(1+u)$. Тогда

$$\varepsilon_{2n}^*(A_q) = \frac{2^{\gamma+1}}{\gamma_{m+1}} \int_0^D \mu_\gamma(u) \frac{(m+1) - 3|\pi_q(u)| - (m+1)|\pi_q(u)|^2 + 4|\pi_q(u)|^{m+2} - |\pi_q(u)|^{2m+3}}{(1-|\pi_q(u)|)^3} \, du,$$

где

$$\mu_\gamma(u) = \frac{u^{2\gamma-1}}{(1+u)(1-u^2)^\gamma}, \quad \pi_q(u) = \prod_{k=1}^{q} \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}, \quad \beta_k = \frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}, \; D = \frac{1-d}{1+d}, \; D \in (0,1).$$

Отметим, что в рассматриваемом случае для каждого значения $n \in \mathbb{N}$ может выбираться соответствующий набор параметров $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q)$, т. е. в общем случае $\alpha_k = \alpha_k(n)$ $k = 1,\ 2,\ \ldots, q$. При этом будем полагать, что выполняется следующее условие:

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{q} (1-\alpha_k) = \infty. \tag{14}$$

Из сказанного следует, что для любого значения величины $d = a - \sqrt{a^2-1}$ существует такое m_0, $m_0 = 1,2,\ldots$, что при $m > m_0$ будут $\alpha_k \in [d,\ 1)$, $k = 1,2,\ldots,q$. Эти ограничения будем учитывать в дальнейших рассуждениях. В этом случае без нарушения общности можно полагать параметры β_k упорядоченными следующим образом: $0 < \beta_q < \ldots < \beta_1 < D < 1$.

Теорема 4.1. *Для мажоранты равномерных приближений функции Маркова с мерой в условиях теоремы* 3.1 *рациональным сингулярным интегралом Джексона имеют место асимптотические равенства*

$$\varepsilon_{2n}^*(A_q) \sim \frac{3}{2(m+1)^2+1} \left[\eta(\gamma) \frac{(m+1)^{2-2\gamma}}{\left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}} + \Phi_n^{(\gamma)}(A_q) \right], \quad m \to \infty, \tag{15}$$

где

$$\eta(\gamma)=\begin{cases}\dfrac{2^{2-\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma}-1)}{(1-2\gamma)(2-2\gamma)(3-2\gamma)}, & \gamma\in(0,\ 1/2),\\ \sqrt{2}\ln 2, & \gamma=1/2,\\ \dfrac{2^{3-3\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{2\gamma-1}-1)}{(2\gamma-1)(2-2\gamma)(3-2\gamma)}, & \gamma\in(1/2,\ 1);\end{cases}$$

$$\Phi_n^{(\gamma)}(A_q)=\int\limits_{\beta_q}^{D}\mu_\gamma(u)\frac{1+|\pi_q(u)|}{(1-|\pi_q(u)|)^2}\,du; \tag{16}$$

$\Gamma(\cdot)$ *– гамма-функция Эйлера;* $n=mq$.

Доказательство. Мажоранту равномерных приближений представим в виде

$$\varepsilon_{2n}^*(A_q)=\frac{2^{\gamma+1}}{\gamma_{m+1}}[I_n^{(1)}(A_q)+I_n^{(2)}(A_q)+I_n^{(3)}(A_q)],\quad n\in\mathbb{N}, \tag{17}$$

где

$$I_n^{(1)}(A_q)=\int\limits_0^{\beta_q}\mu_\gamma(u)\frac{(m+1)-3\pi_q(u)-(m+1)\pi_q^2(u)+4\pi_q^{m+2}(u)-\pi_q^{2m+3}(u)}{(1-\pi_q(u))^3}\,du,$$

$$I_n^{(2)}(A_q)=\sum_{j=1}^{q-1}\int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j}\mu_\gamma(u)\frac{(m+1)-3|\pi_q(u)|-(m+1)|\pi_q(u)|^2+4|\pi_q(u)|^{m+2}-|\pi_q(u)|^{2m+3}}{(1-|\pi_q(u)|)^3}\,du,$$

$$I_n^{(3)}(A_q)=\int\limits_{\beta_1}^{D}\mu_\gamma(u)\frac{(m+1)-3|\pi_q(u)|-(m+1)|\pi_q(u)|^2+4|\pi_q(u)|^{m+2}-|\pi_q(u)|^{2m+3}}{(1-|\pi_q(u)|)^3}\,du.$$

Изучим по отдельности асимптотическое поведение при $n\to\infty$ каждого из этих выражений. Так, для исследования интеграла $I_n^{(1)}(A_q)$ воспользуемся методами, предложенными в [35]. Продифференцируем интеграл $I_n^{(1)}(A_q)$ три раза по параметру m. Тогда находим

$$\frac{\partial I_n^{(1)}(A_q)}{\partial m}=\int\limits_0^{\beta_q}\mu_\gamma(u)\frac{1-\pi_q^2(u)+4\ln\pi_q(u)\pi_q^{m+2}(u)-2\ln\pi_q(u)\pi_q^{2m+3}(u)}{(1-\pi_q(u))^3}\,du,$$

$$\frac{\partial^2 I_n^{(1)}(A_q)}{\partial m^2}=4\int\limits_0^{\beta_q}\mu_\gamma(u)\frac{(\ln\pi_q(u))^2\pi_q^{m+2}(u)-(\ln\pi_q(u))^2\pi_q^{2m+3}(u)}{(1-\pi_q(u))^3}\,du,$$

$$\frac{\partial^3 I_n^{(1)}(A_q)}{\partial m^3}=4\left[\int\limits_0^{\beta_q}\mu_\gamma(u)\left(\frac{\ln\pi_q(u)}{1-\pi_q(u)}\right)^3 e^{(m+2)S(u)}\,du-2\int\limits_0^{\beta_q}\mu_\gamma(u)\left(\frac{\ln\pi_q(u)}{1-\pi_q(u)}\right)^3 e^{(2m+3)S(u)}\,du\right],$$

где

$$S(u)=\sum_{k=1}^{q}\ln\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}.$$

Для исследования асимптотического поведения интегралов справа в предыдущем равенстве воспользуемся методом Лапласа [36; 37]. Функция $S(u)$ убывает на отрезке $[0,\ \beta_q]$, и, следовательно, достигает своего максимального значения при $u=0$. Учитывая разложение

$$S(u)=-2u\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}+o(u),$$

и асимптотическое равенство

$$\mu_\gamma(u)\left(\frac{\ln\pi_q(u)}{1-\pi_q(u)}\right)^3\sim -u^{2\gamma-1},$$

справедливые при $u \to 0$, для некоторого малого $\varepsilon > 0$ будем иметь

$$\frac{\partial^3 I_n^{(1)}(A_q)}{\partial m^3} \sim -4\left[\int\limits_0^{\varepsilon} u^{2\gamma-1}\mathrm{e}^{-2(m+2)u\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}}\,du - 2\int\limits_0^{\varepsilon} u^{2\gamma-1}\mathrm{e}^{-2(2m+3)u\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}}\,du\right],\quad m\to\infty.$$

Выполнив в первом интеграле справа замену переменного по формуле $2(m+2)u\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\mapsto u$, а во втором замену переменного $2(2m+3)u\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\mapsto u$, получим

$$\frac{\partial^3 I_n^{(1)}(A_q)}{\partial m^3} \sim \frac{-4}{\left(2(m+2)\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}}\int\limits_0^{\varepsilon(m+2)\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}} u^{2\gamma-1}\mathrm{e}^{-u}\,du+$$

$$+\frac{8}{\left(2(2m+3)\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}}\int\limits_0^{\varepsilon(2m+1)\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}} u^{2\gamma-1}\mathrm{e}^{-u}\,du,\quad m\to\infty.$$

Принимая во внимание, что

$$\int\limits_0^{+\infty} u^{2\gamma-1}\mathrm{e}^{-u}\,du = \Gamma(2\gamma),\quad 2\gamma>0,$$

получим

$$\frac{\partial^3 I_n^{(1)}(A_q)}{\partial m^3} \sim \frac{-4\Gamma(2\gamma)}{\left(2\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}}\left[\frac{1}{(m+2)^{2\gamma}}-\frac{2}{(2m+3)^{2\gamma}}\right],\quad m\to\infty.$$

Чтобы вернуться к асимптотическому выражению первоначального интеграла, проинтегрируем правую и левую части последнего асимптотического равенства три раза по параметру m. Тогда

$$I_n^{(1)}(A_q) \sim \begin{cases} \dfrac{2^{2-2\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma}-1)(m+1)^{3-2\gamma}}{(1-2\gamma)(2-2\gamma)(3-2\gamma)\left(\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}}, & \gamma\in(0,\ 1/2),\\ \dfrac{(m+1)^2\ln 2}{\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_k}}, & \gamma=1/2,\\ \dfrac{2^{3-4\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{2\gamma-1}-1)(m+1)^{3-2\gamma}}{(2\gamma-1)(2-2\gamma)(3-2\gamma)\left(\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}}, & \gamma\in(1/2,\ 1). \end{cases} \tag{18}$$

Исследуем выражение $I_n^{(2)}(A_q)$ (см. (17)). Поскольку

$$I_n^{(2)}(A_q) = (m+1)\sum_{j=1}^{q-1}\int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j}\mu_\gamma(u)\frac{1+|\pi_q(u)|}{(1-|\pi_q(u)|)^2}\,du - 3\sum_{j=1}^{q-1}\int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j}\mu_\gamma(u)\frac{|\pi_q(u)|}{(1-|\pi_q(u)|)^3}\,du+$$

$$+4\sum_{j=1}^{q-1}\int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j}\mu_\gamma(u)\frac{|\pi_q(u)|^{m+2}}{(1-|\pi_q(u)|)^3}\,du - \sum_{j=1}^{q-1}\int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j}\mu_\gamma(u)\frac{|\pi_q(u)|^{2m+3}}{(1-|\pi_q(u)|)^3}\,du,$$

то очевидно, что

$$I_n^{(2)}(A_q) = (m+1)\sum_{j=1}^{q-1}\int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j}\mu_\gamma(u)\frac{1+|\pi_q(u)|}{(1-|\pi_q(u)|)^2}\,du + \delta_n^{(1)}(A_q),\quad n\to\infty, \tag{19}$$

где $\delta_n^{(1)}(A_q)$ имеет заведомо больший порядок малости в сравнении с главным членом асимптотического разложения.

Рассуждая аналогичным образом в отношении интеграла $I_n^{(3)}(A_q)$, заключаем, что

$$I_n^{(3)}(A_q) = (m+1)\int_{\beta_1}^{D} \mu_\gamma(u)\frac{1+|\pi_q(u)|}{(1-|\pi_q(u)|)^2}\,du + \delta_n^{(2)}(A_q), \quad n\to\infty. \tag{20}$$

Из представления (17) с учетом найденных асимптотических равенств (18), (19) и (20), получим (15). Доказательство теоремы 4.1 завершено. □

Следствие 4.2. *В условиях теоремы* 3.1 *для равномерных приближений функции Маркова* $\hat{\mu}(x)$ *на отрезке* $[-1,1]$ *сингулярным интегралом Джексона, ассоциированным с системой полиномов Чебышёва первого рода, справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon_{2n}^{(0)} \sim \frac{\eta_0(\gamma)}{(n+1)^{2\gamma}}, \quad n\to\infty, \tag{21}$$

где

$$\eta_0(\gamma) = 3\begin{cases} \dfrac{2^{1-\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma}-1)}{(1-2\gamma)(2-2\gamma)(3-2\gamma)}, & \gamma\in(0,\ 1/2), \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln 2, \quad \gamma=1/2, \\ \dfrac{2^{2-3\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{2\gamma-1}-1)}{(2\gamma-1)(2-2\gamma)(3-2\gamma)}, & \gamma\in(1/2,\ 1). \end{cases}$$

Доказательство. Следует непосредственно из асимптотических равенств (15), если положить $a_k = 0, k = 1,2\ldots,q$. □

Обратим внимание, что в отличие от результатов, полученных в теореме 4.1, в следствии 4.2 содержится именно асимптотическая оценка равномерных приближений, а не мажоранты, поскольку в полиномиальном случае максимум приближений достигается при $x = 1$.

5. Наилучшие приближения рациональным сингулярным интегралом Джексона

Представляет интерес минимизировать правые части соотношений (15) посредством выбора оптимального для каждой задачи набора параметров A_q^*, т. е. искать наилучшую оценку равномерных приближений функции Маркова $\hat{\mu}(x)$ на отрезке $[-1,1]$ в условиях теоремы 3.1 сингулярным интегралом Джексона (3). Положим

$$\varepsilon_{2n,q} = \inf_{A_q} \varepsilon_{2n}(A_q), \quad \varepsilon_{2n,q}^* = \inf_{A_q} \varepsilon_{2n}^*(A_q).$$

Отметим, что из неравенства (12) следует справедливость соотношения

$$\varepsilon_{2n,q} \leqslant \varepsilon_{2n,q}^*, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Ввиду последней оценки в дальнейшем будем вести речь об асимптотическом выражении мажоранты равномерных приближений.

Теорема 5.1. *Для мажоранты равномерных приближений функции Маркова мерой в условиях теоремы* 3.1 *на отрезке* $[-1,\ 1]$ *сингулярным интегралом Джексона справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon_{2n,q}^* \sim \frac{\nu(\gamma,\ q)}{(n+1)^{2\left(1-\frac{(1-\gamma)^q}{1+\gamma}\right)}}, \quad n\to\infty, \tag{22}$$

где

$$\nu(\gamma,\ q) = \frac{3(c(\gamma))^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}(1+\gamma)(\eta(\gamma))^{\frac{(1-\gamma)^{q-1}}{1+\gamma}}}{2^{\frac{1}{1+\gamma}}(4\gamma)^{1-\frac{(1-\gamma)^{q-1}}{1+\gamma}}(1-\gamma)^{\frac{1-(1-\gamma)^{q-1}}{\gamma(1+\gamma)}}}\, q^{2\left(1-\frac{(1-\gamma)^q}{1+\gamma}\right)}, \quad c(\gamma) = \int_0^D \frac{u^{2\gamma+1}\,du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma}, \tag{23}$$

величина $\eta(\gamma)$ *определена в* (15).

Доказательство. Исследуем асимптотические равенства (15). Очевидно, что при постоянных $\beta_k,\ k=1,2,\dots,q$, порядок в этих соотношениях не отличается от полиномиального. Будем полагать, что $\beta_k=\beta_k(n)\to 0, \beta_{k+1}=o(\beta_k),\ n\to\infty$, с выполнением условия (14). В этом случае нетрудно получить, что при $m\to\infty$ справедливы асимптотические равенства

$$\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\sim\frac{1}{\beta_q},\quad 1-\prod_{k=1}^{j}\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\prod_{k=j+1}^{q}\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\sim\frac{2u}{\beta_j},\quad j=1,2,\dots,q,\ u\in[\beta_{j+1},\ \beta_j],$$

$$1-\prod_{k=1}^{q}\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\sim\frac{2\beta_1}{u},\quad u\in[\beta_1,\ 1].$$

При этом из (16) находим, что

$$\Phi_n^{(\gamma)}(A_q)\sim\frac{1}{2(2-2\gamma)}\sum_{j=1}^{q-1}\frac{\beta_j^2}{\beta_{j+1}^{2-2\gamma}}+\frac{c(\gamma)}{2\beta_1^2},\quad n\to\infty,$$

где $c(\gamma)$ определена в (23).
Асимптотические равенства (15) при этом примут вид

$$\varepsilon_{2n,q}^*(A_q)\sim\frac{m+1}{(2-2\gamma)\gamma_{m+1}}\left[2(2-2\gamma)\eta(\gamma)(m+1)^{2-2\gamma}\beta_q^{2\gamma}+\sum_{j=1}^{q-1}\frac{\beta_j^2}{\beta_{j+1}^{2-2\gamma}}+\frac{(2-2\gamma)c(\gamma)}{\beta_1^2}\right],\ m\to\infty. \tag{24}$$

При каждом фиксированном $\gamma>0$ правые части асимптотического равенства (24) представляют собой функции переменных $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_q)$, непрерывные в каждой точке q-мерного куба $[\delta,1]^q$, где $\delta=\delta(n)>0$ – некоторая величина, зависящая от n и при любом n ограничивающая множество параметров $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_q)$ слева. Согласно теореме Вейерштрасса правые части указанных равенств имеют строгий минимум при некотором $\beta^*=(\beta_1^*,\ \beta_2^*,\dots,\beta_q^*)\in[\delta,1]^q$. Причем поскольку $\beta_k=$ $=1,\ k=1,\dots,q$, соответствует полиномиальному случаю, а при $\beta_k(n)\to 0,\ n\to\infty$, с достаточно большой скоростью правые части в (24) неограниченно растут, то можно предположить, что β^* – внутренняя точка куба $[\delta,1]^q$. Для того чтобы найти оптимальный набор β^* для соответствующего асимптотического равенства решим экстремальную задачу

$$\varepsilon_{2n,q}^*(A_q)\underset{A_q}{\longrightarrow}\inf.$$

Тогда в квадратной скобке равенства (24) приходим к задаче

$$\Psi^{(\gamma)}(A_q)=c_q\beta_q^{2\gamma}+\frac{\beta_{q-1}^2}{\beta_q^{2-2\gamma}}+\frac{\beta_{q-2}^2}{\beta_{q-1}^{2-2\gamma}}+\dots+\frac{\beta_2^2}{\beta_3^{2-2\gamma}}+\frac{\beta_1^2}{\beta_2^{2-2\gamma}}+\frac{c_1}{\beta_1^2}\underset{A_q}{\longrightarrow}\inf,$$

где для краткости положено

$$c_q=2(2-2\gamma)\eta(\gamma)(m+1)^{2-2\gamma},\quad c_1=(2-2\gamma)c(\gamma).$$

Функция $\Psi^{(\gamma)}(A_q)$ переменных $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_q)$ непрерывно дифференцируема в кубе $(0,1)^q$. Естественно искать точку минимума этой функции там, где выполняется необходимое условие экстремума: $\partial\Psi^{(\gamma)}(A_q)/\partial\beta_k=0,\ k=1,2,\dots,q$. Несложные вычисления приводят к системе уравнений

$$\begin{cases}\gamma c_q\beta_q^{2\gamma-1}-(1-\gamma)\dfrac{\beta_{q-1}^2}{\beta_q^{3-2\gamma}}=0,\\ \dfrac{\beta_{q-1}}{\beta_q^{2-2\gamma}}-(1-\gamma)\dfrac{\beta_{q-2}^2}{\beta_{q-1}^{3-2\gamma}}=0,\\ \qquad\dots\\ \dfrac{\beta_2}{\beta_3^{2-2\gamma}}-(1-\gamma)\dfrac{\beta_1^2}{\beta_2^{3-2\gamma}}=0,\\ \dfrac{\beta_1}{\beta_2^{2-2\gamma}}-\dfrac{c_1}{\beta_1^3}=0,\end{cases} \tag{25}$$

из которой находим, что с оптимальным набором параметров целевая функция

$$\Psi^{(\gamma)}(A_q^*) = \frac{1+\gamma}{\gamma}\frac{c_1}{\beta_1^{*2}}. \tag{26}$$

Осталось найти параметр β_1^*. С этой целью снова обратимся к системе (25). Последовательно находим

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\beta_{q-1}^*}{\beta_q^*}\right)^2 = \dfrac{\gamma c_q}{1-\gamma}, \\ \left(\dfrac{\beta_{q-2}^*}{\beta_{q-1}^*}\right)^2 = \dfrac{1}{1-\gamma}\left(\dfrac{\beta_{q-1}^*}{\beta_q^*}\right)^{2-2\gamma} = \dfrac{1}{1-\gamma}\left(\dfrac{\gamma c_q}{1-\gamma}\right)^{1-\gamma}, \\ \dots \\ \left(\dfrac{\beta_1^*}{\beta_2^*}\right)^2 = \dfrac{(\gamma c_q)^{(1-\gamma)^{(q-2)}}}{(1-\gamma)^{\frac{1-(1-\gamma)^{(q-1)}}{\gamma}}}. \end{cases} \tag{27}$$

С другой стороны, из последнего уравнения в (25) получим

$$\beta_2^* = \left(\frac{\beta_1^{*4}}{c_1}\right)^{\frac{1}{2-2\gamma}}.$$

Подставив β_2 в последнее равенство системы (27), после необходимых преобразований будем иметь

$$\beta_1^* = c_1^{\frac{1}{2(1+\gamma)}}\left(\frac{(\gamma c_q)^{(1-\gamma)^{(q-2)}}}{(1-\gamma)^{\frac{1-(1-\gamma)^{(q-1)}}{\gamma}}}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}.$$

При найденном β_1^*, в представлении (26) получим

$$\Psi^{(\gamma)}(A_q^*) = \frac{1+\gamma}{\gamma}c_1^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}\left(\frac{(\gamma c_q)^{(1-\gamma)^{(q-2)}}}{(1-\gamma)^{\frac{1-(1-\gamma)^{(q-1)}}{\gamma}}}\right)^{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}, \quad \gamma\in(0,1).$$

Возвращаясь к первоначальным значениям параметров c_1 и c_q, из последнего соотношения и (24) находим, что

$$\varepsilon_{2n,q}^*(A_q,\, U_{2n,q}) \sim \frac{3(c(\gamma))^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}(1+\gamma)(\eta(\gamma))^{\frac{(1-\gamma)^{q-1}}{1+\gamma}}}{2^{\frac{1}{1+\gamma}}(4\gamma)^{1-\frac{(1-\gamma)^{q-1}}{1+\gamma}}(1-\gamma)^{\frac{1-(1-\gamma)^{q-1}}{\gamma(1+\gamma)}}}\frac{1}{(m+1)^{2\left(1-\frac{(1-\gamma)^q}{1+\gamma}\right)}}, \quad m\to\infty.$$

Теперь, учитывая, что $n = mq$, придем к асимптотическим равенствам (22). □

Замечание 5.2. *Сравнивая результаты теоремы* 5.1 *и асимптотических равенств* (21)*, приходим к выводу, что скорость равномерных рациональных аппроксимаций функции Маркова с мерой в условиях теоремы* 3.1 *сингулярным интегралом Джексона оказывается выше соответствующих полиномиальных аналогов.*

6. Аппроксимации элементарных функций

Многие элементарные функции можно представить в виде комбинаций функций Маркова. Рассмотрим пример такой функции и в качестве следствия теоремы 5.1 найдем точную константу и порядок ее приближений сингулярными интегралами Джексона (3).

Функция $f(z) = (z-1)^\gamma$, $\gamma\in(0,+\infty)\backslash\mathbb{N}$, является голоморфной в области $\mathbb{C}\backslash(1,+\infty)$. Стандартное применение интегральной формулы Коши приводит к соотношению

$$(z-1)^\gamma = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Omega}\frac{(\xi-1)^\gamma}{\xi-z}\,d\xi, \quad z\in\Omega,$$

где Ω – круг радиуса $a>1$ с центром в начале координат и разрезом по отрезку $[1,a]$. Из последней формулы легко получить (см. [4; 5]), что при $|z|<a$, $z\overline{\in}(1,a)$, справедливо равенство

$$(1-x)^{\gamma}=\hat{\mu}_1(x)+g(x), \tag{28}$$

где

$$\hat{\mu}_1(x)=-\frac{\sin\pi\gamma}{\pi}\int\limits_1^a\frac{(t-1)^{\gamma}}{t-x}\,dt,\quad g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=a}\frac{(1-\xi)^{\gamma}}{\xi-x}\,d\xi.$$

Функция $\hat{\mu}_1(x)$, $x\in[0,\ 1]$, – есть функция, которая удовлетворяет условию теоремы 3.1. Поэтому

$$\varepsilon^*_{2n,q}(\hat{\mu}_1(x))\sim\frac{\sin\pi\gamma}{\pi}\frac{\nu(\gamma,\ q)}{(n+1)^{2\left(1-\frac{(1-\gamma)^q}{1+\gamma}\right)}},\quad n\to\infty,$$

где величина $\nu(\gamma,\ q)$ определена в формулировке теоремы 5.1.

Исследуем приближения функции $g(x)$ сингулярным интегралом Джексона (3). Имеем

$$\varepsilon_{2n,q}(g,\ x,\ A_q)=\frac{1}{\gamma_{m+1}}\sum_{k=0}^{2m}b_k\delta_{kq,q}(g,\ x,\ A_q),\quad x\in(-1,\ 1), \tag{29}$$

где

$$\delta_{kq,q}(g,\ x,\ A_q)=g(x)-s_{kq,q}(g,\ x,\ A_q)=\frac{1}{(2\pi)^2 i}\int\limits_{|\xi|=a}\frac{(1-\xi)^{\gamma}}{\xi-x}I_{kq}(x,\ \xi)\,d\xi,$$

– приближения функции $g(x)$ рациональным интегральным оператором Фурье–Чебышёва (2) с набором параметров A_q,

$$I_{kq}(x,\ \xi)=\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos u-\cos v}{\xi-\cos v}\left(\zeta\frac{\omega_q^k(\zeta)}{\omega_q^k(z)}-z\frac{\omega_q^k(z)}{\omega_q^k(\zeta)}\right)\frac{dv}{\zeta-z},\quad \zeta=e^{iv},\ z=e^{iu},\ x=\cos u,$$

величина $\omega_q(\cdot)$ определена в (5). Известно [32], что

$$|\delta_{kq,q}(g,\ x,\ A_q)|\leqslant c(a,\ \gamma)\lambda^k,\quad \lambda<1,$$

$c(a,\ \gamma)$ – некоторая величина, не зависящая от k. Из последней оценки и равенства (29) получим

$$|\varepsilon_{2n,q}(g,\ x,\ A_q)|\leqslant\frac{1}{\gamma_{m+1}}\sum_{k=0}^{2m}b_k|\delta_{kq,q}(g,\ x,\ A_q)|\leqslant\frac{c(a,\ \gamma)}{\gamma_{m+1}}\sum_{k=0}^{2m}b_k\lambda^k,\quad m\in\mathbb{N}.$$

Воспользовавшись формулами для конечных сумм, которые применялись при доказательстве теоремы 2.1, нетрудно получить, что справедлива оценка

$$|\varepsilon_{2n,q}(g,\ x,\ A_q)|\leqslant O\left(\frac{1}{(m+1)^2}\right),\quad m\in\mathbb{N}.$$

Другими словами, равномерные приближения функции $g(x)$ сингулярным интегралом Джексона убывают со скоростью большего порядка малости в сравнении со скоростью аппроксимации функции $\hat{\mu}_1(x)$. Следовательно, из равенства (28) находим

$$\varepsilon^*_{2n,q}((1-x)^{\gamma})=\varepsilon^*_{2n}(\hat{\mu}_1(x))+O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right),\quad n\to\infty.$$

Следствие 6.1 (Аппроксимация функции $(1-x)^{\gamma}$). *Для равномерных рациональных приближений функции $(1-x)^{\gamma}$, $\gamma\in(0,\ 1)$, на отрезке $[-1,\ 1]$ рациональным сингулярным интегралом Джексона с q геометрически различными полюсами справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon^*_{2n,q}((1-x)^{\gamma})=\frac{\sin\pi\gamma}{\pi}\frac{\nu(\gamma,\ q)}{(n+1)^{2\left(1-\frac{(1-\gamma)^q}{1+\gamma}\right)}}+O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right),\quad n\to\infty, \tag{30}$$

где величина $\nu(\gamma,\ q)$ определена в формулировке теоремы 5.1.

При этом из следствия 4.2 заключаем, что для полиномиальных приближений возможно добиться лишь

$$\varepsilon_{2n}^{(0)}((1-x)^{\gamma}) = O\left(\frac{1}{n^{2\gamma}}\right), \quad n \to \infty.$$

Известно [38, с. 96], что наилучшие равномерные полиномиальные приближения функций со степенной особенностью обладают следующим свойством:

$$E_{2n}(|x|^{2\gamma}; [-1,\ 1]) = \frac{1}{2^{\gamma}} E_n((1-x)^{\gamma}; [-1,\ 1]).$$

Рассуждая аналогичным образом, из асимптотического равенства (30) находим, что

$$\varepsilon_{4n,2q}^{*}(|x|^{s}) \sim \frac{\mu(s,\ q)}{(n+1)^{2\left(1-\frac{(2-s)^{q}}{2^{q-1}(2+s)}\right)}}, \quad s \in (0,\ 2),\ n \to \infty,$$

где величина $\mu(s,\ q)$ может быть выписана в явном виде. В частности, при $q=1$ приходим к равномерной оценке аппроксимации функции $|x|^{s}$, $s \in (0,\ 2)$, на отрезке $[-1,\ 1]$ рациональным сингулярным интегралом Джексона с двумя геометрически различными полюсами:

$$\varepsilon_{2n,2}^{*}(|x|^{s}) \sim \frac{\mu(s,\ 1)}{(n+1)^{\frac{4s}{2+s}}}, \quad n \to \infty.$$

Этот результат содержится в [29] в случае приближений функции $|x|^{s}$, $s \in (0,\ 2)$, сингулярным интегралом Джексона, ассоциированным с системой алгебраических дробей Чебышёва–Маркова с двумя геометрически различными полюсами.

7. Заключение

В работе изучены аппроксимации функций Маркова на отрезке $[-1,\ 1]$ рациональными функциями с ограничениями на количество геометрически различных полюсов. Методом приближений выступают рациональные сингулярные интегралы Джексона, ассоциированные с системой алгебраических дробей Чебышёва–Маркова с фиксированным количеством геометрически различных полюсов. Для введенного метода рациональной аппроксимации установлено интегральное представление.

Рассмотрены аппроксимации функции Маркова с абсолютно непрерывной мерой, производная которой асимптотически равна функции со степенной особенностью. В этом случае найдены оценки сверху поточечных и равномерных приближений, асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений.

Установлены значения параметров, при которых обеспечиваются наилучшие равномерные приближения этим методом. В качестве следствия рассмотрены рациональные аппроксимации сингулярным интегралом Джексона некоторых элементарных функций на отрезке, представимых функциями Маркова.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований «Конвергенция–2025» (№ ГР 20212046).

Литература

1. *Марков А. А.* Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.: Гостехиздат, 1948. С. 106–119.

2. *Гончар А. А.* О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций // Матем. сб. 1978. Т. 105 (147), № 2. С. 147–163.

3. *Ganelius T.* Ortogonal polynomials and rational approximation of holomorphic function // Studies in Pure Mathematics (To the Memory of Paul Turan) / ed. P. Erdos. Basel, Birkhauser Verlag, 1978. P. 237–243.

4. *Andersson J.-E.* Best Rational Approximation to Markov Functions // J. Approx. Theory. 1994. Vol. 76, N 1. P. 219–232.

5. *Пекарский А. А.* Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, № 2. С. 121–132.

6. *Vyacheslavov N. S., Mochalina E. P.* Rational approximations of functions of Markov–Stieltjes type in Hardy spaces // Mosc. Univ. Math. Bull. 2008. Vol. 63, N 4. P. 125–134.

7. *Старовойтов А. П., Лабыч Ю. А.* Рациональная аппроксимация функций Маркова, порожденных борелевскими мерами степенного типа // Проблемы физики, математики и техники. 2009. Т. 1, № 1. С. 69–73.

8. *Мардвилко Т. С.* Равномерная рациональная аппроксимация нечетного и четного преобразований Коши // Матем. сб. 2025. Т. 216, № 2. С. 110–127.

9. *Пекарский А. А., Ровба Е. А.* Равномерные приближения функций Стилтьеса посредством ортопроекции на множество рациональных функций // Матем. зам. 1999. Т. 65, вып. 3. С. 362–368.

10. *Takenaka S.* On the orthogonal functions and a new formula of interpolations // Jpn. J. Math. 1925. Vol. 2, N 1. P. 129–145.

11. *Malmquist F.* Sur la détermination d’une classe functions analytiques par leurs dans un ensemble donné de points // Compte Rendus Sixiéme Congrés math. scand. Kopenhagen, Denmark, 1925. P. 253–259.

12. *Джрбашян М. М., Китбалян А. А.* Об одном обобщении полиномов Чебышёва // Доклады АН Армянской ССР. 1964. Т. 38, № 5. С. 263–270.

13. *Rovba E. A., Mikulich E. G.* Constants in rational approximation of Markov–Stieltjes functions with fixed number of poles // Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control. 2013. Vol. 1, N 148. P. 12–20.

14. *Лунгу К. Н.* О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов // Матем. сб. 1971. Т. 86(128), № 2(10). С. 314–324.

15. *Лунгу К. Н.* О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов // Сиб. матем. журн. 1984. Т. XXV, № 2. С. 150–159.

16. *Jackson D.* The theory of approximation. Colloq. Publ. Amer. Math. Soc. Vol. XI. 1930. 184 p.

17. *Schurer F., Steutel F. W.* On the degree of approximation of functions in with operators of the Jackson type // J. Approx. Theory. 1979. Vol. 27, N 2. P. 153–178.

18. *Wafi A.* Saturation of local approximation by linear positive operators of Jackson type // Indian J. Pure Appl. Math. 1980. Vol. 11, N 9. P. 1194–1201.

19. *Алексеев В. Г.* Ядра типа Джексона и их применение к построению фильтров низких частот // Проблемы передачи информации. 1994. Т. 30, № 1. С. 97–102.

20. *Алексеев В. Г.* Ядра типа Джексона и Джексона–Валле Пуссена и их вероятностные применения // Теория вероятности и ее применение. 1996. Т. 41, № 1. С. 170–177.

21. *Сафронова Г. П.* О методе суммирования расходящихся рядов, связанном с сингулярным интегралом Джексона // Доклады АН СССР. 1950. Т. 73, № 2. С. 277–278.

22. *Покало А. К.* Об одном классе линейных методов суммирования рядов Фурье дифференцируемых функций // Весці Акадэміі навук Беларускай ССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1969. № 2. С. 48–49.

23. *Поцейко П. Г.* Об одном представлении сингулярного интеграла Джексона и аппроксимации функции $|x|^s$ на отрезке $[-1,\ 1]$ // Веснік Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2019. Т. 9, № 2. С. 22–38.

24. *Русак В. Н.* О приближении рациональными функциями на вещественной оси // Изв. АН БССР. Сер. физ.-тех. наук. 1974. № 1. С. 22–28.

25. *Русак В. Н.* О порядке приближения положительными рациональными операторами // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. 1975. № 3. С. 39–46.

26. *Пекарский А. А.* Чебышевские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке // Матем. сб. 1987. Т. 133(175), № 1(5). С. 86–102.

27. *Ровба Е. А.* Рациональные интегральные операторы на отрезке // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 1996. № 1. С. 34–39.

28. *Смотрицкий К. А.* О приближении выпуклых функций рациональными интегральными операторами на отрезке // Весник БГУ. Сер. 1. 2005. № 3. С. 64–70.

29. *Ровба Е. А., Поцейко П. Г.* Об одном рациональном сингулярном интеграле Джексона на отрезке // Докл. НАН Беларуси. 2019. Т. 63, № 4. С. 398–407.

30. *Ровба Е. А.* Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 11. С. 968–971.

31. *Patseika P. G., Rouba Y. A., Smatrytski K. A.* On one rational integral operator of Fourier–Chebyshev type and approximation of Markov functions // J. BSU, Math. Inform. 2020. Vol. 2. P. 6–27.

32. *Поцейко П. Г., Ровба Е. А.* О рациональных суммах Абеля–Пуассона на отрезке и аппроксимациях функций Маркова // Журн. БГУ. Математика. Информатика. 2021. Т. 3. С. 6–24.

33. *Поцейко П. Г., Ровба Е. А.* О рациональных аппроксимациях функции Маркова на отрезке суммами Фейера с фиксированным количеством полюсов // Труды Института математики. 2022. Т. 30, № 1–2. С. 57–77.

34. *Поцейко П. Г., Ровба Е. А.* Суммы Валле Пуссена рациональных интегральных операторов Фурье–Чебышёва и аппроксимации функции Маркова // Алгебра и анализ. 2023. Т. 35, № 5. С. 183–208.

35. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, Гл. ред. Физ.-мат. лит-ры, 1989. 480 с.

36. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979. 320 с.

37. *Федорюк М. В.* Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Гл. ред. Физ.-мат. лит-ры, 1987. 544 с.

38. *Бернштейн С. Н.* Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. М.; Л.: Гл. ред. общетехн. лит-ры, 1937. Ч. 1. 200 с.

References

1. Markov A. A. *Selected Works on the Theory of Continued Fractions and the Theory of Functions Deviating Least from Zero*. Moscow, Gostehizdat, 1948, pp. 106–119 (in Russian).

2. Gonchar A. A. On the speed of rational approximation of some analytic functions *Math. USSR-Sb.*, 1978. vol. 34, iss. 2, pp. 131–145 (in Russian).

3. Ganelius T. Ortogonal polynomials and rational approximation of holomorphic function. *Studies in Pure Mathematics (To the Memory of Paul Turan)*, ed. P. Erdos. Basel, Birkhauser Verlag, 1978, pp. 237–243.

4. Andersson J.-E. Best Rational Approximation to Markov Functions. *J. Approx. Theory*, 1994, vol. 76, iss. 1, pp. 219–232.

5. Pekarskii A. A. Best uniform rational approximations of Markov functions. *St. Petersburg Math. J.*, 1996, vol. 7, iss. 2, pp. 277–285.

6. Vyacheslavov N. S., Mochalina E. P. Rational approximations of functions of Markov–Stieltjes type in Hardy spaces. *Mosc. Univ. Math. Bull.*, 2008, vol. 63, iss. 4, pp. 125–134.

7. Starovoitov A. P., Labych Yu. A. Rational approximation of Markov functions generated by Borel measures of power type. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki*, 2009, vol. 1, iss. 1, pp. 69–73 (in Russian).

8. Mardvilko T. S. Uniform rational approximation of the odd and even Cauchy transforms. *Sbornik: Mathematics*, 2025, vol. 216, iss. 2, pp. 239–256. https://doi.org/10.4213/sm10116e

9. Pekarskii A. A., Rovba E. A. Uniform approximations of Stieltjes functions by orthogonal projection on the set of rational functions. *Mathematical Notes*, 1999, vol. 65, pp. 302–307.

10. Takenaka S. On the orthogonal functions and a new formula of interpolations. *Jpn. J. Math.*, 1925, vol. 2, iss. 1, pp. 129–145.

11. Malmquist F. Sur la détermination d'une classe functions analytiques par leurs dans un ensemble donné de points. *Compte Rendus Sixiéme Congrés math. scand. Kopenhagen, Denmark*, 1925, pp. 253–259.

12. Dzhrbashyan M. M., Kitbalyan A. A. On a generalization of Chebyshev polynomials. *Doklady AN Armyanskoi SSR*, 1964, vol. 38, iss. 5, pp. 263–270 (in Russian).

13. Rovba E. A., Mikulich E. G. Constants in rational approximation of Markov–Stieltjes functions with fixed number of poles. *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control*, 2013, vol. 1, iss. 148, pp. 12–20.

14. Lungu K. N. On the best approximations by rational functions with a fixed number of poles. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1971, vol. 86(128), iss. 2(10), pp. 314–324 (in Russian).

15. Lungu K. N. On the best approximations by rational functions with a fixed number of poles. *Siberian Mathematical Journal*, 1984. vol. XXV, iss. 2. pp. 150–159 (in Russian).

16. Jackson D. *The theory of approximation. Colloq. Publ. Amer. Math. Soc. Vol. XI*, 1930. 184 p.

17. Schurer F., Steutel F. W. On the degree of approximation of functions in with operators of the Jackson type. *J. Approx. Theory*, 1979. vol. 27, iss. 2, pp. 153–178.

18. Wafi A. Saturation of local approximation by linear positive operators of Jackson type. *Indian J. pure appl. Math.*, 1980, vol. 11, iss. 9, pp. 1194–1201.

19. Alekseev V. G. Jackson-type kernels and their application to the construction of low-pass filters. *Problemy peredachi informatsii*, 1994, vol. 30, iss. 1, pp. 97–102 (in Russian).

20. Alekseev V. G. Jackson and Jackson–Vallee Poussin-type kernels and their probabilistic applications. *Teoriya veroyatnosti i ee primenenie*, 1996, vol. 41, iss. 1, pp. 170–177 (in Russian).

21. Safronova G. P. On the method of summation of divergent series related to the singular Jackson integral. *Doklady AN SSSR*, 1950, vol. 73, iss. 2, pp. 277–278 (in Russian).

22. Pokalo A. K. On one class of linear methods for summing Fourier series of differentiable functions. *Vestsi Akademii navuk Belaruskai SSR. Ser. fiz.-mat. navuk*, 1969, vol. 2, pp. 48–49 (in Russian).

23. Potseiko P. G. On one representation of the singular Jackson integral and the approximation of the function $|x|^s$ on the segment $[-1,\ 1]$. *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and Control*, 2019, vol. 9, iss. 2, pp. 22–38 (in Russian).

24. Rusak V. N. On approximation by rational functions on the real axis. *Izv. AN BSSR. Ser. fiz.-tekh. nauk*, 1974, vol. 1, pp. 22–28 (in Russian).

25. Rusak V. N. On the order of approximation by positive rational operators. *Izv. AN BSSR. Ser. fiz.-tekh. nauk*, 1975, iss. 3. pp. 39–46 (in Russian).

26. Pekarskii A. A. Chebyshev rational approximations in a circle, on a circle and on a segment. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1988, vol. 61, iss. 1, pp. 87–102.

27. Rovba E. A. Rational integral operators on a segment. *Vestn. BGU. Ser. 1, Fizika. Matematika. Informatika*, 1996, no. 1, pp. 34–39 (in Russian).

28. Smotritskii K. A. On the approximation of convex functions by rational integral operators on a segment. *Vesnik BGU. Ser. 1.*, 2005, no. 3, pp. 64–70 (in Russian).

29. Rovba E. A., Potseiko P. G. On a rational singular Jackson integral on a segment. *Dokl. NAN Belarusi*, 2019, vol. 63, no. 4, pp. 398–407 (in Russian).

30. Rovba E. A. On one direct method in rational approximation. *Docl. AN BSSR*, 1979, vol. 23, iss. 11, pp. 968–971 (in Russian).

31. Patseika P. G., Rouba Y. A., Smatrytski K. A. On one rational integral operator of Fourier–Chebyshev type and approximation of Markov functions. *J. BSU, Math. Inform*, 2020, vol. 2, pp. 6–27.

32. Potseiko P. G., Rovba E. A. On rational Abel–Poisson sums on a segment and approximations of Markov functions. *J. BSU, Math. Inform*, 2021, vol. 3, pp. 6–24.

33. Potseiko P. G., Rovba E. A. On rational approximations of the Markov function on a segment by Fejer sums with a fixed number of poles. *Trudy Instituta matematiki*, 2022, vol. 30, iss. 1–2, pp. 57–77 (in Russian).

34. Potseiko P. G., Rovba E. A. Valleé Poussin sums of Fourier–Chebyshev rational integral operators and approximations of the Markov function. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2024, vol. 35, iss. 5, pp. 879–896. https://doi.org/10.1090/spmj/1834.

35. Sidorov Yu. V., Fedoryuk M. V., Shabunin M. I. *Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable*. Moscow, Nauka, Gl. red. Fiz.-mat. lit-ry, 1989. 480 p. (in Russian).

36. Evgrafov M. A. *Asymptotic Estimates and Integer Functions*. Moscow, Nauka, 1979. 320 p. (in Russian).

37. Fedoryuk M. V. *Asymptotics. Integrals and Series*. Moscow, Gl. red. Fiz.-mat. lit-ry, 1987. 544 p. (in Russian).

38. Bernshtein S. N. *Extreme Properties of Polynomials and the Best Approximation of Continuous Functions of One Real Variable. Part 1*. Moscow, Leningrad, The main editorial office of general technical literature, 1937. 200 p. (in Russian).

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Том 33. № 2. С. 90–95

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMIC SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

УДК 517.9 EDN: SWKPWB

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИРРЕГУЛЯРНЫМ ДОПУСТИМЫМ МНОЖЕСТВОМ – НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ

А. К. Деменчук, Е. К. Макаров

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
e-mail: demenchuk@im.bas-net.by, jcm@im.bas-net.by

Поступила: 09.10.2025 **Исправлена:** 13.11.2025 **Принята:** 15.12.2025

Ключевые слова: линейная система управления, периодическое решение, управление асинхронным спектром, иррегулярное допустимое множество, условие разрешимости.

Аннотация. Рассматривается линейная периодическая система управления с постоянной матрицей при управлении. Программное управление является периодическим, причем его период несоизмерим с периодом матрицы коэффициентов. Допустимое множество таких периодических управлений названо иррегулярным. Ставится задача выбора такого управления из указанного допустимого множества, чтобы теперь уже у квазипериодической системы появилось периодическое решение с заданным спектром частот, период которого совпадает с периодом управления. Поставленая задача названа задачей управления асинхронным спектром с иррегулярным допустимым множеством. Приводится необходимое условие ее разрешимости.

THE PROBLEM OF CONTROL OF THE ASYNCHRONOUS SPECTRUM OF LINEAR PERIODIC SYSTEMS WITH AN IRREGULAR FEASIBLE SET – A NECESSARY CONDITION FOR SOLVABILITY

A. K. Demenchuk, E. K. Makarov

Institute of Mathematic of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
e-mail: demenchuk@im.bas-net.by, jcm@im.bas-net.by

Received: 09.10.2025 **Revised:** 13.11.2025 **Accepted:** 15.12.2025

Keywords: linear control system, periodic solution, asynchronous spectrum control, irregular feasible set, solvability condition.

Abstract. A linear periodic control system with a constant control matrix is considered. The program control is periodic, and its period is incommensurate with the period of the coefficient matrix. The feasible set of such periodic controls is called irregular. The problem is posed of selecting a control from this feasible set so that the now quasiperiodic system has a periodic solution with a given frequency spectrum whose period coincides with the control period. This problem is called the asynchronous spectrum control problem with an irregular feasible set. A necessary condition for its solvability is given.

1. Введение

Управление сложными системами самой различной природы, такими как беспилотные летательные аппараты, радиоэлектронные устройства, эпидемиологические модели и др., требует разработки соответствующего математического аппарата. Одной из многих возникающих при этом задач, связанных с периодическими процессами (см., напр. [1; 2], и др.), является задача управления асинхронным спектром [3], которая состоит в следующем. Пусть управляемая система описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

правая часть которого обеспечивает существование и единственность решений и периодична или почти периодична по t. Управление u принимает значения в некотором допустимом множестве, определяемом постановкой конкретной задачи. Задачу выбора такого управления u, чтобы у данного уравнения появились нерегулярные периодические решения, спектр частот которых содержит заданное подмножеством L, названа задачей управления спектром нерегулярных колебаний (асинхронным спектром) с целевым множеством частот L.

Вопросы разрешимости сформулированной задачи применительно к линейным периодическим системам с программным управлением того же периода изучались в работах [4–6] и др. Вполне естественно ожидать, что задача управления асинхронным спектром допускает модифицированные варианты, связанные с выбором иных видов управления. Например, в монографии [7, гл. III] и др. рассматривался случай синтеза управления в виде линейной по фазовым переменным обратной связи.

В настоящей работе впервые формулируется задача управления асинхронным спектром периодических систем, где в качестве допустимого множества выступают периодические функции, период которых несоизмерим с периодом системы.

2. Предварительные сведения

Приведем необходимые для замкнутости изложения понятия теории периодических и квазипериодических скалярных функций, которые без труда переносятся на векторно- и матричнозначные функции. Пусть конечное множество действительных чисел $(\omega_1)^{-1},\dots,(\omega_k)^{-1}$ рационально линейно независимо. Непрерывная функция $g(t)$ называется квазипериодической с периодами $\omega_1,\dots,\omega_k$, если найдется непрерывная функция k переменных $G^*(t_1,\dots,t_k)$, периодическая по t_j с периодом ω_j $(j=\overline{1,m})$, которая является диагональной для исходной функции, т. е.

$$g(t)\equiv G^*(t,\dots,t).$$

Числа $2\pi/\omega_1,\dots,2\pi/\omega_k$ образуют базис частот квазипериодической функции $f(t)$. Квазипериодическими будут, в частности, тригонометрические многочлены с рационально линейно независимыми частотами. Например, функция $f(t)=\sin 2\pi t+\cos(2\pi/\sqrt{2})t$ является квазипериодической с периодами $\omega_1=1$ и $\omega_2=\sqrt{2}$. Очевидно, что периодические функции являются подмножеством квазипериодических и имеют одночастотный базис.

Для непрерывной ω-периодической функции $f(t)$ среднее значение – это постоянная величина

$$\hat{f}=\frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} f(\tau)d\tau,$$

а осциллирующая часть определяется равенством

$$\tilde{f}(t)=f(t)-\hat{f}.$$

Показателем Фурье (частотой) функции $f(t)$ называется действительное число μ такое, что хотя бы один из интегралов

$$\int\limits_0^{\omega} f(t)\cos\mu t dt$$

или

$$\int\limits_0^{\omega} f(t)\sin\mu t dt$$

отличен от нуля. Множество показателей Фурье периодической функции образует ее спектр.

Через $\mathrm{rank}_{\mathrm{row}}\tilde{H}$ обозначим строчный ранг некоторой периодической матрицы $H(t)$, т. е. наибольшее число ее линейно независимых столбцов. Подобным образом можно определить и столбцовый ранг этой матрицы $\mathrm{rank}_{\mathrm{col}}H$. Отметим, что в общем случае строчный и столбцовый ранги матрицы $H(t)$ не обязаны совпадать. Действительно, для матрицы

$$H(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 2\sin t \\ \cos t & 2\cos t \end{pmatrix}$$

имеем $\operatorname{rank}_{\mathrm{row}} H = 2$, а $\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} H = 1$. В стационарном случае введенные ранги, очевидно, будут совпадать. Будем говорить, что $H(t)$ – матрица неполного столбцового ранга, если ее столбцовый ранг меньше числа столбцов.

Рассмотрим квазипериодическую систему

$$\frac{dz}{dt} = g(t,z) + h(t,z), \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

где вектор-функции g и h периодические по первому аргументу с периодами ω и Ω соответственно, причем отношение этих периодов иррационально.

Определение 2.1. Периодическое решение $z = z(t)$ с периодом Ω данной системы называется частично нерегулярным [8], а его частотный спектр – частично асинхронным.

3. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

в которой $A(t)$ – непрерывная ω-периодическая $(n \times n)$-матрица; B – постоянная $(n \times m)$-матрица; u – управление. В качестве управляющего воздействия $u(\cdot)$ в системе (1) будем использовать непрерывные на вещественной оси Ω-периодические m-вектор-функции такие, что числа ω и Ω несоизмеримы. Допустимые множества периодических функций такого рода будем называть иррегулярными.

Задача управления частично асинхронным спектром с целевым множеством L и иррегулярным допустимым множеством состоит в следующем: выбрать такое программное управление

$$u = U(t) \tag{2}$$

из указанного допустимого множества, чтобы система

$$\dot{x} = A(t)x + Bu(t) \tag{3}$$

имела нетривиальное частично нерегулярное решение $x = x(t)$ периода Ω с заданным спектром частот L.

Сформулированная задача является принципиально новой, поскольку в силу выбора указанного управления система (3) будет не периодической, а квазипериодической с двумя базисными частотами.

4. Основной результат

Укажем необходимое условие разрешимости поставленной задачи. Справедлива

Теорема 4.1. *Пусть задача управления асинхронным спектром системы* (1) *с иррегулярным допустимым множеством имеет решение. Тогда осциллирующая составляющая матрицы коэффициентов имеет неполный столбцовый ранг, т. е. выполняется оценка*

$$\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} \tilde{A} = n - d, \quad 1 \leqslant d < n. \tag{4}$$

Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что задача управления асинхронным спектром системы (1) с иррегулярным допустимым множеством разрешима, а условие (4) не имеет места. Другими словами, найдется Ω-периодический вектор (2) такой, что система (3) будет иметь нетривиальное решение $x = x(t)$ того же периода, причем матрица $\tilde{A}(t)$ имеет полный столбцовый ранг, т. е. имеет место равенство

$$\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} \tilde{A} = n. \tag{5}$$

Разложим в ряд Фурье Ω-периодический вектор $x(t)$

$$x(t) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m \exp\left(\frac{2\pi i m}{\Omega} t\right),$$

где

$$x_m = \frac{1}{\Omega}\int_0^{\Omega} x(\tau)\exp\left(-\frac{2\pi i m}{\Omega}\tau\right) d\tau.$$

С учетом полученного разложения запишем произведение

$$\left(A(t) - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} A(\tau)d\tau\right) x(t) \sim \left(A(t) - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} A(\tau)d\tau\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m \exp\left(\frac{2\pi i m}{\Omega} t\right). \tag{6}$$

Разложим в ряд Фурье ω-периодическую матричную функцию

$$A(t) - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} A(\tau)d\tau \sim \sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{\infty} A_k \exp\left(\frac{2\pi i k}{\omega} t\right), \tag{7}$$

где

$$A_k = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} A(\tau)\exp\left(-\frac{2\pi i k}{\omega}\tau\right) d\tau.$$

Используя разложение (7), применим свойства формальных операций над рядами Фурье [9, с. 39] к произведению (6)

$$\left(A(t) - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} A(\tau)d\tau\right) x(t) \sim \sum_{k,\ m=-\infty,\ k\neq 0}^{\infty} A_k x_m \exp\left(\frac{2\pi i k}{\omega} + \frac{2\pi i m}{\Omega}\right) t. \tag{8}$$

Запишем (8) в виде ряда

$$\left(A(t) - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} A(\tau)d\tau\right) x(t) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \exp(2\pi i \lambda_j) t, \tag{9}$$

коэффициенты которого находятся следующим образом:

$$c_j = \sum_{\nu_k + \mu_m = \lambda_j} A_k x_m, \quad \nu_k = \frac{k}{\omega}, \quad \mu_m = \frac{m}{\Omega}, \tag{10}$$

т. е. c_j суммирует попарные произведения тех коэффициентов Фурье A_k и x_m, соответствующие которым числа ν_k и μ_m дают одинаковые равные λ_j суммы.

Покажем, что для каждой пары индексов k и m индекс j будет единственным, обеспечивающим равенство

$$\nu_k + \mu_m = \lambda_j.$$

Это значит, что каждая из сумм (10) будет состоять только из одного слагаемого при любых значениях индексов k и m. Допустим, что это не так, т. е. найдутся такие две пары индексов $k_1,\ m_1$ и $k_2,\ m_2$ ($k_1 \neq k_2,\ m_1 \neq m_2$), что выполняется равенство

$$\nu_{k_1} + \mu_{m_1} = \nu_{k_2} + \mu_{m_2},$$

из которого с учетом принятых обозначений получаем

$$\frac{k_1}{\omega} + \frac{m_1}{\Omega} = \frac{k_2}{\omega} + \frac{m_1}{\Omega}.$$

В силу того, что $k_1 - k_2 \neq 0$ и $m_1 - m_2 \neq 0$, из полученного равенства находим отношение периодов

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{k_1 - k_2}{m_1 - m_2}.$$

Поскольку индексы $k_1,\ k_2,\ m_1,\ m_2$ – целые числа, то правая часть этого равенства является рациональным числом. Следовательно, периоды ω и Ω соизмеримы – получили противоречие.

Значит, сделанное допущение неверно и каждый определяемый соотношением (10) коэффициент c_j ряда (9) действительно будет состоять только из одного слагаемого.

Так как квазипериодическая система (3) имеет частично нерегулярное решение $x = x(t)$ и отношение ω/Ω иррационально, то согласно [10] вектор $x(t)$ удовлетворяет, в частности, тождеству

$$\left(A(t) - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega A(\tau)d\tau\right) = \tilde{A}(t)x(t) \equiv 0. \tag{11}$$

С учетом тождества (11) для ряда (9) имеем представление

$$0 \equiv \left(A(t) - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega A(\tau)d\tau\right)x(t) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \exp(2\pi i\lambda_j)t. \tag{12}$$

Из разложения в ряд (12) на основании теоремы единственности для почти периодических функций [9, с. 51] следует, что все коэффициенты этого ряда нулевые. Значит, нулевыми будут и коэффициенты ряда (9), т. е

$$A_k x_m = 0 \tag{13}$$

при всех $k = \pm1, \pm2, \ldots$ и $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Поскольку по предположению периодический вектор $x(t) \not\equiv 0$, то найдется по меньшей мере один из его коэффициентов Фурье, имеющий хотя бы одну ненулевую компоненту. Пусть это будет коэффициент x_s $(s \in \{0, N\})$. Применим свойства формальных операций над рядами Фурье [9, с. 39] к одному из слагаемых представления (6) при $m = s$, т. е. рассмотрим произведение

$$\left(A(t) - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega A(\tau)d\tau\right)x_s \sim \sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{\infty} A_k x_s \exp\left(\frac{2\pi i k}{\Omega}t\right).$$

Как показано выше, согласно (13) все произведения $P_k x_s = 0 \quad (k = \pm1, \pm2, \ldots)$. Поэтому ввиду периодичности функции $\tilde{A}(t)x_s$ на основании [9, с. 51] и принятых обозначений имеем тождество

$$\tilde{A}(t)x_s \equiv 0, \quad x_s \neq 0,$$

из которого следует, что $\tilde{A}(t)$ – матрица неполного столбцового ранга. Имеем противоречие со сделанным в начале доказательства предположением (5) о линейной независимости столбцов этой матрицы. Значит, допущение (5) неверно и в случае разрешимости поставленной задачи управления системы (1) осциллирующая составляющая ее матрицы коэффициентов имеет неполный столбцовый ранг. Теорема доказана.

Заключение. Для линейной периодической системы управления с постоянной матрицей при управлении впервые поставлена задача управления асинхронным спектром с иррегулярным допустимым множеством и дано необходимое условие ее разрешимости.

Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси при поддержке БРФФИ (проект № Ф25КИ-015).

Литература

1. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.

2. *Макаров Е. К., Попова С. Н.* Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Бел. навука, 2012.

3. *Деменчук А. К.* Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний // Доклады НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 4. С. 37–42.

4. *Деменчук А. К.* Управление асинхронным спектром линейных систем с нулевым средним значением матрицы коэффициентов // Труды Института математики. 2018. Т. 26, № 1. С. 31–34.

5. *Деменчук А. К.* Управление асинхронным спектром линейных систем с невырожденным средним значением матрицы коэффициентов // Труды Института математики. 2020. Т. 28, № 1–2. С. 11–16.

6. *Деменчук А.К.* Управление асинхронным спектром линейных систем с невырожденным диагональным блоком усреднения матрицы коэффициентов // Труды Института математики. 2022. Т. 30, № 1–2. С. 22–29.

7. *Деменчук А. К.* Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления. Saarbrucken: Lambert Academic Publishing, 2012.

8. *Demenchuk A. K.* Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems // Math. Bohemica. 2001. Vol. 126, N 1. P. 221–228.

9. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции. М.: ГТТИ, 1953.

10. *Грудо Э. И., Деменчук А. К.* О периодических решениях с несоизмеримыми периодами линейных неоднородных периодических дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 3. С. 409–416.

References

1. Zubov V. I. *Lectures on Control Theory.* Moscow, Nauka, 1975 (in Russian).

2. Makarov E. K., Popova C. N. *Controllability of asymptotic invariants of non-stationary linear systems.* Minsk, Belaruskaya Navuka, 2012 (in Russian).

3. Demenchuk A. K. Problem of control of the spectrum of strongly irregular periodic oscillations. *Doklady NAN Belarusi*, 2009, vol. 53, no. 4, pp. 37–42 (in Russian).

4. Demenchuk A. K. Control of the asynchronous spectrum of linear systems with zero mean value of coefficient matrix. *Trudy Instituta Matematiki*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 31–34 (in Russian).

5. Demenchuk A. K. Control of the asynchronous spectrum of linear systems with non-degenerate mean value of coefficient matrix. *Trudy Instituta Matematiki*, 2020, vol. 28, no. 1–2, pp. 11–16 (in Russian).

6. Demenchuk A. K. Control of the asynchronous spectrum of linear systems with non-degenerate diagonal block of mean value of coefficient matrix. *Trudy Instituta Matematiki*, 2022, vol. 30, no. 1–2, pp. 22–29 (in Russian).

7. Demenchuk A. K. *Asynchronous Oscillations in Differential Systems. Conditions of Existence and Control.* Saarbrucken, Lambert Academic Publishing, 2012 (in Russian).

8. Demenchuk A. K. Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems. *Math. Bohemica*, 2001, vol. 126, no. 1, pp. 221–228.

9. Levitan B. M. *Almost Periodic Functions.* Moscow, GTTI, 1953 (in Russian).

10. Grudo E. I., Demenchuk A. K. On periodic solutions with incommensurate periods of linear inhomogeneous periodic differential systems. *Diff. Equations*, 1987, vol. 23, no. 3, pp. 409–416 (in Russian).

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Том 33. № 2. С. 96–102

УДК 517.926.4 EDN: TZHQBX

ДВУМЕРНЫЙ АНТИПЕРРОНОВСКИЙ ЭФФЕКТ СМЕНЫ РАЗЛИЧНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ НА ОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ ВОЗМУЩЕНИЯМИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ

Н. А. Изобов[1], А. В. Ильин[2]

[1]*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*
[2]*Московский государственный университет, Москва, Россия*
e-mail: izobov@im.bas-net.by, iline@cs.msu.su

Поступила: 10.11.2025 **Исправлена:** 09.12.2025 **Принята:** 15.12.2025

Ключевые слова: характеристический показатель Ляпунова, возмущения высшего порядка малости, антиперроновский эффект.

Аннотация. Реализован двумерный антиперроновский эффект смены различных положительных показателей Ляпунова линейной дифференциальной системы на отрицательный возмущением высшего порядка малости.

TWO-DIMENSIONAL ANTI-PERRON EFFECT OF CHANGING ARBITRARY DIFFERENT POSITIVE LYAPUNOV EXPONENTS OF A LINEAR APPROXIMATION SYSTEM TO NEGATIVE ONES BY HIGHER-ORDER PERTURBATIONS

N. A. Izobov[1], A. V. Il'in[2]

[1]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
[2]*Moscow State University, Moscow, Russia*
e-mail: izobov@im.bas-net.by, iline@cs.msu.su

Received: 10.11.2025 **Revised:** 09.12.2025 **Accepted:** 15.12.2025

Keywords: Lyapunov characteristic exponent, perturbations of a higher order of smallness, anti-Perron effect.

Abstract. A two-dimensional anti-Perron effect of changing arbitrary different positive Lyapunov exponents of a linear differential system to negative ones by a perturbation of a higher order of smallness is realized.

Рассматриваем двумерные дифференциальные системы: линейную

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^2, \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями

$$\lambda_2(A) \geqslant \lambda_1(A) > 0$$

и нелинейную

$$\dot{y} = A(t)y + f(t,y), \quad y \in R^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{2}$$

также с бесконечно дифференцируемым так называемым (см., например [1]) m-возмущением $f(t,y)$, имеющим порядок $m > 1$ малости в окрестности начала координат $y = 0$ и допустимого роста вне ее:

$$\|f(t,y)\| \leqslant C_f \|y\|^m, \quad C_f = \mathrm{const} > 0, \quad y \in R^2, \quad t \geqslant t_0. \tag{3}$$

Эффект Перрона [2, см. также 3, с. 50–51] устанавливает существование двумерных системы (1) со всеми отрицательными показателями и m-возмущения (3) таких, что возмущенная система (2) имеет нетривиальные решения с положительными показателями Ляпунова. Его исследованию посвящена серия работ авторов, в том числе и совместных с С. К. Коровиным. Бо́льший интерес своими возможными приложениями представляет противоположный антиперроновский эффект смены положительных характеристических показателей линейного приближения (1) на отрицательные у (некоторых) нетривиальных решений возмущенных систем (2) с малыми возмущениями, в частности, m-возмущениями (3) высшего порядка малости.

В работе [4] антиперроновский эффект в случае положительных совпадающих характеристических показателей реализован на одном нетривиальном решении системы (2) с отрицательным показателем.

В этом же случае совпадения положительных показателей линейного приближения двумерный антиперроновский эффект реализован [5] на большем числе нетривиальных решений с отрицательными показателями возмущенной системы (2) с соответствующим m-возмущением – на 4 таких решениях.

Возникает вопрос о возможной реализации двумерного антиперроновского эффекта смены m-возмущениями (3) положительных *различных* показателей $\lambda_2(A) > \lambda_1(A) > 0$ линейного приближения (1) на отрицательные у (некоторых) нетривиальных решений возмущенной системы (2). Положительный ответ содержит

Теорема. *Для любых параметров*

$$\lambda_2 > \lambda_1 > 0, \quad m > 1, \quad \theta > 1$$

существуют:

1) *двумерная линейная система* (1) *с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями* $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = 1,2$;

2) *также бесконечно дифференцируемое по* m*-возмущение*

$$f(t,y) : [t_0,+\infty) \times R^2 \to R^2$$

такие, что нелинейная возмущенная система (2) *имеет решение* $y(t) > 0$ *с показателем*

$$\lambda[y] = -(\theta+1)\frac{m\theta\lambda_1+\lambda_2}{m^2\theta^2-1}. \tag{4}$$

1. Доказательство 1°. Определение линейной системы

Будем строить ее в диагональном виде

$$\dot{x} = \mathrm{diag}[a_1(t), a_2(t)]x \equiv A(t)x, \quad x \in R^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{5}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = 1,2$. Для этого, как обычно, будем использовать моменты времени $t_k = \theta^k$, $k \in N_0 \equiv N \cup \{0\}$, и обеспечивающую бесконечную дифференцируемость коэффициентов $a_1(t)$ и $a_2(t)$ системы (5) известную функцию Гелбаума–Олмстеда [6, с. 54]

$$e_{\gamma\delta}(\tau,\tau_1,\tau_2) = \gamma + (\delta-\gamma)\exp\{-(\tau-\tau_1)^{-2}\exp[-(\tau-\tau_2)^{-2}]\}, \quad \tau \in (\tau_1,\tau_2),$$

принимающую на концах рассматриваемого интервала значения γ и δ и нулевые значения своих односторонних производных любого порядка.

В рассматриваемом случае различных значений $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ коэффициенты $a_1(t)$ и $a_2(t)$, в отличие от работы [5] с совпадающими положительными построенными λ_1 и λ_2, определим на отрезках

$$T_{2k+j} = [t_{2k+j}, t'_{2k+j+1}], t'_{2k+j+1} \equiv t_{2k+j+1} - \varepsilon(t_{2k+j+1}), \quad \varepsilon(t) \equiv \exp(-t^2), \quad k \in N_0, \quad j = 0,1,$$

равенствами

$$a_i(t) = (-1)^{i-1}\begin{cases} \alpha_i, & t \in T_{2k+j}, \\ -\alpha_i, & t \in T_{2k+j+1}, \end{cases} k \in N_0, \quad i = 1,2, \quad j = 0,1. \tag{6}$$

В них постоянные α_i имеют представление

$$\alpha_i = \lambda_i\frac{\theta+1}{\theta-1},$$

а номер j при всяком фиксированном $i \in \{1,2\}$ принимает значения 0 и 1.

Определим теперь коэффициенты $a_1(t)$ и $a_2(t)$ с помощью функций $e_{\gamma\delta}$ на интервалах

$$I_{2k+j} \equiv (t'_{2k+j+1}, t_{2k+j+1}), \quad k \in N_0, \quad j = 0, 1,$$

используя для этого уже определенные равенствами (6) их значения на концах интервалов I_{2k+j} :

$$a_i(t) = e_{a_i(t'_{2k+j+1})a_i(t_{2k+j+1})}(t), \quad t \in I_{2k+j+1}, \quad k \in N_0, \quad j = 0, 1.$$

В силу свойств функций Гелбаума–Олмстеда так определенные при всех $k \in N_0$ и $j = 0, 1$ коэффициенты являются бесконечно дифференцируемыми на всей полуоси $t \geqslant 1$.

Для вычисления характеристических показателей построенной системы линейного приближения (5) воспользуемся вспомогательной также диагональной линейной системой

$$\dot{x} = \mathrm{diag}[b_1(t), b_2(t)]x \equiv B(t)x, \quad x \in R^2, \quad t \geqslant t_0, \tag{5_1}$$

коэффициенты $b_i(t)$, $i = \{1, 2\}$, которой определяются равенствами

$$b_i(t) \equiv a_i(t_{2k+j}), \quad t \in [t_{2k+j}, t_{2k+j+1}), \quad k \in N_0, \quad j = 0, 1.$$

Очевидно, для коэффициентов систем (5) и (5_1) справедливы соотношения

$$|a_i(t) - b_i(t)| = \begin{cases} \equiv 0, & t \in [t_{2k+j}, t'_{2k+j+1}), \\ \leqslant 2\alpha_2, & t \in [t'_{2k+j+1}, t_{2k+j+1}), \quad j = 0, 1. \end{cases}$$

Тем самым в силу малой длины

$$0 < t_{2k+j+1} - t'_{2k+j+1} \leqslant \exp(-t_{2k}^2), \quad k \in N_0, \quad j = 0, 1,$$

промежутков $[t'_{2k+j+1}, t_{2k+j+1})$ неравенство

$$\int_{t_0}^{+\infty} \|B(\tau) - A(\tau)\| e^{\sigma\tau} d\tau < +\infty$$

выполнено при любом конечном $\sigma > 0$. Поэтому [7] линейные системы (5) и (5_1) являются асимптотически эквивалентными и их характеристические показатели совпадают. Последние же для системы (5_1) с кусочно-постоянными «периодически повторяющимися» коэффициентами имеют необходимые представления

$$\lambda_i(A) = \lambda_i(B) = \alpha_i \frac{\theta - 1}{\theta + 1} = \lambda_i, \quad i = 1, 2.$$

2. Построение возмущенной системы и ее решения с отрицательным показателем

Эти построения будем вести методом, изложенным в нашей работе [4] с необходимыми изменениями и дополнениями.

На отрезке $[t_{2k}, t_{2k+2}]$ с произвольно фиксированным $k > k_0$ осуществим одновременные построения:

1) бесконечно дифференцируемого m-возмущения

$$f(t, y) = (f_1(t, y_2), f_2(t, y_1)) : [t_{2k}, t_{2k+2}] \times R_+^2 \to R^2$$

с положительным октантом

$$R_+^2 = \{y = (y_1, y_2) \in R^2 : y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0\}$$

и нулевыми значениями

$$f_i(t_{2k+j}, y_{3-i}) \equiv 0, \quad y \in R_+^2, \quad i = 1, 2, \quad j = 0, 2,$$

его компонент и такими же значениями их правосторонних производных любого порядка при $j = 0$ и левосторонних при $j = 2$;

2) решения $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ системы (2) с построенным m-возмущением $f(t, y)$, принимающего на концах рассматриваемого отрезка начальные и конечные значения

$$y_i(t_{2k+j}) = e^{\beta_i t_{2k+j}}, \quad i = 1, 2, \quad j = 0, 2 \tag{6_{ij}}$$

своих компонент

$$0 < y_i(t) \leqslant e^{\beta_2 t}, \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+2}], \quad i = 1,2, \tag{6_i}$$

в которых отрицательные постоянные β_1 и β_2 определяются системой равенств

$$\beta_1 = m\theta^2\beta_2 + (\theta-1)^2\alpha_1, \tag{7_1}$$

$$\beta_2 = m\beta_1 + (\theta-1)(m\alpha_1+\alpha_2). \tag{7_2}$$

Из этой системы получаем их следующие явные значения

$$\beta_1 = -(\theta-1)\left[\alpha_1 + \frac{\theta(\alpha_1+m\theta\alpha_2)}{m^2\theta^2-1}\right] < \beta_2 = -(\theta-1)\frac{m\theta\alpha_1+\alpha_2}{m^2\theta^2-1} < 0. \tag{8}$$

Исходя из уже полученных выше нулевых значений

$$f_i(t_{2k}, y_{3-i}) = 0, \quad i = 1,2,$$

компонент возмущения $f(t,y)$, продолжим их аналогичным образом

$$f_i(t, y_{3-i}) \equiv 0, \quad t \in [t_{2k}, \eta_{2k+3-i}], \quad \eta_{2k+i} \equiv t_{2k+i} - 1, \quad y \geqslant 0, \quad i = 1,2, \tag{8_i}$$

на максимально возможные по длине временные промежутки.

Для определения этих компонент $f_1(t,y_2)$ и $f_2(t,y_1)$ соответственно на интервалах (η_{2k+2}, t_{2k+2}) и (η_{2k+1}, t_{2k+1}) воспользуемся функциями

$$E(\tau,\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4) = \begin{cases} e_{0,1}(\tau,\tau_1,\tau_2), & \tau \in [\tau_1,\tau_2], \\ 1, & \tau \in (\tau_2,\tau_3], \\ e_{10}(\tau,\tau_3,\tau_4), & \tau \in (\tau_3,\tau_4], \end{cases}$$

$$F_k(y_i) = \begin{cases} y_i^m e_{01}(y_i, 0, \varepsilon(t_k)), & y_i \in [0, \varepsilon(t_k)], \quad i = 1,2, \\ y_i^m, & y_i > \varepsilon(t_k), \quad i = 1,2, \end{cases}$$

построенными нами в работе [4].

В соответствии с определением (8_1) первой компоненты $f_1(t,y_2)$ возмущения $f(t,y)$ для первой же компоненты $y_1(t)$ решения $y(t)$ с начальным условием (6_{10}) имеем представления

$$y_1(t) = \begin{cases} \exp[\beta_1 t_{2k} + \alpha_1(t-t_{2k})], & t \in [t_{2k}, t'_{2k+1}], \\ y_1(t'_{2k+1}) \exp \int\limits_{t'_{2k+1}}^{t} a_1(\tau)d\tau \equiv y_1(t'_{2k+1}) x_1(t, t'_{2k+1}), & t \in [t'_{2k+1}, t_{2k+1}]. \end{cases} \tag{9_1}$$

На следующем промежутке $[t_{2k+1}, t'_{2k+2}]$ компонента $y_1(t)$ определяется равенством

$$y_1(t) = y_1(t_{2k+1}) \exp[-\alpha_1(t-t_{2k+1}), \quad t \in [t_{2k+1}, t'_{2k+2}]. \tag{9_2}$$

Оценим ее сверху на отрезке $[t_{2k}, t_{2k+1}]$:

$$\lambda_1(t) \equiv t^{-1}\ln y_1(t) \leqslant t^{-1}[\beta_1 t_{2k} + \alpha_1(t-t_{2k})] = (\beta_1-\alpha_1)t_{2k}t^{-1} + \alpha_1 \leqslant$$

$$\leqslant (\beta_1-\alpha_1)\theta^{-1} + \alpha_1 = [\beta_1 + \alpha_1(\theta-1)]\theta^{-1} \overset{(8)}{=} -(\theta-1)\frac{\alpha_1+m\theta\alpha_2}{m^2\theta^2-1} < \beta_2, \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}]. \tag{10}$$

На следующем отрезке $[t_{2k+1}, t'_{2k+2}]$ производная

$$\lambda'_1(t) = t^{-2}[-\ln y_1(t_{2k+1})] - \alpha_1 t_{2k+1}$$

для компоненты $y_1(t)$ (см. (9_1), (9_2)) не меняет знака на интервале (t_{2k+1}, t'_{2k+2}) и поэтому функция $\lambda_1(t)$ принимает следующее наибольшее значение:

$$\max \lambda_1(t) = \max\{\lambda_1(t_{2k+1}), \lambda_1(t'_{2k+2})\}, \quad t \in [t_{2k+1}, t'_{2k+2}].$$

И если неравенство $\lambda_1(t_{2k+1}) < \beta_2$ уже установлено (см. (10)), то для $\lambda_1(t'_{2k+2})$ в силу равенства (9_2) и (7_1) справедливы оценки

$$\max\{\lambda_1(t'_{2k+2}),\lambda_1(t_{2k+2})\} \leqslant [\beta_1-(\theta-1)^2\alpha_1+2\alpha_1\varepsilon(t_{2k+2})]\theta^{-2} < \beta_2 < 0,$$

при $k \geqslant k_0$ и соответствующем $k_0 \in N$.

Для последующего построения второй компоненты $f_2(t,y_1)$ m-возмущения $f(t,y)$ на отрезке $[\eta_{2k+1},t_{2k+1}]$ необходимо получить на нем оценку снизу первой компоненты $y_1(t)$ решения $y(t)$. Из представлений (9_1) и первой оценки (10) имеем неравенства

$$\exp[(\beta_1-\alpha_1)t_{2k}+\alpha_1 t] \geqslant y_1(t) \geqslant \exp[(\beta_1-\alpha_1)t_{2k}+\alpha_1 t-2\alpha_1\varepsilon(t_{2k+1})] \equiv$$
$$\equiv d'_{2k+1}\exp[(\beta_1-\alpha_1)t_{2k}+\alpha_1 t] \geqslant c'_{2k+1}\exp[-\alpha_1+(\beta_1+(\theta-1)\alpha_1)]t_{2k}, \quad t\in[\eta_{2k+1},t_{2k+1}].$$

Из предыдущего неравенства с использованием представлений (7_1) и (8) величины β_1 получаем оценки

$$y_1(t) > c_{2k+1}\exp\left[-\frac{\theta(\theta-1)\alpha_2 t_{2k}}{m\theta-1}\right] > c_{2k+1}\exp(-\alpha_2 t_{2k+1}) > \exp(-t^2_{2k+1}) \equiv$$
$$\equiv \varepsilon(t_{2k+1}), \quad t\in[\eta_{2k+1},t_{2k+1}], \quad k \geqslant k_0,$$

с постоянными $c_{2k+1} = c'_{2k+1}e^{-\alpha_1}$ и очевидным $k_0 \in N$.

Полученная оценка позволяет представить на отрезке $[\eta_{2k+1},t_{2k+1}]$ вторую компоненту $f_2(t,y_1)$ возмущения $f(t,y)$ в следующем виде:

$$f_2(t,y_1)|_{y_1=y_1(t)} = -d_{2k+1}F_{2k+1}(y_1)|_{y_1=y_1(t)}\times E(t,\eta_{2k+1},\eta'_{2k+1},t'_{2k+1},t_{2k+1}) =$$
$$= -d_{2k+1}y_1^m(t)E(t,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot), \eta'_{2k+1} = \eta_{2k+1}+\varepsilon(t_{2k+1}), \quad t\in[\eta_{2k+1},t_{2k+1}].$$

На предыдущем $[t_{2k},\eta_{2k+1}]$ и последующем $[t_{2k+1},t_{2k+2}]$ промежутках эта вторая компонента $f_2(t,y_1)$ тождественно равна нулю (см. (8_2)). При этом постоянная d_{2k+1} подлежит последующему определению.

Исследуем теперь поведение второй компоненты $y_2(t)$ на отрезке $[t_{2k},t_{2k+2}]$. На первой его половине $[t_{2k},t_{2k+1}]$ она будет являться решением линейного неоднородного уравнения

$$\dot{y}_2 = a_2(t)y_2 + f_2[t,y_1(t)]$$

с начальным значением $y_2(t_{2k}) = \exp(\beta_2 t_{2k})$. На отрезке $[t_{2k},\eta_{2k+1}]$, на котором $f_2(t,y_1)\equiv 0$, имеем представление

$$y_2(t) = \exp[\beta_2 t_{2k} - \alpha_2(t-t_{2k})],$$

а тем самым в силу неравенства $\beta_2 > -\alpha_2$ и необходимую оценку

$$0 < y_2(t) \leqslant \exp\beta_2 t, \quad t\in[t_{2k},\eta_{2k+1}].$$

На следующем отрезке $[\eta_{2k+1},t_{2k+1}]$ компонента $y_2(t)$, являясь решением приведенного неоднородного уравнения, имеет представление

$$y_2(t) = y_2(t_{2k})x_2(t,t_{2k}) - d_{2k+1}\int\limits_{\eta_{2k+1}}^{t} E(\tau,\eta_{2k+1},\eta'_{2k+1},t'_{2k+1},t_{2k+1})\times$$
$$\times y_1^m(\tau)x_2(t,\tau)d\tau \equiv z(t) - d_{2k+1}J_2(\eta_{2k+1},t), \quad t\in[\eta_{2k+1},t_{2k+1}], \tag{11}$$

в котором $x_2(t,\tau)\equiv\exp\int\limits_{\tau}^{t}a_2(\xi)d\xi$, и $J_2(\eta_{2k+1},t)$ – интеграл. Постоянная же $d_{2k+1}>0$ определяется из условия

$$z(t_{2k+1}) - d_{2k+1}J_2(\eta_{2k+1},t_{2k+1}) = \tilde{y}_2(t_{2k+1}) > 0, \tag{12}$$

в котором

$$\tilde{y}_2(t_{2k+1}) = x_2^{-1}(t_{2k+2},t_{2k+1})\exp(\beta_2 t_{2k+2}) \tag{13}$$

– новое значение компоненты $y_2(t)$ в момент $t = t_{2k+1}$.

Из равенств (12) и (13) получим значение постоянной $d_{2k+1}>0$ и установим его ограниченность сверху не зависящей от k величиной, что позволит считать строящееся возмущение необходимым m-возмущением на всей полуоси $t\geqslant t_0$. Для этого оценим снизу интеграл $J_2(\eta_{2k+1},t_{2k+1})$, учитывая при этом неравенство

$$y_1(\tau)\geqslant y_1(\eta_{2k+1}),\quad \tau\in[\eta_{2k+1},t'_{2k+1}].$$

Справедливы также следующие неравенства

$$J_2(\eta_{2k+1},t_{2k+1})\geqslant\int\limits_{\eta'_{2k+1}}^{t'_{2k+1}}y_1^m(\eta_{2k+1})x_2(t_{2k+1},\tau)d\tau\geqslant[1-2\varepsilon(t_{2k+1})]\times$$

$$\times\exp\{-2m\alpha_2+[m\beta_1+(\theta-1)m\alpha_1]t_{2k}\}\equiv c_2\exp\{[m\beta_1+(\theta-1)m\alpha_1]t_{2k}\}=c_2\exp[\beta_2-(\theta-1)\alpha_2]t_{2k},$$

причем последнее равенство имеет место в силу определения величин β_1 и β_2 (см. $(7_1)-(7_2)$).

Из представления (13) нового значения $\tilde{y}_2(t_{2k+1})$ компоненты $y_2(t)$ имеем неравенства

$$0<\tilde{y}_2(t_{2k+1})\leqslant c_3\exp[\beta_2t_{2k+2}-(\theta-1)\alpha_2t_{2k+1}]$$

с независящей от k постоянной $c_3>0$. Из равенства (12) получаем представление постоянной d_{2k+1} :

$$0<d_{2k+1}=[z(t_{2k+1})-\tilde{y}_2(t_{2k+1})]J_2(\eta_{2k+1},t_{2k+1})<z(t_{2k+1})J_2^{-1}(\eta_{2k+1},t_{2k+1})\leqslant c=\text{const}.$$

Положительность d_{2k+1} следует из неравенств

$$\tilde{y}_2(t_{2k+1})z^{-1}(t_{2k+1})<\exp[\beta_2(t_{2k+2}-t_{2k})-(\theta-1)\alpha_2(t_{2k+1}-t_{2k})]\to 0.$$

При этом справедлива оценка

$$y_2(t)=\tilde{y}_2(t_{2k+1})\exp[\alpha_2(t-t_{2k+1})]\leqslant\exp[\beta_2(2t_{2k+2}-t)],\quad t\in[t_{2k+1},t_{2k+2}].$$

Для оценки сверху $|y_2(t)|$ второй компоненты $y_2(t)$ на отрезке $[\eta_{2k+1},t_{2k+1}]$, определенной равенством (11), представим ее в следующем виде:

$$y_2(t)=x_2(t,t_{2k})\left[e^{\beta_2t_{2k}}-d_{2k+1}\int\limits_{\eta_{2k+1}}^{t}x_2^{-1}(\tau,t_{2k})E(\tau,\ldots)y_1^m(\tau)d\tau\right],$$

причем согласно (12) и (13) в момент t_{2k+1} справедливо неравенство

$$e^{\beta_2t_{2k}}-d_{2k+1}\int\limits_{\eta_{2k+1}}^{t_{2k+1}}\ldots d\tau>0. \tag{14}$$

Так как первая компонента $y_1(t)$ возрастает на всем промежутке $[\eta_{2k+1},t'_{2k+1}]$ (влияние промежутка $[t'_{2k+1},t_{2k+1}]$ длины $\varepsilon[t_{2k+1}]$ не сказывается), то неравенство (14) будет сохраняться и для интеграла с верхним пределом $t\in[\eta_{2k+1},t_{2k+1}]$. Это устанавливает положительность $y_2(t)$ на отрезке $[\eta_{2k+1},t_{2k+1}]$, т. е. имеем $0<y_2(t)\leqslant z(t)$ на этом же отрезке, а значит, $y_2(t)\leqslant\exp\beta_2t$. Это неравенство сохранится и на следующем отрезке $[t_{2k+1},t_{2k+2}]$.

Единственный на отрезке $[t_{2k},t_{2k+2}]$ промежуток действия первой компоненты $f_1(t,y_2)$ m-возмущенная $f(t,y)$ – отрезок $[\eta_{2k+2},t_{2k+2}]$ с левым концом $\eta_{2k+2}=t_{2k+2}-1$. На нем выполнена очевидная оценка $y_2(t)\geqslant\varepsilon(t_{2k+2})$ и поэтому $F_{2k+2}[y_2(\tau)]=y_2^m(\tau)$, $\tau\in[\eta_{2k+2},t_{2k+2}]$. Тем самым на рассматриваемом отрезке $[\eta_{2k+2},t_{2k+2}]$ первая компонента имеет представление

$$y_1(t)=x_1(t,\eta_{2k+2})y_1(\eta_{2k+2})-d_{2k+2}\int\limits_{\eta_{2k+2}}^{t}y_2^m(\tau)E(\tau,\ldots)\ldots d\tau\equiv$$

$$\equiv u(t)-d_{2k+2}J_1(\eta_{2k+2},t),\quad t\in[\eta_{2k+2},t_{2k+2}],$$

с постоянной $d_{2k+2}>0$, определяемой условием

$$u(t_{2k+2})-d_{2k+2}J_1(\eta_{2k+2},t_{2k+2})=\exp[\beta_1t_{2k+2}].$$

Все последующие рассуждения по доказательству ограниченности сверху (не зависящей от $k \in N$ постоянной) и положительности величины d_{2k+2} аналогичны рассуждениям, проведенным выше на отрезке $[\eta_{2k+1}, t_{2k+1}]$.

Таким образом, на отрезке $[t_{2k}, t_{2k+2}]$ построены необходимые m-возмущение и решение $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ возмущенной системы с начальными и конечными значениями (6_{ij}) и удовлетворяющие неравенствам (6_i). Методом математической индукции распространим эти построения на всю полуось $t \geqslant t_0$. Необходимое неравенство $\lambda[y] \leqslant \beta_2$ установлено. Теорема доказана.

Замечание. В нашем докладе [8] показатели $\lambda[Y_i]$ должны иметь представление (4).

Литература

1. *Изобов Н. А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Математический анализ. Итоги науки и техники. 1974. Т. 12. С. 71–146.

2. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr. 1930. Bd. 32, H. 5. S. 702–728.

3. *Леонов Г. А.* Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М.: Ин-т компьют. исследований; Ижевск: R&C Dynamics, 2006. 168 с.

4. *Изобов Н. А., Ильин А. В.* Существование антиперроновского эффекта смены положительных показателей системы линейного приближения на отрицательные при возмущениях высшего порядка малости // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 12. С. 1599–1605.

5. *Изобов Н. А., Ильин А. В.* Построение решений с отрицательными показателями дифференциальной системы в двумерном антиперроновском эффекте при возмущениях высшего порядка // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 12. С. 1616–1622.

6. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М., 1964.

7. *Изобов Н. А., Мазаник С. А.* Об асимптотически эквивалентных линейных системах при экспоненциально убывающих возмущениях // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 2. С. 168–173.

8. *Изобов Н. А., Ильин А. В.* Вариант антиперроновского эффекта смены показателей Ляпунова у двумерных дифференциальных систем при возмущениях высшего порядка малости // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 8. С. 1143–1144.

References

1. Izobov N. A. Linear systems of ordinary differential equations. *Mathematical analysis. Results of science and technology,* 1974, vol. 12, pp. 71–146 (in Russian).

2. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. *Math. Zeitschr.*, 1930, Bd. 32, H. 5, S. 703–728.

3. Leonov G. A. *Chaotic Dynamics and Classical Theory of Motion Stability*. Izhevsk, Inst. Komp'yut. Issled., 2006.

4. Izobov N. A., Il'in A. V. Existence of an anti-Perron effect of change of positive exponents of the linear approximation system to negative ones under perturbations of a higher order of smallness. *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 12, pp. 1591–1597.

5. Izobov N. A., Il'in A. V. Construction of solutions with negative exponents of a differential system in the two-dimensional anti-Perron effect under higher-order perturbations. *Differ. Equat.*, 2024, vol. 60, no. 12, pp. 1668–1674.

6. Gelbaum B. R., Olmsted J. M. H. *Counterexamples in Analysis*. San Francisco, Holden-Day, 1964.

7. Izobov N. A., Mazanik S. A. On linear systems asymptotically equivalent under exponentially decaying perturbations. *Differ. Equat.*, 2006, vol. 42, no. 2, pp. 182–187.

8. Izobov N. A., Il'in A. V. Variant of the anti-Perron effect of change of Lyapunov exponents of two-dimensional differential systems under perturbations of a higher order of smallness. *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 8, pp. 1143–1144.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Том 33. № 1. С. 103–113

УДК 517.968.7 EDN: SQLRSR

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, ЗАДАННОЕ НА КРИВОЙ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ И СОДЕРЖАЩЕЕ КОМПЛЕКСНОЕ СОПРЯЖЕНИЕ

А. П. Шилин

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: a.p.shilin@gmail.com

Поступила: 02.11.2025 **Исправлена:** 18.11.2025 **Принята:** 15.12.2025

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, гиперсингулярный интеграл, обобщенные формулы Сохоцкого, смешанная краевая задача, линейное дифференциальное уравнение.

Аннотация. Изучается новое линейное интегро-дифференциальное уравнение на замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости. На кривую и на коэффициенты уравнения накладываются некоторые ограничения. Уравнение содержит гиперсингулярные интегралы с искомой функцией. Характерной особенностью уравнения является наличие также регулярных интегралов с искомой функцией и ее комплексно-сопряженным значением. Решение уравнения сводится к решению смешанной краевой задачи для аналитических функций и последующему решению дифференциальных уравнений с дополнительными условиями на решение. Явно указываются условия разрешимости исходного уравнения. При их выполнении решение строится в замкнутой форме. Приводится пример.

AN INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION DEFINED ON A CURVE IN THE ANGULAR DOMAIN AND CONTAINING A COMPLEX CONJUGATE

A. P. Shilin

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: a.p.shilin@gmail.com

Received: 02.11.2025 **Revised:** 18.11.2025 **Accepted:** 15.12.2025

Keywords: integro-differential equation, hypersingular integral, generalized Sokhotsky formulas, mixed boundary problem, linear differential equation.

Abstract. A new linear integro-differential equation is studied on a closed curve located on the complex plane. There are some restrictions on the curve and the coefficients of the equation. The equation contains hypersingular integrals with the desired function. A characteristic feature of the equation is the presence of regular integrals with the desired function and its complex conjugate value. The solution of the equation is reduced to solving a mixed boundary value problem for analytic functions and the subsequent solutijn of differential equations with additional conditions on the solution. The conditions for the solvability of the original equation are explicitly stated. When these are performed, the solution is in closed form. An example is given.

1. Введение

Пусть L — простая замкнутая положительно ориентированная кривая класса C^1 на комплексной плоскости. Обозначим D_+ внутренность, а D_- внешность этой кривой. Искомой будет в дальнейшем функция $\varphi(t)$, $t \in L$, H-непрерывная (т. е. удовлетворяющая условию Гельдера) вместе со своими производными, входящими в исходное уравнение.

Для предельных значений на кривой L интеграла типа Коши

$$\Phi_\pm(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D_\pm,$$

и его производных справедливы полученные в [1] обобщенные формулы Сохоцкого

$$\Phi_\pm^{(k)}(t) = \pm\frac{1}{2}\varphi^{(k)}(t) + \frac{k!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^{k+1}}, \quad t \in L. \tag{1}$$

Формулы (1) справедливы в случае H-непрерывности производных $\varphi^{(k)}(t)$, при этом предельные значения также H-непрерывны. Гиперсингулярные интегралы в формулах (1) понимаются в смысле конечной части по Адамару, что согласно [1] приводит для их вычисления к формулам

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}} = \frac{\pi i \varphi^{(k)}(t)}{k!} + \int_L \frac{\varphi(\tau) - \sum_{j=0}^{k} \frac{\varphi^{(j)}(t)}{j!}(\tau-t)^j}{(\tau-t)^{k+1}} d\tau,$$

в правых частях которых интегралы сходятся в обычном смысле. Интегро-дифференциальное уравнение с такими гиперсингулярными интегралами введено в рассмотрение в [2] – это линейное уравнение с постоянными коэффициентами, которое решено в явном виде. С частными случаями переменных коэффициентов подобные уравнения изучались в [3; 4] и других работах.

Если в сингулярных интегральных уравнениях наряду с сингулярными интегралами присутствуют регулярные интегралы с искомой функцией, то такие уравнения принято называть полными. Если в гиперсингулярные интегральные или интегро-дифференциальные уравнения входят регулярные интегралы, то такие уравнения естественно тоже называть полными. Исследования полных гиперсингулярных интегро-дифференциальных уравнений начаты недавно [5–7] и продолжаются в настоящей работе. Эти исследования отличает конструктивный характер, когда явно указываются условия разрешимости и при их выполнении явно записываются сами решения.

2. Постановка задачи. Некоторые обозначения и факты

Зададим числа $a_k \in \mathbb{C}$, $b_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{0,n}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$. Зададим также H-непрерывные функции $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$, $h(t)$, $t \in L$. Обозначим

$$\varepsilon_j = e^{\frac{2\pi i}{m} j}, \quad j \in E = \{0, 1, ..., m-1\}, \tag{2}$$

комплексные корни степени m из единицы, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. Кривую L возьмем теперь расположенной в угловой области $\{z : \ 0 < \arg z < \frac{\pi}{m}\}$. Будем решать уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} \left[(a(t)a_k + b(t)b_k)\,\varphi^{(mk)}(t) + \frac{(a(t)a_k - b(t)b_k)\,(mk)!}{\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-\varepsilon_j t)^{mk+1}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}}{(\overline{\tau}-\varepsilon_{m-j}t)^{mk+1}} \right) \right] = h(t), \quad t \in L, \tag{3}$$

$\varepsilon_m = \varepsilon_0$. Гиперсингулярными интегралами в уравнении (3) являются интегралы с $\varphi(\tau)$ во внутренней сумме при $j = 0$. Остальные интегралы, в том числе все интегралы с $\overline{\varphi(\tau)}$, являются регулярными. Обозначим

$$\overline{L} = \{t : \ t = \overline{\tau}, \ \tau \in L\}, \quad \overline{D}_+ = \{z : \ z = \overline{\zeta}, \ \zeta \in D_+\},$$

$$L_\beta = \{t : \ t = \varepsilon_\beta \tau, \ \tau \in L\}, \quad D_\beta = \{z : \ z = \varepsilon_\beta \zeta, \ \zeta \in D_+\},$$

$$\overline{L}_\beta = \{t : \ t = \varepsilon_\beta \tau, \ \tau \in \overline{L}\}, \quad \overline{D}_\beta = \{z : \ z = \varepsilon_\beta \zeta, \ \zeta \in \overline{D}_+\}, \ \beta = \overline{1, m-1},$$

$$D_* = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{L \bigcup D_+ \bigcup \overline{L} \bigcup \overline{D}_+ \bigcup_{\beta=1}^{m-1} L_\beta \bigcup_{\beta=1}^{m-1} D_\beta \bigcup_{\beta=1}^{m-1} \overline{L}_\beta \bigcup_{\beta=1}^{m-1} \overline{D}_\beta\},$$

где $\widehat{\mathbb{C}}$ – расширенная комплексная плоскость.

Возможный вид некоторых введенных объектов изображен на рис. 1.

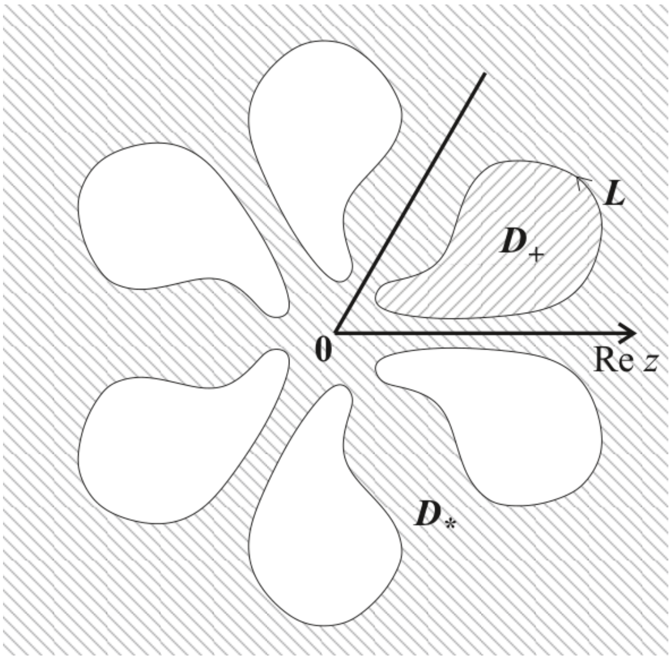

Рис. 1. Возможный вид кривой L и областей $D_+,\ D_*$ в случае $m=3$

Числа ε_j, вычисляемые по формуле (2) для $j\in\mathbb{Z}$, образуют по умножению циклическую группу порядка m (с образующим элементом ε_1), поэтому в дальнейшем эти числа для $j\in\mathbb{Z}\setminus E$ можно заменять на равные им числа для соответствующего значения $j\in E$. Отметим также равенство $\overline{\varepsilon_j}=\varepsilon_{-j},\quad j\in\mathbb{Z}$.

3. Сведение уравнения к краевой задаче для аналитических функций

Введем аналитические функции

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\varepsilon_j z}-\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}}{\overline{\tau}-\varepsilon_{m-j}z}\right)=\begin{cases}\Psi_+(z), & z\in D_+,\\ \Psi_*(z), & z\in D_*.\end{cases}\tag{4}$$

Обоснуем, что функция $\Psi_*(z)$ обладает свойствами

$$\Psi_*(\varepsilon_1 z)=\Psi_*(z),\tag{5}$$

$$\Psi_*(\overline{z})=\overline{\Psi_*(z)},\tag{6}$$

$$\Psi_*(\infty)=0.\tag{7}$$

Так как числа ε_j образуют циклическую группу, то для любых чисел $m_1,\ m_2\ \in\mathbb{Z}$

$$\sum_{j=0}^{m-1}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\varepsilon_{j+m_1}z}=\sum_{j=0}^{m-1}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\varepsilon_j z},$$

$$\sum_{j=0}^{m-1}\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}}{\overline{\tau}-\varepsilon_{m-j+m_2}z}=\sum_{j=0}^{m-1}\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}}{\overline{\tau}-\varepsilon_{m-j}z}.$$

Поэтому, взяв в частности $m_1=m_2=1$, придем к равенству (5):

$$\Psi_*(\varepsilon_1 z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\varepsilon_{j+1}z}-\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}}{\overline{\tau}-\varepsilon_{m-j+1}z}\right)=\Psi_*(z).$$

Свойство (6), выражающее симметрию функции относительно действительной оси, вытекает из равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\varepsilon_j z}-\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}}{\overline{\tau}-\varepsilon_{m-j}z}\right)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\varepsilon_j z}+\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\varepsilon_j\overline{z}}}.$$

Наконец, равенство (7) есть очевидное следствие известного свойства интеграла типа Коши.

Функция $\Psi_*(z)$ вполне характеризуется своими значениями в области

$$\{z:\ 0\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{m}\}\setminus\left(D_+\bigcup L\right)$$

(область берется вместе с соответствующими лучами). На остальную часть области D_* ее можно распространить, например, сначала продолжая по симметрии относительно действительной оси на симметричную область

$$\{z:\ -\frac{\pi}{m}\leqslant\arg z\leqslant 0\}\setminus\left(\overline{D}_+\bigcup\overline{L}\right).$$

Затем «удвоенную» область

$$\{z:\ -\frac{\pi}{m}\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{m}\}\setminus\left(D_+\bigcup L\bigcup\overline{D}_+\bigcup\overline{L}\right)$$

следует вращать вокруг точки $z=0$ на углы, кратные $\frac{2\pi}{m}$, сохраняя в соответствующих точках те же значения функции, что и в этой «удвоенной» области.

Для производных функции $\Psi_*(z)$ порядков mk, $k=\overline{1,n}$, получим

$$\Psi_*^{(mk)}(z)=\frac{(mk)!}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\int_L\frac{\varepsilon_j^{mk}\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-\varepsilon_j z)^{mk+1}}-\int_L\frac{\varepsilon_{m-j}^{mk}\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}}{(\overline{\tau}-\varepsilon_{m-j}z)^{mk+1}}\right)=$$

$$=\frac{(mk)!}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-\varepsilon_j z)^{mk+1}}-\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}}{(\overline{\tau}-\varepsilon_{m-j}z)^{mk+1}}\right),$$

откуда понятно, что на эти производные переносятся все свойства вида (5), (6), (7).

Запишем предельные значения на кривой L функций (4) и их производных порядков, кратных m:

$$\Psi_+^{(mk)}(t)=\frac{1}{2}\varphi^{(mk)}(t)+\frac{(mk)!}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-\varepsilon_j t)^{mk+1}}-\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}}{(\overline{\tau}-\varepsilon_{m-j}t)^{mk+1}}\right),\tag{8}$$

$$\Psi_*^{(mk)}(t)=-\frac{1}{2}\varphi^{(mk)}(t)+\frac{(mk)!}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-\varepsilon_j t)^{mk+1}}-\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}}{(\overline{\tau}-\varepsilon_{m-j}t)^{mk+1}}\right),\quad k=\overline{0,n},\quad t\in L.\tag{9}$$

Формулы (8), (9) получаются после применения к функциям в формуле (4) обобщенных формул Сохоцкого для интеграла с $\varphi(\tau)$ в случае $j=0$ и дифференцирования под знаком интеграла для остальных интегралов. Вычитая и складывая равенства (8), (9), получим пару равносильных равенств

$$\varphi^{(mk)}(t)=\Psi_+^{(mk)}(t)-\Psi_*^{(mk)}(t),\tag{10}$$

$$\frac{(mk)!}{\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-\varepsilon_j t)^{mk+1}}-\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{d\tau}}{(\overline{\tau}-\varepsilon_{m-j}t)^{mk+1}}\right)=\Psi_+^{(mk)}(t)+\Psi_*^{(mk)}(t),$$

с помощью которых уравнению (3) можно придать вид краевой задачи

$$\sum_{k=0}^{n}\left[(a(t)a_k+b(t)b_k)\left(\Psi_+^{(mk)}(t)-\Psi_*^{(mk)}(t)\right)+(a(t)a_k-b(t)b_k)\left(\Psi_+^{(mk)}(t)+\Psi_*^{(mk)}(t)\right)\right]=h(t),\quad t\in L,$$

или после очевидных упрощений

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\Psi_+^{(mk)}(t)=\frac{b(t)}{a(t)}\sum_{k=0}^{n}b_k\Psi_*^{(mk)}(t)+\frac{h(t)}{2a(t)},\quad t\in L.\tag{11}$$

Сумма в левой части равенства (11) является предельным значением на кривой L функции $Y_+(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k\Psi_+^{(mk)}(z)$, аналитической в области D_+. Сумма в правой части равенства (11) является предельным значением на кривой L функции $Y_*(z)=\sum_{k=0}^{n}b_k\Psi_*^{(mk)}(z)$, аналитической в области D_*. Поскольку все производные $\Psi_*^{(mk)}(z)$ обладают свойствами, аналогичными (5), (6), (7), то этими же свойствами будут обладать и их линейные комбинации с действительными коэффициентами, т. е.

$$Y_*(\varepsilon_1 z)=Y_*(z),\tag{12}$$

$$Y_*(\bar{z}) = \overline{Y_*(z)}, \tag{13}$$

$$Y_*(\infty) = 0. \tag{14}$$

Возникшей краевой задаче можно придать вид

$$Y_+(t) = \frac{b(t)}{a(t)} Y_*(t) + \frac{h(t)}{2a(t)}, \quad t \in L. \tag{15}$$

Такая задача относится к смешанным краевым задачам. Вид краевого условия аналогичен виду краевого условия задачи Римана. Требование (12) на одну из искомых функций имеет характер краевого условия задачи Карлемана, а требование (13) – краевого условия задачи Гильберта. На эту задачу удается распространить классическую схему решения двухэлементных краевых задач [8]. В результате получится, что общее решение задачи (15) записывается по формулам

$$Y_+(z) = X_+(z)\left(T_+(z) + R(z)\right), \quad Y_*(z) = X_*(z)\left(T_*(z) + R(z)\right),$$

где

$$X_+(z) = e^{\Gamma_+(z)}, \quad X_*(z) = (z^m - z_0^m)^{-\alpha} (z^m - \overline{z_0})^{-\alpha} e^{\Gamma_*(z)}, \quad z_0 \in D_+,$$

$$\alpha = \mathrm{Ind}_L \frac{b(t)}{a(t)}, \quad \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \left[\int_L \frac{\ln\left((\tau^m - z_0^m)^{-\alpha} (\tau^m - \overline{z_0}^m)^{-\alpha} b(\tau)/a(\tau)\right) d\tau}{\tau - \varepsilon_j z} - \right.$$

$$\left. - \int_L \frac{\overline{\ln\left((\tau^m - z_0^m)^{-\alpha} (\tau^m - \overline{z_0}^m)^{-\alpha} b(\tau)/a(\tau)\right)}\, \overline{d\tau}}{\overline{\tau} - \varepsilon_{m-j} z} \right] = \begin{cases} \Gamma_+(z), & z \in D_+, \\ \Gamma_*(z), & z \in D_*, \end{cases}$$

$$\frac{1}{4\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \left[\int_L \frac{h(\tau) d\tau}{a(\tau) X_+(\tau)(\tau - \varepsilon_j z)} - \int_L \frac{\overline{h(\tau)}\, \overline{d\tau}}{\overline{a(\tau)}\, \overline{X_+(\tau)} (\overline{\tau} - \varepsilon_{m-j} z)} \right] = \begin{cases} T_+(z), & z \in D_+, \\ T_*(z), & z \in D_*, \end{cases}$$

$$R(z) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{2\alpha-1} c_k z^{mk}, & c_k \text{ – произвольные действительные постоянные, если } \alpha > 0, \\ 0, & \text{если} \quad \alpha \leqslant 0. \end{cases}$$

При $\alpha \geqslant 0$ задача разрешима безусловно, а при $\alpha < 0$ для ее разрешимости необходимы и достаточны условия

$$\mathrm{Im} \int_L \frac{h(\tau) \tau^{mk-1} d\tau}{a(\tau) X_+(\tau)} = 0, \quad k = \overline{1, -2\alpha}. \tag{16}$$

Предположим, что задача (15) разрешима. Далее следует решать дифференциальные уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \Psi_+^{(mk)}(z) = Y_+(z), \quad z \in D_+, \tag{17}$$

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \Psi_*^{(mk)}(z) = Y_*(z), \quad z \in D_*, \tag{18}$$

и в случае нахождения их решений воспользоваться формулой (10) при $k = 0$:

$$\varphi(t) = \Psi_+(t) - \Psi_*(t), \quad t \in L. \tag{19}$$

4. Решение дифференциальных уравнений

Общее решение уравнения (17), записанное после применения метода вариации произвольных постоянных, имеет вид

$$\Psi_+(z) = \sum_{\sigma=1}^{mn} u_\sigma(z) \left(C_\sigma^+ + \int_{z_1}^{z} \frac{U_\sigma(\zeta) d\zeta}{U(\zeta)} \right). \tag{20}$$

В этой формуле функции $u_\sigma(z)$, явный вид которых хорошо известен и здесь не приводится, образуют фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения, C_σ^+ – произвольные комплексные постоянные, $U(\zeta)$ – вронскиан функций $u_\sigma(\zeta)$, $U_\sigma(\zeta)$ – определитель, полученный из $U(\zeta)$ заменой элементов σ-го столбца на $0, 0, \ldots, 0, Y_+(\zeta)/a_n$, $\sigma = \overline{1, mn}$, z_1 – фиксированная точка в области D_+. Интегрирование в формуле (20) производится по любой кривой, принадлежащей D_+ и соединяющей точки z_1 и z, и вследствие конечности и односвязности области D_+ приводит к однозначным функциям.

Решение уравнения (18), в котором затем еще нужно будет учитывать условия (5), (6), (7), записывается по аналогичной формуле

$$\Psi_*(z)=\sum_{\sigma=1}^{mn} v_\sigma(z)\left(C_\sigma^*+\int_0^z\frac{V_\sigma(\zeta)d\zeta}{V(\zeta)}\right). \tag{21}$$

В формуле (21) $v_\sigma(z)$ – фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения, C_σ^* – произвольные постоянные, $V(\zeta)$ – вронскиан функций $v_\sigma(\zeta)$, $V_\sigma(\zeta)$ – определители, полученные из $V(\zeta)$ заменой элементов σ-го столбца на $0,0,\ldots,0,Y_*(\zeta)/b_n$, $\sigma=\overline{1,mn}$. Интегрирование производится по кривым, соединяющим в области D_* точки 0 и z, и вследствие многосвязности области D_* может привести к многозначным аналитическим функциям. В дальнейшем следует требовать выполнение равенств

$$\int_L\frac{V_\sigma(\zeta)d\zeta}{V(\zeta)}=0,\quad \sigma=\overline{1,mn}, \tag{22}$$

$$\int_{L_\beta}\frac{V_\sigma(\zeta)d\zeta}{V(\zeta)}=0,\quad \beta=\overline{1,m-1},\quad \sigma=\overline{1,mn}, \tag{23}$$

$$\int_{\overline{L}}\frac{V_\sigma(\zeta)d\zeta}{V(\zeta)}=0,\quad \int_{\overline{L}_\beta}\frac{V_\sigma(\zeta)d\zeta}{V(\zeta)}=0,\quad \beta=\overline{1,m-1},\quad \sigma=\overline{1,mn}, \tag{24}$$

являющихся необходимыми и достаточными условиями однозначности решения (21). Фундаментальная система решений в формуле (21) может быть любой, однако для учета условий (5), (6), (7) будем строить фундаментальную систему решений с некоторыми дополнительными свойствами.

Пусть уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} b_k\lambda^k=0$$

имеет действительные корни λ_p кратностей соответственно k_p, $p=\overline{1,P}$, и комплексно-сопряженные корни θ_q, $\overline{\theta}_q$ кратностей соответственно m_q, $q=\overline{1,Q}$, $\sum_{p=1}^{P}k_p+2\sum_{q=1}^{Q}m_q=n$. Для определенности считаем, что среди чисел λ_p нет равного нулю. Также для определенности можно считать $\mathrm{Im}\,\theta_q>0$, $q=\overline{1,Q}$. Произвольным образом выберем и зафиксируем одно из значений $\sqrt[m]{\lambda_p}$, это значение будем в дальнейшем обозначать μ_p, $p=\overline{1,P}$. Аналогично произвольным образом выберем и зафиксируем одно из значений $\sqrt[m]{\theta_q}$, это значение будем в дальнейшем обозначать s_q, $q=\overline{1,Q}$. Тогда корни уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} b_k\mu^{mk}=0,$$

являющегося характеристическим для однородного уравнения (18), можно записать в виде

$$\begin{array}{lllll}\varepsilon_0\mu_p, & \varepsilon_1\mu_p, & \ldots, & \varepsilon_{m-1}\mu_p, & p=\overline{1,P},\\ \varepsilon_0 s_q, & \varepsilon_1 s_q, & \ldots, & \varepsilon_{m-1}s_q, & q=\overline{1,Q},\\ \varepsilon_0\overline{s_q}, & \varepsilon_1\overline{s_q}, & \ldots, & \varepsilon_{m-1}\overline{s_q}, & q=\overline{1,Q},\end{array} \tag{25}$$

причем каждый корень имеет соответствующую кратность k_p или m_q. Запишем функции

$$f_{l\gamma p}(z)=z^l\sum_{j=0}^{m-1}\varepsilon_j^{-\gamma}e^{\varepsilon_j\mu_p z},\quad l=\overline{0,k_p-1},\quad \gamma=\overline{0,m-1},\quad p=\overline{1,P}, \tag{26}$$

$$g_{l\gamma q}(z)=z^l\sum_{j=0}^{m-1}\varepsilon_j^{-\gamma}e^{\varepsilon_j s_q z},\quad l=\overline{0,m_q-1},\quad \gamma=\overline{0,m-1},\quad q=\overline{1,Q}, \tag{27}$$

$$h_{l\gamma q}(z)=z^l\sum_{j=0}^{m-1}\varepsilon_j^{-\gamma}e^{\varepsilon_j \overline{s_q} z},\quad l=\overline{0,m_q-1},\quad \gamma=\overline{0,m-1},\quad q=\overline{1,Q}. \tag{28}$$

Из работы [7] следует, что совокупность функций (26), (27), (28) образует фундаментальную систему решений однородного уравнения (18), причем для всех этих функций справедливы равенства

$$f_{l\gamma p}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{l+\gamma} f_{l\gamma p}(z), \quad g_{l\gamma q}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{l+\gamma} g_{l\gamma q}(z), \quad h_{l\gamma q}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{l+\gamma} h_{l\gamma q}(z). \tag{29}$$

Если μ_p – комплексное число, то для некоторого $j = j_0 \quad \varepsilon_{j_0}\mu_p = \overline{\mu_p}$. Учитывая тот факт, что при $j = \overline{0, m-1}$ как все значения ε_{j-j_0}, так и все значения $\overline{\varepsilon_j}$ совпадут со всеми значениями ε_j, получим

$$\sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-\gamma} e^{\varepsilon_j \mu_p z} = \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_{j_0}^{-\gamma} \left(\varepsilon_{j_0}^{-1}\varepsilon_j\right)^{-\gamma} e^{\varepsilon_j \varepsilon_{j_0}^{-1}(\varepsilon_{j_0}\mu_p) z} = \varepsilon_{j_0}^{-\gamma} \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_{j-j_0}^{-\gamma} e^{\varepsilon_{j-j_0}\overline{\mu_p} z} =$$

$$= \varepsilon_{j_0}^{-\gamma} \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-\gamma} e^{\varepsilon_j \overline{\mu_p} z} = \varepsilon_{j_0}^{-\gamma} \sum_{j=0}^{m-1} \overline{\varepsilon_j}^{\,-\gamma} e^{\overline{\varepsilon_j}\,\overline{\mu_p} z}.$$

В фундаментальной системе решений (26), (27), (28) каждую из функций в (26), для которой соответствующая постоянная $\varepsilon_{j_0}^{\gamma} \neq -1$, заменим на эту же функцию, умноженную на постоянную $\left(1 + \varepsilon_{j_0}^{\gamma}\right)$. В результате получим функции

$$\widetilde{f}_{l\gamma p}(z) = \left(1 + \varepsilon_{j_0}^{\gamma}\right) z^l \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-\gamma} e^{\varepsilon_j \mu_p z} = z^l \left(\sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-\gamma} e^{\varepsilon_j \mu_p z} + \sum_{j=0}^{m-1} \overline{\varepsilon_j}^{\,-\gamma} e^{\overline{\varepsilon_j}\,\overline{\mu_p} z}\right),$$

симметричные относительно действительной оси. Если же $\varepsilon_{j_0}^{\gamma} = -1$, то к симметричным относительно действительной оси функциям придем по формулам

$$\widetilde{f}_{l\gamma p}(z) = i\, f_{l\gamma p}(z).$$

Среди чисел $\sqrt[m]{\lambda_p}$ могут оказаться действительные числа (в количестве не более двух для каждого $p = \overline{1, P}$). Если выбранное число $\mu_p \in \mathbb{R}$, то можно считать $\mu_p = \overline{\mu_p}$, $j_0 = 0$, тогда $\varepsilon_0^{-\gamma} = 1$. Снова заменим функцию в (26) на функцию $\widetilde{f}_{l\gamma p}(z)$. В этом случае функция $f_{l\gamma p}(z)$ лишь удваивается, но оказывается при этом представленной в виде, в котором симметрия относительно действительной оси очевидна.

Для функций (27) (как и для функций (28)) подобные рассуждения не приведут к симметричным функциям, поскольку среди чисел (25) нет ни действительных, ни пар комплексно-сопряженных чисел. Теперь в совокупностях (27), (28) каждую пару функций

$$g_{l\gamma q}(z), \quad h_{l\gamma q}(z) = z^l \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-\gamma} e^{\varepsilon_j \overline{s_q} z} = z^l \sum_{j=0}^{m-1} \overline{\varepsilon_j}^{\,-\gamma} e^{\overline{\varepsilon_j}\,\overline{s_q} z}$$

заменим на новую пару функций

$$\widetilde{g}_{l\gamma q}(z) = g_{l\gamma q}(z) + h_{l\gamma q}(z) = z^l \left(\sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-\gamma} e^{\varepsilon_j s_q z} + \sum_{j=0}^{m-1} \overline{\varepsilon_j}^{\,-\gamma} e^{\overline{\varepsilon_j}\,\overline{s_q} z}\right),$$

$$\widetilde{h}_{l\gamma q}(z) = i\left(g_{l\gamma q}(z) - h_{l\gamma q}(z)\right) = i\, z^l \left(\sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-\gamma} e^{\varepsilon_j s_q z} - \sum_{j=0}^{m-1} \overline{\varepsilon_j}^{\,-\gamma} e^{\overline{\varepsilon_j}\,\overline{s_q} z}\right),$$

симметрия которых относительно действительной оси очевидна.
В результате получим фундаментальную систему решений однородного уравнения (18)

$$\widetilde{f}_{l\gamma p}(z), \quad l = \overline{0, k_p - 1}, \quad \gamma = \overline{0, m-1}, \quad p = \overline{1, P}, \tag{30}$$

$$\widetilde{g}_{l\gamma q}(z), \quad l = \overline{0, m_q - 1}, \quad \gamma = \overline{0, m-1}, \quad q = \overline{1, Q}, \tag{31}$$

$$\widetilde{h}_{l\gamma q}(z), \quad l = \overline{0, m_q - 1}, \quad \gamma = \overline{0, m-1}, \quad q = \overline{1, Q}, \tag{32}$$

все функции которой обладают свойством симметрии относительно действительной оси. Поскольку линейные комбинации функций, обладающих свойствами вида (29), сохраняют эти свойства, то для всех функций (30), (31), (32) будут выполняться равенства

$$\widetilde{f}_{l\gamma p}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{l+\gamma}\widetilde{f}_{l\gamma p}(z), \quad \widetilde{g}_{l\gamma q}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{l+\gamma}\widetilde{g}_{l\gamma q}(z), \quad \widetilde{h}_{l\gamma q}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{l+\gamma}\widetilde{h}_{l\gamma q}(z). \tag{33}$$

Если индексы $l+\gamma$ каких-то чисел $\varepsilon_{l+\gamma}$ не принадлежат множеству E, то заменим эти индексы на значения из E, сравнимые с ними по модулю m. В результате получится, что для каждого фиксированного значения $l = \overline{0, k_p - 1}$ и для каждого фиксированного значения $p = \overline{1, P}$ среди функций $\widetilde{f}_{l\gamma p}(z)$ есть ровно одна функция со свойством вида $\widetilde{f}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_\gamma \widetilde{f}(z)$ для каждого значения $\gamma = \overline{0, m-1}$. Аналогичные рассуждения справедливы для функций $\widetilde{g}_{l\gamma q}(z)$ и $\widetilde{h}_{l\gamma q}(z)$. Следовательно, в дальнейшем в качестве функций $v_\sigma(z)$ можно взять переобозначенные функции (30), (31), (32), причем $\sigma = km + j$, а

$$v_{km+j}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{j-1} v_{km+j}(z), \quad k = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{34}$$

Формула решения уравнения (18), приводящая вследствие равенств (34) к выполнению свойства (5), указана в [7]:

$$\Psi_*(z) = \sum_{k=0}^{n-1} C^*_{km+1} v_{km+1}(z) + \sum_{\sigma=1}^{mn} v_\sigma(z) \int_0^z \frac{V_\sigma(\zeta) d\zeta}{V(\zeta)}. \tag{35}$$

Эта формула получается из формулы (21), когда часть констант C^*_σ равна нулю.

Поскольку элементы вронскиана $V(\zeta)$ и элементы всех определителей $V_\sigma(\zeta)$ будут теперь симметричными функциями относительно действительной оси, симметричными будут и все подынтегральные функции в формуле (35). А так как интегралы вида $\int_0^z$ сохраняют симметрию функций, то решение (35) будет удовлетворять еще и свойству (6), если в нем считать в дальнейшем все постоянные C^*_{km+1} действительными.

В [7] обосновано, что при наличии свойств (34) из равенств (22), (23) достаточно оставить лишь равенства (22), поскольку равенства (23) являются следствием равенств (22). Но если справедливы равенства (22), (23), то будут справедливы и равенства (24), поскольку интегралы по симметричным относительно действительной оси кривым от симметричных функций одновременно либо равны нулю, либо не равны нулю, так что и равенства (24) оказываются следствием равенств (22).

Осталось учесть условие (7). Для этого разложим функцию $\Psi_*(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечности и приравняем к нулю коэффициенты при неотрицательных степенях z этого разложения. В результате получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, которой должны удовлетворять постоянные C^*_{km+1}:

$$\sum_{k=0}^{n-1} d_{lk} C^*_{km+1} = \delta_l, \quad l = 0, 1, 2, \ldots, \tag{36}$$

где

$$d_{lk} = \int_{|t|=\rho} \frac{v_{km+1}(t) dt}{t^{ml+1}}, \quad \delta_l = -\sum_{\sigma=1}^{mn} \int_{|t|=\rho} \frac{v_\sigma(t) dt}{t^{ml+1}} \int_0^t \frac{V_\sigma(\zeta) d\zeta}{V(\zeta)},$$

ρ – достаточно большое положительное число.

5. Формулировка результата. Пример

Используя формулу (19), сформулируем окончательный результат.

Теорема. *Для разрешимости уравнения* (3) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства* (16) *при* $\alpha < 0$, *равенства* (22) *и была совместна система* (36). *Если эти условия выполняются, то общее решение уравнения* (3) *находится по формуле*

$$\varphi(t) = \sum_{\sigma=1}^{mn} \left[u_\sigma(t) \left(C^+_\sigma + \int_{z_1}^t \frac{U_\sigma(\zeta) d\zeta}{U(\zeta)} \right) - v_\sigma(t) \int_0^t \frac{V_\sigma(\zeta) d\zeta}{V(\zeta)} \right] - \sum_{k=0}^{n-1} C^*_{km+1} v_{km+1}(t), \quad t \in L, \tag{37}$$

где C^+_σ *– произвольные комплексные постоянные,* $\sigma = \overline{1, mn}$, *а* C^*_{km+1} *– действительные постоянные, являющиеся решением системы* (36), $k = \overline{0, n-1}$.

Приведем пример уравнения (3), для которого оказываются выполненными все условия разрешимости. Возьмем в качестве кривой L окружность $|t-1-i|=\frac{1}{2}$. Из уравнения этой окружности в виде $\tau=1+i+\frac{1}{2}e^{2i\sigma}$, $\sigma\in[0,\pi]$, получим $\overline{d\tau}=-\frac{d\tau}{4(\tau-1-i)^2}$. Запишем уравнение

$$3\varphi''(t)-(1+4i)\varphi(t)+\frac{1-4i}{\pi i}\left(\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}+\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}d\tau}{4(\tau-1-i)^2(\overline{\tau}-t)}+\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau+t}+\right.$$

$$\left.+\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}d\tau}{4(\tau-1-i)^2(\overline{\tau}+t)}\right)+\frac{2}{\pi i}\left(\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^3}+\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}d\tau}{4(\tau-1-i)^2(\overline{\tau}-t)^3}+\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau+t)^3}+\right.$$

$$\left.+\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}d\tau}{4(\tau-1-i)^2(\overline{\tau}+t)^3}\right)=\frac{2(t^{12}+11t^8+20t^6+40t^4-48t^2+48)}{(t^4+4)^3},\quad t\in L. \tag{38}$$

Так на указанной окружности выглядит пример уравнения (3) при $n=1$, $m=2$, $a(t)=b(t)=1$, $a_1=2$, $b_1=1$, $a_0=-4i$, $b_0=-1$. Задача (15) для уравнения (38) приобретает вид задачи о скачке

$$Y_+(t)-Y_*(t)=\frac{t^{12}+11t^8+20t^6+40t^4-48t^2+48}{(t^4+4)^3},\quad t\in L. \tag{39}$$

Области D_+ и D_* аналитичности функций соответственно $Y_+(z)$ и $Y_*(z)$ изображены на рис. 2.

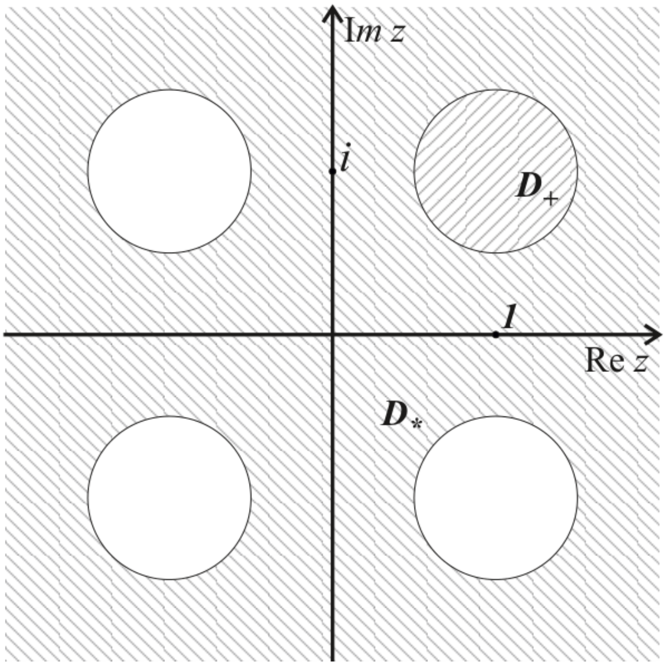

Рис. 2. Области D_+ и D_* для задачи (39)

Для $m=2$ получим $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_1=-1$, поэтому условие (12) примет вид $Y_*(-z)=Y_*(z)$ и будет выражать четность функции $Y_*(z)$. Совокупность условий (12), (13) можно истолковать как симметрию функции $Y_*(z)$ относительно обеих осей – действительной и мнимой.

Задача (39) (с учетом условия (14)) безусловно разрешима и имеет единственное решение. Легко найти представление

$$\frac{t^{12}+11t^8+20t^6+40t^4-48t^2+48}{(t^4+4)^3}=1-\frac{t^8-20t^6+8t^4+48t^2+16}{(t^4+4)^3},$$

из которого, очевидно, получим

$$Y_+(z)=1,\quad Y_*(z)=\frac{z^8-20z^6+8z^4+48z^2+16}{(z^4+4)^3}.$$

Далее следует решать уравнения

$$2\Psi''_+(z)-4\,i\,\Psi_+(z)=1,\quad z\in D_+, \tag{40}$$

$$\Psi_*''(z)-\Psi_*(z)=\frac{z^8-20z^6+8z^4+48z^2+16}{(z^4+4)^3},\quad z\in D_*. \tag{41}$$

Общее решение уравнения (40) можно записать, например, по формуле

$$\Psi_+(z)=C_1^+\operatorname{ch}((1+i)z)+C_2^+\operatorname{sh}((1+i)z)+\frac{i}{4}.$$

Свойства вида (33) для двух симметричных относительно действительной оси функций, образующих фундаментальную систему решений однородного уравнения (41), сведутся к четности одной и нечетности другой функции; такими функциями будут соответственно $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$. Формула (35) примет вид

$$\Psi_*(z)=C_1^*\operatorname{ch} z-\operatorname{ch} z\int_0^z\frac{\zeta^8-20\zeta^6+8\zeta^4+48\zeta^2+16}{(\zeta^4+4)^3}\operatorname{sh}\zeta d\zeta+$$

$$+\operatorname{sh} z\int_0^z\frac{\zeta^8-20\zeta^6+8\zeta^4+48\zeta^2+16}{(\zeta^4+4)^3}\operatorname{ch}\zeta d\zeta.$$

Оба возникших интеграла можно вычислить:

$$\int_0^z\frac{\zeta^8-20\zeta^6+8\zeta^4+48\zeta^2+16}{(\zeta^4+4)^3}\operatorname{sh}\zeta d\zeta=\frac{\operatorname{ch} z}{z^4+4}+\frac{4z^3\operatorname{sh} z}{(z^4+4)^2}-\frac{1}{4},$$

$$\int_0^z\frac{\zeta^8-20\zeta^6+8\zeta^4+48\zeta^2+16}{(\zeta^4+4)^3}\operatorname{ch}\zeta d\zeta=\frac{\operatorname{sh} z}{z^4+4}+\frac{4z^3\operatorname{sh} z}{(z^4+4)^2},$$

и тогда после упрощений получим

$$\Psi_*(z)=\left(C_1^*+\frac{1}{4}\right)\operatorname{ch} z-\frac{1}{z^4+4}.$$

Очевидно, что для выполнения условия (7) следует взять $C_1^*=-\frac{1}{4}$, поэтому записывать соответствующую систему (36) нет необходимости. Наконец, по формуле (19) приходим к решению примера (38):

$$\varphi(t)=C_1^+\operatorname{ch}((1+i)t)+C_2^+\operatorname{sh}((1+i)t)+\frac{i}{4}+\frac{1}{t^4+4},\quad |t-1-i|=\frac{1}{2},$$

где C_1^+, C_2^+ – произвольные комплексные постоянные.

6. Заключительное замечание

Отметим наличие произвольных комплексных постоянных C_σ^+ в формуле (37) общего решения исходного уравнения, что нетипично для линейных уравнений, содержащих наряду с неизвестной функцией ее комплексно-сопряженное значение. Этому факту можно дать следующее объяснение. В формуле (19) произвольные комплексные постоянные содержатся лишь в выражении для $\Psi_+(t)$. При подстановке такой функции в интегралы с $\overline{\varphi(\tau)}$ в исходном уравнении получим

$$\int_L\frac{\overline{\Psi_+(\tau)}\,\overline{d\tau}}{(\overline{\tau}-\varepsilon_{m-j}t)^{mk+1}}=\overline{\int_L\frac{\Psi_+(\tau)d\tau}{(\tau-\varepsilon_j\overline{t})^{mk+1}}}.$$

Для $t\in L\quad \varepsilon_j\overline{t}\in D_-$, $j=\overline{0,m-1}$, поэтому функции $\frac{\Psi_+(z)}{(z-\varepsilon_j\overline{t})^{mk+1}}$ будут аналитическими в области D_+ и по интегральной теореме Коши

$$\int_L\frac{\Psi_+(\tau)d\tau}{(\tau-\varepsilon_j\overline{t})^{mk+1}}=0.$$

Следовательно, при подстановке решения в виде (19) в левую часть исходного уравнения наличие или отсутствие интегралов с $\overline{\varphi(\tau)}$ не влияет на вычисления, связанные с $\Psi_+(t)$, из-за чего постоянные C_σ^+ остаются произвольными комплексными.

Литература

1. *Зверович Э. И.* Обобщение формул Сохоцкого // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2012. № 2. С. 24–28.

2. *Зверович Э. И.* Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2010. Т. 54, № 6. С. 5–8.

3. *Зверович Э. И., Шилин А. П.* Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2018. Т. 54, № 4. С. 404–407. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407

4. *Шилин А. П.* Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с линейными функциями в коэффициентах // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2022. Т. 58, № 4. С. 358–369. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-358-369

5. *Шилин А. П.* Интегро-дифференциальное уравнение, связанное со смешанной задачей Римана–Гильберта // Труды 11-го международного семинара «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений», 16–20 сентября 2024 г., Минск, Беларусь. Минск: БГУ, 2024. С. 87–93.

6. *Шилин А. П.* Интегро-дифференциальное уравнение, связанное с краевой задачей Римана–Карлемана // Труды Института математики НАН Беларуси. 2024. Т. 32, № 2. С. 73–81.

7. *Шилин А. П.* Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения на кривой, расположенной в угловой области // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2025. № 2. С. 6–15. EDN: OVOHOI

8. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

References

1. Zverovich E. I. Generalization of Sokhotsky formulas. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2012, no. 2, pp. 24–28 (in Russian).

2. Zverovich E. I. Solution of the hypersingular integro-differential equation with constant coefficients. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2010, vol. 54, no. 6, pp. 5–8 (in Russian).

3. Zverovich E. I., Shilin A. P. Integro-differential equations with singular and hypersingular integrals. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 404–407 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407

4. Shilin A. P. A hypersingular integro-differential equation with linear functions in coefficients. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2022, vol. 58, no. 4, pp. 358–369 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-358-369

5. Shilin A. P. Integro-differential equation related to the mixed Riemann–Hilbert problem. *Proceedings of the* 11^{th} *International Workshop «Analytical Methods of Analysis and Differential Equations»*, September 16–20, 2024, Minsk, Belarus. Minsk, BSU, 2014, pp. 87–93 (in Russian).

6. Shilin A. P. Integro-differential equation associated with the Riemann–Carleman boundary value problem. *Proceedings of the Institute of Mathematics of the NAS of Belarus*, 2024, vol. 32, no. 2, pp. 73–81 (in Russian).

7. Shilin A. P. Solution of the hypersingular integro-differential equation on a curve located in the angular domain. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2025, no. 2, pp. 6–15 (in Russian). EDN: OVOHOI

8. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*. Moscow, Nauka, 1977 (in Russian).

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Том 33. № 2. С. 114–120

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

УДК 512.542 EDN: YCAZVV

ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ G-СЕТЕЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРЕБЫВАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕН ОБСЛУЖИВАНИЯ

С. Ю. Евмененко

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель, Беларусь
e-mail: stas.evmenenko@yandex.ru

Поступила: 03.09.2025 **Исправлена:** 18.09.2025 **Принята:** 15.12.2025

Ключевые слова: теория массового обслуживания, стохастические процессы, теория вероятностей, сети Геленбе, сети с отрицательными задачами, марковские процессы.

Аннотация. Рассматривается сеть массового обслуживания (СеМО) с отрицательными задачами с однолинейными узлами и ограничением на время пребывания задач в узлах. Если в момент поступления отрицательной задачи в узле имеются положительные задачи, то одна из положительных задач мгновенно исчезает из сети. Если же в этот момент в узле отсутствуют положительные задачи, то поступающая в этот узел отрицательная задача пропадает, не оказывая в дальнейшем никакого влияния на поведение сети. Положительные задачи, время пребывания которых в узле закончилось, мгновенно и независимо от других положительных задач перемещаются по сети в соответствии с матрицей переходных вероятностей, отличной от матрицы маршрутизации обслуженных положительных задач. Доказывается нечувствительность стационарного распределения к форме распределения длительностей обслуживания задач, при фиксированных первых моментах.

INVARIANCE OF THE STATIONARY DISTRIBUTION OF G-NETWORKS WITH BOUNDED SOJOURN TIME WITH RESPECT TO SERVICE TIME DISTRIBUTIONS

S. Yu. Evmenenko

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus
e-mail: stas.evmenenko@yandex.ru

Received: 03.09.2025 **Revised:** 18.09.2025 **Accepted:** 15.12.2025

Keywords: queueing theory, stochastic processes, probability theory, Gelenbe networks, networks with negative customers, Markov processes.

Abstract. We consider a queueing network with negative customers, single-server nodes, and constraints on the sojourn time of customers in nodes. If, at the moment a negative customer arrives at a node, there are positive customers present, one of the positive customers instantly disappears from the network. If, however, no positive customers are present in the node at that moment, the incoming negative customer vanishes immediately and has no further effect on the network's behavior. Positive customers whose sojourn time in a node has expired instantly and independently of other positive customers begin routing according to a transition matrix that differs from the routing matrix used by positively served customers. The insensitivity of the stationary distribution to the shape of the service time distribution given fixed first moments is proven. The conditional distribution of customer sojourn times in nodes is exponential.

1. Введение

Сети массового обслуживания представляют собой один из ключевых объектов исследования в теории вероятностей, прикладной математике и инженерии. Они служат мощным аппаратом для описания, анализа и оптимизации процессов обслуживания заявок в различных прикладных системах: от компьютерных и телекоммуникационных сетей до логистики, систем управления, биологических процессов и облачных вычислений. Классические модели, такие как сети Джексона и Баккета не учитывают важные эффекты взаимодействия между задачами, характерные для современных высоконагруженных и распределенных систем.

В ответ на эти ограничения была предложена модель сетей с отрицательными заявками, впервые систематически исследованная Э. Геленбе (G-networks) [1]. Такие сети расширяют традиционные СеМО, вводя в рассмотрение так называемые деструктивные (отрицательные) задачи, которые, в отличие от обычных (положительных), не обслуживаются в традиционном смысле, а взаимодействуют с другими задачами, удаляя их из сети. Это позволяет описывать такие явления, как вытеснение задач из очереди, отмена операций, репликация и восстановление. Благодаря этим возможностям сети Геленбе нашли применение в моделировании отказоустойчивости, систем с перегрузкой, а также в нейроморфных вычислениях и биоинформатике.

Одним из важнейших направлений в теории СеМО с отрицательными заявками является изучение стационарного режима функционирования сети, т. е. такого состояния, при котором вероятностные характеристики системы становятся стабильными во времени. Особое внимание при этом уделяется временам пребывания задач в узлах сети [2], поскольку они отражают ключевые показатели эффективности системы: среднее время отклика, задержки, потери и загрузку ресурсов. Для широкого класса систем с положительными задачами давно установлено, что стационарное распределение времени пребывания в узлах может обладать определенной инвариантностью – устойчивостью к изменениям в структуре маршрутизации, начальным условиям или отдельным параметрам. В [3] был получен результат для сетей Геленбе с экспоненциальным ограничением на время пребывания задач в узлах, и где распределение времен обслуживания задач в узлах является экспоненциальным.

В условиях присутствия отрицательных задач, обладающих возможностью удалять другие задачи, вопрос об инвариантности стационарного распределения времен пребывания приобретает особенно острый и нетривиальный характер. В [4–7] получены фундаментальные результаты по инвариантности стационарного распределения по отношению к закону распределения времен обслуживания задач в узлах. Деструктивные взаимодействия могут существенно изменить динамику системы, вызывая эффекты нелинейного характера, что делает невозможным прямое применение традиционных методов анализа. Тем не менее, наличие структурной инвариантности в стационарных характеристиках таких сетей может служить ценным инструментом как для теоретического анализа, так и для практического проектирования и управления. В первую очередь, это связано с тем, что в реальных сетях распределение продолжительности обслуживания обычно отличается от показательного, а доказательство инвариантности стационарного распределения позволит применять методы исследования ТМО к реальным сетям обслуживания.

В [8; 9] представлены некоторые современные результаты по сетям с положительными и отрицательными задачами. В работе [10] для открытой СеМО с дисциплиной обслуживания LCFS Preemptive Resume доказана инвариантность стационарного распределения по отношению к распределениям длительностей обслуживания при фиксированных первых моментах. В [11] доказана инвариантность стационарного распределения для открытых и замкнутых СеМО с обходами узлов задачами. Ранее Гомельской школой по мультипликативным сетям был получен результат по инвариантности стационарного распределения для СеМО с отрицательными задачами [12].

Цель настоящей работы – доказательство инвариантности стационарного распределения относительно времен обслуживания задач в узлах сети массового обслуживания с положительными и отрицательными задачами и экспоненциальным ограничением на время пребывания задач в узлах, при условии, что их первые моменты (математические ожидания) остаются фиксированными.

Практическая значимость результатов связана с возможностью использовать полученные свойства для упрощения моделирования и анализа сложных распределенных систем, не прибегая к трудоемкому вычислению конкретных переходных вероятностей и временных характеристик для каждой конфигурации сети.

2. Марковский случай

В сеть массового обслуживания, состоящую из N однолинейных экспоненциальных узлов с интенсивностью обслуживания μ_i для i-го узла, поступает $2N$ независимых простейших потоков задач, причем в i-й узел поступают два потока: поток положительных (обычных, требующих обслуживания) задач, поток отрицательных задач ($i = \overline{1,N}$). Состояние сети в момент времени t задается вектором $\mathbf{n}(t) = (n_1(t), \dots, n_N(t))$, где $n_i(t)$ обозначает количество задач в i-м узле в момент времени t. Число мест для ожидания в каждом из узлов бесконечно. Если положительный запрос поступает в узел, свободный от запросов, он сразу начинает обслуживаться. Если положительный запрос поступает в узел, в котором уже есть запрос, то он вытесняет запрос, находящийся на приборе, и сразу же начинает обслуживаться, а вытесненный с прибора положительный запрос становится в начало очереди (дисциплина LCFS Preemptive Resume). При поступлении отрицательной задачи в узел удаляется положительная задача, стоящая последней в очереди (если такие имеются), а если прибор занят, а в очереди нет задач, то удаляется задача, находящаяся на приборе. Пусть Λ_i и λ_i соответственно – интенсивности потоков положительных и отрицательных задач, поступающих в i-й узел извне. Будем предполагать, что промежутки времени между моментами поступления задач извне в сеть, времена их обслуживания и времена их пребывания в узлах суть взаимно независимые между собой случайные величины, а $\Lambda_i > 0$, $\lambda_i > 0$ для всех $i = \overline{1,N}$. В момент окончания обслуживания положительной задачи в i-м узле эта задача: с вероятностью p^+_{ij} переходит в j-й узел, оставаясь положительной задачей, с вероятностью p^-_{ij} переходит в j-й узел, превращаясь в отрицательную задачу, с вероятностью p_{i0} покидает сеть $(i, j = \overline{1,N}, \sum_{j=0}^{N} p_{ij} = 1$, где $p_{ij} = p^+_{ij} + p^-_{ij}$ для $j \neq 0)$. Если задача покидает узел за счет окончания времени пребывания, эта задача: с вероятностью r^+_{ij} переходит в j-й узел, оставаясь положительной задачей, с вероятностью r^-_{ij} переходит в j-й узел, превращаясь в отрицательную задачу, с вероятностью r_{i0} покидает сеть $(i, j = \overline{1,N}, \sum_{j=0}^{N} r_{ij} = 1$, где $r_{ij} = r^+_{ij} + r^-_{ij}$ для $j \neq 0)$.

Длительности обслуживания задач в узлах имеют произвольную функцию распределения $B_i(t)$, причем

$$(\mu_i)^{-1} = \int_0^\infty [1 - B_i(t)]dt. \tag{1}$$

При рассмотрении марковского случая будем предполагать, что время обслуживания положительной задачи единственным прибором i-го узла имеет показательное распределение с параметром $\mu_i (i = \overline{1,N})$, т. е. $B_i(t) = 1 - \exp\{-\mu_i t\} (t > 0)$. Время пребывания задачи в i-м узле является случайной величиной, условное распределение которой (если в i-м узле находится n_i задач) показательное с параметром $\frac{\nu_i}{n_i}$. Другими словами, условная вероятность того, что пребывания каждой задачи в i-м узле закончится в промежутке $[t, t+h)$, если в момент t в узле находилось n_i задач, равна $\frac{\nu_i}{n_i} h + o(h)$ при $h \to 0$, а условная вероятность завершения пребывания хотя бы одной из этих задач равна $\nu_i h + o(h)$. В таком случае, процесс $n(t)$ представляет собой однородный марковский процесс с непрерывным временем и фазовым пространством состояний, которое является не более чем счетным.

Обозначим через λ^+_i и λ^-_i соответственно интенсивности потоков положительных и отрицательных задач, поступающих в i-й узел (извне и из других узлов, $i = \overline{1,N}$) в стационарном режиме. В [3] показано, что в стационарном режиме выполняется следующий закон сохранения:

$$\lambda^+_i = \Lambda_i + \sum_{j=1}^{N} (\mu_j \rho_j p^+_{ij} + \nu_j \rho_j r^+_{ij}), \tag{2}$$

$$\lambda^-_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^{N} (\mu_j \rho_j p^-_{ij} + \nu_j \rho_j r^-_{ij}), \quad i = \overline{1,N}, \tag{3}$$

где $\rho_i = \frac{\lambda^+{}_i}{\mu_i + \nu_i + \lambda^-{}_i}$ – загрузка i-го узла сети. Уравнения (2) и (3) назовем уравнениями трафика.

В [3] для данной сети массового обслуживания доказано, что при $\frac{\lambda^+{}_i}{\mu_i + \nu_i + \lambda^-{}_i} < 1, i = \overline{1,N}$, цепь Маркова, описывающая количество задач в сети в момент времени t, эргодична, а ее единственное стационарное распределение имеет форму произведения. Приведем из [3] уравнения глобального равновесия для марковского случая

$$p(\mathbf{n})\sum_{i=1}^{N}\Lambda_i+(\mu_i+\nu_i+\lambda_i)I_{\{n_i\neq 0\}}=\sum_{i=1}^{N}p(\mathbf{n}-\mathbf{e}_i)\Lambda_i I_{\{n_i\neq 0\}}+\sum_{i=1}^{N}p(\mathbf{n}+\mathbf{e}_i)(\mu_i p_{i0}+\nu_i r_{i0}+\lambda_i)+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1,i\neq j}^{N}p(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i)(\mu_j p_{ji}^{+}+\nu_j r_{ji}^{+})I_{\{n_i\neq 0\}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1,i\neq j}^{N}p(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_i)(\mu_j p_{ji}^{-}+\nu_j r_{ji}^{-})+p(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j)(\mu_j p_{ji}^{-}+\nu_j r_{ji}^{-})I_{\{n_i=0\}}.$$

Здесь $\mathbf{e}_i$-единичный вектор i-го направления.

3. Немарковский случай

Теперь будем предполагать, что времена обслуживания задач в узлах имеют произвольную функцию распределения $B_i(t)$, причем математическое ожидание фиксированно с помощью (1). В этом случае процесс $\mathbf{n}(t)$ не является марковским. Далее докажем, что для такого процесса справедлива следующая теорема.

Теорема. *При* $\frac{\lambda^{+}{}_i}{\mu_i+\nu_i+\lambda^{-}{}_i}<1, i=\overline{1,N}$*, процесс, описывающий количество задач в узле в момент времени t, имеет финальное строго положительное распределение в форме произведения* $p(\mathbf{n})=$ $=p_1(n_1)\dots p_N(n_N)$*, с множителями*

$$p_i(n_i)=\rho_i^{n_i}(1-\rho_i),\quad n_i=0,1,\dots,$$

где $\{\lambda_i^{+},\lambda_i^{-},i=\overline{1,N}\}$ *– решение уравнения трафика (2) и (3).*

Доказательство. Пусть $\tau_{ik}(t)$ – остаточное время обслуживания положительной задачи в i-м узле с момента t до момента окончания времени обслуживания, а $\boldsymbol{\tau}_i(t)=(\tau_{i1}(t),\tau_{i2}(t),\dots,\tau_{in_i}(t))$ – вектор, описывающий остаточное время обслуживания задач в i-м узле; где k – номер позиции, на которой находится задача от «хвоста» к прибору. Поскольку, вообще говоря, $\mathbf{n}(t)$ не является марковским процессом, рассмотрим марковский процесс $\zeta(t)=(\mathbf{n}(t),\boldsymbol{\tau}(t))$, добавляя к $\mathbf{n}(t)$ непрерывную компоненту $\boldsymbol{\tau}(t)=(\boldsymbol{\tau}_1(t);\dots;\boldsymbol{\tau}_N(t))$. Пусть выполнено условие $\frac{\lambda^{+}{}_i}{\mu_i+\nu_i+\lambda^{-}{}_i}<1, i=\overline{1,N}$, т. е. в случае, когда $\mathbf{n}(t)$ – марковский процесс, существует стационарное эргодическое распределение $\mathbf{n}(t)$, а, следовательно, в общем случае и процесса $\zeta(t)$, так как $\zeta(t)$ получается из $\mathbf{n}(t)$ добавлением непрерывных компонент. Положим, что

$$F(\mathbf{n},x)=F(\mathbf{n},x_{11},...,x_{1n_1},x_{21},...,x_{2n_2},...,x_{N1},...,x_{Nn_N})=$$

$$=\lim_{t\to\infty}P\{\mathbf{n}(t)=\mathbf{n},\tau_{i1}(t)<x_{i1},...,\tau_{in_i}(t)<x_{in_i},i=\overline{1,N}\}.$$

Введем обозначения: $[\widetilde{x_i}]$ – вектор, все элементы которого совпадают с элементами вектора $x_1,\dots,x_N$, а на месте i-го элемента находится элемент $\widetilde{x_i}$, $[\widetilde{x_i},\widetilde{x_j}]$ – вектор, все элементы которого совпадают с элементами вектора $x_1,\dots,x_N$, а на месте i-го и j-го элемента находятся элементы $\widetilde{x_i}$ и $\widetilde{x_j}$ соответственно.

Для $F(\mathbf{n},x)$ справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений:

$$F(\mathbf{n},\mathbf{x})\sum_{i=1}^{N}\lambda_i B_i(x_{i,n_i})I_{n_i\neq 0}+F(\mathbf{n},\mathbf{x})\sum_{i=1}^{N}\Lambda_i+F(\mathbf{n},\mathbf{x})\sum_{i=1}^{N}\nu_i B_i(x_{i,n_i})I_{n_i\neq 0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F(\mathbf{n},[x_{i,1},\dots,x_{i,n_i-1},0])}{\partial x_{i,n_i}}-\frac{\partial F(\mathbf{n},\mathbf{x})}{\partial x_{i,n_i}}\right)I_{n_i\neq 0}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}F(\mathbf{n}-\mathbf{e}_i,[x_{i,1},\dots,x_{i,n_i-1}])I_{n_i\neq 0}B_i(x_{i,n_i})\Lambda_i+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F(\mathbf{n}+\mathbf{e}_i,[x_{i,1},\dots,x_{i,n_i},0])}{\partial x_{i,n_i+1}}p_{i0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(\mathbf{n}+\mathbf{e}_i,[x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i},+\infty])\nu_i r_{i0}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i,[x_{j,1},\ldots,x_{j,n_j},0],[x_{i,1},\ldots,x_{i,n_{i-1}}])}{\partial x_{j,n_j+1}}B_i(x_{i,n_i})p_{ji}^{+}I_{n_i\neq 0}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}F(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i,[x_{j,1},\ldots,x_{j,n_j},+\infty],[x_{i,1},\ldots,x_{i,n_{i-1}}])\nu_j B_i(x_{i,n_i})r_{ji}^{+}I_{n_i\neq 0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(\mathbf{n}+\mathbf{e}_i,[x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i},+\infty])\lambda_i++\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{\partial F(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_i,[x_{j,1},\ldots,x_{j,n_j},0],[x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i},+\infty])}{\partial x_{j,n_j+1}}p_{ji}^{-}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}F(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_i,[x_{j,1},\ldots,x_{j,n_j},+\infty],[x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i},+\infty])\nu_j r_{ji}^{-}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{\partial F(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j,[x_{j,1},\ldots,x_{j,n_j},0])}{\partial x_{j,n_j+1}}p_{ji}^{-}-\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{\partial F(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j,[x_{j,1},\ldots,x_{j,n_j},0])}{\partial x_{j,n_j+1}}B_i(x_{i,n_i})p_{ji}^{-}I_{n_i\neq 0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1 j\neq i}^{N}F(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j,[x_{j,1},\ldots,x_{j,n_j},+\infty])\nu_j r_{ji}^{-}-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1 j\neq i}^{N}F(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j,[x_{j,1},\ldots,x_{j,n_j},+\infty])\nu_j B_i(x_{i,n_i})r_{ji}^{-}I_{n_i\neq 0}.$$

Разобьем уравнение (5) на уравнения локального равновесия, приравнивая члены слева и справа, не содержащие множителя $I_{n_i\neq 0}$, а затем члены, содержащие этот множитель:

$$F(\mathbf{n},\mathbf{x})\sum_{i=1}^{N}\Lambda_i=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F(\mathbf{n}+\mathbf{e}_i,[x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i},0])}{\partial x_{i,n_i+1}}p_{i0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}F(\mathbf{n}+\mathbf{e}_i,[x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i},+\infty])\nu_i r_{i0}+\sum_{i=1}^{N}F(\mathbf{n}+\mathbf{e}_i,[x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i},+\infty])\lambda_i+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{\partial F(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_i,[x_{j,1},\ldots,x_{j,n_j},0],[x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i},+\infty])}{\partial x_{j,n_j+1}}p_{ji}^{-}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}F(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_i,[x_{j,1},\ldots,x_{j,n_j},+\infty],[x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i},+\infty])\nu_j r_{ji}^{-}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{\partial F(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j,[x_{j,1},\ldots,x_{j,n_j},0])}{\partial x_{j,n_j+1}}p_{ji}^{-}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1 j\neq i}^{N}F(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j,[x_{j,1},\ldots,x_{j,n_j},+\infty])\nu_j r_{ji}^{-};$$

$$F(\mathbf{n},\mathbf{x})\sum_{i=1}^{N}\lambda_i B_i(x_{i,n_i})+F(\mathbf{n},\mathbf{x})\sum_{i=1}^{N}\nu_i B_i(x_{i,n_i})+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F(\mathbf{n},[x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i-1},0])}{\partial x_{i,n_i}}-\frac{\partial F(\mathbf{n},\mathbf{x})}{\partial x_{i,n_i}}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}F(\mathbf{n}-\mathbf{e}_i,[x_{i,1},\ldots,x_{i,n_i-1}])B_i(x_{i,n_i})\Lambda_i+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i,[x_{j,1},\ldots,x_{j,n_j},0],[x_{i,1},\ldots,x_{i,n_{i-1}}])}{\partial x_{j,n_j+1}}B_i(x_{i,n_i})p_{ji}^{+}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}F(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i,[x_{j,1},\ldots,x_{j,n_j},+\infty],[x_{i,1},\ldots,x_{i,n_{i-1}}])\nu_j B_i(x_{i,n_i})r_{ji}^{+}-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{\partial F(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j,[x_{j,1},\ldots,x_{j,n_j},0])}{\partial x_{j,n_j+1}}B_i(x_{i,n_i})p^-_{ji}--\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1 j\neq i}^{N}F(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j,[x_{j,1},\ldots,x_{j,n_j},+\infty])\nu_j B_i(x_{i,n_i})r^-_{ji}.$$

Нетрудно убедиться, что неотрицательным абсолютно непрерывным по $\mathbf{x}$ решением уравнений локального равновесия, а следовательно, и уравнения глобального равновесия является

$$F(\mathbf{n},\mathbf{x}) = p(\mathbf{n})\prod_{i=1}^{N}\prod_{k=1}^{n_i}\mu_i\int_0^{x_{ik}}[1-B_i(u)]du, \qquad (4)$$

где $p(\mathbf{n})$ – стационарная вероятность состояния $\mathbf{n}$ в процессе $\mathbf{n}(t)$ в марковском случае. Подставив (4) в первое уравнение локального равновесия, умножив обе части полученного равенства на $\frac{p(\mathbf{n})}{F(\mathbf{n},\mathbf{x})}$, получим первое уравнение локального равновесия для марковского случая из [3]. Затем, подставив (4) во второе уравнение локального равновесия, умножив обе части полученного равенства на $\frac{p(\mathbf{n})\int_0^{x_{i,n_i}}[1-B_i(u)]du}{F(\mathbf{n},\mathbf{x})B_i(x_i)}$, получим второе уравнение локального равновесия СеМО для марковского случая из [3]. Сложив уравнения локального равновесия, учитывая, что $I_{n_i=0} = 1 - I_{n_i\neq 0}$, получим уравнение глобального равновесия открытой СеМО для марковского случая (4), и с учетом, что $F(\mathbf{n},+\infty) = p(\mathbf{n})$, теорема доказана. □

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору Ю. В. Малинковскому за постоянное внимание к работе и неоценимую помощь, оказанную в подготовке статьи.

4. Заключение

Основным теоретическим вкладом данной работы является строгое доказательство инвариантности стационарного распределения по отношению ко времени обслуживания задач в обобщенных G-сетях, учитывающих как положительные, так и отрицательные заявки. В отличие от классических моделей, в которых взаимодействие между заявками отсутствует или сводится к пассивному накоплению, здесь рассматривается механизм удаления задач из очереди. Получено фундаментальное свойство: форма стационарного распределения времени пребывания сохраняется при изменении закона распределения времени обслуживания задач в узлах.

Таким образом, результаты исследования представляют собой значимый шаг в развитии теории сетей массового обслуживания, углубляя понимание структуры стационарного режима в условиях наличия разрушительных взаимодействий и подтверждая наличие универсальных инвариантных свойств, устойчивых к усложнению сетевой архитектуры и динамики.

Литература

1. *Gelenbe E.* Random neural networks with negative and positive signals and product form solution // Neural Computation. 1989. Vol. 1, N 4. P. 502–510.

2. *Малинковский Ю. В.* Сети Джексона с однолинейными узлами и ограниченным временем пребывания или ожидания // Автоматика и телемеханика. 2015. № 4. С. 67–79.

3. *Малинковский Ю. В.* Стационарное распределение вероятностей состояний G-сетей с ограниченным временем пребывания // Автоматика и телемеханика. 2017. № 10. С. 155–167.

4. *Jackson J. R.* Networks of waiting lines // Operations Research. 1957. Vol. 5, N 4. P. 518–521.

5. *Kelly F. P.* Networks of Queues // Adv. Appl. Probab. 1979. Vol. 11, N 2. P. 343–375.

6. *Baskett F., Chandy K. M., Muntz R. R., Palacios F. G.* Open, closed, and mixed networks of queues with different classes of customers // Journal of the ACM. 1975. Vol. 22, N 2. P. 248–260.

7. *Gelenbe E.* Product-form queueing networks with negative and positive customers // Journal of the ACM. 1991. Vol. 38, N 3. P. 615–631.

8. *Журавлева Е. А., Максимов И. В.* Анализ устойчивости и стационарного режима в G-сетях с отрицательными заявками // Труды Московского физико-технического института. 2020. Т. 12, № 3. С. 56–65.

9. *Смирнова Н. В.* Модели с отрицательными заявками в современных распределенных системах // Вестник Санкт-Петербургского университета. 2019. № 2. С. 101–114.

10. *Малинковский Ю. В., Евмененко С. Ю.* Инвариантность стационарного распределения открытой сети обслуживания с экспоненциальным ограничением на время пребывания // Автоматика и телемеханика. 2024. № 9. С. 93–100.

11. *Малинковский Ю. В.* Инвариантность стационарного распределения состояний модифицированных сетей Джексона и Гордона–Ньюэлла // Автоматика и телемеханика. 1998. № 9. С. 29–36.

12. *Довженок Т. С.* Инвариантность стационарного распределения сетей с обходами и отрицательными заявками // Автоматика и телемеханика. 2002. № 9. С. 97–110.

References

1. Gelenbe E. Random neural networks with negative and positive signals and product form solution. *Neural Computation,* 1989, vol. 1, no. 4, pp. 502–510.

2. Malinkovskii Yu. V. Jackson networks with single-line nodes and limited residence or waiting time. *Automation and Remote Control*, 2015, no. 4, pp. 67–79.

3. Malinkovskii Yu. V. Stationary probability distribution of *G*-network states with limited residence time. *Automation and Remote Control,* 2017, no. 10, pp. 155–167.

4. Jackson J. R. Networks of waiting lines. *Operations Research*, 1957, vol. 5, no. 4, pp. 518–521.

5. Kelly F. P. Networks of Queues. *Advances in Applied Probability,* 1979, vol. 11, no. 2, pp. 343–375.

6. Baskett F., Chandy K. M., Muntz R. R., Palacios F. G. Open, closed, and mixed networks of queues with different classes of customers. *Journal of the ACM,* 1975, vol. 22, no. 2, pp. 248–260.

7. Gelenbe E. Product-form queueing networks with negative and positive customers. *Journal of the ACM,* 1991, vol. 38, no. 3, pp. 615–631.

8. Zhuravleva E. A., Maksimov I. V. Stability analysis and stationary regime in *G*-networks with negative customers. *Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology,* 2020, vol. 12, no. 3, pp. 56–65.

9. Smirnova N. V. Models with negative customers in modern distributed systems. *Bulletin of St. Petersburg University*, 2019, no. 2, pp. 101–114.

10. Malinkovskii Yu. V., Evmenenko S. Yu. Invariance of the stationary distribution of an open queueing network with an exponential restriction on residence time. *Automation and Remote Control,* 2024, no. 9, pp. 93–100.

11. Malinkovskii Yu. V. Invariance of the stationary distribution of states in modified Jackson and Gordon–Newell networks. *Automation and Remote Control,* 1998, no. 9, pp. 29–36.

12. Dovzhenok T. S. Invariance of the stationary distribution of networks with bypasses and negative customers. *Automation and Remote Control*, 2002, no. 9, pp. 97–110.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Для публикации в журнале принимаются ранее не опубликованные в других изданиях научные статьи. Обзорные статьи публикуются по решению редколлегии.

2. Объем статьи не более 20 журнальных страниц (с учетом таблиц и рисунков, а также списка литературы на 2 языках), объем краткого сообщения – до 5 страниц.

3. Статьи в Журнале публикуются на русском или английском языке.

4. Статья должна быть подготовлена в системе LaTeX по образцу, находящемуся на сайте Журнала. Не допускается использование в TeX-файлах «нестандартных» TeX-команд (т. е. команд, не входящих в стандартную поставку LaTeX), а также переопределение стандартных команд. При подаче статьи автору необходимо указывать рубрику Журнала, к которому относится статья.

5. Текст статьи начинается с индекса УДК, затем следуют название статьи, инициалы и фамилии авторов, а также краткая аннотация (не более 15 строк) и ключевые слова (5–10 слов). Аннотация не должна содержать ссылок на формулы и литературу статьи. Сведения об авторе (авторах), название статьи, аннотация и ключевые слова пишутся на русском и английском языках, остальные элементы оформляются на русском (английском) языке.

6. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их упоминания и даются в квадратных скобках. Использование ссылок на неопубликованные работы не допускается. Необходимо приводить два списка ссылок на использованную в статье литературу – «Литература» и «References».

7. Если присутствует информация о финансировании (поддержке грантами проектов и т. п.), ее следует размещать в конце статьи.

GUIDELINES FOR AUTHORS

1. Scientific articles not previously published in other publications are accepted for publication in the journal. Review articles are published by decision of the editorial board.

2. The volume of the article is no more than 20 journal pages, taking into account tables and figures, the volume of a short message is up to 5 pages.

3. Articles in the Journal are published in Russian or English.

4. The article must be prepared in the LaTeX system according to the model located on the Journal's website. It is not allowed to use "non-standard" in TeXfiles TeXcommands (i. e. commands not included in the standard LaTeX distribution), and also override standard commands. When submitting an article, the author must indicate the category of the Journal to which the article belongs.

5. The text of the paper must begin with the UDC, the title, and the name(s) of the author(s) preceded by initials followed by a short abstract (no more than 15 lines) and keywords (5–10 words). The abstract must not contain numbered references to the formulas and bibliography items. Information about the author (authors), title of the article, abstract and keywords are written in Russian and English, other elements are written in Russian (English).

6. The references in the text are numbered in order of their appearance and in square brackets. The use of references to unpublished works is not permitted. It is necessary to provide two lists of references to the literature used in the article – "References" and "Literature". An example of bibliographic descriptions is given in the model located on the Journal's website.

7. If there is information about financial support for the research (grant support for projects, etc.), it should be placed at the end of the article.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ
2025. ТОМ 33, № 2

Редактор Т. П. Петрович
Компьютерная верстка И. В. Близнец

Подписано в печать 30.12.2025. Формат 60×84 $^1/_8$. Усл. печ. л. 14,09. Уч.-изд. л. 8,77.
Государственное научное учреждение «Институт математики Национальной академии наук Беларуси».
220072, г. Минск, ул. Сурганова, д. 11.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1 / 257 от 2 апреля 2014 г.

Отпечатано в Республиканском унитарном предприятии «Издательский дом «Беларуская навука». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1 / 18 от 02.08.2013. ЛП № 02330 / 455 от 30.12.2013.
Ул. Ф. Скорины, 40. 220084, г. Минск.
Тираж 30 экз. Заказ ….