ТРУДЫ
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

Минск. 2023. ТОМ 31. № 2

Содержание

CONTENTS

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 2. С. 3–4

ПЕТР ПАВЛОВИЧ МАТУС. К 70-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

Коллектив сотрудников Института математики НАН Беларуси

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: math@im.bas-net.by
Поступила 30.07.2023

24 июля 2023 г. исполнилось 70 лет со дня рождения известного белорусского ученого, члена-корреспондента Национальной академии наук Беларуси, доктора физико-математических наук, профессора Петра Павловича Матуса.

Петр Павлович родился в 1953 году в городском поселке Россь, Волковысского района, Гродненской области. После окончания в 1975 году факультета прикладной математики Белорусского государственного университета по специальности «Прикладная математика» был направлен на работу в Институт математики Национальной академии наук Беларуси.

С 1975 года и по настоящее время Петр Павлович плодотворно работает в Институте математики. Прошел путь от стажера-исследователя до главного научного сотрудника. На протяжении многих лет был заведующим отделом численного моделирования и заместителем директора по научной и инновационной работе.

В 1980 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «О сходимости разностных схем одномерной газовой динамики» под руководством профессора В. Н. Абрашина (Институт математики НАН Беларуси) и профессора Ю. П. Попова (Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук) по специальности «Вычислительная математика». В 1995 году в Институте математического моделирования Российской академии наук защитил докторскую диссертацию на тему «Разностные схемы на адаптивных сетках для краевых задач математической физики». Решением Аттестационной коллегии Министерства образования Республики Беларусь в апреле 1996 года ему присвоено звание профессора по специальности «Вычислительная математика», и в ноябре 2018 года П. П. Матус был избран членом-корреспондентом Национальной академии наук Беларуси.

П. П. Матус – известный математик, крупный специалист в области вычислительной математики. Петру Павловичу принадлежит ведущая роль в развитии и становлении белорусской научной школы по исследованию устойчивости и сходимости разностных схем для краевых задач математической физики. Им разработана теория коэффициентной и нелинейной устойчивости, устойчивости операторно-разностных схем с переменными весовыми множителями. Для многомерных эллиптических и параболических уравнений со смешанными производными построены и исследованы монотонные разностные схемы с сохранением второго порядка точности. В работах Петра Павловича существенно развита теория компактных схем на полулинейные и квазилинейные уравнения параболического и гиперболического типов.

Петр Павлович ведет большую научно-организационную, педагогическую и общественную работу, неоднократно являлся приглашенным лектором крупнейших международных конференций.

П. П. Матус опубликовал 4 книги, две из которых изданы на английском языке за рубежом, и более 300 научных статей в различных математических журналах. Научная деятельность Петра Павловича неразрывно связана с педагогической работой. Он подготовил 23 кандидата физико-математических наук, является одним из создателей международного журнала «Computational Methods in Applied Mathematics» (издательство De Gruyter), членом редколлегии двух отечественных и шести зарубежных журналов, руководителем городского семинара по математическому моделированию, членом экспертного совета по математике ВАК Республики Беларусь.

Большая энергия и глубокие творческие идеи характерны для П. П. Матуса как ученого и специалиста. Мы искренне поздравляем Петра Павловича с юбилеем, желаем ему крепкого здоровья, успехов, оптимизма, благополучия и осуществления всех творческих замыслов.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 2. С. 5–14

УДК 51–76

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ КОРОНАВИРУСНОЙ ИНФЕКЦИИ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

А. Н. Авлас, А. К. Деменчук, С. В. Лемешевский, Е. К. Макаров

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: artolomiay@tut.by, demenchuk@im.bas-net.by, svl@im.bas-net.by, jcm@im.bas-net.by
Поступила 01.12.2023

Приводятся результаты прогнозирования первой волны распространения коронавирусной инфекции COVID-19 на основе упрощенной модели Барояна–Рвачева.

Введение. Пандемия COVID-19 и ее информационное сопровождение создали небывалую ранее ситуацию широкой доступности статистических данных о заболеваемости и смертности, вызванных однотипной инфекцией, одновременно распространявшейся во всех странах мира. Несмотря на неоднородность и неполноту этих данных, а также и не всегда достаточную достоверность, их доступность и сопровождавшие рост заболеваемости панические настроения не могли не стимулировать значительное расширение исследований в области математической эпидемиологии, посвященных изучению COVID-19. Последовавшее в 2022 г. постепенное снижение интенсивности эпидемических процессов и уменьшение накала информационной кампании вокруг COVID-19 привели к снижению актуальности данной тематики и возвращению исследований в этой области в относительно нормальное русло.

Основным результатом проведенных в мире работ стало установление того факта, что COVID-19 является обычной инфекцией, подчиняющейся общим законам эпидемиологии и допускающей моделирование на основе уже существующих моделей. Еще одним важным результатом стала разработка множества новых подходов и моделей инфекционных процессов и их проверка на натурных данных, ставшая возможной благодаря их обилию и доступности. При этом, однако, следует отметить, что находящиеся в открытом доступе данные о заболеваемости коронавирусной инфекцией не детализированы и отражают лишь суммарные величины, относящиеся к отдельным странам. Вследствие этого большинство из огромного количества работ, опубликованных за время после начала пандемии COVID-19 и посвященных различным аспектам математической эпидемиологии, направлено на исследование и прогнозирование макроскопической динамики эпидемии, отражаемой общими количествами инфицированных, заболевших, выздоровевших и умерших.

Значительное количество работ ориентировано на рассмотрение случаев развития эпидемии с дополнительными обстоятельствами в виде противоэпидемических мер, вакцинации, завоза инфекции. Более усложненные модели применяются для детального рассмотрения хода процесса распространения заболеваний с учетом географического распределения населения, его возрастной структуры и т. п. Математически это выражается в разработке все новых и все более усложненных вариантов классической модели SIR (восприимчивые – инфицированные – выздоровевшие). Содержательную характеристику таких работ и многочисленные ссылки можно найти в [1]. Другим магистральным направлением работ последнего времени, как следует из обзора в [1], является переход к использованию в эпидемических моделях уравнений с последействием. Не остались в стороне от мировых тенденций и белорусские ученые. В частности, были опубликованы работы [2] и [3], посвященные прогнозированию распространения коронавирусной инфекции на материале ее первой волны 2020 г., наиболее близкие по тематике к нашим исследованиям. Нами в июне 2020 г. в Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси был направлен отчет о выполнении внеплановых работ по прогнозированию течения эпидемии COVID-19 в Республике Беларусь с оправдавшимся впоследствии прогнозом снижения количества выявленных случаев инфекции COVID-19 до 100 в сутки в первой декаде августа. Часть материалов этого отчета использована при подготовке статьи [4], а также при проведении исследований, результаты которых представлены в настоящей статье.

1. Модель SIR. Модель SIR основана на следующей системе трех дифференциальных уравнений:

$$N\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad N\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma IN, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I.$$

Здесь S – число восприимчивых к заболеванию; I – число инфицированных; R – число выздоровевших; N – общая численность популяции. Коэффициенты β и γ определяют интенсивность инфицирования и скорость выздоровления соответственно.

Эта модель предложена в 1927 г. А. Г. МакКендриком и У. О. Кермаком [5]. Она стандартно применяется для ситуации наибольшей неопределенности, когда нет информации о тонких деталях эпидемической обстановки. В своей основе модель SIR является развитием простейшей логистической модели

$$\frac{dN}{dt} = aN(K - N),$$

где N – численность популяции; K – ее максимально возможная численность; a – коэффициент размножения, известной еще с XIX в. и до сих пор применяемой для моделирования в популяционной динамике. Обе модели основаны на одном и том же вероятностном законе «действующих масс», утверждающем, что вероятность и, следовательно, интенсивность взаимодействия двух категорий людей, выделяемых в модели эпидемического процесса, пропорциональна их численности. Принципиальным недостатком логистической модели при ее примении к моделированию эпидемий является то, что в рамках такой модели в явном противоречии с наблюдаемыми фактами переболевают все восприимчивые, а скорости разрастания и затухания эпидемии совпадают. Модификация логистической модели, включающая в себя итеративный запуск вторичных субэпидемий, была использована авторами работы [2] для построения прогноза первой волны эпидемии COVID-19 в Республике Беларусь.

Главным отличием модели SIR и ее обобщений от простейшей логистической модели состоит в том, что в эпидемический процесс втягиваются не все восприимчивые. Уравнения этих моделей не имеют явного аналитического решения, но могут быть представлены в параметризованном виде в квадратурах. Качественный и численный анализ показывают, что модель SIR и ее модификации обеспечивают правильное асимптотическое поведение решений: и начальный рост, и финальное затухание в этих моделях экспоненциальные.

Общеизвестным недостатком данного класса моделей является отсутствие разработанной методики определения значений входящих в них коэффициентов и начального количества восприимчивых [6; 7]. Стандартных методик для их определения не существует. Отыскание этих величин по имеющимся в открытом доступе данным о заболеваемости достаточно затруднительно, поскольку в них отсутствуют сведения о динамике числа восприимчивых, а данные по выздоровевшим могут давать очень большой разброс для значений коэффициента γ.

В связи с этим основной областью применения различных вариантов модели SIR являются теоретические исследования и ретропрогнозирование. При использовании их для прогнозирования реальной ситуации приходится учитывать опыт прошлых эпидемий, из которого должны быть извлечены как сценарии развития событий, так и количественные характеристики эпидпроцесса, позволяющие задать значения параметров модели. С другой стороны, модель SIR и ее варианты хорошо зарекомендовали себя на практике и дают результаты, близкие к натурным данным. Преодоление указанных недостатков компартментальных моделей является основной целью многих работ последнего времени, посвященных данной тематике. Поэтому представляется целесообразным использовать основные идеи этой модели, но внести в нее такие изменения, которые позволят проводить обучение модели на имеющихся данных.

2. Модель Барояна–Рвачева. В конце 60-х годов XX в. в СССР была разработана и впоследствии успешно применялась математическая модель протекания эпидемий гриппа в масштабах всей страны, созданная О. В. Барояном и Л. А. Рвачевым [8–11]. В ее основу положена аналогия между гидродинамическими явлениями и распространением эпидемии по территории страны.

Модель Барояна–Рвачева состоит из двух подмоделей: локальной модели распространения инфекции в отдельно взятом населенном пункте, рассматриваемом как однородная область активного перемешивания и тесных контактов, и сетевой модели переноса инфекции по транспортным коммуникациям между населенными пунктами. Локальная подмодель в ее реализации для случая непрерывного времени описана в [8–10; 11, с. 12–16] и имеет (после упрощений, описанных в [11, с. 14–15]) следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\lambda x}{p}\int_0^T y(\tau,t)g(\tau)d\tau,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \tau} = 0,$$

$$y(0,t) = \frac{\lambda x}{p}\int_0^T y(\tau,t)g(\tau)d\tau,$$

$$x(0) = \alpha p, \quad y(\tau,0) = a(\tau), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T,$$

где p – общая численность населения рассматриваемого города; $x(t)$ – количество здоровых (и при этом восприимчивых к данной инфекции) людей в этом городе в момент времени t; $y(\tau,t)$ – скорость прироста числа инфицированных в момент $t-\tau$; $g(\tau)$ – коэффициент, характеризующий исходящую от инфицированного опасность заражения окружающих по истечении времени τ после инфицирования; λ – коэффициент пропорциональности, который интерпретируется как средняя частота передачи инфекции; α – начальная доля восприимчивых в населении города; $a(\tau)$ – начальная заболеваемость; T – максимальная длительность заболевания.

Дискретная версия, предназначенная для компьютерной реализации, представлена в [11]. Она получена из непрерывного варианта после дискретизации и некоторых упрощений и включает в себя уравнения

$$y(0,t+1) = \frac{\lambda x(t)}{p}\sum_{\tau=0}^{T} y(\tau,t)g(\tau), \tag{1}$$

$$x(t+1) = x(t) - y(0,t+1), \tag{2}$$

$$y(\tau,t+1) = y(\tau-1,t), \quad \tau = 1,\dots,T, \tag{3}$$

с начальными условиями

$$x(0) = \alpha p, \quad y(\tau,0) = a(\tau), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T.$$

Переменные и коэффициенты, входящие в эти уравнения, являются аналогами соответствующих им величин в непрерывном варианте модели и имеют тот же или близкий смысл: t и τ – дискретное время, измеряемое в днях; $x(t)$ – количество здоровых восприимчивых в этом городе к исходу дня с номером t; $y(\tau,t)$ – количество людей, которые заразились в течение дня с номером $t-\tau$; $g(\tau)$ – коэффициент, характеризующий исходящую от инфицированного опасность заражения окружающих по истечении времени τ после инфицирования; величины p, λ, α, $a(\tau)$, T в дискретном случае имеют прежнее определение.

Как и для модели SIR основной и трудноразрешимой проблемой применения модели Барояна–Рвачева является оценка параметров модели: начального числа восприимчивых к новому варианту вируса гриппа, выражаемого коэффициентом α, и скорости передачи инфекции, выражаемой коэффициентом λ. Для решения этой проблемы разработчиками модели создан полуэвристический метод, позволяющий в каждом конкретном случае подобрать пару соответствующих друг другу значений λ и α, обеспечивающую необходимое качество прогноза [11, с. 32–35]. Основной вывод, который можно сделать из примеров применения этого метода, представленных в [11, с. 36–42], состоит в том, что в определенных пределах ошибки в выборе коэффициента α могут быть компенсированы подходящим выбором коэффициента λ и наоборот.

3. Модель, предложенная в [3], и наши исследования. Автором работы [3] предложена оригинальная модель распространения инфекции, проведено ее исследование и верификация на натурных данных. В упомянутом во введении отчете нами независимо предложена аналогичная модель. В настоящей статье мы представляем результаты, полученные нами и дополняющие результаты [3].

В [3] рассматриваемая модель представлена как в дифференциальной форме с использованием дифференциальных уравнений с запаздыванием, так и в дискретной. В отличие от подхода работы [3] наша модель исходно разрабатывалась как дискретная с ориентацией на имеющиеся данные статистики о ежедневных приростах заболеваемости. В ее основу положено предположение, что источником заражения являются не все инфицированные, как в логистической модели, и не все инфицированные, но не выздоровевшие, как в классической модели SIR, а лишь те, кто заразился недавно, исходя из того, что заразившиеся в предшествующий период либо выздоровели, либо госпитализированы, и тем самым не могут выступать источником заражения. Обоснованность такого предположения в условиях, имевших место в ходе развития первой волны эпидемии COVID-19 в 2020 г. не вызывает сомнения и вполне очевидна.

Сформулированное предположение приводит к следующему выражению для численности категории источников инфекции E_k:

$$E_k = X_k - X_{k-l},$$

где X_k – суммарное количество инфицированных, выявленных к исходу k-х суток эпидемии; l – параметр модели, имеющий смысл длительности периода времени, в течение которого инфицированный представляет опасность для окружающих. При этом суммарная сила источника заражения принимается в виде aE_k, где a – коэффициент передачи инфекции. Выражение для числа восприимчивых S_k было принято в виде

$$S_k = K - X_k,$$

где K – общее число людей, восприимчивых к инфекции. Наличие явных выражений для численности этих категорий через суммарную численность инфицированных и дает возможность применить предлагаемое уравнение к решению задачи прогнозирования течения эпидемического процесса на основе имеющихся данных.

В итоге, прогноз динамики заражения предлагается осуществлять с помощью дискретного уравнения

$$X_{k+1} - X_k = aE_kS_k$$

или, в развернутой форме,

$$X_{k+1} - X_k = a(X_k - X_{k-l})(K - X_k) \tag{4}$$

с начальным условием $X_k = \varphi_k$, $k = 0, \dots, l$, где φ_k – начальная заболеваемость. В дальнейшем мы будем для удобства считать, что день с номером 0 предшествует началу эпидемии, т. е. $X_0 = 0$, а в первый день эпидемии уже выполнено условие $X_1 > 0$.

Это уравнение является аналогом второго уравнения модели SIR

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I,$$

а также и простейшего логистического уравнения, отличаясь от них принятием сформулированных выше предположений и их следствий. Несложные выкладки и численные эксперименты показывают, что, как и в модели SIR, в рассматриваемой модели переболевают не все восприимчивые, а скорости разрастания и затухания эпидемии являются экспоненциальными и не совпадают в общем случае, что соответствует данным медицинской статистики.

В процессе исследования построенной модели было выяснено, что она может быть получена из модели Барояна–Рвачева путем некоторых упрощений и преобразований. Некоторые из них были осуществлены нами еще до выбора окончательного вида уравнения (4). В частности, в модели Барояна–Рвачева суммарная сила источника заражения aE_k модулируется с помощью коэффициентов $g(\tau)$, определяющих относительную степень исходящей от группы одновременно инфицированных людей опасности заражения для окружающих в i-й день после инфицирования. Проведенные нами численные эксперименты на реальных данных подтвердили содержащееся в [11, с. 22] указание на малую чувствительность результатов моделирования к значениям коэффициентов $g(\tau)$, а также, в определенной мере, и к значению длины промежутка l, в течение которого инфицированный является источником заражения окружающих. Исходя из этого нами было принято соглашение о равенстве всех коэффициентов $g(\tau)$, $\tau = 0, \dots, l$, единице, что позволило заменить их и коэффициент λ/p модели Барояна–Рвачева на единственный коэффициент a. Параметр l при использовании реальных данных выбирался в пределах 7–14 дней. Его изменение приводило к необходимости изменения коэффициента a, но не оказывало значительного влияния на прогноз.

Из определения величины $y(\tau, t)$ для дискретного времени в модели Барояна–Рвачева и принятого нами определения величины X_k, которое эквивалентно уравнению (2), вытекает равенство $X_{t+1} - X_t = y(0, t+1)$. Отсюда и из уравнения (3) при каждом $t \geqslant 0$ и $\tau = 0, \dots, T$ имеем $X_{t-\tau} - X_{t-1-\tau} = y(\tau, t)$. Принимая предположение $g(\tau) = 1$, $\tau = 0, \dots, T$, получаем равенство

$$\sum_{\tau=0}^{T} y(\tau, t)g(\tau) = \sum_{\tau=0}^{T} (X_{t-\tau} - X_{t-1-\tau}) = X_t - X_{t-T-1}.$$

Тогда уравнение (1) может быть записано в виде

$$X_{t+1} - X_t = \frac{\lambda x(t)}{p}(X_t - X_{t-T-1}).$$

В силу уравнения (2) имеем равенства $x(t+1) - x(t) = -y(0, t+1) = -X_{t+1} + X_t$, суммируя которые по t в пределах от $t = 0$ до $t = s-1$ с произвольным натуральным s, получаем соотношение $x(s) - x(0) = -X_s + X_0$ и, возвращаясь к переменной t, а также учитывая, что $X_0 = 0$ и $x(0) = \alpha p = K$, представление $x(t) = K - X_t$. Отсюда окончательно имеем уравнение (4) с временной переменной t вместо k и параметрами $l = T + 1$ и $a = \lambda/p$, что и устанавливает связь рассматриваемой модели с моделью Барояна–Рвачева.

4. Определение параметров модели и результаты расчетов. Уравнение (4) может быть переписано в виде

$$W_k = a(K - X_k),$$

где

$$W_k = \frac{X_{k+1} - X_k}{X_k - X_{k-l}},$$

т. е. величина W_k должна линейно зависеть от величины X_k. Это позволяет воспользоваться стандартными процедурами построения линейной регрессии для определения значения коэффициента a передачи инфекции по данным о заболеваемости. Устойчивая работа алгоритмов, реализующих это построение, требует предварительной подготовки исходных данных, состоящей в снижении содержащегося в них уровня шума. Как показывают численные эксперименты, рекомендуемая ВОЗ стандартная процедура недельного усреднения не обеспечивает требуемого качества данных. Поэтому нами разработан и использован специальный метод сглаживания для данной задачи. Сглаживание осуществляется на графике ежедневных приростов. Предполагается, что шум в этих данных в основном вызван несвоевременным обнаружением инфицированных, а также, что инфицированные организованы в относительно изолированные кластеры с более быстрым, чем в среднем распространением вируса. Таким образом эпидемия представляется в виде серии микровспышек, результаты которых обнаруживаются постфактум. Сглаживание представляет собой процесс, эквивалентный гомогенизации этих кластеров. Для этого график аппроксимируется короткими геометрическими прогрессиями, со знаменателями, изменяющимися во времени. Всплески, превышающие нормированный таким образом рост, опрокидываются в прошлое, путем переноса данных назад, в предположении, что люди, дающие всплеск, очевидно, инфицированы раньше, но обнаружены только сейчас.

Характер зависимости между W_k и X_k для реальных данных хорошо виден на следующем примере данных 2020 г. по Ирландии (рис. 1).

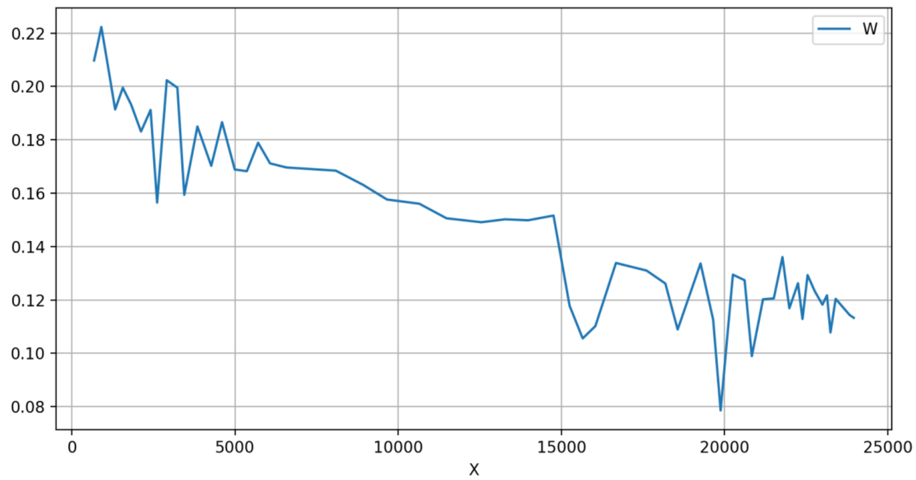

Рис. 1. Зависимость параметра W от переменной X

Некоторые результаты прогнозирования первой волны коронавирусной инфекции в Германии, Италии и Республике Беларусь по данным, доступным на различные даты, приведены на рис. 2–7.

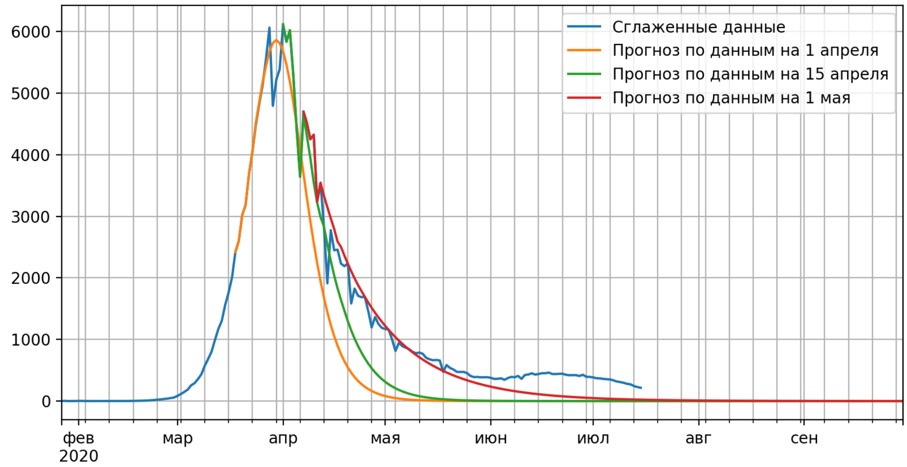

Рис. 2. Ежедневный прирост выявленных зараженных, Германия

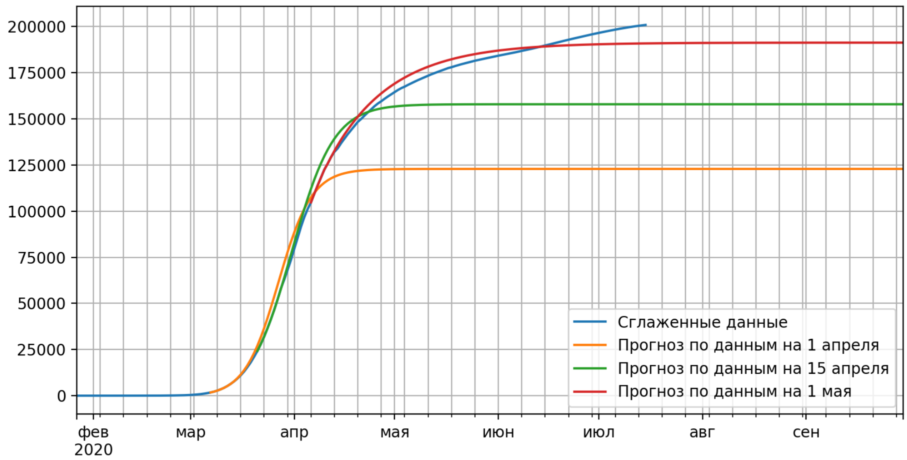

Рис. 3. Общее количество выявленных зараженных, Германия

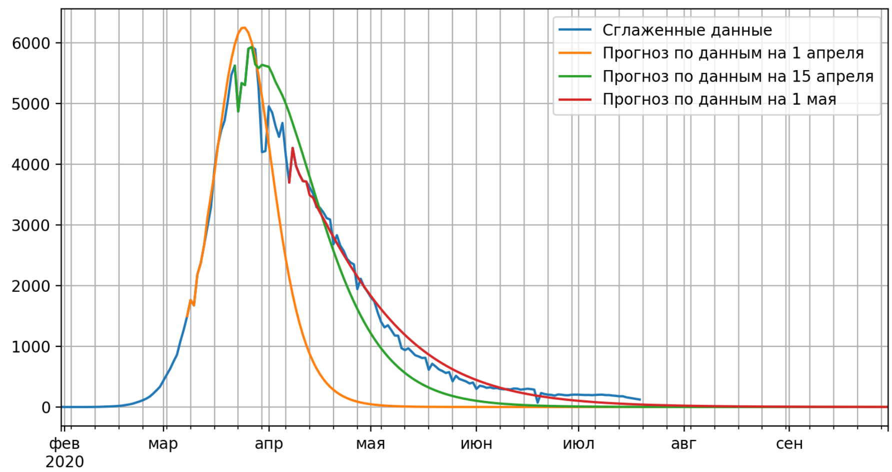

Рис. 4. Ежедневный прирост выявленных зараженных, Италия

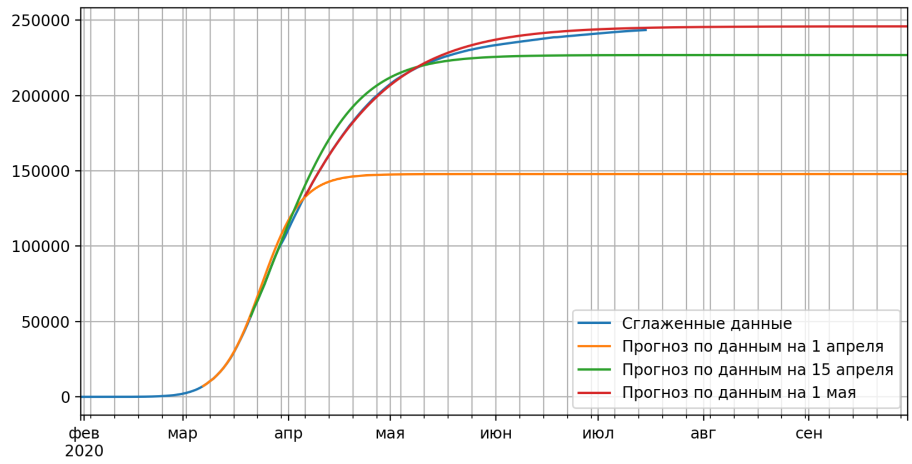

Рис. 5. Общее количество выявленных зараженных, Италия

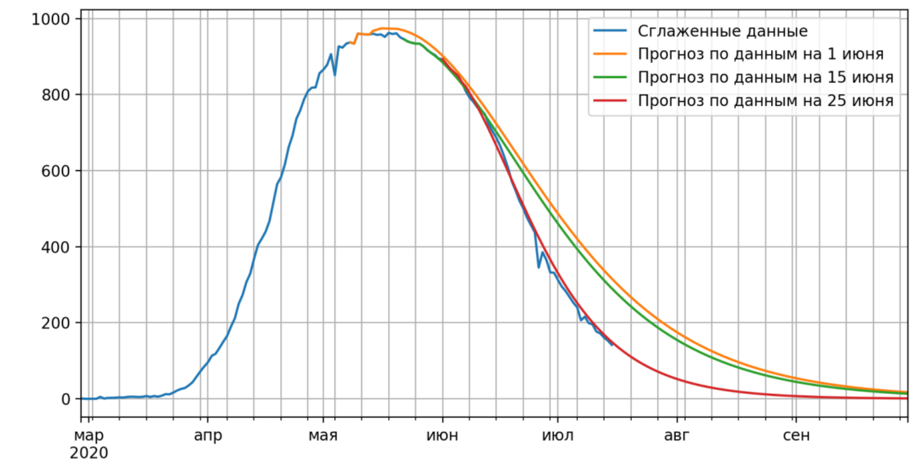

Рис. 6. Ежедневный прирост выявленных зараженных, Беларусь

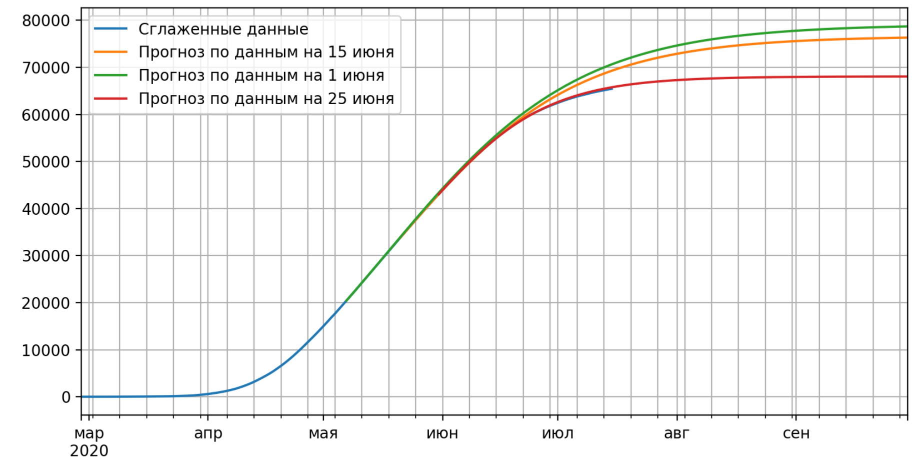

Рис. 7. Общее количество выявленных зараженных, Беларусь

Выбор для верификации метода именно первой волны 2020 г. обусловлен отсутствием в этот период как вакцинации населения, так и приобретенного естественного иммунитета, поскольку влияние этих факторов трудно выявить на основе имеющихся суммарных данных о заболеваемости. Это же обстоятельство позволяет считать параметр K, т. е. общее число людей, восприимчивых к данной инфекции, совпадающим с численностью населения рассматриваемой страны. Для последующих волн распространения эпидемии COVID-19 указанные условия, по-видимому, не выполняются и для них определение величины K представляет значительные сложности.

Отдельного обоснования, очевидно, требует применение локальной модели распространения инфекции для прогнозирования хода эпидемии в масштабах целой страны. Возможность успешного прогноза при таком, *a priori* не вполне корректном, использовании модели, по-видимому, определяется характером эпидемических процессов, протекавших в указанное время в рассматриваемых странах. Их наиболее заметной особенностью является протекание эпидемии в компактных регионах с высокой степенью транспортной связности, значительной концентрацией и активным перемешиванием населения, что и позволяет рассматривать эти регионы как аналог единого населенного пункта. В конечном же счете корректность того или иного применения любой модели определяется лишь степенью его успешности в каждом конкретном случае.

5. Интерпретация полученных результатов и выводы. Скорость разрастания эпидемии на ее начальном этапе определяется достаточно надежно при условии наличия качественной медицинской статистики.

Динамика развития эпидемии вплоть до пика заболеваемости может быть спрогнозирована на ее начальных этапах.

Скорость затухания эпидемии и асимптотический порог заболеваемости (максимальное суммарное число инфицированных) не могут быть достоверно определены до наступления пика заболеваемости. Мы предполагаем, что это ограничение принципиально.

Динамика затухания эпидемии надежно прогнозируется лишь после прохождения пика заболеваемости.

Время наступления пика заболеваемости, его высота и длительность прогнозируются наименее точно.

Заметим, что эти выводы вполне согласуются с выводами о возможности прогнозирования хода эпидемии на основе метода аппроксимации, сделанными в [4].

Заключение. Таким образом, на основе общедоступных данных о количестве инфицированных может быть получен приемлемый по точности прогноз развития эпидемии COVID-19 в национальных рамках для достаточно больших отрезков времени. Тем не менее, существуют принципиальные препятствия для наращивания точности такого прогноза, зависящие от момента составления прогноза и доступных при этом данных. Представленные в настоящей работе методы прогнозирования эпидемии COVID-19 в национальных рамках для достаточно больших отрезков времени на основе общедоступных данных о количестве инфицированных могут быть использованы на практике после уточнения процедур выбора параметров.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф21КОВИД-012).

Литература

1. *Harendra Pal Singh, Sumit Kaur Bhatia, Yashika Bahri, Riya Jain.* Optimal control strategies to combat COVID-19 transmission: A mathematical model with

incubation time delay // Results in Control and Optimization. 2022. Vol. 9. Art. 100176. https://doi.org/10.1016/j.rico.2022.100176.

2. *Гринчук П. С., Фисенко С. П.* Физическая кинетика и моделирование распространения эпидемии // Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94, № 1. С. 3–8.

3. *Шнип А. И.* Кинетическая модель динамики эпидемий и ее тестирование на данных распространения эпидемии COVID-19 // Инженерно-физ. журн. 2021. Т. 94, № 1. С. 9–21.

4. *Авлас А. Н., Деменчук А. К., Лемешевский С. В., Макаров Е. К.* Аппроксимация изолированной волны эпидемического процесса с помощью комбинации экспонент // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2021. Т. 57, № 4. С. 391–400. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-4-391-400.

5. *Kermack W. O., McKendrick A. G.* A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics // Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A. 1927. Vol. 115, N 772. P. 700–721.

6. *Десятков Б. М., Бородулин А. И., Котлярова С. С. и др.* Математическое моделирование эпидемических процессов и оценка их статистических характеристик // Химическая и биол. безопасность. 2009. № 1–3 (43–45). С. 15–20.

7. *Гришунина Ю. Б., Контаров Н. А., Архарова Г. В., Юминова Н. В.* Моделирование эпидемической ситуации с учетом внешних рисков // Эпидемиология и вакцинопрофилактика. 2014. № 5 (78). С. 61–66.

8. *Рвачев Л. А.* Эксперимент по моделированию на УЦВМ эпидемии большого масштаба // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180, № 2. С. 294–296.

9. *Рвачев Л. А.* Эксперимент по машинному прогнозированию эпидемии гриппа // Докл. АН СССР. 1971. Т. 198, № 1. С. 68–70.

10. *Рвачев Л. А.* Моделирование медико-биологических процессов в обществе как раздел динамики сплошных сред // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203, № 3. С. 540–542.

11. *Бароян О. В., Рвачев Л. А.* Математика и эпидемиология. М.: Знание, 1977.

A. N. Avlas, A. K. Demenchuk, S. V. Lemeshevskii, E. K. Makarov

Predicting the spread of coronavirus infection using equations with aftereffects

Summary

The results of forecasting the first wave of the spread of COVID-19 coronavirus infection based on the simplified Baroyan–Rvachev model are presented.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 2. С. 15–27

УДК 515.12

О ТОПОЛОГИЯХ ЭКСПОНЕНТЫ МЕТРИЗУЕМОГО ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

А. С. Бедрицкий, В. Л. Тимохович

Белорусский государственный университет
e-mail: bedrickiAS@bsu.by, timvlaleo@gmail.com
Поступила 10.02.2023

Изучаются свойства топологии τ_{inf}, являющейся инфимумом множества всех топологий, порожденных метриками Хаусдорфа на экспоненте (гиперпространстве) $\exp X$ метризуемого топологического пространства X. В качестве основного результата получены необходимые и достаточные условия выполнения первой аксиомы счетности для τ_{inf}, а также метризуемости (метрикой Хаусдорфа) этой топологии («достижения» инфимума). Помимо этого, исследована связь τ_{inf} с другими топологиями на $\exp X$, а именно: с топологией Виеториса, топологией Фелла, локально конечной топологией.

Введение. Отправными точками в теории экспоненциальных пространств (или гиперпространств) являются работы Хаусдорфа [1] и Виеториса [2]. В [1] в случае метрического пространства (X,ρ) (наши обозначения могут отличаться от обозначений в цитируемых источниках) на экспоненте $\exp X$ определена метрика, названная впоследствии метрикой Хаусдорфа (здесь обозначена через $\widehat{\rho}$, а соответствующая топология – через $\tau_{\widehat{\rho}}$), а в [2] уже для произвольного топологического пространства X на $\exp X$ определена топология, получившая впоследствии название топологии Виеториса (здесь обозначена через τ_V). Систематичным исследованиям экспоненты $\exp X$ положила начало работа Майкла [3], где были установлены некоторые основные свойства топологии Виеториса и метрики Хаусдорфа в контексте их взаимосвязи с устройством топологии исходного пространства X. В дальнейшем на множестве $\exp X$ были определены и другие топологии виеторисовского типа (по схожести процедуры задания топологии) и среди них топология Фелла τ_F [4] и локально конечная топология (locally finite topology) τ_{LF} [5], связанные с топологией Виеториса соотношениями $\tau_F \leqslant \tau_V$ и $\tau_V \leqslant \tau_{LF}$ (т. е. $\tau_F \subset \tau_V$ и $\tau_V \subset \tau_{LF}$). Как оказалось, в случае метризуемого пространства X, топология τ_{LF} является супремумом (в полной решетке всех топологий на множестве $\exp X$) множества всех топологий вида $\tau_{\widehat{\rho}}$, где ρ – допустимая (т. е. согласованная с топологией) метрика на X [5].

В предлагаемой работе рассмотрена топология τ_{inf}, являющаяся инфимумом указанного выше множества топологий вида $\tau_{\widehat{\rho}}$ (см., например, [6]). В частности показано, что $\tau_{inf} \geqslant \tau_F$ (следствие 1); топологии τ_{inf} и τ_V сравнимы тогда и только тогда, когда пространство X со счетной базой, и при этом $\tau_V \geqslant \tau_{inf}$ (теоремы 8 и 9); а каждое из совпадений $\tau_{inf} = \tau_F$, $\tau_{inf} = \tau_V$ и $\tau_{inf} = \tau_{LF}$ равносильно компактности пространства X (теорема 8). Основным результатом можно считать следующее: если пространство $\exp_{inf} X$ удовлетворяет первой аксиоме счетности, то оно и метризуемо, причем метрикой вида $\widehat{\rho}$, что, в свою очередь, равносильно тому, что пространство X локально компактно и со счетной базой (предложение 11 и теорема 5).

Кратко об используемых обозначениях и понятиях. Под пространством понимаем произвольное топологическое T_1-пространство (при необходимости отделимость оговаривается особо). Пусть X – пространство с топологией τ, ρ – некоторая метрика на X (возможно, не согласованная с топологией τ). Замыкание и внутренность множества $A \subset X$ будем обозначать через $[A]$ и, соответственно, $intA$. При необходимости эти обозначения будем уточнять, например, $[A]_\tau$ (замыкание относительно топологии τ), $int_\rho A$ (внутренность относительно метрики ρ). Аналогично при обозначении сходимости последовательности: $x_n \underset{\tau}{\longrightarrow} x$ (сходимость относительно топологии τ), $x_n \underset{\rho}{\longrightarrow} x$ (сходимость относительно метрики ρ). Записью $A \underset{op}{\subset} X$ ($A \underset{cl}{\subset} X$) будем обозначать открытость (замкнутость соответственно) множества A в пространстве X. Обозначим также $B_\rho(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x,y) < \varepsilon\}$ и $B_\rho(A,\varepsilon) = \bigcup\limits_{a\in A} B_\rho(a,\varepsilon)$ – ε-окрестность точки $x \in X$ и, соответственно, ε-раздутие множества $A \subset X$.

Напомним некоторые понятия. Пространство X называют секвенциальным, если для любого незамкнутого множества $A \subset X$ найдутся точка $x \in X \setminus A$ и последовательность $(a_n)_{n=1}^\infty \subset A$, сходящаяся к x. Скажем, что пространство X удовлетворяет условию Фреше–Урысона в точке $x \in X$, если для любого множества $A \subset X$, при выполнении соотношения $x \in [A]$, существует последовательность $(a_n)_{n=1}^\infty \subset A$, сходящаяся к x. Пространство X называют пространством Фреше–Урысона, если X удовлетворяет условию Фреше–Урысона в каждой своей точке.

Скажем, что пространство X удовлетворяет условию (Lim), если в X не существует последовательности, сходящейся одновременно к различным точкам.

Экспонентой (или гиперпространством) пространства X называют множество $\exp X$ всех непустых замкнутых подмножеств пространства X (обычно, с некоторой топологией). Для множества $A \subset X$ и семейства α некоторых множеств в X обозначим (следуя обозначениям из [7]):

$$D_1(A) = \{F \in \exp X \mid F \subset A\}, \quad D_2(A) = \{F \in \exp X \mid F \cap A \neq \varnothing\}, \quad D_2(\alpha) = \bigcap_{B\in\alpha} D_2(B),$$

т. е. $D_2(\alpha) = \{F \in \exp X \mid F \cap B \neq \varnothing$ для любого $B \in \alpha\}$.

Предбазы топологий на $\exp X$ составляют множества вида: $D_1(U)$ и $D_2(U)$ для топологии Виеториса τ_V, $D_1(V)$ и $D_2(U)$ для топологии Фелла τ_F, $D_1(U)$ и $D_2(\alpha)$ для локально конечной топологии τ_{LF}, где U и V открыты в X и множество $X \setminus V$ компактно, α – локально конечное семейство открытых в X множеств. Экспоненту $\exp X$ с топологией τ_V (τ_F) будем обозначать кратко $\exp_V X$ ($\exp_F X$ соответственно). Будем также использовать сокращенные записи, например, $F_n \underset{F}{\longrightarrow} B$ вместо $F_n \underset{\tau_F}{\longrightarrow} B$, $[\mathscr{H}]_V$ вместо $[\mathscr{H}]_{\tau_V}$ и т. п.

Если пространство X метризуемо и ρ – некоторая допустимая метрика на X, то на $\exp X$ определена соответствующая метрика Хаусдорфа $\widehat{\rho}$,

$$\widehat{\rho}(F,P) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid B_\rho(F,\varepsilon) \supset P \text{ и } B_\rho(P,\varepsilon) \supset F\}$$

(здесь мы допускаем $\widehat{\rho}(F,P) = \infty$ для некоторых F, $P \in \exp X$, что не влияет на определение топологии на $\exp X$). Отметим, что для двух эквивалентных метрик ρ и σ на X соответствующие метрики Хаусдорфа могут быть не эквивалентны (т. е. индуцированные топологии $\tau_{\widehat{\rho}}$ и $\tau_{\widehat{\sigma}}$ на $\exp X$ различны). Метрическое пространство $(\exp X, \widehat{\rho})$ $\big($а также топологическое пространство $(\exp X, \tau_{\widehat{\rho}})\big)$ обозначим через $\exp_{\widehat{\rho}} X$. Обозначим также $\widehat{X} = \{\{x\} \in \exp X \mid x \in X\}$ («экземпляр» множества X в $\exp X$).

1. Предварительные рассмотрения. Пусть M – совокупность некоторых метрик на множестве Z ($Z \neq \varnothing$, $M \neq \varnothing$), $\mathscr{T}_M = \{\tau_\rho \mid \rho \in M\}$ – множество соответствующих топологий (τ_ρ – топология на Z, заданная метрикой ρ). В полной решетке $\mathscr{T}$ всех топологий на Z для множества $\mathscr{T}_M$ определены точные нижняя и верхняя грани (т. е. инфимум и супремум) τ_{inf} и τ_{sup} соответственно, где $\tau_{inf} = \bigcap\{\tau_\rho \mid \rho \in M\}$, а топология τ_{sup} задается предбазой $\bigcup\{\tau_\rho \mid \rho \in M\}$. Пространство, полученное заданием на Z топологии τ_{inf}, обозначим через

Z_{inf}. Далее, для краткости, будем употреблять в некоторых случаях символ «inf» вместо «τ_{inf}», например, $x_n \underset{inf}{\longrightarrow} x$ вместо $x_n \underset{\tau_{inf}}{\longrightarrow} x$, $int_{inf}(\cdot)$ вместо $int_{\tau_{inf}}(\cdot)$ и т. п.

Опишем некоторые основные свойства пространства Z_{inf}. Отметим как очевидное, что множество $A \subset Z_{inf}$ открыто (замкнуто) в Z_{inf} тогда и только тогда, когда оно открыто (замкнуто соответственно) относительно любой метрики $\rho \in M$. Обозначим далее $I_\rho = (0;1)$, $E = \prod\limits_{\rho\in M} I_\rho$ и для $z \in Z$ и $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_\rho)_{\rho\in M} \in E$ положим $B_R(z,\bar{\varepsilon}) = \bigcup\limits_{\rho\in M} B_\rho(z,\varepsilon_\rho)$. Множество $B_R(z,\bar{\varepsilon})$ назовем псевдоокрестностью точки z с псевдорадиусом $\bar{\varepsilon}$. Устройство топологии τ_{inf} выясняет следующее

Предложение 1. *Множество $U \subset Z_{inf}$ открыто в Z_{inf} тогда и только тогда, когда для любой точки $z \in U$ существует псевдоокрестность $B_R(z,\bar{\varepsilon}) \subset U$, где $\bar{\varepsilon} \in E$ ($\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(z)$).*

Доказательство следует непосредственно из определения топологии τ_{inf}.

Замечание. Если множество M конечно, то для задания топологии τ_{inf} достаточно ограничиться псевдоокрестностями с псевдорадиусами $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_\rho)_{\rho\in M}$ такими, что $\varepsilon_\rho = \varepsilon_\sigma$ для любых $\rho, \sigma \in M$.

Пространство Z_{inf}, являясь, очевидно, T_1-пространством, может не быть хаусдорфовым. В нем также могут находиться последовательности, сходящиеся одновременно к различным точкам.

Пример. Пусть $Z = I \cup \{a,b\}$, где $I = [0;1]$, $I \cap \{a,b\} = \varnothing$, $a \neq b$. Инъекциями φ и ψ «разместим» множество Z на плоскости $\mathbb{R}^2$ с обычной евклидовой метрикой d,

$$d((x,y),(x',y')) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

Обозначим $A = \left\{\frac{1}{2^n} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}$, $B = \left\{\frac{1}{3^n} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ и положим

$$\varphi(a) = \psi(a) = (0,1), \quad \varphi(b) = \psi(b) = (0,-1),$$

$$\varphi(z) = \begin{cases} (z,1) & \text{при } z \in A, \\ (z,0) & \text{при } z \in I \setminus A \end{cases}$$

и

$$\psi(z) = \begin{cases} (z,-1) & \text{при } z \in B, \\ (z,0) & \text{при } z \in I \setminus B. \end{cases}$$

Далее определим метрики ρ и σ, «перенеся» на Z метрику d с «экземпляров» $\varphi(Z)$ и $\psi(Z)$, а именно,

$$\rho(z_1,z_2) = d(\varphi(z_1),\varphi(z_2)),$$
$$\sigma(z_1,z_2) = d(\psi(z_1),\psi(z_2)),$$

и положим $M = \{\rho,\sigma\}$. Несложно проверить, что при $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon,\varepsilon)$ (см. замечание выше)

$$B_R(a,\bar{\varepsilon}) = \{a\} \cup \{z \in A \,|\, z < \varepsilon\},$$
$$B_R(b,\bar{\varepsilon}) = \{b\} \cup \{z \in B \,|\, z < \varepsilon\}$$

и

$$int_{inf} B_R(a,\bar{\varepsilon}) = int_{inf} B_R(b,\bar{\varepsilon}) = \varnothing;$$

для $z \in I \setminus (A \cup B)$ $B_R(z,\bar{\varepsilon}) = (z-\varepsilon; z+\varepsilon) \cap I$ и $B_R(z,\bar{\varepsilon}) \underset{op}{\subset} Z_{inf}$. Если $z \in A \cup B$ и $0 < \varepsilon \leqslant z$, то $B_R(z,\bar{\varepsilon}) = ((z-\varepsilon; z+\varepsilon) \cap I) \setminus B$ при $z \in A$ и $B_R(z,\bar{\varepsilon}) = ((z-\varepsilon; z+\varepsilon) \cap I) \setminus A$ при $z \in B$, причем, в обоих случаях $B_R(z,\bar{\varepsilon}) \underset{op}{\subset} Z_{inf}$. Таким образом, окрестностную базу в Z_{inf} составляют множества вида $O^z_\varepsilon = (z-\varepsilon; z+\varepsilon) \cap I$, где $z \in I$, $\varepsilon > 0$; $V^a_U = \{a\} \cup U$, где $U \subset (0;1)$, U открыто в I (относительно евклидовой топологии) и U содержит множество $\{z \in A \,|\, z < \varepsilon\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$, $V_U^b = \{b\} \cup U$, где U задается аналогично (с заменой A на B).

Рассмотрим последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ и ее подпоследовательности $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$, $\left(\frac{1}{3^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ и $(z_i)_{i=1}^{\infty}$, где $z_i = \frac{1}{n_i} \in I \setminus (A \cup B)$, $n_1 < n_2 < \ldots$. Очевидно, что

$$\frac{1}{2^n} \xrightarrow[\rho]{} a \quad \text{и} \quad \frac{1}{2^n} \xrightarrow[\sigma]{} 0,$$

$$\frac{1}{3^n} \xrightarrow[\sigma]{} b \quad \text{и} \quad \frac{1}{3^n} \xrightarrow[\rho]{} 0$$

и

$$z_i \xrightarrow[\rho,\sigma]{} 0$$

(т. е. относительно обеих метрик), что влечет такие же сходимости (т. е. к тем же точкам) относительно топологии τ_{inf}. Отметим, что последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ не сходится относительно каждой из метрик ρ и σ, однако $\frac{1}{n} \xrightarrow[inf]{} 0$.

Покажем далее, что пространство Z_{inf} не удовлетворяет условию Фреше–Урысона в точках a и b. Действительно, пусть, например, $P = (0;1) \setminus (A \cup B)$. Несложно заметить, что $V_U^a \cap P \neq \varnothing$ для любой окрестности (указанного выше вида) точки a, откуда $a \in [P]_{inf}$. Допустим от противного, что существует последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset P$ такая, что $z_n \xrightarrow[inf]{} a$. Можем считать, что $z_{n+1} < z_n < \frac{1}{n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $U = (0;1) \setminus \{z_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Легко проверить, что $V_U^a = \{a\} \cup U$ – окрестность точки a в Z_{inf}, но $V_U^a \cap \{z_n \,|\, n \in Z\} = \varnothing$. Получили противоречие. Для точки b рассмотрение аналогичное.

Как показывает пример, пространство Z_{inf} может не быть пространством Фреше–Урысона. Однако справедливо

Предложение 2. *Пространство Z_{inf} секвенциально.*

Доказательство. Пусть $A \subset Z_{inf}$ и A не замкнуто в Z_{inf}. Но тогда A не замкнуто относительно некоторой метрики $\rho \in M$, и следовательно существуют точка $z \in Z_{inf} \setminus A$ и последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ такие, что $a_n \xrightarrow[\rho]{} z$. Последнее влечет сходимость $a_n \xrightarrow[inf]{} z$. □

Исследуем подробнее сходимость в Z_{inf}. Рассмотрим произвольную последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset Z_{inf}$. Будем говорить, что последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ R-сходится к точке $z \in Z_{inf}$ (кратко $z_n \xrightarrow[R]{} z$), если для любой псевдоокрестности $B_R(z, \bar{\varepsilon})$ точки z можно выбрать $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\{z_k \,|\, k \geqslant n\} \subset B_R(z, \bar{\varepsilon})$. Отметим, что из сходимости $z_n \xrightarrow[\rho]{} z$, где $\rho \in M$, следует R-сходимость $z_n \xrightarrow[R]{} z$, а последняя, очевидно, влечет сходимость $z_n \xrightarrow[inf]{} z$.

Предложение 3. *При выполнении в Z_{inf} условия (Lim), сходимость $z_n \xrightarrow[inf]{} z$ и R-сходимость $z_n \xrightarrow[R]{} z$ равносильны.*

Доказательство. В одну сторону ($z_n \xrightarrow[R]{} z \Rightarrow z_n \xrightarrow[inf]{} z$) утверждение очевидно (см. предложение 1). Пусть $z_n \xrightarrow[inf]{} z$. Допустим от противного, что R-сходимость $z_n \xrightarrow[R]{} z$ отсутствует. Тогда существуют псевдоокрестность $B_R(z, \bar{\varepsilon}) = \bigcup\limits_{\rho \in M} B_\rho(z, \varepsilon_\rho)$ и подпоследовательность $(z_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ такие, что $B_R(z, \bar{\varepsilon}) \cap \{z_{n_i} \,|\, i \in \mathbb{N}\} = \varnothing$. Обозначим $a_i = z_{n_i}$ и $A = \{a_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$. Поскольку $a_i \xrightarrow[inf]{} z$ и $z \notin A$, то множество A не замкнуто в Z_{inf}, и следовательно, A не замкнуто относительно некоторой метрики $\rho \in M$. Но тогда найдутся точка $z' \in Z_{inf} \setminus A$ и подпоследовательность $(a_{i_j})_{j=1}^{\infty}$ такие, что $a_{i_j} \xrightarrow[\rho]{} z'$. А поскольку $a_{i_j} \xrightarrow[inf]{} z'$ и в то же время $a_{i_j} \xrightarrow[inf]{} z$, то в силу условия (Lim) $z=z'$, откуда $a_{i_j} \underset{\rho}{\longrightarrow} z$. Однако $\{a_{i_j} \mid j\in\mathbb{N}\}\subset A$ и $A\cap B_\rho(z,\varepsilon_\rho)=\varnothing$. Получили противоречие. $\square$

Предложение 4. *Пусть Z_{inf} удовлетворяет условию (Lim) и $z_n \underset{inf}{\longrightarrow} z$. Тогда существуют метрика $\rho\in M$ и подпоследовательность $(z_{n_i})_{i=1}^\infty$ такие, что $z_{n_i} \underset{\rho}{\longrightarrow} z$.*

Доказательство. Пусть $z_n \underset{inf}{\longrightarrow} z$. Если существует стационарная подпоследовательность $(z_{n_i})_{i=1}^\infty$ (т. е. $z_{n_1}=z_{n_2}=\ldots$), то $z_{n_i} \underset{\rho}{\longrightarrow} z$ при любой метрике $\rho\in M$. Если такой подпоследовательности не существует, то можно выделить подпоследовательность $(z_{n_i})_{i=1}^\infty$, у которой $z_{n_i}\neq z_{n_j}$ при $i\neq j$ и $z_{n_i}\neq z$ для каждого $i\in\mathbb{N}$. Можно считать, что таковой является исходная последовательность $(z_n)_{n=1}^\infty$. Повторяя почти дословно рассуждения выше (доказательство предложения 3), выделяем метрику $\rho\in M$ и подпоследовательность $(z_{n_i})_{i=1}^\infty$ такие, что $z_{n_i} \underset{\rho}{\longrightarrow} z$. $\square$

Выясним, при каком условии (необходимом и достаточном) псевдоокрестность $B_R(z,\bar\varepsilon)$ является окрестностью (в смысле Бурбаки, т. е. $z\in int_{inf}B_R(z,\bar\varepsilon)$).

Предложение 5. *Пусть $z\in Z_{inf}$. Если $z\in int_{inf}B_R(z,\bar\varepsilon)$ для любого псевдорадиуса $\bar\varepsilon\in E$, то пространство Z_{inf} удовлетворяет условию Фреше–Урысона в точке z.*

Доказательство. Пусть $A\subset Z_{inf}$ и $z\in[A]_{inf}$. Допустим, что $z\notin[A]_\rho$ для любой метрики $\rho\in M$. Но тогда, как легко заметить, $B_R(z,\bar\varepsilon)\cap A=\varnothing$ при некотором $\bar\varepsilon\in E$, что противоречит соотношениям $z\in int_{inf}B_R(z,\bar\varepsilon)$ и $z\in[A]_{inf}$. Таким образом $z\in[A]_\rho$ для некоторой метрики $\rho\in M$, и следовательно, можно выбрать последовательность $(a_n)_{n=1}^\infty\subset A$ так, чтобы $a_n \underset{\rho}{\longrightarrow} z$. Последнее влечет сходимость $a_n \underset{inf}{\longrightarrow} z$. $\square$

Обратное утверждение докажем при дополнительном условии.

Предложение 6. *Если в пространстве Z_{inf} выполняется условие (Lim), а в точке $z\in Z_{inf}$ выполняется условие Фреше–Урысона, то $z\in int_{inf}B_R(z,\bar\varepsilon)$ для любого $\bar\varepsilon\in E$.*

Доказательство. Допустим от противного, что $z\notin int_{inf}B_R(z,\bar\varepsilon)$ для некоторого $\bar\varepsilon\in E$. Обозначим $A=Z_{inf}\setminus B_R(z,\bar\varepsilon)$. Ясно, что $z\notin A$, но $z\in[A]_{inf}$. По условию можно выбрать последовательность $(a_n)_{n=1}^\infty\subset A$ так, чтобы $a_n \underset{inf}{\longrightarrow} z$. Но тогда в силу предложения 4 для некоторых метрики $\rho\in M$ и подпоследовательности $(a_{n_i})_{i=1}^\infty$ имеет место сходимость $a_{n_i} \underset{\rho}{\longrightarrow} z$. Таким образом для некоторого $m\in\mathbb{N}$ при всех $i\geqslant m$ выполняются соотношения $a_{n_i}\in B_\rho(z,\varepsilon_\rho)\subset B_R(z,\bar\varepsilon)$, что противоречит соотношениям $a_{n_i}\in A$. $\square$

Предложения 5 и 6 можно дополнить следующим образом.

Предложение 7. *Для пространства Z_{inf} следующие условия равносильны:*

(а) *$z\in int_{inf}B_R(z,\bar\varepsilon)$ для любых $z\in Z_{inf}$ и $\bar\varepsilon\in E$;*

(б) *для любых $z\in Z_{inf}$ и $\bar\varepsilon\in E$ можно выбрать $\bar\delta\in E$ таким образом, что для каждой точки $y\in B_R(z,\bar\delta)$ найдется псевдоокрестность $B_R(y,\bar\gamma)\subset B_R(z,\bar\varepsilon)$.*

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (б) вытекает непосредственно из предложения 1.

Докажем, что (б) $\Rightarrow$ (а). Пусть выполняется условие (б). Фиксируем произвольную псевдоокрестность $B_R(z_0,\bar\varepsilon_0)$ и обозначим $U=\{z\in Z_{inf}\,|\,B_R(z,\bar\varepsilon)\subset B_R(z_0,\bar\varepsilon_0)$ для некоторого $\bar\varepsilon\in E\}$. Очевидно, что $z_0\in U\subset B_R(z_0,\bar\varepsilon_0)$. Используя условие (б) и предложение 1, легко проверить, что $U\underset{op}{\subset} Z_{inf}$. $\square$

2. Экспоненциальное пространство и экспоненциальные топологии. Рассмотрим произвольное T_1-пространство X с топологией τ и его экспоненту $\exp X$. Определенные на множестве $\exp X$ топологии Виеториса τ_V, Фелла τ_F и локально конечная τ_{LF} связаны очевидными соотношениями

$$\tau_F\leqslant\tau_V \quad \text{и} \quad \tau_V\leqslant\tau_{LF}.$$

Совпадение $\tau_F = \tau_V$ равносильно компактности пространства X [4; 8], а для совпадения $\tau_V = \tau_{LF}$ необходимо и достаточно, чтобы в X любое локально конечное семейство открытых множеств было конечно [5; 9] (для вполне регулярного пространства X выполнение этого условия равносильно его псевдокомпактности [10, с. 311]).

Если пространство X метризуемо и Ω – множество всех допустимых (т. е. согласованных с топологией τ) метрик на X, то на $\exp X$ помимо топологий τ_V, τ_F и τ_{LF} возникает множество метрик Хаусдорфа $M = \{\widehat{\rho} \mid \rho \in \Omega\}$ и множество соответствующих топологий $\mathscr{T}_M = \{\tau_{\widehat{\rho}} \mid \rho \in \Omega\}$, а также топологии τ_{inf} и τ_{sup}, инфимум и супремум соответственно множества $\mathscr{T}_M$ в полной решетке $\mathscr{T}$ всех топологий на $\exp X$. Соотношения топологий вида $\tau_{\widehat{\rho}}$ с топологией τ_V хорошо известны [3]: $\tau_V \geqslant \tau_{\widehat{\rho}}$ равносильно вполне ограниченности метрики ρ, $\tau_V \leqslant \tau_{\widehat{\rho}}$ тогда и только тогда, когда ρ – метрика Атсуи (т. е. $\rho(A,B) > 0$ для любых непустых замкнутых в X дизъюнктных множеств A и B, что равносильно равномерной непрерывности любой непрерывной вещественнозначной функции на метрическом пространстве (X,ρ) [11]), а совпадение $\tau_V = \tau_{\widehat{\rho}}$ равносильно компактности пространства X. Как оказалось, $\tau_{sup} = \tau_{LF}$ [5]. Из этого тотчас следует (см. [5]), что если топология τ_{sup} удовлетворяет первой аксиоме счетности, то она и метризуема, причем $\tau_{sup} = \tau_{\widehat{\rho}}$ (супремум «достигается»), где $\rho \in \Omega$ и ρ – метрика Атсуи; и обратно, если пространство X допускает метрику Атсуи ρ, то $\tau_{sup} = \tau_{\widehat{\rho}}$.

Перейдем к топологиям τ_F и τ_{inf}. Напомним некоторые свойства топологии τ_F. Известно, что если пространство $\exp_F X$ хаусдорфово, то оно и вполне регулярно, что, в свою очередь, равносильно тому, что пространство X хаусдорфово и локально компактно [12]. Если же $\exp_F X$ метризуемо, то оно является польским пространством (т. е. со счетной базой и допускает полную метрику), что, в свою очередь, равносильно тому, что X – хаусдорфово локально компактное пространство со счетной базой [8]. Отметим также, что если пространство X хаусдорфово и локально компактно, то локально компактно и пространство $\exp_F X$ (см. [8]).

К вышесказанному добавим следующее

Предложение 8. *Если пространство X хаусдорфово и является пространством Фреше–Урысона, то пространство $\exp_F X$ удовлетворяет условию (Lim).*

Доказательство. Допустим от противного, что существуют последовательность $(F_n)_{n=1}^{\infty} \subset \exp_F X$ и множества $A \in \exp_F X$ и $B \in \exp_F X$ такие, что $F_n \underset{F}{\longrightarrow} A$, $F_n \underset{F}{\longrightarrow} B$ и $A \neq B$. Пусть, например, $B \setminus A \neq \varnothing$, $z \in B \setminus A$. Из сходимости $F_n \underset{F}{\longrightarrow} A$ и соотношения $A \in D_1(X \setminus \{z\})$ следует, что $F_n \in D_1(X \setminus \{z\})$ или, другими словами, $z \notin F_n$ для всех n, начиная с некоторого номера. Можем считать, что $z \notin F_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Пусть далее U – произвольная окрестность точки z. Из сходимости $F_n \underset{F}{\longrightarrow} B$ и соотношения $B \in D_2(U)$ следует, что $F_n \cap \cap U \neq \varnothing$ для всех n, начиная с некоторого номера, и тем более $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n\right) \cap U \neq \varnothing$. Но тогда $z \in \left[\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n\right]$, и в силу условия Фреше–Урысона существует последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, сходящаяся к точке z. Можем считать, что $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap A = \varnothing$. А поскольку $K = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{z\}$ – компакт и $A \in D_1(X \setminus K)$, то из сходимости $F_n \underset{F}{\longrightarrow} A$ следует, что для некоторого $m \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение $\cup\{F_n \mid n \geqslant m\} \subset X \setminus K$ или, другими словами, $(\cup\{F_n \mid n \geqslant m\}) \cap K = \varnothing$. Но тогда $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \cup\{F_n \mid n < m\}$, и следовательно для некоторого $k < m$ множество F_k содержит подпоследовательность $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$. Последнее влечет соотношение $z \in F_k$. Получили противоречие. □

Рассмотрим далее топологию τ_{inf} и соответствующее пространство $\exp_{inf} X$ (т. е. множество $\exp X$ с топологией τ_{inf}). Заметим, прежде всего, что при любой метрике $\rho \in \Omega$

множество $\widehat{X} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ замкнуто в $\exp_{\widehat{\rho}} X$ и каноническая биекция

$$X \ni x \longrightarrow \{x\} \in \widehat{X}$$

является изометрией (метрических пространств (X, ρ) и $(\widehat{X}, \widehat{\rho})$). Тогда справедливо

Предложение 9. *Подпространство $\widehat{X} \subset \exp_{inf} X$ замкнуто в $\exp_{inf} X$ и канонически гомеоморфно (т. е. посредством канонической биекции) пространству X.*

Отметим также, что все предложения части 1 (предложения 1–7) остаются справедливыми при замене «Z» на «$\exp X$».

Исследуем взаимосвязь топологий τ_{inf} и τ_F и установим простейшие следствия.

Предложение 10. *Для любой метрики $\rho \in \Omega$ справедливо соотношение $\tau_{\widehat{\rho}} \geqslant \tau_F$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные $F \in \exp X$ и окрестности (в $\exp_F X$) $D_2(U)$ и $D_1(V)$ множества F, где $U \underset{op}{\subset} X$ и множество $K = X \setminus V$ компактно. Достаточно показать, что $B_{\widehat{\rho}}(F, \varepsilon_1) \subset D_2(U)$ и $B_{\widehat{\rho}}(F, \varepsilon_2) \subset D_1(V)$ при некоторых $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$. Начнем с соотношения $F \in D_2(U)$. Фиксируем некоторую точку $x \in F \cap U$ и выберем $\varepsilon_1 > 0$ так, чтобы $B_\rho(x, \varepsilon_1) \subset U$. Несложно проверить, что если $P \in B_{\widehat{\rho}}(F, \varepsilon_1)$, то $B_\rho(x, \varepsilon_1) \cap P \neq \varnothing$, и следовательно $P \in D_2(U)$, откуда $B_{\widehat{\rho}}(F, \varepsilon_1) \subset D_2(U)$.

Перейдем к соотношению $F \in D_1(V)$. В силу компактности множества K можно выбрать $\varepsilon_2 > 0$, при котором $B_\rho(F, \varepsilon_2) \subset V$. Ясно, что если $P \in B_{\widehat{\rho}}(F, \varepsilon_2)$, то $P \subset B_\rho(F, \varepsilon_2) \subset V$, откуда $B_{\widehat{\rho}}(F, \varepsilon_2) \subset D_1(V)$. □

Непосредственно из предложения 10 вытекает

Следствие 1. *Справедливо соотношение $\tau_{inf} \geqslant \tau_F$.*

Из следствия 1 и предложения 8 вытекает

Следствие 2. *Пространство $\exp_{inf} X$ удовлетворяет условию (Lim).*

Предложения 3–6 и следствие 2 позволяют сформулировать

Следствие 3. *Пусть $(F_n)_{n=1}^{\infty} \subset \exp_{inf} X$ и $F \in \exp_{inf} X$. Справедливы следующие утверждения:*

(а) *сходимости $F_n \underset{inf}{\longrightarrow} F$ и $F_n \underset{R}{\longrightarrow} F$ равносильны;*

(б) *если $F_n \underset{inf}{\longrightarrow} F$, то можно выбрать подпоследовательность $(F_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ и метрику $\rho \in \Omega$ таким образом, что $F_{n_i} \underset{\widehat{\rho}}{\longrightarrow} F$;*

(в) *пространство $\exp_{inf} X$ удовлетворяет условию Фреше–Урысона в точке $F \in \exp_{inf} X$ тогда и только тогда, когда $F \in int_{inf} B_R(F, \bar{\varepsilon})$ для любого $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_\rho)_{\rho \in \Omega} \in E$ $\big($здесь и далее $B_R(F, \bar{\varepsilon}) = \bigcup\limits_{\rho \in \Omega} B_{\widehat{\rho}}(F, \varepsilon_\rho)\big)$.*

Поскольку локальная компактность хаусдорфова пространства X равносильна хаусдорфовости $\exp_F X$ [12], то соотношение $\tau_{inf} \geqslant \tau_F$ влечет

Следствие 4. *Если метризуемое пространство X локально компактно, то пространство $\exp_{inf} X$ хаусдорфово.*

В случае компактности метризуемого пространства X, пространство $\exp_V X$ компактно и все топологии вида $\tau_{\widehat{\rho}}$ совпадают с топологией τ_V [3], и следовательно $\tau_{inf} = \tau_V$ (т. е. $\exp_{inf} X = \exp_V X$). Из этих соображений и предложения 9 очевидным образом следует

Предложение 11. *Для метризуемого пространства X равносильны условия:*

(а) *X компактно;*

(б) *пространство $\exp_{inf} X$ компактно;*

(в) *$\exp_{inf} X$ – компакт, метризуемый любой метрикой $\widehat{\rho}$, где $\rho \in \Omega$.*

3. Пространство $\exp_{inf} X$ и первая аксиома счетности. Здесь мы покажем, что для пространства $\exp_{inf} X$ выполнение первой аксиомы счетности влечет его метризуемость, причем, метрикой вида $\widehat{\rho}$, где $\rho \in \Omega$ (случай «достижения» инфимума), и выявим соответствующую связь с устройством исходного пространства X. Нам понадобятся следующие известные утверждения.

Теорема 1 [13] (см. также [10, с. 439]). *Пусть пространство X метризуемо и $F \underset{cl}{\subset} X$. Тогда для любой метрики ρ_0 на F, согласованной с индуцированной топологией, существует допустимая метрика на X, совпадающая на F с ρ_0.*

Теорема 2 [14, с. 315]. *Хаусдорфово локально компактное пространство X метризуемо тогда и только тогда, когда X представимо в виде $X = \bigcup\limits_{t\in T} X_t$, где $X_t \underset{op}{\subset} X$ и X_t со счетной базой, и $X_t \cap X_s = \varnothing$ при $t \neq s$.*

Нам также понадобится

Лемма 1. *Пусть пространство X метризуемо, множества $A = \{a_t \mid t \in T\}$ и $B = \{b_t \mid t \in T\}$ ($a_t \neq a_s$ и $b_t \neq b_s$ при $t \neq s$) замкнуты в X и дискретны (как подпространства). Тогда для любого $\bar{\varepsilon} \in E$, $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_\rho)_{\rho\in\Omega}$, множество*

$$\{t \in T \mid B_R(A, \bar{\varepsilon}) \not\ni A \cup \{b_t\}\}$$

конечно.

Доказательство. Допустим от противного, что можно выбрать $t_n \in T$ ($t_n \neq t_k$ при $n \neq k$) таким образом, что $B_R(A, \bar{\varepsilon}) \not\ni A \cup \{b_{t_n}\}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Вследствие теоремы 1 существует метрика $\sigma \in \Omega$, для которой $\sigma(a_{t_n}, b_{t_n}) = \frac{1}{n}$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Но тогда $B_R(A, \bar{\varepsilon}) \supset B_{\widehat{\sigma}}(A, \varepsilon_\sigma) \ni A \cup \{b_{t_n}\}$ для всех n, для которых $\frac{1}{n} < \varepsilon_\sigma$. Получили противоречие. □

В работе [15] введено понятие уплотняющей метрики.

Определение [15]. Допустимая метрика ρ на не компактном пространстве X называется уплотняющей, если соответствующее пополнение $\widetilde{X}$ – компакт с одноточечным наростом $\widetilde{X} \setminus X$.

Теорема 3 [15; 16]. *Хаусдорфово не компактное пространство X допускает уплотняющую метрику тогда и только тогда, когда X локально компактно и со счетной базой.*

Теорема 4 [15]. *Допустимая метрика ρ на не компактном пространстве X является уплотняющей тогда и только тогда, когда из любых бесконечных дискретных и замкнутых в X множеств A и B можно выбрать последовательности точек $a_n \in A$ и $b_n \in B$ так, чтобы $\rho(a_n, b_n) \longrightarrow 0$.*

Лемма 2 (уточнение теоремы 4). *Допустимая метрика ρ на не компактном пространстве X является уплотняющей тогда и только тогда, когда для любых двух последовательностей $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ и $(y_n)_{n=1}^\infty \subset X$, не имеющих в X предельных точек (точка называется предельной для последовательности, если любая ее окрестность содержит бесконечно много членов этой последовательности), $\rho(x_n, y_n) \longrightarrow 0$.*

Доказательство. Достаточность – очевидное следствие теоремы 4. Докажем необходимость. Пусть метрика ρ уплотняющая, $\widetilde{X}$ – соответствующее компактное пополнение, ξ – точка нароста (т. е. $\widetilde{X} \setminus X = \{\xi\}$) и U – произвольная окрестность точки ξ (т. е. $\xi \in U \underset{op}{\subset} \widetilde{X}$). Поскольку множество $K = \widetilde{X} \setminus U$ компактно, то K может содержать лишь конечное число членов каждой из последовательностей. Таким образом, $x_n \longrightarrow \xi$ и $y_n \longrightarrow \xi$. Но тогда, очевидно, $\rho(x_n, y_n) \longrightarrow 0$. □

Перейдем к основному результату этой части. Прежде всего отметим, что в рассматриваемом контексте случай компактности метризуемого пространства X тривиален, поскольку в этом случае все топологии вида $\tau_{\widehat{\rho}}$ совпадают с топологией Виеториса τ_V, и, таким образом, $\exp_{inf} X = \exp_V X$ – компакт, метризуемый любой метрикой $\widehat{\rho}$, где $\rho \in \Omega$ (см. предложение 11).

Теорема 5. *Для метризуемого не компактного пространства X равносильны условия:*

(a) *пространство $\exp_{inf} X$ удовлетворяет первой аксиоме счетности;*

(б) *пространство X локально компактно и со счетной базой;*

(в) $\tau_{inf} = \tau_{\widehat{\rho}}$ *(т. е. пространство* $\exp_{inf} X$ *метризуемо метрикой* $\widehat{\rho}$*), где* $\rho \in \Omega$ *и метрика* ρ *уплотняющая.*

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (б). Пусть для $\exp_{inf} X$ выполняется первая аксиома счетности. Докажем локальную компактность пространства X. Допустим от противного, что существует точка $x_0 \in X$, ни одна окрестность которой не имеет компактного замыкания. Фиксируем некоторую метрику $\rho_0 \in \Omega$. Несложно показать, что найдутся окрестности U_n точки x_0 и замкнутые в X дискретные множества $A_n = \{a_i^n \mid i \in \mathbb{N}\}$ ($a_i^n \neq a_j^n$ при $i \neq j$) такие, что $[U_{n+1}] \subset U_n \subset B_{\rho_0}\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ и $A_n \subset U_n \setminus [U_{n+1}]$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\widehat{\rho}_0(A_n, \{x_0\}) \leqslant \frac{1}{n}$, и следовательно $A_n \underset{inf}{\longrightarrow} \{x_0\}$. Далее для каждого $n \geqslant 2$ определим множество $B_k^n = A_n \cup \cup \{a_i^1 \mid i \geqslant k\}$, а также выберем метрики $\rho_n \in \Omega$, удовлетворяющие условию $\rho_n(a_i^n, a_i^1) = \frac{1}{i}$, $i \in \mathbb{N}$ (см. теорему 1). Легко заметить, что $\widehat{\rho}_n(A_n, B_n^k) \leqslant \frac{1}{k}$, и следовательно, $B_k^n \underset{inf}{\longrightarrow} A_n$ (при $k \to \infty$) при каждом фиксированном $n \geqslant 2$. Обозначим $\mathscr{H} = \{B_k^n \mid n, k \in \mathbb{N}\}$. Ясно, что $\{x_0\} \in \in [\mathscr{H}]_{inf}$, и выполнение первой аксиомы счетности позволяет выбрать последовательность $(B_{k_i}^{n_i})_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ так, чтобы $B_{k_i}^{n_i} \underset{inf}{\longrightarrow} \{x_0\}$. Но тогда (см. следствие 3(б)) для некоторых метрики $\rho \in \Omega$ и подпоследовательности $(B_{p_j}^{m_j})_{j=1}^{\infty}$ ($m_j = n_{i_j}$, $p_j = k_{i_j}$, $i_1 < i_2 < \ldots$) имеет место сходимость $B_{p_j}^{m_j} \underset{\widehat{\rho}}{\longrightarrow} \{x_0\}$, что невозможно, поскольку каждое множество $B_{p_j}^{m_j}$ содержит точки множества A_1, а $B_\rho(x_0, \varepsilon) \cap A_1 = \varnothing$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Получили противоречие. Локальная компактность пространства X доказана.

Допустим далее, что X не имеет счетной базы. Тогда, используя теорему 2, X можно представить в виде дизъюнктного объединения непустых открытых множеств U_t и V_t, где $t \in T$ и множество T несчетно. Для каждого $t \in T$ фиксируем точки $a_t \in U_t$ и $b_t \in V_t$ и положим $A = \{a_t \mid t \in T\}$, $B = \{b_t \mid t \in T\}$. Пусть $\{\mathscr{W}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ – локальная база (в пространстве $\exp_{inf} X$) множества A, $\mathscr{W}_1 \supset \mathscr{W}_2 \supset \ldots$. Выберем псевдоокрестности $B_R(A, \bar{\varepsilon}_n)$, $\bar{\varepsilon}_n = (\varepsilon_\rho^n)_{\rho \in \Omega}$, так, чтобы $B_R(A, \bar{\varepsilon}_n) \subset \mathscr{W}_n$, и обозначим

$$T_n = \{t \in T \mid B_R(A, \bar{\varepsilon}_n) \not\ni A \cup \{b_t\}\}.$$

В силу леммы 1 каждое множество T_n конечно. Положим $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$ и выберем $t_0 \in T \setminus S$ ($T \setminus S \neq \varnothing$, поскольку T несчетно, а S не более чем счетно). Рассмотрим множество $P = A \cup \cup \{b_{t_0}\}$. Ясно, что $P \in B_R(A, \bar{\varepsilon}_n) \subset \mathscr{W}_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Но тогда $P = A$, что невозможно. Получили противоречие. Итак, пространство X имеет счетную базу. (а) $\Rightarrow$ (б) доказано.

(б) $\Rightarrow$ (в). Если пространство X локально компактно и со счетной базой, то (см. теорему 3) X допускает уплотняющую метрику ρ. Покажем, что $\tau_{\widehat{\sigma}} \geqslant \tau_{\widehat{\rho}}$ для любой метрики $\sigma \in \Omega$. Тем самым будет доказано совпадение $\tau_{inf} = \tau_{\widehat{\rho}}$. Допустим от противного, что для некоторых $F \in \exp_{inf} X$, $\sigma \in \Omega$ и $\varepsilon > 0$ имеем при любом $n \in \mathbb{N}$ соотношение $B_{\widehat{\sigma}}(F, \frac{1}{n}) \not\subset \not\subset B_{\widehat{\rho}}(F, 2\varepsilon)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ фиксируем $F_n \in B_{\widehat{\sigma}}(F, \frac{1}{n}) \setminus B_{\widehat{\rho}}(F, 2\varepsilon)$. Ясно, что

$$\widehat{\sigma}(F, F_n) < \frac{1}{n}, \tag{1}$$

но

$$\widehat{\rho}(F, F_n) > \varepsilon. \tag{2}$$

Неравенства (2) показывают, что существует последовательность $(F_{n_i})_{i=1}^{\infty}$, $n_1 < n_2 < \ldots$, для которой либо $F_{n_i} \not\subset B_\rho(F, \varepsilon)$ для любого $i \in \mathbb{N}$, либо $F \not\subset B_\rho(F_{n_i}, \varepsilon)$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Рассмотрим первый случай. Можем считать, что $F_n \not\subset B_\rho(F, \varepsilon)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Выбираем точки $y_n \in F_n \setminus B_\rho(F, \varepsilon)$ и $x_n \in B_\sigma(y_n, \frac{1}{n}) \cap F$ (см. (1)). Отметим как очевидное, что при каждом $n \in \mathbb{N}$

$$\sigma(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \tag{3}$$

и поскольку $y_n \notin B_\rho(F, \varepsilon)$ (т. е. $\rho(y_n, F) \geqslant \varepsilon$), то

$$\rho(x_n, y_n) \geqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Во втором случае, так же как и в первом, можем считать, что $F \not\subset B_\rho(F_n, \varepsilon)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Выберем точки $x_n \in F \setminus B_\rho(F_n, \varepsilon)$ и $y_n \in B_\sigma(x_n, \frac{1}{n}) \cap F_n$ (см. (1)). Ясно, что для точек x_n и y_n при любом $n \in \mathbb{N}$ также выполняются условия (3) и (4).

Покажем далее, что последовательности $(x_n)_{n=1}^\infty$ и $(y_n)_{n=1}^\infty$ не имеют (в обоих случаях) предельных точек. Допустим, например, что z – предельная точка для последовательности $(x_n)_{n=1}^\infty$. Тогда $x_{n_i} \underset{\sigma}{\longrightarrow} z$ для некоторой подпоследовательности $(x_{n_i})_{i=1}^\infty$, что в силу (3) влечет и сходимость $y_{n_i} \underset{\sigma}{\longrightarrow} z$. А поскольку сходимости «$\underset{\sigma}{\longrightarrow}$» и «$\underset{\rho}{\longrightarrow}$» равносильны, то $\rho(x_{n_i}, y_{n_i}) \longrightarrow 0$, что противоречит условию (4).

Итак, отсутствие предельных точек у последовательностей $(x_n)_{n=1}^\infty$ и $(y_n)_{n=1}^\infty$ доказано. Но тогда по лемме 2 получаем сходимость $\rho(x_n, y_n) \longrightarrow 0$, что опять же противоречит условию (4). (б) $\Rightarrow$ (в) доказано.

Остается отметить, что импликация (в) $\Rightarrow$ (а) очевидна. □

Легко заметить, что если в части (а) $\Rightarrow$ (б) теоремы 5 ограничиться доказательством локальной компактности пространства X, то достаточно предположить выполнение в пространстве $\exp_{inf} X$ условия Фреше–Урысона в каждой точке вида $\{x\}$, где $x \in X$. Оказывается, что справедливо и обратное.

Теорема 6. *Метризуемое не компактное пространство X локально компактно тогда и только тогда, когда пространство $\exp_{inf} X$ удовлетворяет условию Фреше–Урысона в каждой точке вида $\{x\}$, где $x \in X$.*

Доказательство. Доказательство достаточности, как замечено выше, фактически содержится в доказательстве части (а) $\Rightarrow$ (б) теоремы 5 (с заменой первой аксиомы счетности на условие Фреше–Урысона). Докажем необходимость. Пусть X локально компактно. Фиксируем произвольные $x \in X$ и $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_\rho)_{\rho \in \Omega} \in E$. Можем считать, что для некоторой метрики $\sigma \in \Omega$ замыкание $[B_\sigma(x, \varepsilon_\sigma)]$ компактно. Для упрощения записей обозначим $O = B_\sigma(x, \varepsilon_\sigma)$. Отметим, что если $F \in \exp X$ и $F \subset O$, то множество F компактно, и следовательно $\widehat{\sigma}(\{x\}, F) < \varepsilon_\sigma$. Таким образом, $D_1(O) \subset B_{\widehat{\sigma}}(\{x\}, \varepsilon_\sigma)$. Отметим также очевидные соотношения $\{x\} \in D_1(O) \subset B_R(\{x\}, \bar{\varepsilon})$. Покажем далее, что $D_1(O) \underset{op}{\subset} \exp_{inf} X$. Пусть $F \in D_1(O)$. Компактность множества F позволяет выбрать для каждой метрики $\rho \in \Omega$ некоторое δ_ρ, $0 < \delta_\rho < 1$, так, чтобы $B_\rho(F, \delta_\rho) \subset O$, и следовательно $B_{\widehat{\rho}}(F, \delta_\rho) \subset D_1(O)$. Ясно, что $B_R(F, \bar{\delta}) \subset D_1(O)$, где $\bar{\delta} = (\delta_\rho)_{\rho \in \Omega}$. В силу предложения 1 $D_1(O) \underset{op}{\subset} \exp_{inf} X$. Итак, $\{x\} \in int_{inf} B_R(\{x\}, \bar{\varepsilon})$, откуда следует выполнение для $\exp_{inf} X$ условия Фреше–Урысона в точке $\{x\}$ (см. часть (в) следствия 3). □

4. Пространство $\exp_{inf} X$ и хаусдорфовость. По-прежнему пространство X метризуемо и не компактно. Если X локально компактно, то $\exp_{inf} X$ хаусдорфово (см. следствие 4). В [6] показано, что верно и обратное. Здесь мы приводим более простое, на наш взгляд, доказательство. Нам понадобится следующая вспомогательная

Лемма 3. *Пусть пространство $\exp_{inf} X$ хаусдорфово, $F \in \exp_{inf} X$, $x \in X \setminus F$. Тогда можно выбрать $\bar{\varepsilon} \in E$, $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_\rho)_{\rho \in \Omega}$, так, чтобы $B_\rho(F, \varepsilon_\rho) \cap B_\sigma(x, \varepsilon_\sigma) = \varnothing$ для любых $\rho, \sigma \in \Omega$.*

Доказательство. Обозначим $P = F \cup \{x\}$. Хаусдорфовость пространства $\exp_{inf} X$ позволяет выбрать $\bar{\varepsilon} \in E$, $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_\rho)_{\rho \in \Omega}$, таким образом, что $B_R(F, \bar{\varepsilon}) \cap B_R(P, \bar{\varepsilon}) = \varnothing$. Допустим, что для некоторых $\rho \in \Omega$ и $\sigma \in \Omega$ существует точка $z \in B_\rho(F, \varepsilon_\rho) \cap B_\sigma(x, \varepsilon_\sigma)$. Тогда положим

$M = F \cup \{z\}$. Несложно проверить, что $M \in B_{\widehat{\rho}}(F, \varepsilon_\rho)$ и $M \in B_{\widehat{\sigma}}(P, \varepsilon_\sigma)$. Но тогда $M \in B_R(F, \bar{\varepsilon}) \cap$ $\cap B_R(P, \bar{\varepsilon})$. Получили противоречие. $\square$

Теорема 7. *Пространство* $\exp_{inf} X$ *хаусдорфово в том и только в том случае, когда* X *локально компактно.*

Доказательство. В одну сторону (достаточность) теорема выполняется (см. следствие 4). Докажем необходимость. Пусть пространство $\exp_{inf} X$ хаусдорфово и не компактно (случай компактности $\exp_{inf} X$ тривиален, см. предложение 11). Фиксируем произвольную точку $x \in X$ и некоторое замкнутое в X дискретное множество F, $x \notin F$, $F = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ($a_n \neq a_k$ при $n \neq k$). Лемма 3 позволяет выбрать $\bar{\varepsilon} \in E$, $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_\rho)_{\rho \in \Omega}$, таким образом, что $B_\rho(F, \varepsilon_\rho) \cap B_\sigma(x, \varepsilon_\sigma) = \varnothing$ для любых $\rho, \sigma \in \Omega$. Фиксируем некоторую метрику $\sigma \in \Omega$ и предположим, что X не локально компактно в точке x. Тогда окрестность $B_\sigma(x, \varepsilon_\sigma)$ содержит замкнутое в X дискретное множество $P = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ($b_n \neq b_k$ при $n \neq k$). В силу теоремы 1 существует метрика $\rho \in \Omega$, для которой $\rho(a_n, b_n) = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Но тогда, очевидно, $B_\rho(F, \varepsilon_\rho) \cap B_\sigma(x, \varepsilon_\sigma) \neq \varnothing$. Получили противоречие. $\square$

5. Топологии $\boldsymbol{\tau_{inf}}$, $\boldsymbol{\tau_{LF}}$, $\boldsymbol{\tau_V}$ и $\boldsymbol{\tau_F}$. Случаи совпадения. В этой части рассмотрим вопрос о сравнении топологии τ_{inf} с топологиями τ_{LF}, τ_V и τ_F. Случаи совпадения описывает следующая

Теорема 8. *Для метризуемого пространства* X *следующие условия равносильны:*

(а) $\tau_{inf} = \tau_V$;

(б) $\tau_{inf} \geqslant \tau_V$;

(в) $\tau_{inf} = \tau_{LF}$;

(г) $\tau_{inf} = \tau_F$;

(д) X *компактно.*

Доказательство. Импликации (д) $\Rightarrow$ (а) $\Rightarrow$ (б), (д) $\Rightarrow$ (в) и (д) $\Rightarrow$ (г) очевидны. Докажем, что (б) $\Rightarrow$ (д). Допустим от противного, что X не компактно, и рассмотрим дизъюнктные замкнутые в X дискретные множества $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ($a_n \neq a_k$ и $b_n \neq b_k$ при $n \neq k$). Обозначим $P_n = A \cup \{b_n\}$ и выберем метрику $\sigma \in \Omega$ такую, что $\sigma(a_n, b_n) = \frac{1}{n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ (см. теорему 1). Ясно, что $\widehat{\sigma}(A, P_n) \leqslant \frac{1}{n}$, откуда $P_n \xrightarrow[\widehat{\sigma}]{} A$, и в силу соотношений $\tau_{\widehat{\sigma}} \geqslant \tau_{inf} \geqslant \tau_V$ имеет место сходимость $P_n \xrightarrow[V]{} A$. Однако для окрестности (в $\exp_V X$) $D_1(X \setminus B)$ множества A имеем $P_n \notin D_1(X \setminus B)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Получили противоречие. (б) $\Rightarrow$ (д) доказано.

(в) $\Rightarrow$ (д). Поскольку $\tau_{LF} \geqslant \tau_V$ и по условию $\tau_{inf} = \tau_{LF}$, то $\tau_{inf} \geqslant \tau_V$. Последнее, как показано выше ((б) $\Rightarrow$ (д)), влечет компактность пространства X. (в) $\Rightarrow$ (д) доказано.

(г) $\Rightarrow$ (д). Как и в части (б) $\Rightarrow$ (д) допустим, что X не компактно, и рассмотрим то же множество A и некоторую точку $x_0 \in X \setminus A$. Положим $A_n = \{x_0\} \cup \{a_k \mid k \geqslant n\}$. Рассмотрим окрестность (в $\exp_F X$) $\mathscr{W}$ множества $\{x_0\} \in \exp_F X$, $\mathscr{W} = D_1(U) \cap D_2(V)$, где $x_0 \in U \underset{op}{\subset} X$ и множество $K = X \setminus U$ компактно, $x_0 \in V \underset{op}{\subset} X$, $V \subset U$ и $V \cap A = \varnothing$. Ясно, что окрестности указанного вида образуют в $\exp_F X$ локальную базу в точке $\{x_0\}$ (точка в $\exp_F X$). Ясно также, что $A_n \in \mathscr{W}$ для всех n, начиная с некоторого номера. Но тогда $A_n \xrightarrow[F]{} \{x_0\}$, откуда, вследствие совпадения $\tau_{inf} = \tau_F$, $A_n \xrightarrow[inf]{} \{x_0\}$, что, в свою очередь, влечет сходимость $A_{n_i} \xrightarrow[\widehat{\rho}]{} \{x_0\}$ для некоторых подпоследовательности $(A_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ и метрики $\rho \in \Omega$ (см. следствие 3(б)). Последнее, однако, невозможно, поскольку $B_\rho(x_0, \varepsilon) \cap A = \varnothing$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. $\square$

Соотношения $\tau_F \leqslant \tau_{inf}$ (см. следствие 1) и $\tau_{inf} \leqslant \tau_{LF}$ и теорема 8 влекут

Следствие 5. *Для метризуемого пространства* X *следующие условия равносильны:*

(а) $\tau_F < \tau_{inf}$ (*т. е.* $\tau_F \leqslant \tau_{inf}$ *и* $\tau_F \neq \tau_{inf}$);

(б) $\tau_{inf} < \tau_{LF}$;

(в) X *не компактно.*

Вопрос о сравнимости топологий τ_{inf} и τ_V частично проясняет часть (б)$\Leftrightarrow$(д) теоремы 8. Полностью решает вопрос следующая

Теорема 9. *Для метризуемого пространства* X *равносильны условия:*

(а) X *со счетной базой;*

(б) X *допускает вполне ограниченную метрику;*

(в) $\tau_V \geqslant \tau_{inf}$.

Доказательство. (а) $\Leftrightarrow$ (б) – хорошо известный факт (см., например, [10, с. 398]).

(б) $\Rightarrow$ (в). Пусть $\rho \in \Omega$ и метрика ρ вполне ограничена. Тогда $\tau_V \geqslant \tau_{\widehat{\rho}}$ [3], и следовательно $\tau_V \geqslant \tau_{inf}$. (б) $\Rightarrow$ (в) доказано.

(в) $\Rightarrow$ (а). Допустим от противного, что в X не существует счетной базы. Тогда, поскольку X имеет σ-дискретную базу [10, с. 418], то в X найдется замкнутое дискретное множество $A = \{a_\lambda \,|\, \lambda < \omega_1\}$ ($a_\alpha \neq a_\beta$ при $\alpha \neq \beta$), где λ – любой не более чем счетный ординал, ω_1 – первый несчетный ординал. Обозначим $A_\lambda = \{a_\alpha \,|\, \alpha < \lambda\}$, $\mathscr{H} = \{A_\lambda \,|\, \lambda < \omega_1\}$. Несложно проверить, что $A \notin \mathscr{H}$ и $A \in [\mathscr{H}]_V$, а поскольку $\tau_V \geqslant \tau_{inf}$, то и $A \in [\mathscr{H}]_{inf}$. В силу секвенциальности пространства $\exp_{inf} X$ (предложение 2), а также следствия 3 (часть (б)), найдутся множество $B \in \exp X \setminus \mathscr{H}$, последовательность $(A_{\lambda_n})_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ и метрика $\rho \in \Omega$ такие, что $A_{\lambda_n} \xrightarrow[\widehat{\rho}]{} B$. Рассмотрим следующие варианты расположения множества B.

1) $B \not\subset A$. Фиксируем некоторую точку $b \in B \setminus A$. Ясно, что $\varepsilon = \rho(b, A) > 0$ и $B_\rho(A, \varepsilon) \not\supset$ $\not\supset B$, откуда $\widehat{\rho}(B, A_\lambda) \geqslant \varepsilon$ для любого $\lambda < \omega_1$, что противоречит сходимости $A_{\lambda_n} \xrightarrow[\widehat{\rho}]{} B$. Таким образом, $B \subset A$.

2) Найдутся $a_\alpha \notin B$ и $a_\beta \in B$ такие, что $\alpha < \beta$ (a_α – «дырка» в множестве B). Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $B_\rho(a_\alpha, \varepsilon) \cap A = \{a_\alpha\}$ и $B_\rho(a_\beta, \varepsilon) \cap A = \{a_\beta\}$. Для всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого номера, $\widehat{\rho}(B, A_{\lambda_n}) < \varepsilon$, и следовательно $A_{\lambda_n} \ni a_\beta$. А поскольку $a_\alpha \in A_{\lambda_n}$ (так как $\alpha < \beta$) и $\widehat{\rho}(B, A_{\lambda_n}) < \varepsilon$, то $a_\alpha \in B$. Получили противоречие. Таким образом, множество B не содержит «дырок».

3) Существует не более чем счетный ординал λ_0 такой, что $\lambda < \lambda_0$ для любой точки $a_\lambda \in B$. Можно считать, что λ_0 – первый среди таких ординалов, и тогда $B = A_{\lambda_0}$, что невозможно, поскольку $B \notin \mathscr{H}$.

Итак, получаем совпадение $B = A$. Фиксируем ординал $\lambda_0 < \omega_1$, $\lambda_0 > \lambda_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ (такой ординал существует, см., например, [14, с. 69]), а также $\varepsilon > 0$, при котором $B_\rho(a_{\lambda_0}, \varepsilon) \cap A = \{a_{\lambda_0}\}$. Поскольку $B = A$, то $\widehat{\rho}(B, A_{\lambda_n}) \geqslant \varepsilon$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, что противоречит сходимости $A_{\lambda_n} \xrightarrow[\widehat{\rho}]{} B$. $\square$

Остается отметить случай несравнимости топологий τ_{inf} и τ_V. Из теорем 8 и 9 очевидным образом вытекает

Следствие 6. *Топологии* τ_{inf} *и* τ_V *на* $\exp X$ *несравнимы тогда и только тогда, когда вес пространства* X *несчетен.*

Литература

1. *Hausdorff F.* Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig, 1914.

2. *Vietoris L.* Bereiche zweiter Ordnung // Monatshefte Math. Phys. 1923. Vol. 33. P. 49–62.

3. *Michael E. A.* Topologies on spaces of subsets // Trans. Amer. Math. Soc. 1951. Vol. 71. P. 152–182.

4. *Fell J. M.* A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non-Hausdorff space // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 13. P. 472–476.

5. *Beer G. A., Himmelberg C. J., Prikry K., van Vleck F. S.* The locally finite topology on 2^X // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. Vol. 101. P. 168–172.

6. *Costantini C., Vitolo P.* On the infimum of the Hausdorff metric topologies // Proc. London Math. Soc. 1995. Vol. 70. P. 441–480.

7. *Пономарев В. И.* Новое пространство замкнутых множеств и многозначные непрерывные отображения бикомпактов // Математический сб. 1959. Т. 48(90), № 2. С. 191–212.

8. *Beer G.* Topologies on Closed and Closed Convex Sets. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993.

9. *Naimpally S. A., Sharma P. L.* Fine uniformity and the locally finite hyperspace topology // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 103. P. 611–646.

10. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.

11. *Atsuji M.* Uniform continuity of continuous functions of metric spaces // Pacific J. Math. 1958. Vol. 8. P. 11–16.

12. *Beer G., Tamaki R.* The infinite value functional and the uniformization of hit-and-miss hyperspace topologies // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. Vol. 122. P. 601–611.

13. *Hausdorff F.* Erweiterung einer Homöomorphie // Eund. Math. 1930. Vol. 16. P. 353–360.

14. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.

15. *Тимохович В. Л., Фролова Д. С.* О свойствах инфимальной топологии пространства отображений // Изв. вузов. Матем. 2016. № 4. С. 87–99.

16. *Тимохович В. Л., Фролова Д. С.* Об инфимальной топологии пространства отображений // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2011. № 2. С. 136–140.

A. S. Bedritskiy, V. L. Timokhovich

On the topologies of a hyperspace of a metrizable topological space

Summary

The properties of the topology τ_{inf}, which is the infimum of the set of all topologies generated by the Hausdorff metrics on the hyperspace $\exp X$ of a metrizable topological space X are studied. As one of the main results necessary and sufficient conditions for the metrizability (with Hausdorff metric) of τ_{inf} are obtained. We also show that $\exp X$ with the topology τ_{inf} is first-countable space if and only if a space X is locally compact and second-countable. Besides we investigate relations between τ_{inf} and other topologies on the $\exp X$: Vietoris topology, Fell topology and locally finite topology.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 2. С. 28–33

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ЧАСТИЧНО РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ С ТРАНЗИТИВНЫМ ОТНОШЕНИЕМ π-КВАЗИНОРМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПОДГРУПП

И. М. Дергачева, Е. А. Задорожнюк, И. П. Шабалина

Белорусский государственный университет транспорта
e-mail: irina.dergacheva.76@mail.ru
Поступила 18.12.2023

На протяжении всей статьи все группы конечны. Говорят, что подгруппа A группы G π-квазинормальна в G, если A 1π-субнормальна и модулярна в G. Доказано, что если группа G π_0-разрешима и π-квазинормальность является транзитивным отношением в G, где $\pi_0 = \pi(D)$ и D – π-специальный корадикал группы G, то D – абелева холлова подгруппа нечетного порядка в G.

1. Введение. На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу; $\mathscr{L}(G)$ – решетка всех подгрупп группы G, $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел; $\pi = \{p_1, \ldots, p_t\} \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Группа G называется π-*специальной* [1–3], если

$$G = O_{p_1}(G) \times \cdots \times O_{p_n}(G) \times O_{\pi'}(G).$$

Пересечение всех таких нормальных подгрупп N группы G, для которых факторгруппа G/N является π-специальной, называется π-*специальным корадикалом* G.

Подгруппа A группы G называется 1π-*субнормальной* в G [4–6], если A $\mathfrak{F}$-субнормальна в *смысле Кегеля* [7] или K-$\mathfrak{F}$-*субнормальна* в G [8], где $\mathfrak{F}$ – класс всех π'-групп, т. е. в G имеется цепь подгрупп

$$A = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \cdots \leqslant A_n = G,$$

такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ – π'-группа для всех $i = 1, \ldots, n$.

Подгруппа A группы G называется *модулярной* в G, если M – модулярный элемент (в *смысле Куроша* [9, с. 43]) решетки $\mathscr{L}(G)$, т. е. (i) $\langle X, M \cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ для всех $X \leqslant G, Z \leqslant G$ таких, что $X \leqslant Z$ и (ii) $\langle M, Y \cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y \leqslant G, Z \leqslant G$ таких, что $M \leqslant Z$.

Подгруппа A группы G называется *квазинормальной* (Оре) или *перестановочной* (Стоунхьюэр) в G, если A перестановочна с каждой подгруппой H группы G, т. е. $AH = HA$. Каждая квазинормальная подгруппа, очевидно, модулярна в группе. Кроме того, общеизвестен следующий интересный факт.

Теорема A (Шмидт [9, теорема 5.1.1]). *Подгруппа A группы G квазинормальна в G тогда и только тогда, когда A субнормальна и модулярна в G.*

Теорема A позволяет определить следующий π-аналог квазинормальности.

Определение 1.1. Мы говорим, что подгруппа A группы G π-квазинормальна в G, если A 1π-субнормальна и модулярна в G.

Понятно, что подгруппа A квазинормальна в G тогда и только тогда, когда A π-квазинормальна в G, где π – множество всех простых групп.

В данной работе, обобщая соответствующий результат работы Цахера [10] о разрешимых PT-группах, мы доказываем следующий факт.

Теорема B. *Пусть D – π-специальный корадикал группы G и G является π_0-разрешимой группой, где $\pi_0 = \pi(D)$. Если π-квазинормальность является транзитивным* *отношением в G, то D – абелева холлова подгруппа в G, имеющая нечетный порядок, и каждый главный фактор группы G ниже D является циклическим.*

2. Некоторые предварительные результаты. Мы используем $\mathfrak{G}_{1\pi}$ для обозначения класса всех π-специальных групп.

Первая лемма может быть доказана прямой проверкой.

Лемма 2.1. *Класс $\mathfrak{G}_{1\pi}$ замкнут относительно взятия прямых произведений, гомоморфных образов и подгрупп. Более того, если E является нормальной подгруппой в G и $E/(E\cap\Phi(G))$ является π-специальной группой, то E является π-специальной.*

Ввиду леммы 2.1 и предложения 2.2.8 в [8] имеет место следующая

Лемма 2.2. *Если N – нормальная подгруппа в G, тогда*

$$(G/N)^{\mathfrak{G}_{1\pi}} = G^{\mathfrak{G}_{1\pi}}N/N.$$

Лемма 2.3 (см. лемму 2.6 в [11]). *Пусть A, K и N – подгруппы G. Предположим, что A 1π-субнормальна в G, а N нормальна в G. Тогда:*

(1) *$A\cap K$ 1π-субнормальна в K*;

(2) *если $N\leqslant K$ и K/N 1π-субнормальна в G/N, то K является σ-субнормальной в G*;

(3) *если $K\leqslant E\leqslant G$, где K 1π-субнормальна в E, тогда KN/N 1π-субнормальна в NE/N.*

Все утверждения следующей леммы вытекают из соответствующих утверждений леммы 2.3 и общих свойств модулярных подгрупп [9, с. 201].

Лемма 2.4. *Пусть A, B и N – подгруппы группы G, где A π-квазинормальна, а N нормальна в G. Тогда:*

(1) *подгруппа $A\cap B$ π-квазинормальна в B;*

(2) *подгруппа AN/N π-квазинормальна в G/N;*

(3) *если $N\leqslant B$ и B/N π-квазинормальна в G/N, то B π-квазинормальна в G.*

Говорят, что подгруппа A группы G является *π-субквазинормальной* в G, если существует цепь подгрупп

$$A = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \cdots \leqslant A_n = G$$

такая, что A_{i-1} π-квазинормальна в A_i для всех $i = 1,\ldots,n$.

Понятно, что π-квазинормальность является транзитивным отношением в G тогда и только тогда, когда каждая π-субквазинормальная подгруппа G является π-квазинормальной в G.

Следующая лемма является следствием леммы 2.4 данной работы и лемм 1 и 4 работы [12].

Лемма 2.5. *Пусть A, B и N – подгруппы группы G, где A π-субквазинормальна в G, а N нормальна в G. Тогда:*

(1) *$A\cap B$ является π-субквазинормальным в B;*

(2) *AN/N π-субквазинормальна в G/N;*

(3) *если $N\leqslant K$ и подгруппа K/N является π-субквазинормальным в G/N, то K π-субквазинормальна в G.*

Лемма 2.6 (см. лемма 1.2.16 в [13]). *Если A – квазинормальная p-подгруппа G, то $O^p(G)\leqslant N_G(A)$.*

3. Доказательство теоремы B. Предположим, что теорема неверна, и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда $D\neq 1$.

(1) *Если R – неединичная нормальная подгруппа группы G, то заключение теоремы выполняется для G/R.*

Если H/R – π-субквазинормальная подгруппа группы G/R, то H π-субквазинормальна в G по лемме 2.5(3). Поэтому H π-квазинормальна в G по условию теоремы и, значит, H/R

является π-квазинормальной в G/R по лемме 2.4(2). Следовательно, π-квазинормальность является транзитивным отношением в G/R. Поэтому имеет место (1) по выбору G.

(2) *Если E – собственная π-субквазинормальная подгруппа группы G, то $E^{\mathfrak{G}_{1\pi}} \leqslant D$ и заключение теоремы выполняется для E.*

Каждая π-субквазинормальная подгруппа H группы E π-субквазинормальна в G, поэтому по условию H π-квазинормальна в G, а значит, H π-квазинормальна в E по лемме 2.4(1). Следовательно, гипотеза верна для E, поэтому заключение теоремы выполняется для E в силу выбора G. Кроме того, поскольку $G/D \in \mathfrak{G}_{1\pi}$ и $\mathfrak{G}_{1\pi}$ – наследственный класс по лемме 2.1, то

$$E/(E\cap D) \simeq ED/D \in \mathfrak{G}_{1\pi}$$

и поэтому $E/(E\cap D) \in \mathfrak{G}_{1\pi}$. Следовательно, $E^{\mathfrak{G}_{1\pi}} \leqslant E\cap D \leqslant D$.

(3) *подгруппа D нильпотентна и каждый главный фактор H/K группы G ниже D является циклическим.*

Предположим, что это утверждение неверно, и пусть R – минимальная нормальная подгруппа G. Прежде покажем, что $R \leqslant D$. В силу леммы 2.2 и утверждения (1), $RD/R = (G/R)^{\mathfrak{G}_{1\pi}}$ – абелева группа и каждый главный фактор $(H/R)/(K/R)$ группы G/R ниже RD/R является циклическим. Предположим, что $R\cap D = 1$. Тогда

$$D \simeq D/1 = D/(D\cap R) \simeq RD/R$$

нильпотентна. Ввиду G-изоморфизма $D \simeq RD/R$. Каждый главный фактор группы G ниже D является циклическим. Таким образом, $R \leqslant D$ и поэтому каждый главный фактор группы G/R между DR/R и R/R является циклическим.

Поскольку G $\pi(D)$-разрешима, R является p-группой для некоторого простого числа p. Пусть V – максимальная подгруппа в R. Тогда $V_G = 1$ и V π-субквазинормальна в G. Поэтому V π-квазинормальна в G. Допустим, что $V \neq 1$. Тогда $R = V^G$ – группа порядка p согласно [9, теорема 5.2.3], противоречие. Следовательно, $V = 1$ и поэтому $|R| = p$. Таким образом, каждый главный фактор группы G ниже D является циклическим ввиду теоремы Жордана–Гельдера для главных рядов.

Покажем, что D нильпотентна. Предположим, что G имеет минимальную нормальную подгруппу $N \neq R$. Тогда $N \leqslant D$ и $D \simeq D/(N\cap R)$ нильпотентна. Предположим теперь, что R – единственная минимальная нормальная подгруппа G. Тогда, ввиду леммы 2.2, имеет место $R \nleqslant \Phi(G)$ поскольку $D \neq 1$ и поэтому $R = C_G(R) = O_p(G) = F(G)$ согласно [14, гл. A, 13.8(b) и 15.2]. Но $|R| = p$. Значит, $G/R = G/C_G(R)$ циклическая группа и, следовательно, G сверхразрешима. Но тогда

$$D = G^{\mathfrak{G}_{1\pi}} \leqslant G' \leqslant F(G)$$

и поэтому D нильпотентна. Отсюда имеем (3).

(4) *Каждая подгруппа группы $F(G)$ является квазинормальной в G, а каждая подгруппа группы D нормальная в D* (это следует из утверждения (3), леммы 1.6 и теоремы A, поскольку каждая субнормальная подгруппа является π-субквазинормальной в группе).

(5) *D – холлова подгруппа группы G. Следовательно, D имеет дополнение M в G.*

Предположим, что это неверно, и пусть P – силовская p-подгруппа группы D и G_p – силовская p-подгруппа группы G такие, что $1 < P < G_p$, $G_p \leqslant H$, где либо $H = G_p$ и $p \in \pi$, либо H – холлова π'-подгруппа в G.

(a) *$D = P$ – минимальная нормальная подгруппа в G. Следовательно, H нормальна в G и $|D| = p$, поэтому $G_p \leqslant C_G(D)$.*

Пусть R – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в D. Тогда R является q-группой для некоторого простого числа q ввиду (3). Более того, ввиду леммы 2.2, $D/R = (G/R)^{\mathfrak{S}_{1\pi}}$ является холловой подгруппой группы G/R по утверждению (1) и тогда H/D нормальна в G/D поскольку G/D π-специальна согласно лемме 2.1. Значит, H нормальна в G.

Предположим, что $PR/R \neq 1$. Тогда $PR/R \in \mathrm{Syl}_p(G/R)$. Если $q \neq p$, то $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Это противоречит тому, что $P < G_p$. Следовательно, $q = p$, поэтому $R \leqslant P$ и значит, $P/R \in \in \mathrm{Syl}_p(G/R)$ и мы снова получаем, что $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Это противоречие показывает, что $PR/R = 1$, откуда следует, что $R = P$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в D. Поскольку D нильпотентна по утверждению (3), то p'-дополнение S группы D является характеристической подгруппой в D, а значит, нормальной в G. Следовательно, $S = 1$, откуда следует, что $R = D = P$. Наконец, ввиду (3), $|D| = p$ и поэтому $D \leqslant Z(G_p)$. Следовательно, $G_p \leqslant C_G(D)$.

(b) $D \nleqslant \Phi(G)$. *Следовательно, для некоторой максимальной подгруппы M группы G имеет место равенство $G = D \rtimes M$.*

Это следует из утверждения (a) и леммы 2.2, так как G не π-специальна.

(c) *Если в G имеется минимальная нормальная подгруппа $L \neq D$, то $G_p = D \times L$ – нормальная абелева подгруппа в G. Следовательно, $O_{p'}(G) = 1$.*

Действительно, $DL/L \simeq D$ – холлова подгруппа группы G/L по утверждениям (1) и (a). Следовательно, $G_pL/L = DL/L$, поэтому $G_p = D \times (L \cap G_p)$. Но $D < G_p$ и поэтому $L \cap G_p \neq 1$, что влечет $L \cap G_p = L$ поскольку G p-разрешима по условию. Таким образом, $G_p = D \times L$ и $O_{p'}(G) = 1$.

(d) $V = C_G(D) \cap M$ *– нормальная подгруппа в G и $C_G(D) = D \times V \leqslant H$.*

Ввиду утверждений (a) и (b), $C_G(D) = D \times V$, где $V = C_G(D) \cap M$ – нормальная подгруппа в G. Более того, $V \simeq DV/D$ π-специальна по лемме 2.1. Таким образом, $V = O_\pi(V) \times O_{\pi'}(V)$.

Пусть W – холловская π'-подгруппа в V. Тогда подгруппа W характеристична в V и поэтому она нормальна в G. Предположим, что $p \in \pi$. Тогда $W \leqslant O_{p'}(G) = 1$ и поэтому V – p-группа. Следовательно, $C_G(D) \leqslant G_p = H$. Пусть теперь $p \in \pi'$ и пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в V. Тогда L – p-группа ввиду (c). Значит, $V = O_{\pi'}(V) \leqslant H$ и поэтому $C_G(D) = D \times V \leqslant H$.

(e) *В G имеется минимальная нормальная подгруппа L, где $D \neq L \leqslant M$. Следовательно, $G_p = D \times L$ – нормальная абелева p-подгруппа в G.*

Предположим, что D является единственной минимальной нормальной подгруппой в G. Тогда $D = C_G(D)$ согласно [15, гл. A, 15.2], поскольку $D \nleqslant \Phi(G)$ согласно (b). Однако $D < G_p \leqslant C_G(G)$ согласно (a). Это противоречие показывает, что в G имеется минимальная нормальная подгруппа $N \neq D$. Значит, $G_p = D \times N$ – нормальная элементарная абелева подгруппа в G ввиду (c). Но тогда $G_p \cap DM = D(G_p \cap M)$, где $G_p \cap M$ – неединичная нормальная подгруппа в G и поэтому для некоторой минимальной нормальной подгруппы L группы G имеет место $D \neq L \leqslant M$ и $G_p = D \times L$ – нормальная абелева p-подгруппа в G.

(f) *Каждая подгруппа группы G_p является нормальной в G. Таким образом, $|D| = |L| = p$.*

Пусть $A \leqslant G_p$. Тогда A квазинормальна в G ввиду (4), поэтому ввиду (e) имеем $G = G_pO^p(G) \leqslant N_G(A)$ согласно лемме 2.6.

(g) *Заключительное противоречие для* (5).

Ввиду (d), $C_G(D) \leqslant H$, где $H = G_p$, если $p \in \pi$ и H – холлова π'-подгруппа в G, если $p \in \pi'$.

Согласно (e) и (f), $G_p = D \times L$, где $|D| = |L| = p$ и L – минимальная нормальная подгруппа G, содержащаяся в M, и каждая подгруппа G_p нормальна в G.

Пусть $D = \langle a \rangle$, $L = \langle b \rangle$ и $N = \langle ab \rangle$. Тогда $L \neq N \neq D$, поэтому в силу G-изоморфизмов

$$G_p/N = DN/N \simeq D \simeq L \simeq LN/N = G_p/N$$

мы получаем, что $C_G(D) = C_G(L) = C_G(G_p)$ и $G/C_G(D) = G/C_G(L) = G/C_G(G_p)$.

Прежде предположим, что $p \in \pi$. Тогда $C_G(L) \leqslant G_p$. С другой стороны, $L \leqslant M$, где $M \simeq G/D$ π-специальна, и поэтому

$$M = O_{p_1}(M) \times \cdots \times O_{p_n}(M) \times O_{\pi'}(M),$$

где $p_1, \ldots, p_n \in \pi$ и

$$O_{\pi'}(M) \leqslant C_G(L) \leqslant G_p \leqslant O_\pi(M).$$

Это показывает, что $O_{\pi'}(M) = 1$ и поэтому M – нильпотентная π-группа. Следовательно, M и G – p-группы.

Полученное противоречие показывает, что $p \in \pi'$ и поэтому $C_G(D) \leqslant H$, где H – холлова π'-подгруппа в G. Но

$$O_{p_1}(M) \times \cdots \times O_{p_n}(M) \leqslant C_G(D)$$

и поэтому

$$O_{p_1}(M) \times \cdots \times O_{p_n}(M) = 1.$$

Следовательно, M, и поэтому G, являются π'-группами. Следовательно, G π-специальна. Полученное противоречие завершает доказательство (5).

(6) *Если p – простое число и $(p-1, |G|) = 1$, тогда $(p, |D|) = 1$. Следовательно наименьшее простое число в $\pi(G)$ принадлежит $\pi(|G : D|)$. В частности, $|D|$ нечетно, а значит, D абелева.*

Предположим, что p делит $|D|$. Тогда D имеет максимальную подгруппу E такую, что $|D : E| = p$ и E нормальна в G ввиду утверждений (3) и (5). Отсюда следует, что $C_G(D/E) = G$, поскольку $(p-1, |G|) = 1$, т. е. $D/M \leqslant Z(G/M)$. Но G/D нильпотентна. Следовательно, G/M нильпотентна и, значит, $D \leqslant M < D$, противоречие. Следовательно, наименьшее простое число в $\pi(G)$ принадлежит $\pi(|G : D|)$. В частности, $|D|$ нечетно, и поэтому D абелева, поскольку ввиду (4) D является дедекиндовой группой.

Из утверждений (3), (5) и (6) следует, что заключение теоремы выполняется для G. Но это противоречит выбору G. Это заключительное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

Литература

1. *Chunikhin S. A.* Subgroups of finite groups. Minsk: Nauka i Tehnika. 1964.

2. *Skiba A. N.* On some results in the theory of finite partially soluble groups // Commun. Math. Stat. 2016. Vol. 4, N 3. P. 281–309.

3. *Skiba A. N.* Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups // J. Algebra. 2018. Vol. 495. P. 114–129.

4. *Haiyan Li, A.-Ming Liu, Safonova I. N., Skiba A. N.* Characterizations of some classes of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups // Communications in Algebra. DOI: 10.1080/00927872.2023.2235006.

5. *Zhang X.-F., Guo W., Safonova I. N., Skiba A. N.* A Robinson description of finite $P\sigma T$-groups // J. Algebra. 2023. Vol. 631. P. 218–235.

6. *A-Ming Liu, Chen M., Safonova I. N., Skiba A. N.* Finite groups with modular σ-subnormal subgroups // J. Group Theory. 2023. https://doi.org/10.1515/jgth-2023-0064.

7. Kegel O. H. Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die den subnormalteilerverband each enthalten // Arch. Math. 1978. Vol. 30, N 3. P. 225–228.

8. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of Finite groups. Dordrecht: Springer, 2006.

9. *Schmidt R.* Subgroup lattices of groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1994.

10. *Zacher G.* I gruppi risolubili finiti in cui i sottogruppi di composizione coincidono con i sottogruppi quasi-normali // Atti della Accademia Nazionale dei Lincei Rend. cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 1964. Vol. 8, N 37. P. 150–154.

11. *Skiba A. N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. Vol. 436, N 8. P. 1–16.

12. *Zimmermann I.* Submodular subgroups of finite groups // Math. Z. 1989. Vol. 202, N 2. P. 545–557.

13. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M.* Products of Finite Groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2010.

14. *Doerk K., Hawkes T.* Finite Soluble Groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.

15. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 1967.

I. M. Dergacheva, E. A. Zadorozhnyuk, I. P. Shabalina

Finite partially soluble groups with transitive π-quasinormality relation for subgroups

Summary

Throughout the article, all groups are finite. We say that a subgroup A of G is π-quasinormal in G, if A is 1π-subnormal and modular in G. We prove that if the group G is π_0-solvable, where $\pi_0 = \pi(D)$ and D is the π-special residual of G, and π-quasi-normality is a transitive relation in G, then D is an abelian Hall subgroup of odd order in G.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 2. С. 34–43

УДК 512.542

О СЛАБО $\mathbb{P}$-СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

С. И. Ленденкова

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
e-mail: slendenkova@mail.ru
Поступила 22.12.2023

Подгруппа H конечной группы G называется *слабо $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой*, если H порождается двумя подгруппами, одна из которых субнормальна в G, а другую можно соединить с группой G цепочкой подгрупп с простыми индексами. Устанавливаются свойства слабо $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп, позволяющие распространять известные результаты о конечных группах с наборами $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп на конечные группы со слабо $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами. В частности, устанавливается сверхразрешимость конечной группы со слабо $\mathbb{P}$-субнормальными нормализаторами силовских подгрупп и метанильпотентность группы со слабо $\mathbb{P}$-субнормальными B-подгруппами.

Введение. В работе рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и терминология соответствуют [1].

Предложенные А. Н. Скибой [2] понятия слабо субнормальной и частично субнормальной подгруппы связаны с порождением подгруппы двумя подгруппами, одна из которых субнормальна в группе, а другая обладает определенными свойствами.

Определение 1 [2]. Подгруппу H группы G называют *слабо субнормальной подгруппой группы G*, если $H = \langle H_1, H_2 \rangle$, где H_1 субнормальна в G, а H_2 полунормальна в G. Здесь и далее запись $H = \langle H_1, H_2 \rangle$ означает, что H порождается своими подгруппами H_1 и H_2. Напомним, что подгруппа A группы G называется *полунормальной подгруппой группы G*, или *полуперестановочной*, если существует подгруппа B в группе G такая, что $G = AB$ и A перестановочна с каждой подгруппой из B.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел.

Определение 2. Подгруппа H группы G называется *$\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой группы G*, если $H = G$ или существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 < H_1 < \ldots < H_{n-1} < H_n = G \tag{1}$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}$ для всех i. В этой ситуации используется обозначение H $\mathbb{P}$-sn G.

Определение 3. Подгруппа H группы G называется *$\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой группы G*, если $H = G$ или существует цепочка подгрупп (1) такая, что для каждого i либо H_i нормальна в H_{i+1}, либо $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}$. В этой ситуации используется обозначение H $\mathrm{K}\mathbb{P}$-sn G.

Определения 2 и 3 введены А. Ф. Васильевым, Т. И. Васильевой и В. Н. Тютяновым [3]. Ясно, что субнормальная подгруппа H группы G будет $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальной в G, а каждая $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа – $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой. В знакопеременной группе A_6 единичная подгруппа $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна, но не $\mathbb{P}$-субнормальна.

Введем следующее новое понятие.

Определение 4. Подгруппу H группы G будем называть *слабо $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой группы G*, если $H = \langle H_1, H_2 \rangle$, где H_1 субнормальна в G, а H_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в G.

В настоящей работе устанавливаются свойства слабо $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп, в частности, оказывается, что слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа K$\mathbb{P}$-субнормальна, а в разрешимой группе G для подгруппы H следующие утверждения эквивалентны:

H слабо $\mathbb{P}$-субнормальна;

H K$\mathbb{P}$-субнормальна;

H $\mathbb{P}$-субнормальна.

Кроме того, в разрешимой группе каждая слабо субнормальная подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна, но обратное неверно: в симметрической группе S_4 подгруппа $\langle(1\,2)\rangle$ $\mathbb{P}$-субнормальна, но не слабо субнормальна.

Полученные свойства позволяют распространить известные результаты о группах с наборами $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп на группы со слабо $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами. В частности, группа со слабо $\mathbb{P}$-субнормальными нормализаторами силовских подгрупп будет сверхразрешимой, а со слабо $\mathbb{P}$-субнормальными B-подгруппами – метанильпотентной.

1. Вспомогательные результаты. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих порядок группы G, а наибольшая нормальная π-подгруппа группы G – через $O_\pi(G)$ для $\pi \subseteq \pi(G)$, в частности, если $\pi = \{p\}$, то $O_p(G)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа группы G. Запись $X \leq Y$, $X < Y$, $X \triangleleft Y$, $X \triangleleft\triangleleft Y$ означает, что X – подгруппа в группе Y, соответственно, собственная подгруппа, нормальная подгруппа, субнормальная подгруппа; $|X|$ – порядок группы X и $|X : Y|$ – индекс $Y \leq X$.

Будем использовать следующие обозначения для группы G и ее подгруппы H:

H_G – наибольшая нормальная в G подгруппа, содержащаяся в H;

H_{sG} – наибольшая субнормальная в G подгруппа, содержащаяся в H.

Лемма 1 [4, Лемма 1.2]. *Если M – максимальная подгруппа группы G, то $M_G = M_{sG}$.*

Лемма 2 [1; 5]. *Пусть $K \triangleleft\triangleleft G$, N – нормальная подгруппа группы G, H – подгруппа группы G, $r \in \pi(G)$. Тогда*

(1) *$KN/N \triangleleft\triangleleft G/N$;*

(2) *$KN \triangleleft\triangleleft G$;*

(3) *если $N \leq H$ и $H/N \triangleleft\triangleleft G/N$, то $H \triangleleft\triangleleft G$;*

(4) *$\pi(K) = \pi(K^G)$ и $K \leq O_{\pi(K)}(G)$;*

(5) *если K r-разрешима, то K^G r-разрешима;*

(6) *если K r-нильпотентна, то K^G r-нильпотентна;*

(7) *если K r-разложима, то K^G r-разложима.*

Лемма 3 [6, лемма 1.8]. (1) *Пусть $H \leq U \leq G$. Если подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна в U, а подгруппа U $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна в G.*

(2) *Если H – $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G, а N – нормальная подгруппа группы G, то подгруппа HN $\mathbb{P}$-субнормальна в G, а подгруппа HN/N $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N.*

(3) *Если $N \leq U \leq G$, N нормальна в G и U/N – $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G/N, то подгруппа U $\mathbb{P}$-субнормальна в группе G.*

(4) *Если H – $\mathbb{P}$-субнормальная в группе G подгруппа, а N – нормальная подгруппа группы G, то $(H \cap N)$ $\mathbb{P}$-субнормальна в N.*

Лемма 4. *Пусть H – $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G. Если N – нормальная подгруппа группы G, то H $\mathbb{P}$-субнормальна в HN.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Надо считать HN собственной подгруппой группы G. Пусть M – максимальная подгруппа группы G простого индекса, в которой H $\mathbb{P}$-субнормальна. Если $HN \leq M$, то по индукции H $\mathbb{P}$-субнормальна в HN. Пусть HN не содержится в M. Тогда N не содержится в M, $G = MN$ и $|G : M| =$

$= |N : (N \cap M)| \in \mathbb{P}$. По тождеству Дедекинда $H \leq HN \cap M = H(N \cap M) \leq HN$. Так как

$$|HN : H(N \cap M)| = \frac{|H||N||H \cap N \cap M|}{|H \cap N||H||N \cap M|} = |N : (N \cap M)| \in \mathbb{P},$$

то $|HN : H(N \cap M)| \in \mathbb{P}$. Применяя индукцию к группе M, в которой подгруппа $N \cap M$ нормальна, а подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна, заключаем, что подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна в $H(N \cap M)$. Значит, подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна в HN по лемме 3 (1). □

Лемма 5. *Если H – слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G и $N \lhd G$, то справедливы следующие утверждения:*

(1) *подгруппа HN слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G;*

(2) *подгруппа HN/N слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N;*

(3) *если $N \leq U \leq G$ и U/N – слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G/N, то U – слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G.*

Доказательство. Пусть $H = \langle H_1, H_2 \rangle$, где H_1 субнормальна в G, а H_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в G.

(1) Согласно лемме 2 (2) подгруппа H_1N субнормальна в G, а по лемме 3 (2) подгруппа H_2N $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Так как $HN = \langle H_1N, H_2N \rangle$, то подгруппа HN слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G.

(2) Ясно, что факторгруппа $HN/N = \langle H_1N/N, H_2N/N \rangle$. По лемме 2 (1) подгруппа H_1N/N субнормальна в G/N, а по лемме 3 (2) подгруппа H_2N/N $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N. Поэтому HN/N слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N.

(3) Пусть $N \leq U \leq G$ и U/N – слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G/N. Тогда $U/N = \langle U_1/N, U_2/N \rangle$, где U_1/N субнормальна в G/N, а U_2/N $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N. По лемме 2 (3) подгруппа U_1 субнормальна в G, а по лемме 3 (3) подгруппа U_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Так как $U = \langle U_1, U_2 \rangle$, то U – слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G. □

Лемма 6 [3, лемма 3.1]. (1) *Пусть $H \leq U \leq G$. Если H $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в U, а U $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в G, то H $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в G.*

(2) *Если H – $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G, а N – нормальная подгруппа группы G, то подгруппа HN $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в G.*

Лемма 7. *Каждая $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа разрешимой группы G является $\mathbb{P}$-субнормальной в G подгруппой.*

Доказательство. Пусть H – $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа разрешимой группы G. Согласно определению 3 существует цепочка подгрупп (1) такая, что либо H_i нормальна в H_{i+1}, либо $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}$ для каждого i. Если $H = G$ или $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}$ для каждого i, то H $\mathbb{P}$-субнормальна в G по определению 2. Пусть для некоторого i подгруппа H_i нормальна в H_{i+1}. Так как H_{i+1} разрешима, то используя ее композиционный ряд, можно построить цепочку подгрупп $H_i = V_0 < V_1 < \ldots < V_{m-1} < V_m = H_{i+1}$ такую, что $|V_{j+1} : V_j| \in \mathbb{P}$ для каждого j. Поступая так с каждой парой подгрупп $H_i \lhd H_{i+1}$, получим $\mathbb{P}$-субнормальность подгруппы H в группе G. □

Теорема 1. (1) *В группе каждая слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа является $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой.*

(2) *В разрешимой группе G для подгруппы H следующие утверждения эквивалентны:*

(2.1) *H – слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G;*

(2.2) *H – $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G;*

(2.3) *H – $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G.*

(3) *В разрешимой группе каждая слабо субнормальная подгруппа является $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой.*

Доказательство. (1) Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть $H = \langle H_1, H_2 \rangle$ – слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G и M – максимальная подгруппа группы G, содержащая H. Здесь H_1 субнормальна в G, H_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Согласно лемме 1 $M_{sG} = M_G$, поэтому $H_1 \leq M_G$ и $H = \langle H_1, H_2 \rangle \leq M_G H_2 \leq M < G$. Так как подгруппа H_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то $H_2 M_G$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G согласно лемме 3 (2). По лемме 4 подгруппа H_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в $H_2 M_G$. Поэтому подгруппа H слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в $H_2 M_G$. По индукции подгруппа H K$\mathbb{P}$-субнормальна в $H_2 M_G$. Таким образом, H K$\mathbb{P}$-sn $H_2 M_G$, а $H_2 M_G$ $\mathbb{P}$-sn G. Согласно лемме 6 (1), подгруппа H K$\mathbb{P}$-субнормальна в G.

(2) Если H – слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G, то согласно утверждению (1) подгруппа H K$\mathbb{P}$-субнормальна в группе G, поэтому из (2.1) вытекает (2.2). Если H – K$\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа разрешимой группы G, то согласно лемме 7 подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна в группе G, поэтому из (2.2) следует (2.3). Так как каждая $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа является слабо $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой, то (2.3) $\Rightarrow$ (2.1).

(3) Вначале проверим, что в разрешимой группе каждая полунормальная подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна. Пусть A – полунормальная подгруппа группы G. Согласно определению полунормальной подгруппы, см. определение 1, существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и A перестановочна с каждой подгруппой из B. Пусть

$$B = B_0 \leq B_1 \leq \ldots \leq B_{m-1} \leq B_m = B$$

– композиционный ряд группы B. Поскольку подгруппа B разрешима, то $|B_i : B_{i-1}| \in \mathbb{P}$ для каждого $i = 1, 2, \ldots m$. Так как подгруппа A перестановочна с каждой подгруппой B_i, то AB_i – подгруппа группы G и можно построить цепочку подгрупп

$$AB = AB_0 \leq AB_1 \leq \ldots \leq AB_{m-1} \leq AB_m = AB = G$$

такую, что

$$|AB_i : AB_{i-1}| = \frac{|A||B_i||A \cap B_{i-1}|}{|A \cap B_i||A||B_{i-1}|} = \frac{|B_i : B_{i-1}|}{|(A \cap B_i) : (A \cap B_{i-1})|}$$

делит $|B_i : B_{i-1}| \in \mathbb{P}$. Значит, A – $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G.

Пусть $H = \langle H_1, H_2 \rangle$ – слабо субнормальная подгруппа разрешимой группы G, подгруппа H_1 субнормальна в G, H_2 полунормальна в G. Согласно доказанному подгруппа H_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в G и $H = \langle H_1, H_2 \rangle$ будет слабо $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой группы G. По утверждению (2) подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна в G. □

Лемма 8. *Пусть в группе G существует холлова подгруппа H.*

(1) *Если H слабо субнормальна в G, то H полунормальна в G.*

(2) *Если H слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то H $\mathbb{P}$-субнормальна в G.*

Доказательство. Пусть H – π-холлова подгруппа группы G для некоторого $\pi \subseteq \pi(G)$. Если $H_1 \leq H$ и H_1 субнормальна в G, то H_1^G – π-группа согласно лемме 2 (4) и $H_1^G \leq H$.

(1) Если H слабо субнормальна в G, то $H = \langle H_1, H_2 \rangle$, где H_1 субнормальна в G, а H_2 полунормальна в G. Поскольку $H = H_1^G H_2$, то H полунормальна в G по лемме [7, лемма 1 (2)].

(2) Если H слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то $H = \langle H_1, H_2 \rangle$, где H_1 субнормальна в G, а H_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Поскольку $H = H_1^G H_2$, то H $\mathbb{P}$-субнормальна в G по лемме 3 (2). □

Заметим, что K$\mathbb{P}$-субнормальная холлова подгруппа (в частности, силовская подгруппа) может быть не $\mathbb{P}$-субнормальной. Например, в группе $G = C_7 \times A_6$ силовская 7-подгруппа C_7 нормальна, а значит, и K$\mathbb{P}$-субнормальна, но не $\mathbb{P}$-субнормальна.

Лемма 9. *Пусть R – r-подгруппа группы G. Предположим, что R K$\mathbb{P}$-субнормальна в G. Если $r = \max \pi(G)$, то R субнормальна в G.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. В силу леммы 2 (4) субнормальность r-подгруппы R равносильна тому, что $R \leq O_r(G)$. Ясно, что $R < G$.

Согласно определению 3, существует цепочка подгрупп

$$R = H_0 < H_1 < \ldots < H_{n-1} = K < H_n = G$$

такая, что либо подгруппа H_i нормальна в H_{i+1}, либо $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}$ для каждого i. Так как R – r-подгруппа в K и R K$\mathbb{P}$-субнормальна в $K < G$, то R субнормальна в K по индукции и $R \leq O_r(K)$. Если K нормальна в G, то $O_r(K)$ субнормальна в G, поэтому

$$R \leq O_r(K) \leq O_r(G),$$

что и требовалось доказать. Пусть K не нормальна в G. Тогда $|G : K| = t \in \mathbb{P}$ и $t \leq r = \max \pi(G)$. Если $t = r$ и G_r – силовская r-подгруппа группы G, содержащая $O_r(K)$, то

$$G = KG_r,\ O_r(K)^G = O_r(K)^{KG_r} = O_r(K)^{G_r} \leq G_r.$$

Поэтому $R \leq O_r(K) \leq O_r(G)$, что и требовалось доказать. Пусть $t < r$. Тогда факторгруппа G/K_G изоморфна подгруппе симметрической группы степени t, поэтому G/K_G является r'-группой и силовская r-подгруппа группы G содержится в K_G. Значит, $R \leq O_r(K) \leq K_G \triangleleft G$ и опять R субнормальна в G. □

2. Группы со слабо $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами.

Теорема 2. *Пусть R – силовская r-подгруппа группы G. Предположим, что R слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $r > 2$, то G r-разрешима;*

(2) *если в группе G силовская 3-подгруппа и силовская 5-подгруппа слабо $\mathbb{P}$-субнормальны в G, то G разрешима;*

(3) *если $r = \max \pi(G)$, то R нормальна в G;*

(4) *если G – простая группа, то $r = 2$ и*

$$G \in \mathfrak{X} = \{PSL(2,7), PSL(2,11), SL(3,5), SL(2,2^n), 2^n + 1 = p \in \mathbb{P}\}.$$

Доказательство. (1) Пусть R – силовская r-подгруппа, слабо $\mathbb{P}$-субнормальная в G. Тогда $R = \langle R_1, R_2 \rangle$, где R_1 субнормальна в G, R_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Заметим, что $R_1 \leq O_r(G) \leq R$ по лемме 2 (4), поэтому $R = \langle R_1, R_2 \rangle \leq O_r(G)R_2 = R$. По лемме 3 (2) подгруппа $R = O_r(G)R_2$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Согласно [8, теорема 2.1] группа G r-разрешима.

(2) Пусть в группе G силовская 3-подгруппа и силовская 5-подгруппа слабо $\mathbb{P}$-субнормальны. Тогда по (1) группа G 3-разрешима и 5-разрешима. Значит, имеется нормальный ряд, факторы которого являются 3-группами, 5-группами или $\{3,5\}'$-группами. Так как $\{3,5\}'$-группы разрешимы [9], то группа G разрешима.

(3) По теореме 1 (1) подгруппа R K$\mathbb{P}$-субнормальна в G, а по лемме 9 подгруппа R нормальна в G.

(4) Пусть R – силовская r-подгруппа, слабо $\mathbb{P}$-субнормальная в G, и группа G простая. Тогда $R = \langle R_1, R_2 \rangle$, где R_1 субнормальна в G, а R_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Так как G простая, то $O_p(G) = 1$ и $R_1 \leq O_p(G) = 1$, поэтому $R = R_2$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Согласно [8, Следствие 2.1.2] $r = 2$ и $G \in \mathfrak{X}$. □

Напомним, что группу, у которой все силовские подгруппы циклические, называют z-группой.

Следствие 1. *Группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда выполняется любое одно из следующих условий:*

(1) *нормализатор каждой силовской подгруппы слабо $\mathbb{P}$-субнормален в группе;*

(2) *каждая холлова подгруппа слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в группе;*

(3) *каждая примарная подгруппа и каждая бипримарная нециклическая z-подгруппа слабо $\mathbb{P}$-субнормальна.*

Доказательство. Согласно [6, лемма 1.1 (2)] в сверхразрешимой группе каждая подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна. Поэтому проверяем только обратные утверждения.

(1) Пусть в группе G нормализатор каждой силовской подгруппы слабо $\mathbb{P}$-субнормален. Согласно теореме 1 (1) нормализатор каждой силовской подгруппы будет $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой. Поскольку каждая подгруппа, содержащая нормализатор силовской подгруппы, самонормализуема [1, лемма 1.67], то нормализатор каждой силовской подгруппы будет $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой. Согласно [10, теорема 4.1.29 (1)] группа G сверхразрешима.

(2) Пусть все холловы подгруппы в группе G слабо $\mathbb{P}$-субнормальны. В частности, все силовские подгруппы будут слабо $\mathbb{P}$-субнормальными в G. По теореме 2 (2) группа G разрешима. Согласно лемме 8 (2) каждая холлова подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна в G и группа G сверхразрешима согласно [10, теорема 4.1.29 (2)].

(3) Пусть каждая примарная подгруппа и каждая бипримарная нециклическая z-подгруппа слабо $\mathbb{P}$-субнормальны. Поскольку в группе G все силовские подгруппы слабо $\mathbb{P}$-субнормальны, то по теореме 2 (2) группа G разрешима. Согласно теореме 1 (2) каждая примарная подгруппа и каждая бипримарная нециклическая z-подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальны. По теореме [10, теорема 4.1.29 (3)] группа G сверхразрешима. □

3. Произведение слабо $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп. Зафиксируем простое число $r \in \pi(G)$. Если группа G содержит нормальную силовскую r-подгруппу, то G называют r-замкнутой. Если группа G содержит нормальную r'-холлову подгруппу, то G называют r-нильпотентной. Группа называется r-разрешимой, если она обладает нормальным рядом, факторы которого являются либо r-группой, либо r'-группой.

Группа G порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ $(p_i \in \mathbb{P},\ i = 1, \ldots, n)$ называется *дисперсивной по Оре*, если $p_1 > p_2 > \ldots > p_n$ и G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_i}$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$.

Группа, в которой все силовские (все примарные циклические) подгруппы $\mathbb{P}$-субнормальны, называется w-сверхразрешимой группой (v-сверхразрешимой группой соответственно). Группа, в которой все подгруппы Шмидта сверхразрешимы, называется sh-сверхразрешимой группой. Каждая w-сверхразрешимая группа является v-сверхразрешимой, а каждая v-сверхразрешимая группа является sh-сверхразрешимой [11]. Закрепим также обозначение $\mathscr{A}$ за формацией всех групп с абелевыми силовскими подгруппами, а $G^{\mathscr{A}}$ – пересечение всех нормальных подгрупп группы G, факторгруппы по которым принадлежат $\mathscr{A}$.

Нам потребуются следующие утверждения.

Лемма 10. *Пусть группа $G = AB$ – произведение слабо $\mathbb{P}$-субнормальных в G подгрупп A и B. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если подгруппы A и B разрешимы, то группа G разрешима;*

(2) *если A и B дисперсивны по Оре, то G дисперсивна по Оре;*

(3) *если A и B –* w*-сверхразрешимы, то группа G* w*-сверхразрешима в каждом из следующих случаев:*

(3.1) *индексы подгрупп A и B в группе G взаимно просты;*

(3.2) *$\mathscr{A}$-корадикал $G^{\mathscr{A}}$ группы G нильпотентен.*

Доказательство. Согласно теореме 1 (1) подгруппы A и B $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальны в группе G. Для $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальных сомножителей A и B все утверждения доказаны в работе [3, 5.2–5.5]. □

Теорема 3. *Пусть группа $G = AB$ – произведение слабо $\mathbb{P}$-субнормальных в G подгрупп A и B. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если A и B r-разрешимы, то G r-разрешима;*

(2) *если A и B r-нильпотентны и $r = \min \pi(G)$, то G r-нильпотентна;*

(3) *если подгруппы A и B r-замкнуты и $r = \max \pi(G)$, то G r-замкнута;*

(4) *если A и B – v-сверхразрешимы и индексы подгрупп $AF(G)$ и $BF(G)$ в группе G взаимно просты, то группа G v-сверхразрешима;*

(5) *если A и B – v-сверхразрешимы и $\mathscr{A}$-корадикал $G^{\mathscr{A}}$ группы G нильпотентен, то группа G w-сверхразрешима;*

(6) *если A и B sh-сверхразрешимы, то G sh-сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть $A = \langle A_1, A_2 \rangle$, $B = \langle B_1, B_2 \rangle$, где A_1 и B_1 субнормальны в G, а A_2 и B_2 $\mathbb{P}$-субнормальны в G.

(1) Подгруппы A_1^G и B_1^G нормальны в группе G и r-разрешимы по лемме 2 (5). Подгруппа $N = A_1^G B_1^G$ r-разрешима и нормальна в G. Факторгруппа $G/N = (A_2N/N)(B_2N/N)$, где A_2N/N и B_2N/N – $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы в G/N по лемме 3 (2). Согласно [12, теорема 1 (1)] факторгруппа G/N r-разрешима. Поэтому группа G r-разрешима.

(2) Согласно утверждению (1) группа G r-разрешима. Из минимальности $r \in \pi(G)$ получаем, что группа G разрешима. По теореме 1 (2) подгруппы A и B $\mathbb{P}$-субнормальны в G. Согласно [12, теорема 1 (2)] группа G r-нильпотентна.

(3) Согласно теореме 1 (1) подгруппа A $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в группе G. Пусть R_1 – силовская r-подгруппа в A. По условию R_1 нормальна в A, в частности, подгруппа R_1 $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в A. Ввиду леммы 6 (1) подгруппа R_1 $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в группе G. По условию $r = \max \pi(G)$, а по лемме 9 подгруппа $R_1 \leq O_r(G)$. Аналогично, $R_2 \leq O_r(G)$, где R_2 – силовская r-подгруппа в B. Согласно [13, VI.4.6] произведение R_1R_2 – силовская r-подгруппа в G, поэтому $R_1R_2 \leq O_r(G)$ и группа G r-замкнута.

(4) Каждая v-сверхразрешимая группа дисперсивна по Оре [6, лемма 2.4]. Согласно теореме 1 (1) подгруппы A и B $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальны в группе G. По лемме 10 (2) группа G дисперсивна по Оре, в частности, группа G разрешима. Теперь подгруппы A и B $\mathbb{P}$-субнормальны в группе G по теореме 1 (2) и группа G становится v-сверхразрешимой согласно [14, теорема 2].

(5) Согласно [11, теорема 3 (2)] каждая v-сверхразрешимая группа с нильпотентным $\mathscr{A}$-корадикалом $G^{\mathscr{A}}$ является w-сверхразрешимой. Остается применить лемму 10 (3.2).

(6) Каждая sh-сверхразрешимая группа дисперсивна по Оре [14, лемма 6 (2.2)]. Согласно теореме 1 (1) подгруппы A и B $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальны в группе G. По лемме 10 (2) группа G дисперсивна по Оре, в частности, группа G разрешима. Теперь подгруппы A и B $\mathbb{P}$-субнормальны в группе G по теореме 1 (2) и группа G становится sh-сверхразрешимой согласно [14, теорема 1]. □

Непосредственно из теоремы 3 (4), (5) вытекает

Следствие 2. *Пусть A и B – v-сверхразрешимые слабо $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы группы $G = AB$. Тогда группа G v-сверхразрешима в каждом из следующих случаев:*

(1) *индексы подгрупп A и B в группе G взаимно просты;*

(2) *коммутант группы G нильпотентен.*

С учетом [14, следствие 2.2] из теоремы 3 (5) вытекает

Следствие 3. *Если A и B – v-сверхразрешимые слабо $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы группы $G = AB$, то $G^{\mathrm{v}\mathfrak{U}} \leq G^{\mathfrak{N}\mathscr{A}}$.*

Следствие 4. *Пусть A – v-сверхразрешимая слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G и $G = AB$. Тогда группы G v-сверхрзрешима в каждом из следующих случаев:*

(1) *подгруппа B нильпотентна и нормальна в G;*

(2) *подгруппа B нильпотентна и $|G : B|$ – простое число.*

Доказательство. Пусть A – v-сверхразрешимая слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G. По теореме 1 (1) подгруппа A $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в G и дисперсивна по Оре согласно [6, лемма 2.4].

(1) Пусть подгруппа B нильпотентна и нормальна в G. Тогда факторгруппа G/B разрешима, а значит, G разрешима.

(2) Пусть B нильпотентна и $|G:B|$ – простое число. Тогда по определению 2 подгруппа B $\mathbb{P}$-субнормальна в G, в частности, B $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в G. Поэтому группа G дисперсивна по Оре по лемме 10 (2), в частности, группа G разрешима. Следовательно, подгруппа A $\mathbb{P}$-субнормальна в G по теореме 1 (2) и утверждения (1) и (2) справедливы в силу [14, лемма 9]. □

4. Группы со слабо $\mathbb{P}$-субнормальными B-подгруппами. Ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта. Я. Г. Беркович предложил [15] называть B-группой группу, у которой факторгруппа по подгруппе Фраттини является группой Шмидта. B-группы называют также обобщенными группами Шмидта. Следуя [16], группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной силовской q-подгруппой будем называть $S_{\langle p,q\rangle}$-группой. B-группу, у которой $B/\Phi(B)$ является $S_{\langle p,q\rangle}$-группой, будем называть $B_{\langle p,q\rangle}$-группой.

Лемма 11 [8, лемма 1.6]. *Пусть U – нормальная в группе V подгруппа и V/U является $B_{\langle p,q\rangle}$-группой. Если H – наименьшая в V подгруппа такая, что $HU = V$, то H будет $B_{\langle p,q\rangle}$-группой.*

Лемма 12. *Пусть в группе G все B-подгруппы слабо $\mathbb{P}$ -субнормальны и N – нормальная подгруппа группы G. Тогда в факторгруппе G/N все B-подгруппы слабо $\mathbb{P}$-субнормальны.*

Доказательство. Пусть K/N – $B_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из G/N. По лемме 11 в K существует $B_{\langle p,q\rangle}$-группа L такая, что $K = LN$. По условию подгруппа L слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Из леммы 5 (2) следует, что K/N слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N. □

Лемма 13 [17, лемма 4]. *Если группа G не p-нильпотентна, то в G существует подгруппа Шмидта с неединичной нормальной силовской p-подгруппой.*

Лемма 14 [8, лемма 1.8 (1)]. *Если в группе G нет $B_{\langle p,q\rangle}$-подгрупп для всех $q \in \pi(G)$, то группа G p-нильпотентна.*

Теорема 4. (1) *Если в группе G все B-подгруппы слабо $\mathbb{P}$-субнормальны, то G метанильпотентна.*

(2) *Пусть p – наибольший простой делитель порядка группы G. Если в группе G каждая $B_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа слабо $\mathbb{P}$-субнормальна для всех $q \in \pi(G)$, то факторгруппа $G/O_p(G)$ p-нильпотентна; в частности, группа G p-разрешима.*

Доказательство. (1) В силу леммы 12 условия теоремы наследуют все факторгруппы группы G. Будем использовать индукцию по порядку группы. Зафиксируем $p = \max \pi(G)$.

Пусть G не p-нильпотентна. Тогда в группе G существует $S = [P]Q$ – подгруппа Шмидта, которая p-замкнута по лемме 14. По условию S слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G, а по теореме 1 (1) подгруппа S $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в G. Подгруппа P – нормальная силовская p-подгруппа в S, в частности, подгруппа P $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в S. По лемме 6 (1) подгруппа P $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в группе G. По лемме 9 $P \le O_p(G)$. По индукции факторгруппа $G/O_p(G)$ метанильпотентна, в частности, разрешима, значит, G разрешима.

Пусть теперь G p-нильпотентна. Тогда $G = [G_{p'}]G_p$, где $G_{p'}$ – нормальная p'-холлова подгруппа. Пусть H – B-подгруппа в $G_{p'}$. По условию $H = \langle H_1, H_2\rangle$ слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G, где H_1 субнормальна в G, H_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Так как $H \le G_{p'}$, то $H_1 \lhd\lhd G_{p'}$. По лемме 3 (4) подгруппа H_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в $G_{p'}$ и H слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в $G_{p'}$. По индукции $G_{p'}$ метанильпотентна, в частности, разрешима, поэтому факторгруппа $G/G_{p'}$ разрешима и группа G разрешима.

Значит, группа G разрешима и по теореме 1 (2) каждая B-подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна. Согласно [8, теорема 3.1] группа G метанильпотентна.

(2) Если в группе G нет $B_{\langle p,q\rangle}$-подгрупп для всех $q \in \pi(G)$, то по лемме 14 группа G p-нильпотентна и утверждение справедливо. Тогда следует считать, что в группе G есть $B_{\langle p,q\rangle}$-подгруппы. Пусть $p = \max \pi(G)$ и каждая $B_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа слабо $\mathbb{P}$-субнормальна для любого $q \in \pi(G)$. Пусть $H = [H_p]H_q$ – $B_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа в G, где H_p – нормальная силовская p-подгруппа в H и H_q – циклическая силовская q-подгруппа в H. В частности, H_p $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в H. По условию подгруппа H слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G, по теореме 1 (1) H $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в G. По лемме 6 (1) H_p $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в G. Из максимальности p и леммы 9 получаем, что $H_p \leq O_p(G)$. Следовательно, группа G непростая и $O_p(G) \neq 1$.

Рассмотрим факторгруппу $\overline{G} = G/O_p(G)$. Пусть $\overline{G}$ не p-нильпотентна, тогда по лемме 14 в $\overline{G}$ существует $B_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа $\overline{A} = A/O_p(G)$, которая p-замкнута. Согласно лемме 11 подгруппа $A = TO_p(G)$, где $T = [T_p]T_q$ – $B_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из A. Подгруппа T_p нормальна в T, в частности, $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в T. По условию T слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G, а по теореме 1 (1) подгруппа T $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в G. По лемме 6 (1) подгруппа T_p $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в G. Тогда из максимальности p и леммы 9 получаем, что $T_p \leq O_p(G)$ и подгруппа $\overline{A}$ – q-подгруппа. Получили противоречие с выбором группы $\overline{G}$. Следовательно, $G/O_p(G)$ p-нильпотентна, в частности, группа G p-разрешима. □

Следующий пример показывает, что метанильпотентность группы в теореме 4 (1) нельзя ослабить до нильпотентности коммутанта.

Пример. У группы $G = S_3 \wr C_2$ ([18, SmallGroup(72,40)]) коммутант $G' \cong [C_3]S_3$ ненильпотентен. Поскольку любая максимальная в G подгруппа непростого индекса изоморфна силовской 2-подгруппе, то каждая B-подгруппа группы G будет $\mathbb{P}$-субнормальной в G подгруппой.

Литература

1. *Монахов В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйш. шк., 2006.

2. *Хуан Ц., Ху Б., Скиба А. Н.* Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 1. С. 210–220.

3. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальных подгруппах конечной группы // Математические заметки. 2014. Т. 95, № 4. С. 517–528.

4. *Nyhoff L. R.* The influence on a finite group of the cofactors and subcofactors of its subgroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 154. P. 459–491.

5. *Lennox J. C., Stonehewer S. E.* Subnormal subgroups of groups. Oxford: Clarendon Press., 1987.

6. *Монахов В. С.* Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 447–462.

7. *Монахов В. С.* Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой // Математические заметки. 2006. Т. 80, № 4. С. 373–381.

8. *Монахов В. С., Княгина В. Н.* Конечные группы с $\mathbb{P}$-субнормальной силовской подгруппой // Укр. мат. журн. 2021. Т. 72, № 10. С. 1571–1578.

9. *Gorenstein D.* Finite simple groups. An introduction to their classification. New York: Plenum Press., 1982.

10. *Трофимук А. А.* Конечные факторизуемые группы с органичениями на сомножители. Минск: Изд. центр БГУ, 2021.

11. *Монахов В. С.* О трех формациях над $\mathfrak{U}$ // Мат. заметки. 2021. Т. 110, № 3. С. 358–367.

12. *Monakhov V., Kniahina V.* Finite factorised groups with partially solvable $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Lobachevskii J. Math. 2015. Vol. 36, N 4. P. 441–445.

13. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1967.
14. *Монахов В. С.* Конечные факторизуемые группы с $\mathbb{P}$-субнормальными v-сверхразрешимыми и sh-сверхразрешимыми сомножителями // Математические заметки. 2022. Т. 111, № 3. С. 403–410.
15. *Berkovich Y. G., Janko Z.* Groups of Prime Power Order. I. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2011.
16. *Монахов В. С.* Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Укр. мат. конгресс / Ин-т математики НАН Украины. Киев, 2002. С. 81–90.
17. *Монахов В. С., Трофимук А. А.* О конечных разрешимых группах фиксированного ранга // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 1123–1137.
18. *«The GAP Group: GAP – Groups, Algorithms, and Programming»*, Ver. 4.11.1 released on 02-03-2021 [Electronic resourse]. – Mode of access: http://www.gap-system.org.

S. I. Lendziankova
On weakly $\mathbb{P}$-subnormal subgroups of finite groups

Summary

A subgroup H of a finite group G is called a *weakly $\mathbb{P}$-subnormal subgroup* if H is generated by two subgroups, one of which is subnormal in G, and the other one can be connected to G by a subgroup chain with prime indexes. We establish the properties of weakly $\mathbb{P}$-subnormal subgroups and one makes possible to extend the known results on finite groups with sets of $\mathbb{P}$-subnormal subgroups to finite groups with weakly $\mathbb{P}$-subnormal subgroups. In particular, we prove that a finite group with weakly $\mathbb{P}$-subnormal normalizers of Sylow subgroups is supersolvable and a group with weakly $\mathbb{P}$-subnormal B-subgroups is metanilpotent.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 2. С. 44–56

УДК 512.542

ОТДЕЛИМОСТЬ РЕШЕТКИ τ-ЗАМКНУТЫХ ТОТАЛЬНО ω-КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

И. П. Лось, В. Г. Сафонов

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: innalos.los1@gmail.com, vgsafonov@im.bas-net.by
Поступила 22.12.2023

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс конечных групп. Полную решетку формаций θ называют $\mathfrak{X}$-отделимой, если для любого терма $\eta(x_1,\ldots,x_n)$ сигнатуры $\{\cap,\vee_\theta\}$, любых θ-формаций $\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n$ и любой группы $A\in\mathfrak{X}\cap\eta(\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1\in\mathfrak{F}_1,\ldots,A_n\in\mathfrak{F}_n$, что $A\in\eta(\theta\mathrm{form}(A_1),\ldots,\theta\mathrm{form}(A_n))$. Доказано, что решетка всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций $\mathfrak{G}$-отделима, где τ – подгрупповой функтор в смысле А. Н. Скибы, $\mathfrak{G}$ – класс всех конечных групп.

Введение. Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. Мы придерживаемся терминологии и обозначений, принятых в [1–3].

Пусть ω – некоторое непустое подмножество множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, $\omega'=\mathbb{P}\setminus\omega$. Всякую функцию вида $f:\omega\cup\{\omega'\}\to\{$формации групп$\}$ называют ω-*композиционным спутником* [3]. Для произвольного ω-композиционного спутника f полагают

$$CF_\omega(f)=(G\mid G/R_\omega(G)\in f(\omega')\text{ и } G/C^p(G)\in f(p)\text{ для всех } p\in\pi(Com(G))\cap\omega),$$

где $Com(G)$ обозначает множество всех композиционных абелевых факторов группы G; $R_\omega(G)$ – наибольшая нормальная разрешимая ω-подгруппа группы G; $C^p(G)$ – пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, у которых композиционные факторы имеют порядок p (если таких факторов у группы G нет, то полагают $C^p(G)=G$).

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F}=CF_\omega(f)$ для некоторого ω-композиционного спутника f, то $\mathfrak{F}$ называют ω-*композиционной*, а f – ω-*композиционным спутником* $\mathfrak{F}$.

Всякую формацию считают 0-*кратно* ω-*композиционной.* При $n\geq 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют n-*кратно* ω-*композиционной*, если $\mathfrak{F}=CF_\omega(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно ω-композиционными формациями. Формация $\mathfrak{F}$ называется *тотально* ω-*композиционной,* если она является n-кратно ω-композиционной для всякого целого неотрицательного n.

Формации такого вида введены А. Н. Скибой и Л. А. Шеметковым в работе [3], где были установлены их основные свойства, доказана алгебраичность и модулярность решетки всех n-кратно ω-композиционных формаций, а также поставлено более двух десятков открытых вопросов, определивших перспективные направления исследований в теории частично композиционных формаций. Полученные за последующие десять лет результаты в этом направлении нашли свое отражение в монографиях [4; 5].

В различных приложениях теории классов групп часто возникает необходимость рассматривать классы групп, замкнутые относительно некоторых систем своих подгрупп, согласованных с гомоморфизмами. В связи с этим А. Н. Скибой [2] были введены в рассмотрение понятия подгруппового функтора τ и τ-замкнутого класса групп, в частности, τ-замкнутой формации.

Подгрупповым функтором [2] называют отображение τ, сопоставляющее каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что: 1) $G\in\tau(G)$; 2) для любых групп $H\in\tau(A)$

и $T \in \tau(B)$ и любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называют τ-*замкнутым*, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$.

В данной работе мы изучаем некоторые решеточные свойства τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций, связанные с однопорожденными τ-замкнутыми тотально ω-композиционными формациями (т. е. порожденными одной единственной группой) и устанавливаем отделимость решетки $c^{\tau}_{\omega_{\infty}}$ всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций в смысле следующего определения.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс групп. Полную решетку формаций θ называют $\mathfrak{X}$-*отделимой* [2], если для любого терма $\eta(x_1,\ldots,x_n)$ сигнатуры $\{\cap, \vee_{\theta}\}$, любых θ-формаций $\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n$ и любой группы $A \in \mathfrak{X} \cap \eta(\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1,\ldots,$ $A_n \in \mathfrak{F}_n$, что $A \in \eta(\theta\mathrm{form}(A_1),\ldots,\theta\mathrm{form}(A_n))$.

А. Н. Скибой [2, с. 159] доказано, что для любого подгруппового функтора τ решетка l^{τ}_{n} всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой, а решетка разрешимых тотально насыщенных формаций $\mathfrak{S}$-отделима, где $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп. $\mathfrak{G}$-отделимость решетки l^{τ}_{∞} всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций доказана В. Г. Сафоновым [6]. В совместной работе Л. А. Шеметкова, А. Н. Скибы и Н. Н. Воробьева [7] установлена $\mathfrak{G}$-отделимость решетки $l^{\tau}_{\omega_n}$ всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций. В. Г. Сафонов и И. Н. Сафонова [8] доказали $\mathfrak{G}$-отделимость решетки $l^{\tau}_{\omega_{\infty}}$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций.

В данной статье мы докажем, что для любого подгруппового функтора τ решетка $c^{\tau}_{\omega_{\infty}}$ всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой.

Необходимо отметить, что тотально ω-композиционные формации, их решетки и полугруппы до настоящего времени остаются достаточно слабо изученными. Вместе с тем накопленный за последние годы идейный и технический материал позволил несколько активизировать исследования в данном направлении (см., например, работы А. А. Царева [9; 10]), а также работы авторов [11–13] и В. В. Щербины [14; 15]).

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение:

Теорема А. *Решетка $c^{\tau}_{\omega_{\infty}}$ всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой.*

В разделе 3 мы докажем теорему А, а также приведем некоторые следствия данного результата.

1. Определения и обозначения. Напомним некоторые понятия и обозначения, используемые в работе.

Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $c^{\tau}_{\omega_{\infty}}\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ обозначают пересечение всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций (или, другими словами, $c^{\tau}_{\omega_{\infty}}$-формаций), содержащих $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутые тотально ω-композиционные формации, то через $\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_{\infty}} \mathfrak{H}$ обозначают пересечение всех тотально ω-композиционных формаций, содержащих $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}$, т. е. $\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_{\infty}} \mathfrak{H} = c^{\tau}_{\omega_{\infty}}\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$.

Относительно операций $\vee^{\tau}_{\omega_{\infty}}$ и $\cap$ множество $c^{\tau}_{\omega_{\infty}}$ всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций, частично упорядоченное по включению, образует полную решетку формаций, в которой для любого подмножества $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\} \subseteq c^{\tau}_{\omega_{\infty}}$ пересечение $\cap_{j \in J}\mathfrak{F}_j$ является наибольшей нижней границей и $c^{\tau}_{\omega_{\infty}}\mathrm{form}\left(\mathfrak{F}_j \mid j \in J\right)$ является наименьшей верхней границей множества $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ в $c^{\tau}_{\omega_{\infty}}$.

Пусть f – ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда если все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то спутник f называют *внутренним* (или *приведенным*). Спутник f называют $c^{\tau}_{\omega_{\infty}}$-*значным,* если все его значения принадлежат $c^{\tau}_{\omega_{\infty}}$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – набор всех ω-композиционных $c^{\tau}_{\omega_{\infty}}$-значных спутников формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\bigcap_{i \in I} f_i$ – ω-композиционный c^{ω}_{∞}-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, который называют *минимальным* ω-*композиционным* c^{ω}_{∞}-*значным спутником* формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ – некоторый набор ω-композиционных $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-значных спутников. Тогда ω-композиционный $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-значный спутник $f = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(f_j \mid j \in J)$ определяют следующим образом:

$$f(a) = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(f_j \mid j \in J)(a) = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(f_j(a) \mid j \in J) = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\,(\cup_{j\in J} f_j(a))$$

для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. В частности,

$$f(a) = (f_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} f_2)(a) = f_1(a) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} f_2(a) = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\,(f_1(a) \cup f_2(a)).$$

Полную решетку формаций θ называют индуктивной [2], если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i \in \theta^{\omega}$ и для всякого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ внутренних ω-композиционных θ-значных спутников, где f_i – ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, имеет место

$$\vee_{\theta^{\omega}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = CF_{\omega}(\vee_{\theta}(f_i \mid i \in I)).$$

Для всякого класса групп $\mathfrak{F}$ и всякого простого числа $p \in \omega$ полагают

$$\mathfrak{F}(C^p) = \begin{cases} (G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}), & \text{если } p \in \pi(Com(\mathfrak{F})), \\ \varnothing, & \text{если } p \notin \pi(Com(\mathfrak{F})). \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация групп. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначают пересечение всех нормальных подгрупп K группы G с $G/K \in \mathfrak{F}$ и называют $\mathfrak{F}$-*корадикалом* группы G. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – формации, то гашюцово произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ определяется следующим образом: $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}$.

2. Вспомогательные результаты. Нам понадобятся некоторые известные факты теории формаций, которые мы сформулируем в виде следующих лемм.

Лемма 2.1 [3, лемма 2]. *Пусть* $\mathfrak{F} = \cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, *где* $\mathfrak{F}_i = CF_{\omega}(f_i)$. *Тогда* $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$, *где* $f = \cap_{i\in I} f_i$.

Лемма 2.2 [14, теорема 2.2]. *Решетка* $c^{\tau}_{\omega_\infty}$ *всех* τ*-замкнутых тотально* ω*-композиционных формаций индуктивна.*

Лемма 2.3 [16]. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *– непустая наследственная формация,* $\mathfrak{F}$ *– непустая* τ*-замкнутая формация. Тогда* $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ *–* τ*-замкнутая формация.*

Лемма 2.4 [14, лемма 2.8; 3, лемма 5]. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– непустая совокупность групп,* $\mathfrak{F} = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(\mathfrak{X})$, *и* f *– минимальный* ω*-композиционный* $c^{\tau}_{\omega_\infty}$*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}$, *и пусть* $\pi = \omega \cap \pi(Com(\mathfrak{X}))$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(G/R_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $p \in \pi$;

3) $f(p) = \varnothing$ *для всех* $p \in \omega \backslash \pi$;

4) *если* $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(h)$, *спутник* h $c^{\tau}_{\omega_\infty}$*-значен, то для всех* $p \in \pi$ *имеет место*

$$f(p) = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F},\ O_p(G) = 1)$$

и

$$f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(G \mid G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_{\omega}(G) = 1);$$

5) $\pi(Com(\mathfrak{X})) \cap \omega = \pi(Com(\mathfrak{F})) \cap \omega$.

Лемма 2.5 [3, теорема 6]. *Пусть формация* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, *где* $\mathfrak{H} = CF_{\omega}(h)$, $\mathfrak{M} = CF_{\omega}(m)$ *и спутники* h *и* m *являются внутренними. Тогда если* $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$, *то формация* $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$, *где* $f(\omega') = \mathfrak{F}$ *и для всех* $p \in \omega$ *имеет место*

$$f(p) = \begin{cases} m(p)\mathfrak{H}, & \textit{если } m(p) \neq \varnothing, \\ f(p) = h(p), & \textit{если } m(p) = \varnothing. \end{cases}$$

Лемма 2.6 [17, гл. IV; 18, предложение 2.2.11]. *Пусть* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ *и* $\mathfrak{M}$ *– формации. Тогда:*

1) $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$, *если* $\mathfrak{F} \neq \varnothing$;

2) $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ *является формацией;*

3) $G^{\mathfrak{F}\mathfrak{H}} = (G^{\mathfrak{H}})^{\mathfrak{F}}$ *для всех* $G \in \mathfrak{G}$;

4) $(\mathfrak{F}\mathfrak{H})\mathfrak{M} = \mathfrak{F}(\mathfrak{H}\mathfrak{M})$.

Лемма 2.7 [3, лемма 4]. *Если* $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ *и* $G/O_p(G) \in \mathfrak{F}\bigcap f(p)$ *для некоторого* $p \in \omega$, *то* $G \in \mathfrak{F}$.

Лемма 2.8 [14, лемма 3.1]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая* τ*-замкнутая формация,* π *– такое множество простых чисел, что* $\pi(Com(\mathfrak{F})) \cap \omega \subseteq \pi$. *Тогда формация* $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$ *является* τ*-замкнутой тотально* ω*-композиционной формацией.*

Следующая лемма является частным случаем теоремы 4.1.16 [2].

Лемма 2.9 [2]. *Решетка всех* τ*-замкнутых формаций* $\mathfrak{G}$*-отделима.*

Напомним, что формацию $\mathfrak{F}$ называют [19; 20]:

1) ω*-разрешимо насыщенной*, если из условия $G/N \in \mathfrak{F}$ для нормальной в G подгруппы N из $\Phi(R_\omega(G))$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$;

2) $\mathfrak{N}_\omega$*-насыщенной*, если для любого $p \in \omega$ из того, что $G/\Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Для всякого простого числа p через Z_p обозначают группу порядка p.

Лемма 2.10 [20, теорема 4.5]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая формация,* ω *– непустое множество простых чисел. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *формация* $\mathfrak{F}$ *является* $\mathfrak{N}_\omega$*-насыщенной;*

2) *формация* $\mathfrak{F}$ ω*-разрешимо насыщенна;*

3) $c\mathrm{form}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{N}_{\omega'}\mathfrak{F}$;

4) $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, *где* f *–* ω*-композиционный спутник, удовлетворяющий следующим условиям:*

а) $f(p) = \mathrm{Q}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F})$, *если* $p \in \omega$ *и* $Z_p \in Com(\mathfrak{F})$;

б) $f(p) = \varnothing$;

в) $f(S) = \mathfrak{F}$, *если* $S \in \mathfrak{J} \setminus \{Z_p \mid p \in \omega\}$, *где* $\mathfrak{J}$ *– класс всех простых групп.*

Лемма 2.11 [2, с. 152]. *Пусть* $N_1 \times \ldots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \ldots \times N_k = \mathrm{Soc}(G)$, *где* $k > 1$ *и* G *– группа с* $O_p(G) = 1$. *Пусть* M_i *– наибольшая нормальная в* G *группа, содержащая* $N_1 \times \ldots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \ldots \times N_k$, *но не содержащая* N_i. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *для любого* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *факторгруппа* G/M_i *монолитична и ее монолит* N_iM_i/M_i G*-изоморфен* N_i *и* $O_p(G/M_i) = 1$;

2) $M_1 \cap \ldots \cap M_k = 1$.

3. Доказательство теоремы А. Вначале установим справедливость следующих вспомогательных утверждений.

Лемма 3.1. *Пусть* $\eta(x_1, \ldots, x_n)$ *– терм сигнатуры* $\{\cap, \vee^\tau_{\omega_\infty}\}$, f_i *– внутренний* ω*-композиционный* $c^\tau_{\omega_\infty}$*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, \ldots, n$. *Тогда*

$$\eta(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n) = CF_\omega(\eta(f_1, \ldots, f_n)),$$

где $\eta(f_1, \ldots, f_n)$ *– внутренний* ω*-композиционный* $c^\tau_{\omega_\infty}$*-значный спутник* $\eta(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)$.

Доказательство. Проведем индукцию по числу t вхождений в терм η символов из $\{\cap, \vee^\tau_{\omega_\infty}\}$. В случае, когда $t = 1$ утверждение леммы вытекает из лемм 2.1 и 2.2.

Пусть $t > 1$ и предположим, что утверждение леммы верно для термов с меньшим числом вхождений символов из $\{\cap, \vee^\tau_{\omega_\infty}\}$. Пусть терм η имеет вид

$$\eta_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})\Delta\eta_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}),$$

где $\Delta \in \{\vee^\tau_{\omega_\infty}, \cap\}$ и

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\} \cup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}\} = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

По индуктивному предположению для термов $\eta_1(x_{i_1},\dots,x_{i_r})$ и $\eta_2(x_{j_1},\dots,x_{j_s})$ утверждение леммы верно. Поэтому

$$\eta_1(\mathfrak{F}_{i_1},\dots,\mathfrak{F}_{i_r}) = CF_\omega(\eta_1(f_{i_1},\dots,f_{i_r})),$$

$$\eta_2(\mathfrak{F}_{j_1},\dots,\mathfrak{F}_{j_s}) = CF_\omega(\eta_2(f_{j_1},\dots,f_{j_s})),$$

где $\eta_1(f_{i_1},\dots,f_{i_r})$ и $\eta_2(f_{j_1},\dots,f_{j_s})$ – внутренние ω-композиционные $c^\tau_{\omega_\infty}$-значные спутники. Поэтому имеет место

$$\eta(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n) = \eta_1(x_{i_1},\dots,x_{i_r})\Delta\eta_2(x_{j_1},\dots,x_{j_s}) =$$

$$= CF_\omega(\eta_1(f_{i_1},\dots,f_{i_r})\Delta\eta_2(f_{j_1},\dots,f_{j_s})) = CF_\omega(\eta(f_1,\dots,f_n)),$$

где $\Delta \in \{\vee^\tau_{\omega_\infty}, \cap\}$. □

Лемма 3.2. *Пусть* $\mathfrak{H} = CF_\omega(h)$, *где* h *– внутренний* $c^\tau_{\omega_\infty}$*-значный спутник,* $\pi \subseteq \omega$ *и* m *– натуральное число. Тогда справедливы утверждения:*

(1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{H}$ *является τ-замкнутой тотально ω-композиционной формацией и* $\mathfrak{F}$ *имеет такой внутренний* $c^\tau_{\omega_\infty}$*-значный спутник* f, *что* $f(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $f(p) = \mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{H}$ *для всех* $p \in \pi$ *и* $f(p) = h(p)$ *для всех* $p \in \omega\setminus\pi$.

(2) $\mathfrak{L} = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ *является τ-замкнутой тотально ω-композиционной формацией и* $\mathfrak{L} = CF_\omega(l)$, *где* l *– такой внутренний* $c^\tau_{\omega_\infty}$*-значный спутник, что* $l(\omega') = l(p) = \mathfrak{L}$ *для всех* $p \in \pi$ *и* $l(p) = h(p)$ *для всех* $p \in \omega\setminus\pi$.

Доказательство. (1) Ввиду леммы 2.3 формация $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой. Кроме того, формация $\mathfrak{N}^m_\pi$, как известно, является тотально локальной и наследственной (см., например, [2, с. 34–35]). Поэтому $\mathfrak{N}^m_\pi$ – τ-замкнутая тотально ω-композиционная формация. Пусть t – минимальный $c^\tau_{\omega_\infty}$-значный спутник формации $\mathfrak{N}^m_\pi$. Индукцией по m покажем, что $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой тотально ω-композиционной формацией, т. е. $\mathfrak{F} \in c^\tau_{\omega_\infty}$. Пусть $m = 1$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H}$.

По лемме 2.4 для $\mathfrak{N}_\pi = CF_\omega(t)$ имеем $t(\omega') = (1)$, $t(p) = (1)$ для всех $p \in \pi$, $t(p) = \varnothing$ для всех $p \in \omega\setminus\pi$. Ввиду леммы 2.5 формация $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H}$ является ω-композиционной и имеет такой ω-композиционный спутник f, что $f(\omega') = \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H}$, $f(p) = t(p)\mathfrak{H} = (1)\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ для всех $p \in \pi$ и $f(p) = h(p)$ для всех $p \in \omega\setminus\pi$. Поскольку $f(a)$ – ω-композиционная формация для всех $a \in \omega\cup\{\omega'\}$, то $\mathfrak{F}$ – 2-кратно ω-композиционная формация. Но тогда по тем же соображениям формация $\mathfrak{F}$ является 3-кратно ω-композиционной и т. д. Поэтому формация $\mathfrak{F}$ является n-кратно ω-композиционной для любого натурального n. Следовательно, $\mathfrak{F}$ – тотально ω-композиционная формация. Таким образом, имеет место $\mathfrak{F} \in c^\tau_{\omega_\infty}$.

Пусть теперь $m > 1$ и предположим, что утверждение леммы верно для $m-1$. Покажем, что лемма верна и для m. По лемме 2.6 имеют место равенства

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{H} = (\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{N}^{m-1}_\pi)\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{H}).$$

Согласно лемме 2.5 формация $\mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{H})$ является ω-композиционной и имеет такой ω-композиционный спутник f, что $f(\omega') = \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{H})$,

$$f(p) = t(p)\mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{H} = (1)\mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{H} = \mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{H}$$

для всех $p \in \pi$ и $f(p) = h(p)$ для всех $p \in \omega\setminus\pi$. Поскольку $f(\omega') = \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{H}$ и по индуктивному предположению для всех $p \in \omega$ формация $f(p)$ является тотально ω-композиционной, то формация $\mathfrak{F}$ – тотально ω-композиционна. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой тотально ω-композиционной формацией. Поэтому имеет место (1).

(2) Поскольку, с учетом леммы 2.6, имеют место равенства

$$\mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{L} = \mathfrak{N}^m_\pi(\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}) = (\mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} = \mathfrak{L},$$

то $\mathfrak{L}$ – τ-замкнутая тотально ω-композиционная формация по утверждению (1). Кроме того, в силу (1) имеем $\mathfrak{L} = CF_\omega(l)$, где l – такой внутренний $c^\tau_{\omega_\infty}$-значный спутник, что $l(\omega') = \mathfrak{L}$, с учетом леммы 2.6,

$$l(p) = \mathfrak{N}^{m-1}_\pi \mathfrak{L} = \mathfrak{N}^{m-1}_\pi(\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}) = (\mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} = \mathfrak{L}$$

для всех $p \in \pi$ и $l(p) = h(p)$ для всех $p \in \omega \setminus \pi$. Поэтому справедливо утверждение (2). $\square$

Лемма 3.3. *Пусть* $\eta(x_1, \ldots, x_n)$ *– терм сигнатуры* $\{\cap, \vee^\tau_{\omega_\infty}\}$, $\pi \subseteq \omega$ *и* m *– натуральное число. Тогда для любых* τ*-замкнутых тотально* ω*-композиционных формаций* $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$ *справедливы равенства:*

(1) $\eta(\mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{F}_n) = \mathfrak{N}^m_\pi\eta(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)$;

(2) $\eta(\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_n) = \mathfrak{S}_\pi\eta(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)$.

Доказательство. Проведем индукцию по числу t вхождений в терм η символов $\{\cap, \vee^\tau_{\omega_\infty}\}$. Утверждение леммы очевидно, если $t = 0$. Пусть $t = 1$ и $\Delta \in \{\cap, \vee^\tau_{\omega_\infty}\}$. Рассмотрим прежде случай, когда $\Delta = \vee^\tau_{\omega_\infty}$. Положим

$$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{N}^m_\pi(\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H}),\ \ \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{H},$$

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{S}_\pi(\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H}),\ \ \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}.$$

В силу леммы 3.2 формации $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{X}_1$ являются τ-замкнутыми тотально ω-композиционными формациями. При этом $\mathfrak{L}_1 = CF_\omega(l_1)$, где l_1 – такой внутренний $c^\tau_{\omega_\infty}$-значный спутник, что $l_1(\omega') = \mathfrak{L}_1$ и $l_1(p) = \mathfrak{N}^{m-1}_\pi(\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H})$ для всех $p \in \pi$ и $l(p) = k(p)$ для всех $p \in \omega \setminus \pi$, где k – некоторый внутренний $c^\tau_{\omega_\infty}$-значный спутник формации $\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H}$. Кроме того, $\mathfrak{X}_1 = CF_\omega(x_1)$, где x_1 – такой внутренний $c^\tau_{\omega_\infty}$-значный спутник, что $x_1(\omega') = \mathfrak{X}_1$ и $x_1(p) = \mathfrak{S}_\pi(\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H})$ для всех $p \in \pi$ и $x(p) = k(p)$ для всех $p \in \omega \setminus \pi$.

Поскольку $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ содержатся в $\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H}$, то

$$\mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}^m_\pi(\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H}) = \mathfrak{L}_1,$$

$$\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{M} \cup \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}_\pi(\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H}) = \mathfrak{X}_1,$$

откуда следует $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}_1$.

Покажем, что $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_1$. Согласно лемме 3.2 формации $\mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{H}$ имеют такие внутренние $c^\tau_{\omega_\infty}$-значные ω-композиционные спутники m_1 и h_1, соответственно, что $m_1(\omega') = \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{M}$, $h_1(\omega') = \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{H}$ и $m_1(p) = \mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{M}$, $h_1(p) = \mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{H}$ для всякого $p \in \pi$, $m_1(p) = m(p)$, $h_1(p) = h(p)$ для всякого $p \in \omega \setminus \pi$, где m и h – некоторые внутренние $c^\tau_{\omega_\infty}$-значные ω-композиционные спутники формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно.

Ввиду леммы 2.2 формация $\mathfrak{L}_2$ имеет такой внутренний $c^\tau_{\omega_\infty}$-значный ω-композиционный спутник l_2, что для ω' и всякого $p \in \pi$ имеют место равенства

$$l_2(\omega') = m_1(\omega') \vee^\tau_{\omega_\infty} h_1(\omega') = \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_2,$$

$$l_2(p) = m_1(p) \vee^\tau_{\omega_\infty} h_1(p) = \mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{H}$$

и $l_2(p) = m(p) \vee^\tau_{\omega_\infty} h(p)$ для всех $p \in \omega \setminus \pi$. Следовательно, $l_1(p) = l_2(p)$ для любого $q \in \omega$ и $l_2(\omega') = \mathfrak{L}_2 \subseteq \mathfrak{L}_1 = l_1(\omega')$.

Допустим, что $\mathfrak{L}_1 \setminus \mathfrak{L}_2 \neq \varnothing$ и пусть A – группа минимального порядка из $\mathfrak{L}_1 \setminus \mathfrak{L}_2$. Тогда A – $\bar{\tau}$-минимальная монолитическая группа и $P = \mathrm{Soc}(A) = A^{\mathfrak{L}_2}$. Если $\pi(Com(P)) \cap \pi = \varnothing$, то P либо неабелева группа, либо абелева π'-группа. Поскольку при этом $A \in \mathfrak{L}_1 = \mathfrak{N}^m_\pi(\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H})$, то $A \in \mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{L}_2$. Противоречие. Следовательно, $\pi(Com(P)) \cap \pi \neq \varnothing$ и P – абелева p-группа, где $p \in \pi$. Так как $\mathfrak{L}_2$ – ω-композиционная формация и $p \in \omega$, то $P \nsubseteq \Phi(O_p(A))$ по лемме 2.10. Поэтому $P = C^p(A) = O_p(A)$. Поскольку $A \in \mathfrak{L}_1$ и $p \in \pi$, то

$$A/O_p(A) = A/C^p(A) \in l_1(p) = l_2(p) \subseteq \mathfrak{L}_2.$$

Но тогда ввиду леммы 2.7 имеем $A \in \mathfrak{L}_2$. Получили противоречие. Поэтому $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_2$. Таким образом, в случае когда $\Delta = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}$ утверждение (1) верно.

Покажем теперь, что в рассматриваемом случае утверждение (2) также имеет место, т. е. $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2$. Допустим, что $\mathfrak{X}_1 \setminus \mathfrak{X}_2 \neq \varnothing$ и пусть B – произвольная группа из $\mathfrak{X}_1 \setminus \mathfrak{X}_2$. Поскольку $B \in \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{S}_\pi(\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{H})$, то $R = B^{\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{H}} \in \mathfrak{S}_\pi$. Пусть k – нильпотентная длина группы R. Тогда $R \in \mathfrak{N}^k_\pi$ и, с учетом доказанного выше, имеем

$$B \in \mathfrak{N}^k_\pi(\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}^k_\pi \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{N}^k_\pi \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{H} = \mathfrak{X}_2.$$

Поэтому $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2$ и, следовательно, $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2$. Значит, в случае когда $\Delta = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}$, имеет место и утверждение (2).

Пусть теперь $\Delta = \cap$. Положим

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{N}^m_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \text{ и } \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{N}^m_\pi \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}^m_\pi \mathfrak{H}.$$

Так как

$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \text{ и } \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H},$$

то

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{N}^m_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{N}^m_\pi \mathfrak{M} \text{ и } \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{N}^m_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{N}^m_\pi \mathfrak{H},$$

значит, $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2$.

Индукцией по m покажем, что $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2$. Пусть $m = 1$. Тогда

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \text{ и } \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{H}.$$

Допустим, что $\mathfrak{X}_2 \setminus \mathfrak{X}_1 \neq \varnothing$ и пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{X}_2 \setminus \mathfrak{X}_1$. Тогда G – $\bar{\tau}$-минимальная монолитическая группа и $N = \mathrm{Soc}(G) = G^{\mathfrak{X}_1}$.

Предположим, что $\pi(Com(N)) \cap \pi = \varnothing$. Тогда N либо неабелева группа, либо абелева π'-группа. Поскольку при этом $G \in \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{H}$, то $G \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$. Поэтому $G \in \mathfrak{X}_1$. Противоречие. Значит, $\pi(Com(N)) \cap \pi \neq \varnothing$ и N – абелева p-группа, где $p \in \pi$. Ввиду того, что $\mathfrak{X}_1$ – ω-композиционная формация и $p \in \pi \subseteq \omega$, то $N \nsubseteq \Phi(O_p(G))$ в силу леммы 2.10. Поэтому $N = O_p(G) = C^p(G) = F(G)$ и $G = N \rtimes M$ для некоторой максимальной подгруппы M из G. Так как $G \in \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{H}$ и $N = F(G)$, то $M \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$. Отсюда $G^{\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_\pi$. Но тогда $G \in \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{X}_1$. Получили противоречие. Значит, $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2$.

Пусть теперь $m > 1$ и при $m-1$ утверждение верно. Пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{X}_2 \setminus \mathfrak{X}_1$. Тогда G – $\bar{\tau}$-минимальная монолитическая группа и $N = \mathrm{Soc}(G) = G^{\mathfrak{X}_1}$.

Если $\pi(Com(N)) \cap \pi = \varnothing$, то N либо неабелева группа, либо абелева π'-группа. Тогда поскольку $G \in \mathfrak{N}^m_\pi \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}^m_\pi \mathfrak{H}$, то $G \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$. Поэтому $G \in \mathfrak{X}_1$. Противоречие. Значит, $\pi(Com(N)) \cap \pi \neq \varnothing$ и N – абелева p-группа, где $p \in \pi$. Поскольку $\mathfrak{X}_1$ – ω-композиционная формация и $p \in \pi \subseteq \omega$, то $N \nsubseteq \Phi(O_p(G))$ ввиду леммы 2.10. Поэтому $N = O_p(G) = C^p(G) = F(G)$ и $G = N \rtimes M$ для некоторой максимальной подгруппы M из G. Поскольку

$$G \in \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{N}^m_\pi \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}^m_\pi \mathfrak{H} \text{ и } N = F(G),$$

то $G/F(G) \simeq M \in \mathfrak{N}^{m-1}_\pi \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}^{m-1}_\pi \mathfrak{H}$. Но тогда по индукции имеем

$$G/F(G) \in \mathfrak{N}^{m-1}_\pi \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}^{m-1}_\pi \mathfrak{H} = \mathfrak{N}^{m-1}_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}).$$

Следовательно, так как $F(G) \in \mathfrak{N}_\pi$, то мы получаем

$$G \in \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{N}^{m-1}_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})) = (\mathfrak{N}_\pi \mathfrak{N}^{m-1}_\pi)(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}^m_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{X}_1.$$

Противоречие. Значит, $\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_1$. Поэтому в случае, когда $\Delta = \cap$ утверждение (1) верно.

Пусть теперь $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{S}_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$ и $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{M} \cap \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{H}$. Тогда, как нетрудно убедиться, $\mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{L}_2$. Допустим, что $\mathfrak{L}_2 \nsubseteq \mathfrak{L}_1$ и пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{L}_2 \setminus \mathfrak{L}_1$. Тогда G – $\bar{\tau}$-минимальная монолитическая группа и $N = \mathrm{Soc}(G) = G^{\mathfrak{L}_1}$.

Если $\pi(Com(N)) \cap \pi = \varnothing$, то N либо неабелева группа, либо абелева π'-группа. Тогда поскольку $G \in \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{M} \cap \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$, то $G \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$. Поэтому $G \in \mathfrak{X}_1$. Противоречие. Значит, $\pi(Com(N)) \cap \pi \neq \varnothing$ и N – абелева p-группа, где $p \in \pi$. Поэтому

$$G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{N}_p(\mathfrak{S}_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})) = (\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_\pi)(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{S}_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{L}_1.$$

Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_1$. Таким образом, в случае когда $\Delta = \cap$ утверждение (2) также верно.

Пусть теперь $t > 1$ и предположим, что лемма верна для всякого терма с меньшим числом символов из $\{\vee^\tau_{\omega_\infty}, \cap\}$. Пусть η имеет вид

$$\eta_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})\Delta\eta_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}),$$

где $\Delta \in \{\vee^\tau_{\omega_\infty}, \cap\}$ и $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\} \cup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. По индуктивному предположению для термов $\eta_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ и $\eta_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s})$ утверждение леммы верно. Поэтому

$$\eta_1(\mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{F}_{i_r}) = \mathfrak{N}^m_\pi\eta_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r}),\ \ \eta_2(\mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{F}_{j_s}) = \mathfrak{N}^m_\pi\eta_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s}) \text{ и}$$

$$\eta_1(\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_{i_r}) = \mathfrak{S}_\pi\eta_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r}),\ \ \eta_2(\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_{j_s}) = \mathfrak{S}_\pi\eta_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s}).$$

Значит, имеют место равенства

$$\eta(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_n) = \eta_1(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{i_r})\Delta\eta_2(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{j_s}) =$$
$$= \mathfrak{N}_\pi\eta_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r})\Delta\mathfrak{N}_\pi\eta_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s}) = \mathfrak{N}_\pi(\eta_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r})\Delta\eta_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s})) =$$
$$= \mathfrak{N}_\pi\eta(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n).$$

Таким образом, утверждение (1) верно. Аналогично,

$$\eta(\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_n) = \eta_1(\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_{i_r})\Delta\eta_2(\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_{j_s}) =$$
$$= \mathfrak{S}_\pi\eta_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r})\Delta\mathfrak{S}_\pi\eta_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s}) = \mathfrak{S}_\pi(\eta_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r})\Delta\eta_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s})) =$$
$$= \mathfrak{S}_\pi\eta(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n).$$

Следовательно, утверждение (2) также верно. □

Лемма 3.4. *Пусть $\eta(x_1, \ldots, x_n)$ – терм сигнатуры $\{\cap, \vee^\tau_{\omega_\infty}\}$, $\mathfrak{X}_i$ и $\mathfrak{F}_i$ – такие $c^\tau_{\omega_\infty}$-формации, что $\mathfrak{X}_i \subseteq \mathfrak{F}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $\eta(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n) \subseteq \eta(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)$.*

Доказательство. Проведем индукцию по числу t вхождений символов $\{\cap, \vee^\tau_{\omega_\infty}\}$ в терм η. Утверждение леммы очевидно, если $t = 1$.

Пусть $t > 1$ и лемма верна для всякого терма с меньшим числом символов из $\{\cap, \vee^\tau_{\omega_\infty}\}$. Пусть терм η имеет вид $\eta_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})\Delta\eta_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s})$, где $\Delta \in \{\cap, \vee^\tau_{\omega_\infty}\}$ и

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\} \cup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}\} = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Положим

$$\mathfrak{M}_1 = \eta_1(\mathfrak{X}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{X}_{i_r}),\ \ \mathfrak{M}_2 = \eta_2(\mathfrak{X}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{X}_{j_s}),$$
$$\mathfrak{H}_1 = \eta_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r}),\ \ \mathfrak{H}_2 = \eta_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s}).$$

По индуктивному предположению для термов $\eta_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ и $\eta_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s})$ утверждение леммы верно, тогда $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{H}_i$, $i = 1, 2$. Если $\Delta = \cap$, то $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2$. Аналогично, если $\Delta = \vee^\tau_{\omega_\infty}$, то $\mathfrak{M}_1 \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{H}_1 \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H}_2$. Поэтому $\mathfrak{M}_1\Delta\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{H}_1\Delta\mathfrak{H}_2$. Значит, справедливо включение

$$\eta(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n) = \eta_1(\mathfrak{X}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{X}_{i_r})\Delta\eta_2(\mathfrak{X}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{X}_{j_s}) \subseteq$$
$$\subseteq \eta_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r})\Delta\eta_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s}) = \eta(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n),$$

что завершает доказательство. □

Напомним, что подгрупповой функтор τ называют *замкнутым* [2, с. 16], если для любых двух подгрупп G и $H \in \tau(G)$ имеет место $\tau(H) \subseteq \tau(G)$. Пусть τ – произвольный подгрупповой функтор, $\overline{\tau}$ – пересечение всех замкнутых подгрупповых функторов τ_i, для которых $\tau \leq \tau_i$, т. е. $\tau(G) \subseteq \tau_i(G)$ для любой группы G. Функтор $\overline{\tau}$ называется *замыканием* функтора τ [2, с. 20].

Доказательство теоремы А. Предположим, что теорема неверна и пусть группа G – контрпример минимального порядка. Тогда найдутся терм $\eta(x_1,\ldots,x_n)$ сигнатуры $\{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_\infty}\}$ и $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-формации $\mathfrak{F}_1$, …, $\mathfrak{F}_n$, такие что $G \in \eta(\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n)$, но не существует групп A_1, …, A_n таких, что $A_1 \in \mathfrak{F}_1$, …, $A_n \in \mathfrak{F}_n$ и $G \in \eta\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_1),\ldots,c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_n)\big)$.

Положим $\mathfrak{M} = \eta(\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n)$, f_i – минимальный $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1,\ldots,n$.

Вначале покажем, что утверждение теоремы верно, если в терм η входит всего один символ из $\{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_\infty}\}$. Действительно, если $G \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, то $G \in \mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Значит,

$$G \in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(G) \cap c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(G).$$

Пусть $G \in \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{M}$ и $P = \mathrm{Soc}(G)$. Допустим, что G – монолитическая группа.

Допустим, что $\pi(Com(P)) \cap \omega = \varnothing$. Тогда P либо неабелева группа, либо абелева ω'-группа. Ввиду леммы 2.8 формация $\mathfrak{S}_\omega \tau\,\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) \in c^{\tau}_{\omega_\infty}$. Поэтому

$$G \in \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{S}_\omega \tau\,\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2).$$

Из последнего включения следует, что $G \in \tau\,\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau} \mathfrak{F}_2$. По лемме 2.9 найдутся такие группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ и $A_2 \in \mathfrak{F}_2$, что

$$G \in \tau\,\mathrm{form}(A_1) \vee^{\tau} \tau\,\mathrm{form}(A_2) \subseteq c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_1) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_2).$$

Пусть теперь $\pi(Com(P)) \cap \omega \neq \varnothing$. Тогда P – абелева p-группа для некоторого простого числа $p \in \omega$. Заметим, что $\Phi(O_p(G)) = 1$. Действительно, если $\Phi(O_p(G)) \neq 1$, то в силу индуктивного предположения для группы $G/\Phi(O_p(G))$ утверждение теоремы верно. Поскольку $G \in \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{F}_2$, то $G/\Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{F}_2$, поскольку $\mathfrak{F}_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{F}_2$ формация. Но $|G/\Phi(O_p(G))| < |G|$. Поэтому, в силу выбора группы G, найдутся такие группы $B_1 \in \mathfrak{F}_1$, $B_2 \in \mathfrak{F}_2$, что

$$G/\Phi(O_p(G)) \in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_1) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_2).$$

Так как по лемме 2.10 формация $c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_1) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_2)$ является $\mathfrak{N}_p$-насыщенной, то

$$G \in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_1) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_2).$$

Получаем противоречие с выбором группы G. Значит, $\Phi(O_p(G)) = 1$. Следовательно, $P \nsubseteq \Phi(O_p(G))$ и $P = C_G(P) = O_p(G) = C^p(G)$. Поскольку $G \in \mathfrak{M}$, то по лемме 2.4 имеем $G/P = G/C^p(G) \in m(p)$ и, следовательно, $m(p) \neq \varnothing$. В силу леммы 2.2 справедливо равенство $m(p) = f_1(p) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} f_2(p)$.

Допустим, что $f_1(p) = \varnothing$. Тогда $m(p) = f_2(p)$ и $G \in \mathfrak{F}_2$ ввиду леммы 2.7. Значит,

$$G \in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(G/G^{\mathfrak{F}_1}) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(G).$$

Противоречие. Поэтому мы можем считать, что $f_1(p) \neq \varnothing$ и $f_2(p) \neq \varnothing$.

Так как $|G/C^p(G)| < |G|$, то по индукции для группы $G/C^p(G)$ теорема верна. Поэтому найдутся такие группы $D_1 \in f_1(p)$ и $D_2 \in f_2(p)$, что

$$G/C^p(G) \in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(D_1) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(D_2).$$

Пусть $C_i = D_i/O_p(D_i)$, $i \in 1,2$. Тогда

$$c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(D_i) \subseteq \mathfrak{N}_p c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_i).$$

Поэтому имеет место включение

$$c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(D_1)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(D_2)\subseteq\mathfrak{N}_p c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_1)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}\mathfrak{N}_p c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_2).$$

По лемме 3.3(1) справедливо равенство

$$\mathfrak{N}_p c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_1)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}\mathfrak{N}_p c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_2)=\mathfrak{N}_p\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_1)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_2)\big).$$

Значит,

$$G/P=G/C^p(G)\in\mathfrak{N}_p\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_1)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_2)\big).$$

Так как $P=O_p(G)$, то $O_p(G/P)=1$. Поэтому $G/P\in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_1)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_2)$.

Пусть $R_i=Z_p\wr C_i=K_i\rtimes C_i$, где Z_p – группа порядка p, K_i – база регулярного сплетения R_i, $i=1,2$. Понятно, что $O_p(R_i)=C^p(R_i)=K_i$. Так как

$$R_i/O_p(R_i)\simeq C_i\in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(D_i)\subseteq f_i(p),$$

то в силу леммы 2.7 имеем $R_i\in\mathfrak{F}_i$. Пусть далее $\mathfrak{X}_i=c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(R_i)$, $i=1,2$ и $\mathfrak{L}=\mathfrak{X}_1\vee^{\tau}_{\omega_\infty}\mathfrak{X}_2$. Обозначим через l и x_i – минимальные ω-композиционные $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-значные спутники формаций $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{X}_i$ $(i=1,2)$ соответственно. Тогда по лемме 2.2 имеем $l=x_1\vee^{\tau}_{\omega_\infty}x_2$. Следовательно,

$$l(p)=x_1(p)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}x_2(p)=c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\big((R_1/C^p(R_1)\big)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\big((R_2/C^p(R_2)\big)=$$

$$=c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_1)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_2).$$

Значит, $G/O_p(G)=G/P\in l(p)$. В силу леммы 2.7

$$G\in\mathfrak{L}=c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(R_1)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(R_2).$$

Противоречие.

Пусть теперь G не является монолитической группой и $\mathrm{Soc}(G)=N_1\times\ldots\times N_k$, где N_j – минимальная нормальная подгруппа группы G, $j\in J=\{1,\ldots,k\}$ $(k\geqslant 2)$. Обозначим через M_j наибольшую нормальную подгруппу группы G, содержащую

$$N_1\times\ldots\times N_{j-1}\times N_{j+1}\times\ldots\times N_k$$

и не содержащую N_j. В силу леммы 2.11 группа $B_j=G/M_j$ является монолитической и ее монолит N_jM_j/M_j G-изоморфен N_j и $M_1\cap\ldots\cap M_k=1$. Поскольку $B_j\in\mathfrak{M}=\mathfrak{F}_1\vee^{\tau}_{\omega_\infty}\mathfrak{F}_2$ и $|B_j|<|G|$, то по индукции для группы B_j найдутся такие группы $S_{j1}\in\mathfrak{F}_1$ и $S_{j2}\in\mathfrak{F}_2$, что

$$B_j\in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_{j1})\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_{j2}),\quad j\in J.$$

Положим $S_1=S_{11}\times S_{21}\times\ldots\times S_{k1}$ и $S_2=S_{12}\times S_{22}\times\ldots\times S_{k2}$. Поскольку $S_{j1}\in\mathfrak{F}_1$ и $S_{j2}\in\mathfrak{F}_2$ при любом $j\in J$, то $S_1\in\mathfrak{F}_1$ и $S_2\in\mathfrak{F}_2$. Так как $S_{j1}\in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_1)$ и $S_{j2}\in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_2)$ для любого $j\in J$, то $c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_{j1})\subseteq c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_1)$ и $c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_{j2})\subseteq c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_2)$. Поэтому для всякого $j\in J$ имеет место включение

$$c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_{j1})\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_{j2})\subseteq c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_1)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_2).$$

Поскольку $B_j\in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_{j1})\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_{j2})$, то в силу леммы 2.11 получаем, что

$$G\in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_1)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_2)$$

как подпрямое произведение групп, изоморфных группам B_1, …, B_k. Противоречие.

Поэтому мы можем считать, что число t вхождений символов из $\{\cap,\vee^{\tau}_{\omega_\infty}\}$ в терм $\eta(x_1,\ldots,x_n)$ больше 1 и для всех термов с числом вхождений символов из $\{\cap,\vee^{\tau}_{\omega_\infty}\}$ меньшим t утверждение теоремы верно.

Пусть $G\in\eta(\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n)$ и терм η имеет вид

$$\eta_1(x_{i_1},\ldots,x_{i_r})\Delta\eta_2(x_{j_1},\ldots,x_{j_s}),$$

где $\Delta \in \{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_\infty}\}$ и

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\} \cup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}\} = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Если $\Delta = \cap$, то $G \in \eta_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r}) \cap \eta_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s})$. По индукции для термов η_1 и η_2 утверждение теоремы верно. Следовательно, найдутся такие группы $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, …, $A_r \in \mathfrak{F}_{i_r}$ и $B_1 \in \mathfrak{F}_{j_1}$, …, $B_s \in \mathfrak{F}_{j_s}$, что

$$G \in \eta_1\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_1), \ldots, c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_r)\big)$$

и

$$G \in \eta_2\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_1), \ldots, c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_s)\big).$$

Пусть $\Omega = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\} \cap \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}\}$. Положим $R_{i_m} = A_m$, если $x_{i_m} \notin \Omega$, $R_{i_m} = P_{j_k} = A_m \times B_k$, если $x_{i_m} = x_{j_k} \in \Omega$ и $P_{j_k} = B_k$, если $x_{j_k} \notin \Omega$, $m = 1, \ldots, r$, $k = 1, \ldots, s$. Ясно, что $R_{i_m} \in \mathfrak{F}_{i_m}$ и $P_{j_k} \in \mathfrak{F}_{j_k}$. Обозначим через $\mathfrak{M}_{i_m}$ формацию $c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(R_{i_m})$, а через $\mathfrak{M}_{j_k}$ – формацию $c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(P_{j_k})$, $m = 1, \ldots, r$, $k = 1, \ldots, s$. Поскольку для любых $m = 1, \ldots, r$, $k = 1, \ldots, s$ справедливы включения $c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_m) \subseteq \mathfrak{M}_{i_m}$ и $c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_k) \subseteq \mathfrak{M}_{j_k}$, то в силу леммы 3.4 имеют место включения:

$$\eta_1\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_1), \ldots, c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_r)\big) \subseteq \eta_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{i_r}),$$
$$\eta_2\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_1), \ldots, c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_s)\big) \subseteq \eta_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{j_s}).$$

Следовательно, имеем

$$G \in \eta_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{i_r}) \cap \eta_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{j_s}) = \eta(\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n),$$

где $\mathfrak{M}_i$ – однопорожденная τ-замкнутая тотально ω-композиционная подформация формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Снова получили противоречие.

Пусть теперь $\Delta = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}$. Тогда

$$G \in \eta_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r}) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \eta_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s}).$$

Положим $\mathfrak{H}_1 = \eta_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r})$ и $\mathfrak{H}_2 = \eta_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s})$. Тогда $G \in \mathfrak{H}_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{H}_2$ и по доказанному существуют такие группы $H_1 \in \mathfrak{H}_1$ и $H_2 \in \mathfrak{H}_2$, что

$$G \in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(H_1) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(H_2).$$

Поскольку при $t = 1$ теорема верна, то для групп H_1 и H_2 найдутся такие группы $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, …, $A_r \in \mathfrak{F}_{i_r}$ и $B_1 \in \mathfrak{F}_{j_1}$, …, $B_s \in \mathfrak{F}_{j_s}$, что

$$H_1 \in \eta_1\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_1), \ldots, c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_r)\big), \; H_2 \in \eta_2\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_1), \ldots, c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_s)\big).$$

Пусть теперь $\Omega = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\} \cap \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}\}$. Положим $R_{i_m} = A_m$, если $x_{i_m} \notin \Omega$, $R_{i_m} = P_{j_k} = A_m \times B_k$, если $x_{i_m} = x_{j_k} \in \Omega$ и $P_{j_k} = B_k$, если $x_{j_k} \notin \Omega$, $m = 1, \ldots, r$, $k = 1, \ldots, s$. Очевидно, что $R_{i_m} \in \mathfrak{F}_{i_m}$ и $P_{j_k} \in \mathfrak{F}_{j_k}$. Положим $\mathfrak{M}_{i_m} = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(R_{i_m})$, $\mathfrak{M}_{j_k} = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(P_{j_k})$, $m = 1, \ldots, r, k = 1, \ldots, s$. Поскольку для любых $m = 1, \ldots, r, k = 1, \ldots, s$ справедливы включения $c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_m) \subseteq \mathfrak{M}_{i_m}$ и $c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_k) \subseteq \mathfrak{M}_{j_k}$, то в силу леммы 3.4 имеем:

$$\eta_1\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_1), \ldots, c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_r)\big) \subseteq \eta_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{i_r}),$$
$$\eta_2\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_1), \ldots, c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_s)\big) \subseteq \eta_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{j_s}).$$

Значит, выполняется включение

$$\eta_1\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_1), \ldots, c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_r)\big) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \eta_2\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_1), \ldots, c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_s)\big) \subseteq$$
$$\subseteq \eta_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{i_r}) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \eta_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{j_s}).$$

Так как

$$c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(H_1) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(H_2) \subseteq$$

$$\subseteq \eta_1\bigl(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_1),\dots,c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_r)\bigr)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}\eta_2\bigl(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_1),\dots,c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_s)\bigr),$$

то справедливо включение

$$c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(H_1)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(H_2)\subseteq \eta_1(\mathfrak{M}_{i_1},\dots,\mathfrak{M}_{i_r})\vee^{\tau}_{\omega_\infty}\eta_2(\mathfrak{M}_{j_1},\dots,\mathfrak{M}_{j_s}).$$

Следовательно,

$$G\in \eta_1(\mathfrak{M}_{i_1},\dots,\mathfrak{M}_{i_r})\vee^{\tau}_{\omega_\infty}\eta_2(\mathfrak{M}_{j_1},\dots,\mathfrak{M}_{j_s})=\eta(\mathfrak{M}_1,\dots,\mathfrak{M}_n),$$

где $\mathfrak{M}_i$ – однопорожденная τ-замкнутая тотально ω-композиционная подформация формации $\mathfrak{F}_i$, $i=1,\dots,n$. Противоречие. □

Приведем некоторые следствия доказанной теоремы.

Если τ – *единичный* подгрупповой функтор [2], т. е. $\tau(G)$ – совокупность всех подгрупп группы G для любой группы G, то из теоремы А получаем

Следствие 3.5. *Решетка всех наследственных тотально ω-композиционных формаций $\mathfrak{G}$-отделима.*

В случае когда $\tau(G)$ – совокупность всех нормальных подгрупп группы G для каждой группы G [2, с. 17] из теоремы А получаем

Следствие 3.6. *Решетка всех нормально наследственных тотально ω-композиционных формаций $\mathfrak{G}$-отделима.*

Если τ – тривиальный подгрупповой функтор [2], т. е. $\tau(G)=\{G\}$ для всех G, то из теоремы А вытекает

Следствие 3.7. *Решетка c^{ω}_{∞} всех тотально ω-композиционных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой.*

Если $\omega=\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, то из теоремы А получаем

Следствие 3.8. *Решетка c^{τ}_{∞} всех τ-замкнутых тотально композиционных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой.*

Пусть теперь τ – единичный подгрупповой функтор. Тогда из теоремы А вытекает

Следствие 3.9. *Решетка всех наследственных тотально композиционных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой.*

Пусть $\tau(G)$ – совокупность всех нормальных подгрупп группы G для каждой группы G. Тогда получаем

Следствие 3.10. *Решетка всех нормально наследственных тотально композиционных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой.*

Наконец, если τ – тривиальный подгрупповой функтор из теоремы А вытекает

Следствие 3.11. *Решетка c_∞ всех тотально композиционных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой.*

Литература

1. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
2. *Скиба А. Н.*, Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997.
3. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп // Украинский мат. журн. 2000. Т. 52, № 6. С. 783–797.
4. *Селькин В. М.* Однопорожденные формации. Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2011.
5. *Воробьев Н. Н.* Алгебра классов конечных групп. Витебск: ВГУ им. П. М. Машерова, 2012.
6. *Сафонов В. Г.* $\mathfrak{G}$-отделимость решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 5. С. 692–704.
7. *Shemetkov L. A., Skiba A. N., Vorob'ev N. N.* On laws of lattices of partially saturated formations // Asian-European Journal of Mathematics. 2009. Vol. 2, N 1. P. 155–169.

8. *Сафонов В. Г., Сафонова И. Н.* Отделимость решетки τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций конечных групп // Проблемы физики, математики и техники. 2017. № 4(33). С. 76–83.

9. *Tsarev A. A.* Inductive lattices of totally composition formations // Revista Colombiana de Matematicas. 2018. Vol. 52, N 2. P. 161–169.

10. *Tsarev A. A.* On the lattice of all totally composition formations of finite groups // Ricerche di Matematica. 2019. Vol. 68, N 2. P. 693–698.

11. *Los I. P., Safonov V. G.* Separability of the lattice of τ-closed totally ω-composition formations of finite groups // The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. July 02–06, 2019. Vinnytsia, Ukraine, 2019. P. 64–65.

12. *Лось И. П., Сафонов В. Г.* τ-Замкнутые тотально ω-композиционные формации конечных групп с булевыми подрешетками // Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2021. Т. 60: Материалы Междунар. конф. по алгебре, анализу и геометрии. С. 92–94.

13. *Лось И. П., Сафонов В. Г.* Об однопорожденных и ограниченных тотально ω-композиционных формациях конечных групп // Проблемы физики, математики и техники. 2021. № 4(49). С. 101–107.

14. *Щербина В. В.* О двух задачах теории частично тотально композиционных формаций конечных групп // Прикладная математика и Физика. 2020. Т. 52, № 1. С. 18–32.

15. *Щербина В. В.* Частично композиционные формации с заданной структурой. I // Прикладная математика и Физика. 2021. Т. 53, № 3. С. 171–204.

16. *Сафонов В. Г.* Характеризация разрешимых однопорожденных тотально насыщенных формаций конечных групп // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 185–191.

17. *Doerk K., Hawkes T.* Finite Soluble Groups. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.

18. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of Finite Groups. Dordrecht: Springer, 2006.

19. *Shemetkov L. A.* Frattini extensions of finite groups and formations // Comm. Algebra. 1997. Vol. 25, N 3. P. 955–964.

20. *Шеметков Л. А.* Локальные задания формаций конечных групп // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16, № 8. С. 229–244.

I. P. Los, V. G. Safonov

Separability of the lattice of τ-closed totally ω-composition formations of finite groups

Summary

Let $\mathfrak{X}$ be a non-empty class of finite groups. A complete lattice θ of formations is said $\mathfrak{X}$-separable if for every term $\eta(x_1,\ldots,x_n)$ of signature $\{\cap,\vee_\theta\}$, θ-formations $\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n$, and every group $A \in \mathfrak{X}\cap\eta(\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n)$ are exists $\mathfrak{X}$-groups $A_1 \in \mathfrak{F}_1,\ldots,A_n \in \mathfrak{F}_n$ such that $A \in \in \eta(\theta\mathrm{form}(A_1),\ldots,\theta\mathrm{form}(A_n))$. In particular, if $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ is the class of all finite groups then the lattice θ of formations is said $\mathfrak{G}$-separable or, briefly, separable. It is proved that the lattice $c^{\tau}_{\omega_\infty}$ of all τ-closed totally ω-composition formations is $\mathfrak{G}$-separable.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 2. С. 57–62

УДК 512.554.32

ПОДМОДУЛИ ВЕЙЛЯ В ОГРАНИЧЕНИЯХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПРОСТЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП НА ПОДГРУППЫ $SL_2(K)$

А. А. Осиновская

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: anna@im.bas-net.by
Поступила 23.11.2023

При некоторых ограничениях найдены подмодули Вейля с малыми старшими весами в ограничениях неприводимых представлений простых алгебраических групп на подсистемные подгруппы типа A_1 над полем положительной характеристики.

В работе исследовались подмодули Вейля в ограничениях неприводимых модулярных представлений простых алгебраических групп.

На проблему нахождения подмодулей Вейля в таких ограничениях обратил внимание В. Щиголев, который в работах [1] и [2] нашел условие, при котором некоторые подмодули Вейля могут быть вложены в ограничения простых модулей специальной линейной группы. Однако пока известно очень мало о подмодулях Вейля в ограничениях даже на «малые» подгруппы. В то же время их наличие может быть полезным при нахождении правил ветвления представлений, а также при исследовании структуры унипотентных элементов в таких представлениях и распознавания представлений по наличию особых элементов.

Напомним вначале необходимые обозначения и определения.

Пусть K – алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 0$; G – простая односвязная алгебраическая группа над K ранга $r \geqslant 2$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ – базис системы корней группы G относительно фиксированного максимального тора $T \subset G$ и подгруппы Бореля $B \supset T$; $\omega_1, \ldots, \omega_r$ – соответствующие этому базису фундаментальные веса; $L(\omega)$ – неприводимый модуль группы G со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + \ldots + a_r\omega_r$, в котором реализуется неприводимое представление φ; $V(\omega)$ – модуль Вейля для веса ω; $M|S$ – ограничение G-модуля M на подгруппу $S \subset G$. Вес ω называется p-ограниченным, если все $a_i < p$ при $1 \leqslant i \leqslant r$.

Подгруппа группы G называется подсистемной, если она порождается всеми корневыми подгруппами группы G, связанными с определенной подсистемой ее системы корней. Если $\beta_1, \ldots, \beta_s$ – базис такой подсистемы, обозначим эту подгруппу символом $G(\beta_1, \ldots, \beta_s)$. Положим $G(i_1, \ldots, i_s) = G(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s})$.

Далее $H \subset G$ – подсистемная подгруппа типа A_1. Если в системе корней группы есть корни двух разных длин, то H может соответствовать длинному или короткому корню. В таких случаях мы называем H длинной или короткой соответственно. Все подгруппы одной длины сопряжены в G. Можно взять, например, $H = G(1)$ для $G = A_r(K)$. Множество весов подгруппы H может быть отождествлено со множеством целых чисел с помощью отображения $x\omega_1 \mapsto x$, а множество всех доминантных весов такой подгруппы – со множеством $\mathbb{N}$ неотрицательных целых чисел. Пусть $\alpha_{\max}$ – максимальный корень той же длины, что и корень, которому соответствует H и $a = \langle \omega, \alpha_{\max} \rangle$ – значение веса ω на $\alpha_{\max}$. Величины $\alpha_{\max}$ и a для всех типов простых алгебраических групп приведены в таблицах 1 и 2.

Лемма 1 [3, лемма 2]. *Пусть $V(x)$ – модуль Вейля подгруппы H, $x < 3p - 1$.*

(i) *Если $x \leqslant p - 1$ или $x = 2p - 1$, то $V(x) \cong L(x)$.*

(ii) *Если* $p \leqslant x < 2p-1$, *то* $V(x)$ *имеет два композиционных фактора:*

$$L(x) \quad \text{и} \quad L(2p-x-2) \cong V(2p-x-2).$$

(iii) *Если* $2p \leqslant x < 3p-1$, *то* $V(x)$ *имеет два композиционных фактора:*

$$L(x) \quad \text{и} \quad L(4p-x-2) \cong V(4p-x-2)/L(x-2p) \text{ при } p > 2,$$

и три композиционных фактора:

$$L(x), L(4p-x-2) \cong V(4p-x-2)/L(x-2p) \quad \text{и} \quad L(x-2p) \cong V(x-2p) \text{ при } p = 2.$$

Все факторы имеют кратность 1.

Таблица 1. Максимальный корень $\alpha_{\max}$

Тип	Длинный корень	Короткий корень
A_r	$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r$	
B_r	$\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+2\alpha_r$	$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r$
C_r	$2\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+2\alpha_{r-1}+\alpha_r$	$\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+2\alpha_{r-1}+\alpha_r$
D_r	$\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+2\alpha_{r-2}+\alpha_{r-1}+\alpha_r$	
E_6	$\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6$	
E_7	$2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+3\alpha_5+2\alpha_6+\alpha_7$	
E_8	$2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+6\alpha_4+5\alpha_5+4\alpha_6+3\alpha_7+2\alpha_8$	
F_4	$2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4$	$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4$
G_2	$3\alpha_1+2\alpha_2$	$2\alpha_1+\alpha_2$

Таблица 2. Значение $a = \langle \omega, \alpha_{\max} \rangle$

Тип	Длинный корень	Короткий корень
A_r	$a_1+a_2+\ldots+a_r$	
B_r	$a_1+2a_2+\ldots+2a_{r-1}+a_r$	$2a_1+2a_2+\ldots+2a_{r-1}+a_r$
C_r	$a_1+a_2+\ldots+a_r$	$a_1+2a_2+\ldots+2a_{r-1}+2a_r$
D_r	$a_1+2a_2+\ldots+2a_{r-2}+a_{r-1}+a_r$	
E_6	$a_1+2a_2+2a_3+3a_4+2a_5+a_6$	
E_7	$2a_1+2a_2+3a_3+4a_4+3a_5+2a_6+a_7$	
E_8	$2a_1+3a_2+4a_3+6a_4+5a_5+4a_6+3a_7+2a_8$	
F_4	$2a_1+3a_2+2a_3+a_4$	$2a_1+4a_2+3a_3+2a_4$
G_2	a_1+2a_2	$2a_1+3a_2$

Замечание 1. Фактически, при $p=2$ в пункте (iii) есть только один случай, $x=4$, и факторы $L(4)$, $L(2)$ и $L(0)$.

Для некоторого весового вектора v из G-модуля V символ $\omega(v)$ обозначает его вес, а для веса μ группы G символ $\mu|S$ означает его ограничение на S.

Лемма 2. *Если* ω *– доминантный вес группы* G *и подмодуль* $V(x)$ *содержится в ограничении* $L(\omega)|H$, *то* $0 \leqslant x \leqslant a$.

Доказательство. Поскольку все подгруппы H, соответствующие корням одной длины, изоморфны, мы можем считать, что $H = G(\alpha_{\max})$.

Произвольный вес λ модуля $L(\omega)$ группы G имеет вид $\lambda = \omega - \sum\limits_{i=1}^{r} b_i\alpha_i$, где b_i – неотрицательные целые числа (см. [4, теорема 39]). Ограничивая вес на подгруппу H, получаем, что $\lambda|H = \langle\lambda, \alpha_{\max}\rangle = a - \sum\limits_{i=1}^{r} b_i\langle\alpha_i, \alpha_{\max}\rangle$. Все $\langle\alpha_i, \alpha_{\max}\rangle \geqslant 0$. Это следует из максимальности корня $\alpha_{\max}$. Действительно, согласно следствию теоремы 1 из § 1 главы VI [5], если $\langle\alpha_i, \alpha_{\max}\rangle < 0$, то $\alpha_i + \alpha_{\max}$ является корнем, что невозможно. Поэтому $\lambda|H \leqslant a$, а значит, $x \leqslant a$ для любого подмодуля $V(x)$ в этом ограничении. $\square$

Лемма 3. *Пусть $G = A_2(K)$ и вес ω является p-ограниченным.*

(i) *Если $a_1 + a_2 + 2 \leqslant p$, или $a_1 + 1 = p$, или $a_2 + 1 = p$, то $V(\omega) \cong L(\omega)$.*

(ii) *В противном случае $L(\omega) \cong V(\omega)/V(\omega')$, где $\omega' = \omega - (a_1 + a_2 + 2 - p)(\alpha_1 + \alpha_2)$ и $V(\omega') \cong L(\omega')$.*

Доказательство. Утверждение вытекает из [6, часть II, предложение 8.19]. □

Зафиксируем вектор старшего веса v^+ в модуле $L(\omega)$.

Лемма 4 [7]. *Пусть $S = G(i_1, \ldots, i_k)$ – некоторая подсистемная подгруппа группы G. Тогда $KSv^+ \cong L(\omega|S)$ – подмодуль в ограничении $L(\omega)|S$.*

Нам понадобится действие гипералгебры $\mathscr{U}$ группы G на модуле $L(\omega)$, оно вводится следующим образом. Пусть Φ – система корней группы G, $\mathscr{L}$ – простая алгебра Ли над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ с системой корней Φ. Для корней $\alpha \in \Phi$ определим корневые элементы $X_\alpha \in \mathscr{L}$ (см. [4, § 1]).

Как в теореме 2 из [4], обозначим через $\mathscr{U}_\mathbb{Z}$ подкольцо универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли $\mathscr{L}$, порожденное элементами $X_\alpha^k/k!$, где $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \Phi$. Гипералгебра группы G – это тензорное произведение $\mathscr{U} = \mathscr{U}_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} K$. Элементы $X_{\alpha,k} = (X_\alpha^k/k!) \otimes 1_K$ порождают $\mathscr{U}$ как K-алгебру. Каждый рациональный G-модуль V можно превратить в $\mathscr{U}$-модуль по правилу

$$x_\alpha(t)v = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k X_{\alpha,k} v,$$

где $x_\alpha(t) \in G$ для $\alpha \in \Phi$ и $t \in K$ – корневой элемент группы G. Будем сокращенно писать $X_\alpha = X_{\alpha,1} \in \mathscr{U}$ (это не внесет путаницу, поскольку мы все время работаем с группой G и ее гипералгеброй $\mathscr{U}$, а не с комплексной алгеброй Ли $\mathscr{L}$). Если $\alpha = \pm\alpha_i$, то используются обозначения $X_{\pm i,k}$ и $X_{\pm i}$.

Вектор v некоторого G-модуля V называется примитивным относительно подсистемной подгруппы $S \subset G$, если v – ненулевой весовой вектор и все корневые элементы для положительных корней α из системы корней подгруппы S оставляют v на месте.

Введем серию примитивных векторов, которая нам понадобится при доказательстве. Пусть $1 \leqslant i, j \leqslant r$ и все корни α_t с индексом t в интервале с концами i и j образуют цепь на диаграмме Дынкина. Положим $b_k = -\langle\alpha_{k+1}, \alpha_k\rangle$ и $c_k = \langle\alpha_{k-1}, \alpha_k\rangle$. Для целого числа d в интервале $0 < d \leqslant a_j$ определим вектор $v(i, j, d)$ следующим образом. Положим $d_j = d$. Если $i < j$, положим $d_k = a_k + d_{k+1}b_k$ для $i \leqslant k < j$. Если $i > j$, положим $d_k = a_k + d_{k-1}c_k$ для $i \geqslant k > j$. Теперь обозначим

$$v(i, j, d) = X_{-i,d_i} \ldots X_{-k,d_k} \ldots X_{-j,d} v^+.$$

При $i = j$ положим $v(i, j, d) = X_{-j,d} v^+$. Тогда вектор $v(i, j, d)$ примитивен относительно подгруппы $G(1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, r)$ согласно лемме 2.46 из [8].

Лемма 5. *Пусть $G = A_2(K)$ и вес ω является p-ограниченным. Тогда если*

$$a_1 + 1, a_2 + 1 < p < a_1 + a_2 + 2,$$

то в ограничении $L(\omega)|H$ есть только подмодули Вейля $V(x)$ со старшими весами

$$\min\{p - a_1 - 1, p - a_2 - 1\} \leqslant x \leqslant a_1 + a_2.$$

В остальных случаях есть все подмодули Вейля $V(x)$ для $0 \leqslant x \leqslant a_1 + a_2$.

Доказательство. Из [9] известно, что при $a_1 + 1, a_2 + 1 < p < a_1 + a_2 + 2$ ограничение $L(\omega)|H$ не содержит неприводимых композиционных факторов $L(x)$ со старшими весами $0 \leqslant x \leqslant \min\{p - a_1 - 2, p - a_2 - 2\}$. Следовательно, это ограничение не может содержать и подмодули Вейля $V(x) \cong L(x)$ с такими старшими весами. Построим теперь другие подмодули Вейля. Поскольку по лемме 1, $L(a_1) \cong V(a_1)$, то из теоремы A (ii) [2] для

$H = G(1)$ вытекает, что H-подмодуль модуля $L(\omega)|H$, порожденный вектором $X_{-2,k}v^+$, $0 \leqslant k \leqslant a_2$, изоморфен модулю Вейля $V(a_1+k)$. Аналогично, используя теорему A (i) из [2] и $H = G(2)$, получаем подмодули Вейля $V(a_2+m)$, $0 \leqslant m \leqslant a_1$. Таким образом, при $a_1a_2 = 0$ лемма доказана.

Предположим, что $a_1a_2 \neq 0$ и будем искать в ограничении малые подмодули Вейля. Положим $H = G(1)$.

Пусть сначала $a_1+a_2+2 \leqslant p$, или $a_1+1 = p$, или $a_2+1 = p$. Тогда по лемме 3 (i), $L(\omega) \cong V(\omega)$. Согласно лемме 6 из [3], существуют примитивные относительно H векторы $v(k) \in V(\omega), 0 \leqslant k \leqslant a_1$, с весами $\omega(v(k)) = \omega - k(\alpha_1+\alpha_2)$. Имеем $\omega(v(k))|H = a_1 - k$. Таким образом, используя лемму 1 (i), получаем, что $KHv(k) = L(a_1-k) \cong V(a_1-k)$ является подмодулем ограничения $L(\omega)|H$.

Теперь пусть $a_1+1, a_2+1 < p < a_1+a_2+2$. По лемме 3 (ii),

$$L(\omega) \cong V(\omega)/V(\omega-(a_1+a_2+2-p)(\alpha_1+\alpha_2)).$$

Отсюда следует, что вышеприведенные примитивные векторы $v(k) \in L(\omega)$ при $0 \leqslant k \leqslant$ $\leqslant a_1+a_2+1-p$. Применяя лемму 1 (i), получаем, что $KHv(k) = L(a_1-k) \cong V(a_1-k)$ является подмодулем ограничения $L(\omega)|H$, где

$$p-a_2-1 \leqslant a_1-k \leqslant a_1.$$

Аналогичным образом, рассматривая $H = G(2)$ вместо $G(1)$, получаем подмодули $V(x)$ со старшими весами $p-a_1-1 \leqslant x \leqslant a_2$. □

Лемма 6. *Пусть $G = B_3(K)$, $C_3(K)$ или $F_4(K)$, подгруппа H длинная в случае $G =$ $= B_3(K)$ и короткая в случае $G = C_3(K)$, и вес ω является p-ограниченным. Тогда в ограничении $L(\omega)|H$ есть все подмодули Вейля $V(x)$ со старшими весами $0 \leqslant x \leqslant a_1+a_2$ ($0 \leqslant x \leqslant a_3+a_4$, если $G = F_4(K)$ и подгруппа H короткая).*

Доказательство.

1. Предположим сначала, что $G = B_3(K)$. Положим

$$S = G(1,2) \text{ и } \lambda = \omega|S = a_1\omega_1 + a_2\omega_2.$$

Мы можем считать, что $H = G(2) \subset S$.

Пусть $a_1+a_2+2 \leqslant p$, или $a_1+1 = p$, или $a_2+1 = p$. Тогда по лемме 4, $KSv^+ \cong L(\lambda)$ – подмодуль в $L(\omega)|S$. Применяя теперь лемму 5, получаем в ограничении $L(\lambda)|H$ подмодули Вейля со старшими весами $V(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a_1+a_2$.

Теперь пусть $a_2+a_3+2 > p$, тогда существует целое число k, $0 \leqslant k \leqslant a_3$, такое, что $a_2+k = p-1$. Положим $v = X_{-3,k}v^+$, $\mu = \omega(v)|S = a_1\omega_1 + (p-1)\omega_2$, $M = KSv$ – подмодуль в ограничении $L(\omega)|S$. Тогда согласно лемме 3 (i) $L(\mu) \cong V(\mu) \cong M$. Из леммы 5 получаем подмодули Вейля со старшими весами $V(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a_1+p-1$, в ограничении $M|H$.

Следовательно, можно считать, что $a_1+1 < p < a_1+a_2+2$ и $a_2+a_3+2 \leqslant p$. Положим $S_2 = G(2,3)$, $H \subset S_2$. Из леммы 2.46 в [8] вытекает, что для $0 \leqslant i \leqslant a_2$ вектор

$$v_2(i) = v(3,2,i) = X_{-3,2i+a_3}X_{-2,i}v^+$$

примитивен относительно подгруппы S_2. Его вес относительно S_2 равен

$$\omega(v_2(i))|S_2 = (a_1+i)\omega_1 + (a_2+a_3)\omega_2.$$

Из наших условий следует, что существует целое число i_0 такое, что $(a_1+i_0) = p-1$. Модуль $N = KSv_2(i_0)$ является подмодулем ограничения $L(\omega)|S_2$ и порождается вектором $v_2(i_0)$ старшего веса $\nu = \omega(v_2(i_0))|S_2$. По лемме 3 (i), $L(\nu) \cong V(\nu)$, а значит, модуль $N \cong$ $\cong L(\nu)$. Ограничивая этот подмодуль в свою очередь на подгруппу H и используя лемму 5, получаем подмодули Вейля со старшими весами $V(x)$,

$$0 \leqslant x \leqslant a_1+i_0+a_2+a_3,$$

т. е. все недостающие.

2. Пусть $G = C_3(K)$. Рассуждаем по той же схеме, что и в пункте 1. Положим $S = G(1,2)$, $H = G(2)$ и $\lambda = \omega|S = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$. По лемме 4, $KSv^+ \cong L(\lambda)$ – подмодуль $L(\omega)|S$.

Если $a_1 + a_2 + 2 \leqslant p$, или $a_1 + 1 = p$, или $a_2 + 1 = p$, то по лемме 5 в ограничении $L(\lambda)|H$ есть подмодули Вейля со старшими весами $V(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a_1 + a_2$.

Значит, можно считать, что $a_1 + 1, a_2 + 1 < p < a_1 + a_2 + 2$. Из леммы 5 следует, что в ограничении $L(\lambda)|H$ есть подмодули Вейля со старшими весами $V(x)$, $\min\{p - a_1 - 1, p - a_2 - 1\} \leqslant x \leqslant a_1 + a_2$. Найдем подмодули Вейля с малыми весами.

Предположим сначала, что $a_2 + 2a_3 + 2 > p$. Определим вектор $v = X_{-3,k}v^+$, $0 \leqslant k \leqslant a_3$, и положим $\mu = \omega(v)|S = a_1\omega_1 + (a_2 + 2k)\omega_2$, $M = KSv$. Тогда M будет подмодулем в ограничении $L(\omega)|S$. Из нашего условия следует, что мы можем выбрать число k_0, такое что $a_2 + 2k_0 = p - 1$ или $p - 2$. Если $a_2 + 2k_0 = p - 1$, то согласно лемме 3 (i) $L(\mu) \cong V(\mu) \cong M$. По лемме 5 получаем подмодули Вейля со старшими весами $V(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a_1 + p - 1$, в ограничении $M|H$. Пусть теперь $a_2 + 2k_0 = p - 2$. Согласно лемме 2.13 из [6] и лемме 3 модуль M – это $L(\mu)$ либо $V(\mu)$. Положим на время $H = G(1)$. В обоих случаях по лемме 6 из [3], существуют примитивные относительно H векторы $v(i) \in M$, $0 \leqslant i \leqslant a_1 - 1$, с весами $\omega(v(i))|S = \mu - i(\alpha_1 + \alpha_2)$. Имеем $\omega(v(i))|H = a_1 - i$. По лемме 1 (i) порожденные ими подмодули будут подмодулями Вейля. Значит, нам осталось найти только подмодуль $V(0)$. Снова пусть $H = G(2)$. Взяв $k = k_0 + 1$, получаем $\mu = a_1\omega_1 + p\omega_2$. По теореме Стейнберга [4] $L(\mu) = L(a_1\omega_1) \otimes L(\omega_2)^p$. Используя лемму 5, находим в S-модуле $L(a_1\omega_1)$ подмодуль $V(0) \cong L(0)$, который очевидно порождается примитивным относительно H вектором v_1 со старшим весом 0. Аналогично в $L(\omega_2)$ находим примитивный вектор v_2 со старшим весом 0. Тогда $v = v_1 \otimes v_2^p \in M$ – примитивный относительно H вектор со старшим весом 0. Он порождает подмодуль $V(0) \cong L(0)$ ограничения $M|H$.

Следовательно, остается случай $a_1 + 1 < p < a_1 + a_2 + 2$ и $a_2 + 2a_3 + 2 \leqslant p$. Положим $v = X_{-3,a_3}v^+$, $\mu = \omega(v) = a_1\omega_1 + (a_2 + a_3)\omega_2$, $M = KSv$. Тогда M будет подмодулем в ограничении $L(\omega)|S$. Применяя лемму 2.13 из [6] и лемму 3, получаем, что модуль M – это $L(\mu)$ либо $V(\mu)$. Как и в пункте 1, обозначим $S_2 = G(2,3)$. Из леммы 2.46 в [8] вытекает, что для $0 \leqslant i \leqslant a_2$ вектор

$$v_2(i) = v(3,2,i) = X_{-3,i+a_3}X_{-2,i}v^+$$

примитивен относительно подгруппы S_2. Его вес равен

$$\omega(v_2(i))|S_2 = (a_1 + i)\omega_1 + (a_2 + 2a_3)\omega_2.$$

Из наших условий следует, что существует целое число i_0 такое, что $(a_1 + i_0) = p - 1$. Модуль $N = KSv_2(i_0)$ является подмодулем ограничения $L(\omega)|S$ и порождается вектором старшего веса $\nu = \omega(v_2(i_0))$. По лемме 3 (i), $L(\nu) \cong V(\nu)$, а значит, модуль $N \cong L(\nu)$. Ограничивая этот подмодуль в свою очередь на подгруппу H и используя лемму 5, получаем подмодули Вейля со старшими весами $V(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a_1 + i_0 + a_2 + 2a_3$, т. е. все недостающие.

3. Наконец, пусть $G = F_4(K)$. Полагая $S = G(1,2,3) \cong B_3(K)$ и рассматривая S-модуль KSv, из леммы 4 и пункта 1 получаем искомое, если подгруппа H длинная. Если же H короткая, то положим $S' = G(2,3,4) \cong C_3(K)$ и воспользуемся пунктом 2. □

Теорема 1. *Пусть $G \neq F_4(K)$ – простая односвязная алгебраическая группа, ранг группы $r \geqslant 3$ при $G = A_r(K)$, $r \geqslant 4$ в остальных случаях, и вес ω является p-ограниченным. Также предположим, что подгруппа H длинная в случае $G = B_r(K)$ и короткая, в случае $G = C_r(K)$. Тогда в ограничении $L(\omega)|H$ есть все подмодули Вейля $V(x)$ со старшими весами $0 \leqslant x \leqslant b$, где*

$$b = \max\{a_i + a_j + a_k\}.$$

Здесь максимум берется по всем таким индексам i, j, k, что подгруппа $G(i,j,k) \cong A_3(K)$.

Доказательство. Рассмотрим случай $G = A_3(K)$. Положим $S_1 = G(1,2)$ и $S_2 = G(2,3)$, $\lambda = \omega|S_1 = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ и $\mu = \omega|S_2 = a_2\omega_1 + a_3\omega_2$. Мы можем считать, что $H = G(2) \subset S_i$ для $i = 1$ и 2.

Пусть сначала $a_1 + a_2 + 2 \leqslant p$. Тогда по лемме 3 (i), $L(\lambda) \cong V(\lambda)$. Поэтому из теоремы А (ii) в [2] следует, что S_1-подмодуль модуля $L(\omega)|S_1$, порожденный вектором $X_{-3,a_3}v^+$, изоморфен модулю Вейля $V(a_1\omega_1 + (a_2 + a_3)\omega_2)$. Ограничивая последний модуль Вейля на H, получаем искомые подмодули Вейля $V(x)$ со старшими весами $0 \leqslant x \leqslant a = b$.

Если же $a_2 + a_3 + 2 \leqslant p$, то рассуждая аналогично для подгруппы S_2 и используя теперь теорему А (i) из [2], снова в ограничении $L(\omega)|H$ находим подмодули Вейля $V(x)$ со старшими весами $0 \leqslant x \leqslant a = b$.

Следовательно, можно считать, что $a_1 + a_2 + 2 > p$ и $a_2 + a_3 + 2 > p$. Тогда существует целое число k, $0 \leqslant k \leqslant a_3$, такое, что $a_2 + k = p - 1$. Снова, воспользовавшись теоремой А (ii) из [2], получаем, что S_1-подмодуль модуля $L(\omega)|S_1$, порожденный вектором $X_{-3,a_3}v^+$, изоморфен модулю Вейля $V(a_1\omega_1 + (a_2 + a_3)\omega_2)$. Теорема для $G = A_3(K)$ доказана.

Теперь, применяя лемму 4 к подгруппе $G(i, j, k)$, получаем искомое для остальных групп. □

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф23-050).

Литература

1. *Shchigolev V.* A local criterion for Weyl modules for groups of type A // Journal of Pure and Applied Algebra. 2009. Vol. 213, N 9. P. 1681–1701.

2. *Shchigolev V.* Weyl submodules in restrictions of simple modules // J. Algebra. 2009. Vol. 321. P. 1453–1462.

3. *Osinovskaya A. A.* The restrictions of representations of special linear groups to subsystem subgroups of type $A_1 \times A_1$ // Тр. Ин-та математики. 2021. Т. 29, № 1–2. С. 175–187.

4. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975.

5. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли, гл. IV–VI. М.: Мир, 1972.

6. *Jantzen J. C.* Representations of Algebraic Groups. Second edition. Providence: Amer. Math. Soc., 2003.

7. *Smith S.* Irreducible modules and parabolic subgroups // J. Algebra. 1982. Vol. 75. P. 286–289.

8. *Suprunenko I. D.* The minimal polynomials of unipotent elements in irreducible representations of the classical groups in odd characteristic // Memoirs of the AMS. 2009. Vol. 200, N 939.

9. *Osinovskaya A. A.* Restrictions of irreducible representations of classical algebraic groups to root A_1-subgroups // Commun. in Algebra. 2003. Vol. 31, N 5. P. 2357–2379.

A. A. Osinovskaya

Weyl submodules in the restrictions of representations of simple algebraic groups to subgroups $SL_2(K)$

Summary

Under certain restrictions, Weyl submodules with small highest weights in the restrictions of irreducible representations of simple algebraic groups to subsystem subgroups of type A_1 over a field of positive characteristic are found.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 2. С. 63–80

УДК 512.542

О КРИТИЧЕСКИХ σ-ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

И. Н. Сафонова

Белорусский государственный университет
e-mail: in.safonova@mail.ru
Поступила 08.12.2023

В работе изучаются минимальные σ-локальные не $\mathfrak{H}$-формации конечных групп (или, иначе, $\mathfrak{H}_\sigma$-критические формации), т. е. такие σ-локальные формации, не входящие в класс групп $\mathfrak{H}$, все собственные σ-локальные подформации которых содержатся в $\mathfrak{H}$. Получено описание минимальных σ-локальных не $\mathfrak{H}$-формаций для произвольной σ-локальной формации $\mathfrak{H}$ классичесского типа, т. е. σ-локальной формации, имеющей такое σ-локальное определение, все неабелевы значения которого σ-локальны. Основной результат работы в классе σ-локальных формаций решает задачу Л. А. Шеметкова (1980 г.) об описании критических формаций для заданных классов конечных групп. В качестве следствий приведены описания $\mathfrak{H}_\sigma$-критических формаций для ряда конкретных классов конечных групп, таких как классы всех σ-нильпотентных, мета-σ-нильпотентных групп, а также класс всех групп с σ-нильпотентным коммутантом.

Введение. Изучение свойств формаций конечных групп и их классификация тесно связаны с исследованием вопросов наличия или отсутствия у изучаемой формации подформаций того или иного вида, а также их взаимного расположения в структуре подформаций данной формации. Поскольку решетка подформаций любой неединичной локальной формации бесконечна, то при изучении подформаций такой формации довольно затруднительно применение индуктивных рассуждений. Данное обстоятельство привело к необходимости разработки специальных методов исследования локальных формаций, связанных с понятием критической формации. В частности, при исследовании структурного строения локальных формаций важную роль играют минимальные локальные не $\mathfrak{H}$-формации [1] или, иначе, $\mathfrak{H}_l$-критические формации [2], т. е. такие локальные формации $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, все собственные локальные подформации которых содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

Общая задача изучения критических формаций была поставлена Л. А. Шеметковым на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп [1]. Решение этой задачи для локальных формаций было получено А. Н. Скибой в цикле работ 1980–1993 гг., завершающим результатом которого стало описание $\mathfrak{H}_l$-критических формаций для случая, когда $\mathfrak{H}$ – произвольная формация классического типа [3], т. е. формация, имеющая такой локальный экран, все неабелевы значения которого локальны. Результаты теории $\mathfrak{H}_l$-критических формаций широко использовались в вопросах классификации локальных формаций, при исследовании их структурного строения, а также при изучении несократимых факторизаций ограниченных и однопорожденных локальных формаций [4; 5].

В дальнейшем теория критических формаций конечных групп была развита для многих других типов формаций, таких как n-кратно локальные формации [6; 7], частично локальные [8–16], композиционные [17; 18] и ω-композиционные формации [19–25], тотально насыщенные формации [26; 27], Ω-расслоенные [28; 29] и ω-веерные [30] формации и др. В частности, в работах автора [9–11; 13; 16] разработана теория критических ω-локальных формаций. Некоторые ее приложения были найдены при изучении ω-локальных формаций с заданной структурой подформаций, а также при исследовании свойств полугруппы ω-локальных формаций [31; 32].

Разработка обобщенно локальных методов в теории формаций приводит к необходимости изучения и классификации критических σ-локальных формаций. При этом, следуя [1; 2], *минимальной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией* или *$\mathfrak{H}_\sigma$-критической формацией* мы называем σ-локальную формацию $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, все собственные σ-локальные подформации которой содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$. Изучение $\mathfrak{H}_\sigma$-критических формаций начато автором в работе [33], где доказан критерий для $\mathfrak{H}_\sigma$-критической формации, а также получено описание минимальных σ-локальных не $\mathfrak{H}$-формаций для таких формаций конечных групп, как формации всех Π-групп и всех σ-разрешимых Π-групп, где $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$, формация всех σ-разрешимых групп.

Следуя [2], σ-локальную формацию $\mathfrak{H}$ будем называть *σ-локальной формацией классического типа*, если $\mathfrak{H}$ имеет такое σ-локальное определение, все неабелевы значения которого σ-локальны.

В данной работе, в рамках общей задачи Л. А. Шеметкова по изучению критических формаций [1], нами получено описание минимальных σ-локальных не $\mathfrak{H}$-формаций для произвольной σ-локальной формации $\mathfrak{H}$ классического типа, а также даны описания $\mathfrak{H}_\sigma$-критических формаций для ряда конкретных классов конечных групп, таких как класс всех σ-нильпотентных групп, класс всех мета-σ-нильпотентных групп, класс всех групп с σ-нильпотентным коммутантом.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема A. *Пусть $\mathfrak{H}$ – σ-локальная формация классического типа и H – ее каноническое σ-локальное определение. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих условий:*

1) *$G = P$ – простая σ_i-группа, $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$;*

2) *P – не σ-примарная группа и $P = G^{H(\sigma_i)}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$;*

3) *$G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ – p-группа, $p \in \sigma_i$, а K – такая монолитическая группа с монолитом $Q = K^{H(\sigma_i)}$, что $\sigma_i \notin \sigma(Q)$ и либо $\Phi(K) = 1$ и $K^{H(\sigma_j)} \subseteq Q$ для всех $\sigma_j \in \sigma(Q)$, либо K – минимальная не $H(\sigma_i)$-группа одного из следующих типов:*

   а) *группа кватернионов порядка 8, если $2 \notin \sigma_i$;*

   б) *неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \notin \sigma_i$;*

   в) *циклическая q-группа, $q \notin \sigma_i$.*

Мы докажем теорему A в разделе 2 и приведем некоторые следствия данного результата.

1. Некоторые определения и вспомогательные результаты. Основные определения, обозначения и ряд свойств σ-локальных формаций представлены в работах [34–43]. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех чисел $\mathbb{P}$. Если n целое число, то $\sigma(n)$ обозначает множество $\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \sigma(n) \neq \varnothing\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Группу G называют [34]: σ-примарной, если G является σ_i-группой для некоторого i; σ-нильпотентной, если каждый главный фактор H/K группы G является σ-центральным в G, т. е. полупрямое произведение $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ является σ-примарным; σ-разрешимой, если $G = 1$ или $G \neq 1$ и каждый главный фактор G является σ-примарным.

Отметим, что класс всех σ-разрешимых групп обозначают через $\mathfrak{S}_\sigma$, а через $\mathfrak{N}_\sigma$ – класс всех σ-нильпотентных групп. Напомним также, что через (1) обозначают класс всех единичных групп.

Пусть $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$. Группу G называют Π-группой, если $\sigma(G) \subseteq \Pi$. Через $\mathfrak{G}_\Pi$ обозначают класс всех Π-групп, а через $\mathfrak{N}_\Pi$ – класс всех σ-нильпотентных Π-групп. В частности, если $\Pi = \{\sigma_i\}$, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – класс всех σ_i-групп, а $\mathfrak{G}_{\sigma_i'}$ – класс всех σ_i'-групп.

Символом $O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)$ обозначают $(\mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i})$-радикал группы G (наибольшую нормальную $(\mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i})$-подгруппу группы G), т. е. $O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) = G_{\mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i}}$.

Функцию f вида $f : \sigma \to \{$формации групп$\}$ называют формационной σ-функцией. Для всякой формационной σ-функции f класс $LF_\sigma(f)$ определяется следующим образом:

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

Если для некоторой формационной σ-функции f имеет место $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то говорят, что формация $\mathfrak{F}$ является σ-локальной, а f – σ-локальное определение $\mathfrak{F}$.

Если f – формационная σ-функция, то через $\mathrm{Supp}(f)$ обозначают носитель f, т. е. множество всех σ_i таких, что $f(\sigma_i) \neq \varnothing$.

Формационную σ-функцию f называют: внутренней, если $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$ для всех i; полной, если $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ для всех i. Если f – полная внутренняя формационная σ-функция и $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то f называют каноническим σ-локальным определением формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторая совокупность групп. Через $l_\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ обозначают пересечение всех σ-локальных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, и называют σ-локальной формацией, порожденной совокупностью групп $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G)$ для некоторой группы G, то $\mathfrak{F}$ называют однопорожденной σ-локальной формацией.

Для всякого класса групп $\mathfrak{F}$ и всякого $\sigma_i \in \sigma$ полагают

$$\mathfrak{F}(\sigma_i) = \begin{cases} (G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{F}), & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}), \\ \varnothing, & \text{если } \sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторый класс групп. Формацию $\mathfrak{F}$ называют минимальной не $\mathfrak{H}$-формацией или $\mathfrak{H}$-критической формацией, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{H}$.

σ-Локальную формацию $\mathfrak{F}$ будем называть *минимальной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией* или *$\mathfrak{H}_\sigma$-критической формацией* [33], если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все ее собственные σ-локальные подформации содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

Будем называть σ-локальную формацию $\mathfrak{F}$ *неприводимой σ-локальной формацией* (или, иначе, *l_σ-неприводимой формацией*), если $l_\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{X}_i \mid i \in I) \subset \mathfrak{F}$, где $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ – набор всех собственных σ-локальных подформаций из $\mathfrak{F}$. В противном случае формацию $\mathfrak{F}$ будем называть *приводимой σ-локальной формацией* (или, иначе, *l_σ-приводимой формацией*).

Для доказательства основного результата работы нам понадобятся некоторые известные факты теории формаций.

Следующие две леммы являются частными случаями лемм 2.3 и 2.6 работы [37] соответственно.

Лемма 1.1 [37]. *Если класс групп $\mathfrak{F}_j$ является σ-локальной формацией для всех $j \in J$, то класс $\bigcap_{j\in J}\mathfrak{F}_j$ также является σ-локальной формацией.*

Лемма 1.2 [37]. *Пусть $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{X}) = LF_\sigma(f)$ – σ-локальная формация, порожденная $\mathfrak{X}$, и $\Pi = \sigma(\mathfrak{X})$. Пусть m – формационная σ-функция, такая что $m(\sigma_i) = \mathrm{form}(\mathfrak{X}(\sigma_i))$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $m(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Тогда:*

(1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$,

(2) *m является σ-локальным определением $\mathfrak{F}$,*

(3) *$m(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ для всех i.*

Необходимо отметить, что σ-локальное определение m формации $\mathfrak{F}$ из леммы 1.2 является *наименьшим σ-локальным определением* формации $\mathfrak{F}$.

Лемма 1.3 [37]. *Пусть f и h – формационые σ-функции и пусть $\Pi = \mathrm{Supp}(f)$. Допустим, что $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f) = LF_\sigma(h)$. Тогда:*

(1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$.

(2) $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i\in\Pi}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i}f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_\Pi$. *Следовательно, $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.*

(3) *Если каждая группа из* $\mathfrak{F}$ *σ-разрешима, то* $\mathfrak{F} = (\cap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{S}_{\sigma_i'} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{S}_{\Pi}$.

(4) *Если* $\sigma_i \in \Pi$, *то* $\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$.

(5) $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$, *где* F *– единственная формационная σ-функция, такая что* $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi$ *и* $F(\sigma_i) = \varnothing$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi'$. *Более того,* $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$ *для всех* i.

Отметим, что формационная σ-функция F из условия леммы 1.3 является каноническим σ-локальным определением формации $\mathfrak{F}$.

Лемма 1.4 [33]. *Пусть* $\mathfrak{F}_j = LF_\sigma(f_j)$, *где* f_j *– наименьшее σ-локальное определение формации* $\mathfrak{F}_j$, $j = 1,2$. *Тогда в том и только том случае* $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, *когда* $f_1 \leq f_2$.

Лемма 1.5 [33]. *Если* $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ *и* $G/O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ *для некоторого* $\sigma_i \in \sigma(G)$, *то* $G \in \mathfrak{F}$.

Лемма 1.6 [4, с. 167]. *Пусть* A *– монолитическая группа с монолитом* P. *Тогда если* $P \not\subseteq \Phi(A)$, *то* $\mathrm{form}(A/P)$ *– единственная максимальная подформация формации* $\mathrm{form}(A)$.

Лемма 1.7 [37]. *Пусть* $\mathfrak{M} = LF_\sigma(m)$, *где* m *– внутренняя формационная σ-функция,* $\Pi = \sigma(\mathfrak{M})$ *и пусть* $\mathfrak{H}$ *– непустая формация. Допустим, что либо*

(i) $\mathfrak{H} = LF_\sigma(h)$, *где* h *– внутренняя формационная σ-функция, либо*

(ii) $\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}$ *для всех* $\sigma_i \in \sigma \setminus \Pi$.

Тогда $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H} = LF_\sigma(f)$, *где*

$$f(\sigma_i) = \begin{cases} m(\sigma_i) \circ \mathfrak{H}, & \text{\textit{если} } \sigma_i \in \Pi, \\ h(\sigma_i), & \text{\textit{если} } \sigma_i \in \sigma \setminus \Pi \ \text{\textit{в случае} (i)}, \\ \mathfrak{H}, & \text{\textit{если} } \sigma_i \in \sigma \setminus \Pi \ \text{\textit{в случае} (ii)}. \end{cases}$$

Лемма 1.8 [33]. *Пусть* $\mathfrak{H} = LF_\sigma(H)$, $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, *где* H *– каноническое σ-локальное определение формации* $\mathfrak{H}$, f *– наименьшее σ-локальное определение формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *является минимальной σ-локальной не* $\mathfrak{H}$*-формацией, когда* $\mathfrak{F} = l_\sigma \mathrm{form}(G)$, *где* G *– такая группа минимального порядка из* $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ *с монолитом* $P = G^{\mathfrak{H}}$, *что для всех* $\sigma_i \in \sigma(P)$ *формация* $f(\sigma_i)$ *является* $(H(\sigma_i))$*-критической.*

Частным случаем теоремы 1.13 [37] является следующая лемма.

Лемма 1.9 [37]. *Множество* l_σ *всех σ-локальных формаций образует подполугруппу полугруппы всех формаций* $G\mathfrak{G}$. *Более того,* $|l_\sigma| = 2^{\aleph_0}$ *для каждого* σ, *где* $|\sigma| > 1$, *а* $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ *является минимальным идемпотентом в* l_σ *для всех* $i \in I$.

Лемма 1.10 [4, с. 171]. *Если в группе* G *имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа и* $O_p(G) = 1$ (p *– некоторое простое число*), *то существует точный неприводимый* F_pG*-модуль, где* F_p *– поле из* p *элементов.*

Следующая лемма является прямым следствием лемм 1.3 и 1.4.

Лемма 1.11. *Пусть* $\mathfrak{F}_i = LF_\sigma(F_i)$, *где* F_i *– каноническое σ-локальное определение формации* $\mathfrak{F}_i$, $i = 1,2$. *Тогда* $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ *тогда и только тогда, когда* $F_1 \leqslant F_2$.

Лемма 1.12 [3, с. 175]. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *– минимальная неабелева формация, когда* $\mathfrak{F} = \mathrm{form}(A)$, *где* A *– одна из следующих групп:*

1) *ненильпотентная монолитическая группа с таким монолитом* P, *что* $P \not\subseteq \Phi(A)$ *и факторгруппа* A/P *абелева;*

2) *группа кватернионов порядка 8;*

3) *неабелева группа порядка* q^3 *простой нечетной экспоненты* q.

Следующая лемма является частным случаем следствия 19.16 [4].

Лемма 1.13 [4, с. 194]. *Тогда и только тогда формация* $\mathfrak{F}$ *нильпотентна, когда каждая подформация из* $\mathfrak{F}$ *наследственна.*

2. Минимальные σ-локальные не $\mathfrak{H}$-формации. Прежде чем мы докажем основной результат, установим справедливость следующих вспомогательных утверждений.

Лемма 2.1. *Пусть* Π *– непустое подмножество из* σ*. Тогда класс* $\mathfrak{G}_\Pi$ *всех* Π*-групп и класс* $\mathfrak{N}_\Pi$ *всех* σ*-нильпотентных* Π*-групп являются* σ*-локальными формациями и справедливы следующие утверждения:*

(1) $\mathfrak{G}_\Pi = LF_\sigma(g)$*, где* g *– каноническое* σ*-локальное определение формации* $\mathfrak{G}_\Pi$*. При этом,* $g(\sigma_i) = \mathfrak{G}_\Pi$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi$ *и* $g(\sigma_i) = \varnothing$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi'$*.*

(2) $\mathfrak{N}_\Pi = LF_\sigma(n) = LF_\sigma(N)$*, где* n *и* N*, соответственно, наименьшее и каноническое* σ*-локальные определения формации* $\mathfrak{N}_\Pi$*. При этом* $n(\sigma_i) = (1)$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi$ *и* $n(\sigma_i) = \varnothing$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi'$*,* $N(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi$ *и* $N(\sigma_i) = \varnothing$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi'$*.*

Доказательство. (1) См. замечание 2.4 [37].

(2) Пусть n – наименьшее и N – каноническое σ-локальные определения формации $\mathfrak{N}_\Pi$. Поскольку, формации $\mathfrak{G}_\Pi$ и $\mathfrak{N}_\sigma$ σ-локальны (см. пример 1.2(iv) [37]) и, очевидно, $\mathfrak{N}_\Pi = \mathfrak{N}_\sigma \cap \mathfrak{G}_\Pi$, то формация $\mathfrak{N}_\Pi$ σ-локальна по лемме 1.1.

Понятно, что $\mathfrak{N}_\Pi = l_\sigma\text{form}(\mathfrak{N}_\Pi)$. Тогда в силу леммы 1.2 имеем

$$n(\sigma_i) = \text{form}(\mathfrak{X}(\sigma_i)) = \text{form}(G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{N}_\Pi) = (1)$$

для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $n(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Применяя теперь лемму 1.3(5) получаем, что $N(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} n(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $N(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. □

Лемма 2.2. *Пусть* $G = P \rtimes K$*, где* $P = C_G(P)$ *– минимальная нормальная* p*-подгруппа группы* G*,* $p \in \sigma_i$ *для некоторого* i*, а* K *– такая монолитическая группа с монолитом* Q*, что* $\sigma_i \notin \sigma(Q)$ *и* $\Phi(K) = 1$*. Тогда формация* $\mathfrak{F} = l_\sigma\text{form}(G)$ *является* l_σ*-неприводимой и ее максимальная* σ*-локальная подформация* $\mathfrak{H}$ *имеет такое внутреннее* σ*-локальное определение* h*, что*

$$h(\sigma_i) = \text{form}(K/Q),\ h(\sigma_j) = \text{form}(G/O_{\sigma_j',\sigma_j}(G))$$

для всех $\sigma_j \in \sigma(G) \setminus \{\sigma_i\}$ *и* $h(\sigma_j) = \varnothing$ *для всех* $\sigma_j \notin \sigma(G)$*.*

Доказательство. Пусть h – формационная σ-функция, удовлетворяющая условиям леммы, и $\mathfrak{H} = LF_\sigma(h)$. Вначале покажем, что $G/P \in \mathfrak{H}$.

Пусть $\sigma_j \in \sigma(G) \setminus \{\sigma_i\}$. Тогда поскольку P – σ_i-группа, то $P \subseteq O_{\sigma_j'}(G) \subseteq O_{\sigma_j',\sigma_j}(G)$. Следовательно, $O_{\sigma_j',\sigma_j}(G/P) = O_{\sigma_j',\sigma_j}(G)/P$. Поэтому

$$G/O_{\sigma_j',\sigma_j}(G) \simeq (G/P)/(O_{\sigma_j',\sigma_j}(G)/P) = (G/P)/O_{\sigma_j',\sigma_j}(G/P).$$

Поскольку по условию $h(\sigma_j) = \text{form}(G/O_{\sigma_j',\sigma_j}(G))$, то $(G/P)/O_{\sigma_j',\sigma_j}(G/P) \in h(\sigma_j)$.

Пусть при каноническом изоморфизме $K \simeq G/P$ подгруппе Q в группе G/P соответствует подгруппа R/P. Тогда, ввиду условия леммы, $\sigma_i \notin \sigma(R/P)$. Значит, $R/P \subseteq O_{\sigma_i'}(G/P)$. Следовательно, $R/P \subseteq O_{\sigma_i'}(G/P) \subseteq O_{\sigma_i',\sigma_i}(G/P)$. Так как при этом

$$(G/P)/(R/P) \simeq K/Q \in \text{form}(K/Q) = h(\sigma_i),$$

то $(G/P)/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G/P) \in h(\sigma_i)$. Таким образом, для любого $\sigma_k \in \sigma(G/P)$ имеет место $(G/P)/O_{\sigma_k',\sigma_k}(G/P) \in h(\sigma_k)$. Отсюда следует, что $G/P \in LF_\sigma(h) = \mathfrak{H}$.

Покажем теперь, что h является внутренней формационной σ-функцией. Поскольку по условию леммы $h(\sigma_i) = \text{form}(K/Q)$ и $G/P \in \mathfrak{H}$, то

$$h(\sigma_i) \subseteq \text{form}(K) = \text{form}(G/P) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Пусть теперь $\sigma_j \in \sigma(G) \setminus \{\sigma_i\}$. Тогда $O_{\sigma_j',\sigma_j}(G)/P = O_{\sigma_j',\sigma_j}(G/P)$. Значит, поскольку $G/O_{\sigma_j',\sigma_j}(G) \simeq (G/P)/O_{\sigma_j',\sigma_j}(G/P)$ и $G/P \in \mathfrak{H}$, то $G/O_{\sigma_j',\sigma_j}(G) \in \mathfrak{H}$. Следовательно,

$$h(\sigma_j) = \text{form}(G/O_{\sigma_j',\sigma_j}(G)) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Таким образом, h – внутреннее σ-локальное определение формации $\mathfrak{H}$.

Пусть теперь $\mathfrak{M}$ – произвольная собственная σ-локальная подформация $\mathfrak{F}$ и m – ее наименьшее σ-локальное определение. Покажем, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Обозначим через f наименьшее σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 1.2 $f(\sigma_k) = \mathrm{form}(G/O_{\sigma_k',\sigma_k}(G))$ для всех $\sigma_k \in \sigma(G)$ и $f(\sigma_k) = \varnothing$ для всех $\sigma_k \notin \sigma(G)$.

Согласно лемме 1.4 имеем $m \leq f$. Пусть $\sigma_j \in \sigma(G) \setminus \{\sigma_i\}$. Тогда, ввиду условия леммы, имеет место равенство $h(\sigma_j) = f(\sigma_j)$. Значит, для всех $\sigma_j \in \sigma(G) \setminus \{\sigma_i\}$ имеем $m(\sigma_j) \subseteq h(\sigma_j)$.

Покажем, что $m(\sigma_i) \subset f(\sigma_i)$. Допустим $m(\sigma_i) = f(\sigma_i)$. Тогда поскольку единственная минимальная нормальная подгруппа P группы G является σ_i-группой и $O_{\sigma_i}(K) = 1$ по условию, то $P = O_{\sigma_i}(G)$. Поэтому $G/O_{\sigma_i}(G) = G/P \in m(\sigma_i)$. Значит, по лемме 1.5 имеем $G \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G) \subseteq \mathfrak{M}$. Последнее противоречит определению формации $\mathfrak{M}$. Таким образом, $m(\sigma_i) \subset f(\sigma_i)$.

В силу леммы 1.6 формация $\mathrm{form}(K/Q) = h(\sigma_i)$ является единственной максимальной подформацией формации $\mathrm{form}(G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)) = \mathrm{form}(G/P) = \mathrm{form}(K)$. Поэтому $m(\sigma_i) \subseteq$ $\subseteq \mathrm{form}(K/Q) = h(\sigma_i)$. Таким образом, для всех $\sigma_k \in \sigma$ имеет место $m(\sigma_k) \subseteq h(\sigma_k)$. Последнее влечет $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$.

Покажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Для этого достаточно установить, что $h \leqslant f$. По лемме 1.2 $f(\sigma_i) =$ $= \mathrm{form}(G/P) = \mathrm{form}(K)$. Следовательно, $K/Q \in f(\sigma_i)$. Поэтому $h(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i)$. С другой стороны, по условию $h(\sigma_j) = \mathrm{form}(G/O_{\sigma_j',\sigma_j}(G)) = f(\sigma_j)$ для всех $\sigma_j \in \sigma(G) \setminus \{\sigma_i\}$. Таким образом, для всех σ_k справедливо включение $h(\sigma_k) \subseteq f(\sigma_k)$. Поэтому $h \leqslant f$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Докажем теперь, что $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Допустим, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ и пусть k – наименьшее σ-локальное определение формации $\mathfrak{H}$. Тогда $k = f$ и, кроме того, $k \leq h$. Но $h(\sigma_i) \subset f(\sigma_i)$. Значит, $k(\sigma_i) \subset f(\sigma_i)$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ является l_σ-неприводимой и $\mathfrak{H}$ – единственная максимальная σ-локальная подформация формации $\mathfrak{F}$. □

Лемма 2.3. *Пусть $\mathfrak{M}$ – непустая формация, $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\Pi'}\mathfrak{N}_\Pi\mathfrak{M}$, где Π – некоторое непустое подмножество из σ. Тогда $\mathfrak{H}$ – σ-локальная формация и ее каноническое σ-локальное определение H такое, что $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $H(\sigma_i) = \mathfrak{H}$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$.*

Доказательство. Положим $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\Pi'}\mathfrak{N}_\Pi$ и пусть H – каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{H}$. По лемме 2.1 формация $\mathfrak{G}_{\Pi'}$ имеет такое внутреннее σ-локальное определение g, что $g(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\Pi'}$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$ и $g(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi$, а формация $\mathfrak{N}_\Pi$ имеет такое внутреннее σ-локальное определение n, что $n(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $n(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Значит, по лемме 1.7 формация $\mathfrak{F}$ имеет такое σ-локальное определение f, что $f(\sigma_i) = g(\sigma_i)\mathfrak{N}_\Pi = \mathfrak{G}_{\Pi'}\mathfrak{N}_\Pi$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$ и $f(\sigma_i) = n(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$. В свою очередь формация $\mathfrak{H}$, ввиду леммы 1.7, имеет такое σ-локальное определение h, что $h(\sigma_i) = f(\sigma_i)\mathfrak{M} = \mathfrak{G}_{\Pi'}\mathfrak{N}_\Pi\mathfrak{M}$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$ и $h(\sigma_i) = f(\sigma_i)\mathfrak{M} = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$. Поскольку $h(\sigma_i) = \mathfrak{H}$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$ и $h(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$, то σ-локальное определение h является внутренним. Кроме того, очевидно, $h(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}h(\sigma_i)$ для всех σ_i. Таким образом, $h = H$ – каноническое σ-локальное определение $\mathfrak{H}$. □

Лемма 2.4. *Пусть G – монолитическая группа с не σ-примарным монолитом P. Тогда формация $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G)$ является l_σ-неприводимой и ее максимальная σ-локальная подформация $\mathfrak{H}$ имеет такое внутреннее σ-локальное определение h, что $h(\sigma_i) = \mathrm{form}(G/P)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$, $h(\sigma_i) = \mathrm{form}(G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G))$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G) \setminus \sigma(P)$ и $h(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \notin \sigma(G)$.*

Доказательство. Пусть h – формационная σ-функция, удовлетворяющая условиям леммы, $\mathfrak{H} = LF_\sigma(h)$. Покажем, что $G/P \in \mathfrak{H}$.

Пусть $\sigma_i \in \sigma(G/P)$. Допустим, что $\sigma_i \in \sigma(P)$. Тогда $h(\sigma_i) = \mathrm{form}(G/P)$ и поэтому $(G/P)/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G/P) \in h(\sigma_i)$. Пусть $\sigma_i \in \sigma(G/P) \setminus \sigma(P)$. Тогда поскольку $G \in \mathfrak{F}$, то

$G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i)$, где f – наименьшее σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$. По лемме 1.2 имеем $f(\sigma_i) = \mathrm{form}(G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)) = h(\sigma_i)$. Значит, $G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \in h(\sigma_i)$. Таким образом, для всех $\sigma_i \in \sigma(G/P)$ имеет место $(G/P)/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G/P) \in h(\sigma_i)$. Последнее влечет $G/P \in \in LF_\sigma(h) = \mathfrak{H}$. В частности, для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$ имеет место $h(\sigma_i) = \mathrm{form}(G/P) \subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть $\sigma_i \in \sigma(G) \setminus \sigma(P)$. Тогда $P \subseteq O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)$ и поэтому $G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)$ – гомоморфный образ G/P. Следовательно, $G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \in \mathrm{form}(G/P) \subseteq \mathfrak{H}$. Последнее означает, что $h(\sigma_i) \subseteq \subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, h – внутреннее σ-локальное определение $\mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольная собственная σ-локальная подформация формации $\mathfrak{F}$, m – ее наименьшее σ-локальное определение. Покажем, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Ввиду леммы 1.4 имеем $m \leq f$. Кроме того, по лемме 1.2 для всех $\sigma_i \in \sigma(G) \setminus \sigma(P)$ имеет место $h(\sigma_i) = f(\sigma_i)$. Значит, $m(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G) \setminus \sigma(P)$. Пусть теперь $\sigma_i \in \sigma(P)$. Тогда $O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) = = 1$ и по лемме 1.2 имеет место равенство $f(\sigma_i) = \mathrm{form}(G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)) = \mathrm{form}(G)$. Если $f(\sigma_i) = m(\sigma_i)$, то $G \in m(\sigma_i)$. Но m – внутреннее σ-локальное определение формации $\mathfrak{M}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{M}$ и поэтому $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G) \subseteq \mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, $m(\sigma_i) \subset f(\sigma_i)$. По лемме 1.6 формация $f(\sigma_i) = \mathrm{form}(G)$ имеет единственную максимальную подформацию в $\mathrm{form}(G/P) = h(\sigma_i)$. Значит, $m(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_i)$. Таким образом, $m \leq h$ и поэтому $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ по лемме 1.4.

По определению формационной σ-функции h имеем $h(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i)$ для всех σ_i. Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\sigma_i \in \sigma(P)$, то $h(\sigma_i) = \mathrm{form}(G/P) \subset f(\sigma_i)$. Значит, если t – минимальное σ-локальное определение формации $\mathfrak{H}$, то $t(\sigma_i) \subset f(\sigma_i)$. Последнее означает, что $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Следовательно, формация $\mathfrak{F}$ является l_σ-неприводимой и $\mathfrak{H}$ – единственная максимальная σ-локальная подформация $\mathfrak{F}$. □

Лемма 2.5. *Пусть $\mathfrak{M}$ – σ-локальная формация, $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что $\sigma_i \in \sigma(P)$, и либо P – не σ-примарная группа и $P = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}}$, либо $G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ – абелева p-группа, $p \in \sigma_i$, а K – такая монолитическая группа с монолитом $Q = K^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}}$, что $Q \not\subseteq \Phi(K)$ и $\sigma_i \notin \sigma(Q)$.*

Доказательство. Обозначим через f минимальное σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$, а через H – каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{H}$.

Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация. Тогда по лемме 1.8 $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G)$, где G – такая группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$ формация $f(\sigma_i)$ является $(H(\sigma_i))$-критической. Кроме того, поскольку $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{H}$, то $\sigma_i \in \sigma(P)$.

Пусть P – не σ-примарная группа. Тогда ввиду леммы 2.4 формация $\mathfrak{F}$ является l_σ-неприводимой и ее максимальная σ-локальная подформация $\mathfrak{L}$ имеет такое внутреннее σ-локальное определение l, что $l(\sigma_j) = \mathrm{form}(G/P)$ для всех $\sigma_j \in \sigma(P)$. Поскольку $\mathfrak{F}$ минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация, то $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$. Значит, с учетом лемм 1.3 и 1.4, имеет место $l \leq H$. Ввиду леммы 2.3 имеем $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}$. Таким образом, $G/P \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}$. Понятно также, что $G \notin \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}$. Значит, $P = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}}$.

Пусть теперь P – σ_i-группа. Заметим, что поскольку $P = G^{\mathfrak{H}}$ и $P \leqslant O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)$, то с учетом леммы 1.2 имеем $f(\sigma_i) = \mathrm{form}(G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)) \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть K – группа минимального порядка из $f(\sigma_i) \setminus H(\sigma_i)$. Тогда K – монолитическая группа с монолитом $Q = K^{H(\sigma_i)} = K^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}}$. Покажем, что $Q \not\subseteq \Phi(K)$. Предположим противное. Тогда поскольку $K/Q \in H(\sigma_i)$, то $K/\Phi(K) \in H(\sigma_i)$. Но ввиду леммы 1.9 $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}$ – насыщенная формация. Следовательно, $K \in H(\sigma_i)$. Противоречие. Поэтому $\Phi(K) = 1$.

Поскольку $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}$, то $O_{\sigma_i}(K) = 1$ и, следовательно, $O_p(K) = 1$, где $p \in \sigma_i$. Ввиду леммы 1.10 существует точный неприводимый F_pK-модуль P. Пусть $L = P \rtimes K$. Тогда $P = C_L(P)$ – минимальная нормальная p-подгруппа группы L. Поскольку σ-локальное определение f является внутренним и $O_{\sigma_i}(L) = P$, то по лемме 1.5 имеем $L \in \mathfrak{F}$. Понятно также, что $P = O_{\sigma_i',\sigma_i}(L)$. Обозначим через l минимальное σ-локальное определение формации $\mathfrak{L} = l_\sigma\mathrm{form}(L)$. По лемме 1.2 имеет место равенство

$$l(\sigma_i) = \mathrm{form}(L/O_{\sigma_i',\sigma_i}(L)) = \mathrm{form}(K).$$

Если $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{F}$, то по условию $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$. Значит, с учетом леммы 1.4, имеет место $l \leq H$. Поэтому $l(\sigma_i) = \mathrm{form}(K) \subseteq H(\sigma_i)$. Последнее противоречит определению группы K. Таким образом, $\mathfrak{L} = \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(L)$.

Предположим, что $\sigma_i \in \sigma(Q)$. Так как при этом $O_{\sigma_i}(K) = 1$, то Q – не σ-примарная группа. Поскольку $K \in f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$ и $O_{\sigma_i',\sigma_i}(K) = 1$, то $K \simeq K/O_{\sigma_i',\sigma_i}(K) \in H(\sigma_i)$. Получаем противоречие с определением группы K. Поэтому $\sigma_i \notin \sigma(Q)$. Таким образом, $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(L)$, где L – группа, удовлетворяющая условиям леммы.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация из условия леммы. В силу леммы 1.8 достаточно установить, что $f(\sigma_k)$ – минимальная не $H(\sigma_k)$-формация для всех $\sigma_k \in \sigma(P)$.

Пусть P – не σ-примарная группа. Тогда $O_{\sigma_k',\sigma_k}(G) = 1$ для всех $\sigma_k \in \sigma(P)$. Следовательно, ввиду леммы 1.2 для всех таких σ_k имеет место равенство $f(\sigma_k) = \mathrm{form}(G)$. По лемме 1.6 формация $f(\sigma_k)$ неприводима и ее максимальная подформация совпадает с $\mathrm{form}(G/P)$. По условию $P = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}}$. Значит, $G/P \in H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}$. Поэтому с учетом леммы 1.3(5) имеет место включение

$$\mathrm{form}(G/P) \subseteq H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} = H(\sigma_k)$$

при всех $\sigma_k \in \sigma(P) \setminus \{\sigma_i\}$. Так как при этом $P = G^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}}$, то $f(\sigma_k)$ не содержится в $H(\sigma_k)$ для всех $\sigma_k \in \sigma(P)$. Таким образом, если P – не σ-примарная группа, то $f(\sigma_k)$ – минимальная не $H(\sigma_k)$-формация для всех $\sigma_k \in \sigma(P)$.

Пусть P – σ_i-группа. Тогда поскольку $O_{\sigma_i'}(G) = 1$ и $O_{\sigma_i}(K) = 1$, то $O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) = P$. Следовательно, в силу леммы 1.2 имеет место равенство

$$f(\sigma_i) = \mathrm{form}(G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)) = \mathrm{form}(K).$$

Поскольку группа K монолитична и $\Phi(K) = 1$, то $\mathrm{form}(K/Q)$ – единственная максимальная подформация формации $f(\sigma_i)$ по лемме 1.6. Так как по условию $Q = K^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}}$, то

$$\mathrm{form}(K/Q) \subseteq H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}.$$

Значит, $f(\sigma_i)$ – минимальная не $H(\sigma_i)$-формация. Таким образом, $\mathfrak{F}$ – минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация по лемме 1.6. □

Лемма 2.6. *Пусть $\mathfrak{M}$ – непустая абелева формация, $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что $\sigma_i \in \sigma(P)$, и либо $P = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}}$ – не σ-примарная группа, либо $G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ – p-группа, $p \in \sigma_i$, а K одна из следующих групп:*

1) *монолитическая группа с таким монолитом $Q = K^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}} \nsubseteq \Phi(K)$, что $\sigma_i \notin \sigma(Q)$;*
2) *минимальная не $\mathfrak{M}$-группа одного из следующих типов:*
   а) *группа кватернионов порядка 8, если $2 \notin \sigma_i$;*
   б) *неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \notin \sigma_i$;*
   в) *циклическая q-группа, $q \notin \sigma_i$.*

Доказательство. Пусть f – наименьшее σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$ и H – каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{H}$.

Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация и предположим, что $\mathfrak{F}$ не содержится в $(\mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i})\mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{L}$. Так как $\mathfrak{M}$ содержится в классе всех σ-нильпотентных групп $\mathfrak{N}_\sigma$, то $(\mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i})\mathfrak{M} \subseteq (\mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i})\mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{L}$. Поэтому $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{L}$-формацией. Поскольку формация $\mathfrak{N}_\sigma$ σ-локальна, то в силу леммы 2.5 имеем $\mathfrak{F} = l_\sigma \mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{L}}$, что $\sigma_i \in \sigma(P)$, и либо P – не σ-примарная группа и $P = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{N}_\sigma}$, либо $G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ – p-группа, $p \in \sigma_i$, а K – такая монолитическая группа с монолитом $Q = K^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{N}_\sigma}$, что $Q \not\subseteq \Phi(K)$ и $\sigma_i \notin \sigma(Q)$.

Обозначим через $\mathfrak{F}_1$ максимальную σ-локальную подформацию формации $\mathfrak{F}$ и F_1 – ее каноническое σ-локальное определение. В силу леммы 2.3 имеем $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}$. Заметим также, что поскольку $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то $G \notin \mathfrak{H}$ и $P \leqslant G^{\mathfrak{H}}$.

Пусть P – не σ-примарная группа. Тогда поскольку $\sigma_i \in \sigma(P)$, то ввиду леммы 2.4 формация $\mathfrak{F}_1$ имеет такое внутреннее σ-локальное определение f_1, что $f_1(\sigma_i) = \mathrm{form}(G/P)$. В силу леммы 1.3 имеет место $f_1 \leq F_1$. Поскольку по условию $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$, то $f_1 \leq F_1 \leq H$ по лемме 1.11. Значит, $G/P \in H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ и $G^{\mathfrak{H}} \leqslant P$. Таким образом, если P – не σ-примарная группа, то $P = G^{\mathfrak{H}}$ и группа G удовлетворяет условию леммы.

Пусть P – σ-примарная группа. Тогда по лемме 2.2 формация $\mathfrak{F}_1$ имеет такое внутреннее σ-локальное определение f_1, что $f_1(\sigma_i) = \mathrm{form}(K/Q)$. Поскольку $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$, то в силу леммы 1.11 имеют место неравенства $f_1 \leq F_1 \leq H$. Следовательно, имеем

$$f_1(\sigma_i) = \mathrm{form}(K/Q) \subseteq H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}.$$

Кроме того, так как $Q = K^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{N}_\sigma}$, то $K \notin \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{N}_\sigma$. Поэтому $Q = K^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}}$. Таким образом, K удовлетворяет условию 1) леммы. Покажем теперь, что $P = G^{\mathfrak{H}}$. Так как $K/Q \in H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}$ и, кроме того, $\sigma_i \notin \sigma(Q)$, то $K \in \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$. Поэтому $G/P \simeq K \in \mathfrak{H}$ и $G^{\mathfrak{H}} \leqslant P$. Таким образом, $P = G^{\mathfrak{H}}$ и группа G удовлетворяет условию леммы.

Пусть теперь $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}$. Тогда по лемме 1.8 имеем $\mathfrak{F}$ – σ-локальная формация, порожденная такой монолитической группой A с монолитом $A^{\mathfrak{H}}$, что $f(\sigma_k)$ – минимальная не $H(\sigma_k)$-формация для всех $\sigma_k \in \sigma(A^{\mathfrak{H}})$.

Понятно, что $\sigma_i \in \sigma(A^{\mathfrak{H}})$. Пусть L – каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{L}$. По лемме 2.3 $L(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{N}_\sigma$. Поскольку $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}$, то $f(\sigma_i) \subseteq L(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{N}_\sigma$. Ввиду леммы 1.2 имеем $f(\sigma_i) = \mathrm{form}(B \mid B \in f(\sigma_i), O_{\sigma_i}(B) = 1)$. Поэтому $f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma_i'}$.

Поскольку все собственные подформации формации $f(\sigma_i)$ входят в $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}$, то с учетом $\mathfrak{N}_{\sigma_i'} \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma_i'}\mathfrak{M}$ все собственные подформации $f(\sigma_i)$ входят в

$$\mathfrak{N}_{\sigma_i'} \cap \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma_i'}\mathfrak{M} \cap \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M} = (\mathfrak{N}_{\sigma_i'} \cap \mathfrak{G}_{\sigma_i})\mathfrak{M} = \mathfrak{M}.$$

С другой стороны, $f(\sigma_i)$ не входит в $\mathfrak{M}$, иначе $f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M} = H(\sigma_i)$, что невозможно. Значит, $f(\sigma_i)$ – минимальная не $\mathfrak{M}$-формация.

Пусть $f(\sigma_i) \not\subseteq \mathfrak{A}$. Тогда поскольку $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}$, то $f(\sigma_i)$ – минимальная неабелева формация. По лемме 1.12 $f(\sigma_i)$ – формация, порожденная группой K, где K – либо ненильпотентная монолитическая группа с таким монолитом Q, что $Q \not\subseteq \Phi(K)$ и факторгруппа K/Q абелева, либо группа кватернионов порядка 8, либо неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q.

Поскольку в каждом из этих случаев K является монолитической группой, $f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma_i'}$ и $f(\sigma_i) \not\subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M} = H(\sigma_i)$, то в первом случае K является σ_j-группой для некоторого $j \neq i$, во втором случае – $2 \notin \sigma_i$ и, соответственно, в последнем – $q \notin \sigma_i$. Пусть $p \in \sigma_i$. Тогда в силу леммы 1.10 существует точный неприводимый F_pK-модуль P. Положим $G = P \rtimes K$. Тогда поскольку $O_{\sigma_i}(K) = 1$, то $P = O_{\sigma_i}(G) = O_{\sigma_i', \sigma_i}(G)$. Так как

$$G/O_{\sigma_i}(G) = G/P \simeq K \in f(\sigma_i) = \mathrm{form}(K),$$

то $G \in \mathfrak{F}$ ввиду леммы 1.5. Допустим, что $l_\sigma \mathrm{form}(G) \neq \mathfrak{F}$. Тогда по условию $l_\sigma \mathrm{form}(G) \subseteq \mathfrak{H}$ и $G/O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \simeq K \in H(\sigma_i)$. Поэтому $f(\sigma_i) \subseteq H(\sigma_i)$. Противоречие. Значит, $l_\sigma \mathrm{form}(G) = \mathfrak{F}$. При этом, очевидно, $P = C_G(P) = G^{\mathfrak{H}}$.

Допустим, что K – ненильпотентная группа с таким монолитом Q, что $Q \not\subseteq \Phi(K)$ и факторгруппа K/Q абелева. Тогда по лемме 1.6 формация $f(\sigma_i) = \text{form}(K)$ имеет единственную максимальную подформацию $\text{form}(K/Q)$. Поскольку $f(\sigma_i)$ – минимальная не $\mathfrak{M}$-формация, то $K/Q \in \mathfrak{M}$. Поэтому $Q = K^{\mathfrak{M}}$ и K удовлетворяет условию 1) леммы.

Пусть теперь группа K нильпотентна. Тогда по лемме 1.13 формация $f(\sigma_i) = \text{form}(K)$ наследственна. Так как все собственные подгруппы группы K абелевы, а сама формация $f(\sigma_i)$ – неабелева, и при этом $f(\sigma_i)$ – минимальная не $\mathfrak{M}$-формация, то K – минимальная не $\mathfrak{M}$-группа. Таким образом, группа K удовлетворяет условию 2) леммы.

Пусть теперь $f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{A}$. Тогда по лемме 1.13 формация $f(\sigma_i)$ наследственна. Пусть K – группа минимального порядка из $f(\sigma_i) \setminus \mathfrak{M}$. Тогда K – минимальная не $\mathfrak{M}$-группа. Поскольку при этом $f(\sigma_i)$ – минимальная не $\mathfrak{M}$-формация, то $f(\sigma_i) = \text{form}(K)$. Так как формация $f(\sigma_i)$ абелева и $f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma_i'}$, то K – циклическая q-группа, где $q \in \sigma_j$ для некоторого $\sigma_j \neq \sigma_i$. Пусть $p \in \sigma_i$. Ввиду леммы 1.10 существует точный неприводимый F_pK-модуль P. Пусть $G = P \rtimes K$. Тогда $P = C_G(P)$ и, кроме того, $P = O_{\sigma_i}(G) = O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)$. Поскольку K не принадлежит формации $\mathfrak{M}$, то с помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше, можно показать, что $\mathfrak{F} = l_\sigma\text{form}(G)$, $P = G^{\mathfrak{H}}$ и группа K удовлетворяет условию 2) леммы.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = l_\sigma\text{form}(G)$, где G – группа из условия леммы. Ввиду леммы 1.8 достаточно доказать, что при всех $\sigma_k \in \sigma(P)$ формация $f(\sigma_k)$ является минимальной не $H(\sigma_k)$-формацией.

Пусть P – не σ-примарная группа. Тогда $O_{\sigma_k',\sigma_k}(G) = 1$ для всякого $\sigma_k \in \sigma(P)$. Значит, $f(\sigma_k) = \text{form}(G)$. В силу леммы 1.6 формация $f(\sigma_k)$ имеет единственную максимальную подформацию $\text{form}(G/P)$. Поскольку по условию $P = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}}$, то $G/P \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M} = H(\sigma_i)$. Следовательно, имеет место включение $\text{form}(G/P) \subseteq H(\sigma_i)$. С другой стороны, поскольку в силу леммы 2.3 при любом $\sigma_k \in \sigma \setminus \{\sigma_i\}$ имеет место $H(\sigma_k) = \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$, то $\text{form}(G/P) \subseteq$ $\subseteq H(\sigma_k)$ для всех $\sigma_k \in \sigma \setminus \{\sigma_i\}$. Так как $P = G^{\mathfrak{H}}$, то $f(\sigma_k) \not\subseteq H(\sigma_k)$ при всех $\sigma_k \in \sigma(P)$. Таким образом, если P – не σ-примарная группа, то $f(\sigma_k)$ – минимальная не $H(\sigma_k)$-формация для всех $\sigma_k \in \sigma(P)$.

Пусть теперь P – σ_i-группа. Тогда $P = O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)$. По лемме 1.2 имеем

$$f(\sigma_i) = \text{form}(G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)) = \text{form}(K).$$

Понятно, что $f(\sigma_i) \not\subseteq H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}H(\sigma_i)$.

Пусть группа K удовлетворяет условию 1). Тогда по лемме 1.6 формация $f(\sigma_i)$ имеет единственную максимальную подформацию $\text{form}(K/Q)$. По условию $Q = K^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}}$ или $Q = K^{\mathfrak{M}}$. Значит, $\text{form}(K/Q) \subseteq H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M}$. Поскольку при этом $f(\sigma_i)$ не входит в $H(\sigma_i)$, то $f(\sigma_i)$ – минимальная не $H(\sigma_i)$-формация.

Рассмотрим теперь случай, когда группа K удовлетворяет условию 2). Пусть $2 \notin \sigma_i$ и K – группа кватернионов порядка 8. Обозначим через $\mathfrak{B}$ формацию всех абелевых групп экспоненты, делящей 4. Допустим, что $\mathfrak{B} \not\subseteq f(\sigma_i)$ и пусть B – группа минимального порядка из $\mathfrak{B} \setminus f(\sigma_i)$. Тогда B – монолитическая абелева группа и, следовательно, B – циклическая примарная группа. Значит, либо $|B| = 4$, либо $|B| = 2$. Поскольку в группе кватернионов порядка 8 имеются циклические подгруппы порядков 2 и 4, то $B \in f(\sigma_i) = \text{form}(K)$, ввиду наследственности формации $\text{form}(K)$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{B} \subseteq f(\sigma_i)$.

Пусть $\mathfrak{L}$ – произвольная собственная подформация формации $f(\sigma_i)$. Тогда ввиду леммы 1.12 имеем $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{A}$. Допустим, что $\mathfrak{L} \not\subseteq \mathfrak{B}$. Пусть M – группа минимального порядка из $\mathfrak{L} \setminus \mathfrak{M}$. Тогда группа M монолитична. Поскольку M – абелева группа, то она циклична. Ввиду леммы 8.12 [4] экспонента группы M делит экспоненту группы K. Значит, экспонента группы M равна 2 или 4. Но тогда, очевидно, $M \in \mathfrak{B}$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{B}$. Поскольку K минимальная не $\mathfrak{M}$-группа и $2 \notin \sigma_i$, то $K \notin \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M} = H(\sigma_i)$. Следовательно, $f(\sigma_i)$ – минимальная не $H(\sigma_i)$-формация.

Пусть теперь K – неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \notin \sigma_i$. Тогда ввиду леммы 1.12 имеем $\mathrm{form}(K) = f(\sigma_i)$ – минимальная неабелева формация. Пусть $\mathfrak{L}$ – максимальная подформация формации $f(\sigma_i)$. Тогда $\mathfrak{L}$ – абелева формация и всякая неединичная группа из $\mathfrak{L}$ имеет экспоненту q. Поскольку K – минимальная не $\mathfrak{M}$-группа, то в формации $H(\sigma_i)$ имеются группы порядка q. Но тогда $\mathfrak{L} \subseteq H(\sigma_i)$. Так как при этом $q \notin \sigma_i$, то $K \notin \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M} = H(\sigma_i)$. Поэтому $f(\sigma_i)$ – минимальная не $H(\sigma_i)$-формация.

Наконец, пусть K – циклическая q-группа, $q \notin \sigma_i$. И пусть M – максимальная подгруппа группы K. Поскольку $\mathrm{form}(M)$ – единственная максимальная подформация формации $\mathrm{form}(K) = f(\sigma_i)$ и по условию K – минимальная не $\mathfrak{M}$-группа, то $M \in H(\sigma_i)$. Так как $q \notin \sigma_i$, то $K \notin \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{M} = H(\sigma_i)$ и $f(\sigma_i)$ – минимальная не $H(\sigma_i)$-формация.

Таким образом, в силу леммы 1.8 формация $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией. $\square$

Доказательство теоремы A. Обозначим через f – наименьшее σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$ и H – каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{H}$.

Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация. Тогда $\mathfrak{H}$ имеет такое σ-локальное определение h, каждое неабелево значение которого σ-локально. Без ограничения общности можно считать, что h является внутренним σ-локальным определением $\mathfrak{H}$. Ввиду леммы 1.3 имеет место равенство

$$\mathfrak{H} = (\cap_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i}h(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_{\sigma(\mathfrak{H})}.$$

Поскольку $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{H}$, но каждая собственная σ-локальная подформация из $\mathfrak{F}$ содержится в $\mathfrak{H}$, то либо $\mathfrak{F}$ – минимальная σ-локальная не $\mathfrak{G}_{\sigma(\mathfrak{H})}$-формация, либо найдется такое $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$, что $\mathfrak{F}$ – минимальная σ-локальная не $(\mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i}h(\sigma_i))$-формация.

Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная σ-локальная не $\mathfrak{G}_{\sigma(\mathfrak{H})}$-формация и G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{G}_{\sigma(\mathfrak{H})}$. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{G}_{\sigma(\mathfrak{H})}}$. Ясно, что $\sigma(P) \nsubseteq \sigma(\mathfrak{H})$, так как в противном случае $G \in \mathfrak{G}_{\sigma(\mathfrak{H})}$. Поэтому найдется такое σ_i, что $\sigma_i \in \sigma(P) \setminus \sigma(\mathfrak{H})$. Поскольку в силу леммы 1.3 имеет место $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \nsubseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Поэтому G – σ_i-группа. Но тогда, ввиду монолитичности группы G, имеем $G = P$ – простая σ_i-группа. Таким образом, группа G удовлетворяет условию 1).

Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-локальная не $(\mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i}h(\sigma_i))$-формация для некоторого $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$. Обозначим через $\mathfrak{F}_1$ максимальную σ-локальную подформацию формации $\mathfrak{F}$. Тогда имеет место $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i}h(\sigma_i)$. Ввиду леммы 2.3 имеем $H(\sigma_j) = \mathfrak{G}_{\sigma_j}h(\sigma_j)$ для любого σ_j.

Рассмотрим вначале случай, когда $h(\sigma_i)$ – σ-локальная формация. По лемме 1.9 произведение $\mathfrak{G}_{\sigma_j}h(\sigma_j)$ является σ-локальной формацией. Значит, в силу леммы 2.5, имеем $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i}h(\sigma_i)} = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i'}H(\sigma_i)}$, что $\sigma_i \in \sigma(P)$ и либо P – не σ-примарная группа, $P = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}h(\sigma_i)} = G^{H(\sigma_i)}$, либо $G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ – абелева p-группа, $p \in \sigma_i$, а K – такая монолитическая группа с монолитом $Q = K^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}h(\sigma_i)} = K^{H(\sigma_i)}$, что $Q \nsubseteq \Phi(K)$ и $\sigma_i \notin \sigma(Q)$.

Пусть P – не σ-примарная группа. Тогда по лемме 2.4 формация $\mathfrak{F}_1$ имеет такое внутреннее σ-локальное определение f_1, что $f_1(\sigma_j) = \mathrm{form}(G/P)$ для всех $\sigma_j \in \sigma(P)$. Ввиду лемм 1.4 и 1.11 имеем $f_1 \leq H$. Поэтому при всех $\sigma_j \in \sigma(P)$ справедливо $G/P \in H(\sigma_j) \subseteq \mathfrak{H}$. Предположим, что найдется такое $\sigma_j \in \sigma(P)$, что $G \in H(\sigma_j)$. Тогда

$$G \in H(\sigma_j) \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i}h(\sigma_i).$$

Но $P = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i}h(\sigma_i)}$. Полученное противоречие показывает, что $P = G^{H(\sigma_j)}$ для всех $\sigma_j \in \sigma(P)$, а также $P = G^{\mathfrak{H}}$. Значит, в рассматриваемом случае $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что P – не σ-примарная группа и $P = G^{H(\sigma_j)}$ для всех $\sigma_j \in \sigma(P)$. Таким образом, группа G удовлетворяет условию 2).

Пусть P – σ-примарная группа. По лемме 2.2 формация $\mathfrak{F}_1$ имеет такое внутреннее σ-локальное определение f_1, что $f_1(\sigma_i) = \mathrm{form}(K/Q)$, $f_1(\sigma_j) = \mathrm{form}(G/O_{\sigma'_j,\sigma_j}(G))$ для всех $\sigma_j \in \sigma(G) \setminus \{\sigma_i\}$ и $f_1(\sigma_j) = \varnothing$ для всех $\sigma_j \notin \sigma(G)$. По условию $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, $f_1 \leq H$. Поскольку $f_1(\sigma_j) = \mathrm{form}(G/O_{\sigma'_j,\sigma_j}(G))$ для всех $\sigma_j \in \sigma(G) \setminus \{\sigma_i\}$, то для всех таких σ_j имеет место $G/O_{\sigma'_j,\sigma_j}(G) \in H(\sigma_j)$. Заметим, что $G/O_{\sigma'_j,\sigma_j}(G) \simeq K/O_{\sigma'_j,\sigma_j}(K)$. Действительно, так как $\sigma_i \neq \sigma_j$, то $O_{\sigma'_j,\sigma_j}(G)/P = O_{\sigma'_j,\sigma_j}(G/P)$. Значит,

$$K/O_{\sigma'_j,\sigma_j}(K) \simeq (G/P)/O_{\sigma'_j,\sigma_j}(G/P) = (G/P)/(O_{\sigma'_j,\sigma_j}(G)/P) \simeq G/O_{\sigma'_j,\sigma_j}(G).$$

Поэтому для всех $\sigma_j \in \sigma(G) \setminus \{\sigma_i\}$ имеет место $K/O_{\sigma'_j,\sigma_j}(K) \in H(\sigma_j)$. Докажем, что $P = G^{\mathfrak{H}}$ и $K^{H(\sigma_j)} \subseteq Q$ для всех $\sigma_j \in \sigma(Q)$. Ясно, что $G \notin \mathfrak{H}$. Если Q – не σ-примарная группа и $\sigma_j \in \sigma(Q)$, то $O_{\sigma'_j,\sigma_j}(K) = 1$. Следовательно,

$$G/P \simeq K \simeq K/O_{\sigma'_j,\sigma_j}(K) \in H(\sigma_j) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Отсюда $K^{H(\sigma_j)} = 1 \subseteq Q$ для всех $\sigma_j \in \sigma(Q)$. Если же Q – σ_j-группа, то $Q \subseteq O_{\sigma_j}(K) = O_{\sigma'_j,\sigma_j}(K)$. Значит, $K/O_{\sigma_j}(K) \in H(\sigma_j)$. Поэтому

$$G/P \simeq K \in \mathfrak{G}_{\sigma_j} H(\sigma_j) = H(\sigma_j) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Следовательтно, $P = G^{\mathfrak{H}}$ и $K^{H(\sigma_j)} = 1 \subseteq Q$. Таким образом, группа G удовлетворяет условию 3).

Рассмотрим теперь случай, когда $h(\sigma_i)$ – абелева формация. Применяя лемму 2.6, видим, что $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{G}_{\sigma'_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i}h(\sigma_i)}$, что $\sigma_i \in \sigma(P)$, и либо $P = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}h(\sigma_i)} = G^{H(\sigma_i)}$ – не σ-примарная группа, либо $G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ – p-группа, $p \in \sigma_i$, а K – одна из следующих групп:

1) монолитическая группа с таким монолитом $Q = K^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}h(\sigma_i)} = K^{H(\sigma_i)} \nsubseteq \Phi(K)$, что $\sigma_i \notin \sigma(Q)$;

2) ненильпотентная монолитическая σ_j-группа с монолитом $Q = K^{h(\sigma_i)} \nsubseteq \Phi(K)$, $j \neq i$;

3) минимальная не $h(\sigma_i)$-группа одного из следующих типов:

а) группа кватернионов порядка 8, если $2 \notin \sigma_i$;

б) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \notin \sigma_i$;

в) циклическая q-группа, $q \notin \sigma_i$.

Пусть P – не σ-примарная группа. По лемме 2.4 формация $\mathfrak{F}_1$ имеет такое внутреннее σ-локальное определение f_1, что $f_1(\sigma_j) = \mathrm{form}(G/P)$ для всех $\sigma_j \in \sigma(P)$. Согласно условию $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, $f_1 \leq H$. Таким образом, $G/P \in H(\sigma_j)$ для всех $\sigma_j \in \sigma(P)$. Предположим, что найдется такое $\sigma_k \in \sigma(P)$, что $G \in H(\sigma_k)$. Тогда поскольку σ-локальное определение H внутреннее, то $G \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma'_i} H(\sigma_i)$. Полученное противоречие показывает, что $P = G^{H(\sigma_j)}$ для всех $\sigma_j \in \sigma(P)$. Ясно также, что $P = G^{\mathfrak{H}}$. Таким образом, в рассматриваемом случае $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G)$, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, удовлетворяющая условию 2).

Пусть P – σ-примарная группа и K удовлетворяет условию 1). Тогда согласно лемме 2.2 формация $\mathfrak{F}_1$ имеет такое внутреннее σ-локальное определение f_1, что $f_1(\sigma_i) = \mathrm{form}(H/Q)$. Ввиду условия $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Значит, $f_1 \leq H$. Следовательно,

$$H/Q \subseteq H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i).$$

Если $K \in H(\sigma_i)$, то $G/P \simeq K \in H(\sigma_i)$. Значит, $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i} H(\sigma_i) = H(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие. Значит, $H/Q \in h(\sigma_i)$ и $Q = H^{h(\sigma_i)}$.

Покажем, что $P = G^{\mathfrak{H}}$. Очевидно, $G \notin \mathfrak{H}$. Предположим, что $G/P \notin \mathfrak{H}$. Тогда $K \notin \mathfrak{H}$. Значит, $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G) = l_\sigma\mathrm{form}(K)$. Применяя теперь лемму 1.2 имеем

$$\mathrm{form}(G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)) = \mathrm{form}(G/P) = \mathrm{form}(K) = \mathrm{form}(K/O_{\sigma_i',\sigma_i}(K)).$$

Если группа K удовлетворяет условию 1), то по лемме 1.6 формация $\mathrm{form}(K/Q)$ является единственной максимальной подформацией формации $\mathrm{form}(K)$. Так как Q – σ_i'-группа, то $Q \subseteq O_{\sigma_i',\sigma_i}(K)$. Значит, $K/O_{\sigma_i',\sigma_i}(K) \in \mathrm{form}(K/Q)$. Таким образом,

$$K/O_{\sigma_i',\sigma_i}(K) \in \mathrm{form}(K/Q) \subset \mathrm{form}(K) = \mathrm{form}(K/O_{\sigma_i',\sigma_i}(K)).$$

Противоречие. Пусть теперь группа K удовлетворяет одному из условий 2). Тогда K – примарная группа. Следовательно, $K = O_{\sigma_i',\sigma_i}(K)$. Значит, $\mathrm{form}(K) = \mathrm{form}(K/O_{\sigma_i',\sigma_i}(K))$ – формация всех единичных групп. Полученное противоречие показывает, что $G/P \in \mathfrak{H}$. Поэтому $P = G^{\mathfrak{H}}$.

Таким образом, группа G удовлетворяет условию 3).

Достаточность. Пусть f – минимальное σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 1.8 для доказательства достаточно установить, что формация $f(\sigma_j)$ является минимальной не $H(\sigma_j)$-формацией для всех $\sigma_j \in \sigma(P)$.

Если группа G удовлетворяет условию 1), то, очевидно, $\mathfrak{F}$ – минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация.

Пусть группа G удовлетворяет условию 2) и $\sigma_j \in \sigma(P)$. Тогда $O_{\sigma_j',\sigma_j}(G) = 1$ и по лемме 1.2 $f(\sigma_j) = \mathrm{form}(G/O_{\sigma_j',\sigma_j}(G)) = \mathrm{form}(G)$. По условию $G/P \in H(\sigma_j)$ и $P = G^{\mathfrak{H}}$. Поскольку по лемме 1.6 $\mathrm{form}(G/P)$ – единственная максимальная подформация формации $\mathrm{form}(G)$, то $f(\sigma_j)$ – минимальная не $H(\sigma_j)$-формация для всех $\sigma_j \in \sigma(P)$.

Пусть теперь группа G удовлетворяет условию 3). Тогда поскольку $\sigma_i \notin \sigma(Q)$, то $P = O_{\sigma_i}(G) = O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)$ и по лемме 1.2 имеем

$$f(\sigma_i) = \mathrm{form}(G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)) = \mathrm{form}(K).$$

Если $K \in H(\sigma_i)$, то $G/P = G/O_{\sigma_i}(G) \simeq K \in H(\sigma_i)$ и $G \in \mathfrak{H}$ по лемме 1.5. Полученное противоречие показывает, что $K \notin H(\sigma_i)$.

Пусть $\Phi(K) = 1$. По условию $K/Q \in H(\sigma_i)$. Значит, $\mathrm{form}(K/Q) \subseteq H(\sigma_i)$. Поскольку по лемме 1.6 $\mathrm{form}(K/Q)$ – единственная максимальная подформация формации $f(\sigma_i) = \mathrm{form}(K)$, то $f(\sigma_i)$ – минимальная не $H(\sigma_i)$-формация.

Пусть K удовлетворяет условию а). Тогда K – группа кватернионов порядка 8 и $2 \notin \sigma_i$. По лемме 1.12 имеем $f(\sigma_i) = \mathrm{form}(K)$ – минимальная неабелева формация. Пусть $\mathfrak{M}$ – максимальная подформация формации $f(\sigma_i)$. Легко видеть, что $\mathfrak{M}$ – формация абелевых групп экспоненты, делящей 4, и формация $\mathfrak{M}$ порождается любой абелевой группой экспоненты 4. Среди подгрупп группы H имеется собственная абелева нормальная подгруппа экспоненты 4. Значит, $\mathfrak{M} \subseteq \mathrm{form}\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных подгрупп группы K. Кроме того, подгруппы группы K абелевы и их экспоненты делят 4. Следовательно, $\mathrm{form}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{M} = \mathrm{form}\mathfrak{X}$. Но по условию $\mathfrak{X} \subseteq H(\sigma_i)$. Значит, $\mathfrak{M} \subseteq H(\sigma_i)$. Итак, $f(\sigma_i)$ – минимальная не $H(\sigma_i)$-формация.

Пусть K удовлетворяет условию б), т. е. K – неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \notin \sigma_i$. Тогда по лемме 1.12 $f(\sigma_i) = \mathrm{form}(K)$ – минимальная неабелева формация. Пусть $\mathfrak{M}$ – максимальная подформация формации $f(\sigma_i)$. Тогда $\mathfrak{M}$ – абелева формация и все неединичные группы из $\mathfrak{M}$ имеют экспоненту q. Поскольку по условию группа K является минимальной не $H(\sigma_i)$-группой, то в $H(\sigma_i)$ входят группы порядка q. Поэтому $\mathfrak{M} \subseteq H(\sigma_i)$. Следовательно, $f(\sigma_i)$ – минимальная не $H(\sigma_i)$-формация.

Пусть группа K удовлетворяет условию в), $|K| = q^n$, где $q \notin \sigma_i$. Обозначим через M максимальную подгруппу группы K. Тогда $M \in H(\sigma_i)$, но $K \notin H(\sigma_i)$. Значит, $f(\sigma_i) \nsubseteq H(\sigma_i)$ и $\mathrm{form}M \subseteq H(\sigma_i)$.

Покажем теперь, что всякая собственная подформация из $f(\sigma_i)$ входит в $\mathrm{form}(M)$. Предположим, что в $f(\sigma_i)$ имеется такая собственная подформация $\mathfrak{M}$, что $\mathfrak{M} \nsubseteq \mathrm{form}(M)$, и пусть A – группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathrm{form}(M)$. Тогда группа A монолитична. Так как при этом формация $f(\sigma_i)$ абелева, то A – циклическая группа порядка q^m. Согласно лемме 8.12 [4] экспонента q^m группы A делит экспоненту q^n группы K. Тогда если $m = n$, то $A \simeq K$ и, следовательно, имеют место включения

$$f(\sigma_i) \subseteq \mathrm{form}(A) \subseteq \mathfrak{M} \subset f(\sigma_i).$$

Получаем противоречие. Поэтому $m < n$. Поскольку порядок группы M равен q^{n-1}, то либо A изоморфна некоторой собственной подгруппе группы M, либо $A \simeq M$. Последнее означает, что $A \in \mathrm{form}(M)$. Снова получаем противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathrm{form}(M)$. Но тогда $f(\sigma_i)$ – минимальная не $H(\sigma_i)$-формация.

Привлекая теперь лемму 1.8 заключаем, что $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G)$ – минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация. □

Приведем некоторые следствия теоремы А.

Напомним [37], что всякую формацию групп называют 0-кратно σ-локальной. При $n > 0$ формацию $\mathfrak{F}$ называют n-кратно σ-локальной, если либо $\mathfrak{F} = (1)$ – класс всех единичных групп, либо $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i)$ – $(n-1)$-кратно σ-локальная формация для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$.

Следствие 2.7. *Пусть $\mathfrak{H}$ – 2-кратно σ-локальная формация и H – ее каноническое σ-локальное определение. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих условий:*

1) *$G = P$ – простая σ_i-группа, $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$;*

2) *P – не σ-примарная группа и $P = G^{H(\sigma_i)}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$;*

3) *$G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ – p-группа, $p \in \sigma_i$, а K – такая монолитическая группа с монолитом $Q = K^{H(\sigma_i)}$, что $\sigma_i \notin \sigma(Q)$, $\Phi(K) = 1$ и $K^{H(\sigma_j)} \subseteq Q$ для всех $\sigma_j \in \sigma(Q)$.*

Если $\mathfrak{H}$ – σ-локальная формация классического типа и $\mathfrak{H} = LF_\sigma(h)$, где h – некоторое σ-локальное определение формации $\mathfrak{H}$, то в силу леммы 1.3(4) для канонического σ-локального определения H формации $\mathfrak{H}$ имеем $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}H(\sigma_i)$. Значит, из теоремы А получаем следующее утверждение.

Следствие 2.8. *Пусть $\mathfrak{H} = LF_\sigma(h)$ – σ-локальная формация классического типа, где h – некоторое ее σ-локальное определение. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих условий:*

1) *$G = P$ – простая σ_i-группа, $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$;*

2) *P – не σ-примарная группа и $P = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i)\cap\mathfrak{H})}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$;*

3) *$G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ – p-группа, $p \in \sigma_i$, а K – такая монолитическая группа с монолитом $Q = K^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i)\cap\mathfrak{H})}$, что $\sigma_i \notin \sigma(Q)$ и либо $\Phi(K) = 1$ и $K^{\mathfrak{G}_{\sigma_j}(h(\sigma_j)\cap\mathfrak{H})} \subseteq Q$ для всех $\sigma_j \in \sigma(Q)$, либо K – минимальная не $h(\sigma_i)$-группа одного из следующих типов:*

а) *группа кватернионов порядка 8, если $2 \notin \sigma_i$;*

б) *неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \notin \sigma_i$;*

в) *циклическая q-группа, $q \notin \sigma_i$.*

Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\sigma$ – формация всех σ-нильпотентных групп. Тогда всякую минимальную не $\mathfrak{N}_\sigma$-формацию будем называть *минимальной σ-локальной не σ-нильпотентной формацией*. Ввиду примера 1.2(iv) [37] $\mathfrak{N}_\sigma = LF_\sigma(H)$, где $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – формация всех

σ_i-групп, для всех i. Значит, $\mathfrak{N}_\sigma$ является σ-локальной формацией классического типа. Поэтому из теоремы А получаем

Следствие 2.9. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальная σ-локальная не σ-нильпотентная формация, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G)$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) *G – простая не σ-примарная группа*;

2) *$G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ – p-группа, $p \in \sigma_i$, а K – простая σ_j-группа, $j \neq i$.*

Пусть $\mathfrak{H}$ – формация всех мета-σ-нильпотентных групп. Тогда, как нетрудно убедиться, формация $\mathfrak{H}$ совпадает с произведением $\mathfrak{N}_\sigma\mathfrak{N}_\sigma = (\mathfrak{N}_\sigma)^2$. Всякую минимальную не $(\mathfrak{N}_\sigma)^2$-формацию будем называть *минимальной σ-локальной не мета-σ-нильпотентной формацией*. Ввиду примера 4.4(iii) [41] $\mathfrak{H} = LF_\sigma(h)$, где $h(\sigma_i) = \mathfrak{N}_\sigma$ для всех i. Значит, $(\mathfrak{N}_\sigma)^2$ является σ-локальной формацией классического типа, при этом в силу леммы 1.3(5) для канонического σ-локального определения H формации $(\mathfrak{N}_\sigma)^2$ имеем $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{N}_\sigma$ для всех i. Поэтому из теоремы А получаем

Следствие 2.10. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не мета-σ-нильпотентной формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих условий:*

1) *$P = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ – не σ-примарная группа;*

2) *$G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ – p-группа, $p \in \sigma_i$, а K – такая монолитическая группа с монолитом $Q = K^{\mathfrak{N}_\sigma}$, что $\sigma_i \notin \sigma(Q)$.*

Пусть $\mathfrak{H}$ – формация всех групп с σ-нильпотентным коммутантом. Тогда, очевидно, формация $\mathfrak{H}$ совпадает с произведением $\mathfrak{N}_\sigma\mathfrak{A}$ и, в силу примера 1.2(v) [37] $\mathfrak{H} = LF_\sigma(h)$, где $h(\sigma_i) = \mathfrak{A}$ – формация всех абелевых групп. Поэтому $\mathfrak{N}_\sigma\mathfrak{A}$ – σ-локальная формация классического типа. В силу леммы 1.3(5) для канонического σ-локального определения H формации $\mathfrak{N}_\sigma\mathfrak{A}$ имеем $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{A}$ для всех i. Значит, из теоремы А получаем

Следствие 2.11. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{N}_\sigma\mathfrak{A}$-формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{N}_\sigma\mathfrak{A}}$, что выполняется одно из следующих условий:*

1) *$P = G^{\mathfrak{A}}$ – не σ-примарная группа;*

2) *$G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ – p-группа, $p \in \sigma_i$, а K – одна из следующих групп:*

а) *монолитическая группа с таким монолитом $Q \nsubseteq \Phi(K)$, что $Q = K^{\mathfrak{A}}$ – неединичная σ_j-группа если $j \neq i$;*

б) *группа кватернионов порядка 8, если $2 \notin \sigma_i$;*

в) *неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \notin \sigma_i$.*

Приведем несколько следствий теоремы А в классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\{5\},\ldots\}$.

Следствие 2.12 [3]. *Пусть $\mathfrak{H}$ – формация классического типа и H – ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной не $\mathfrak{H}$-формацией, когда $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих условий:*

1) *$G = P$ – группа простого порядка $p \notin \pi(\mathfrak{H})$;*

2) *P – неабелева группа и $P = G^{H(p)}$ для всех $p \in \pi(P)$;*

3) *$G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ – p-группа, а K – такая монолитическая группа с монолитом $Q = K^{H(p)}$, что $p \notin \pi(Q)$ и либо $\Phi(K) = 1$ и $K^{H(q)} \subseteq Q$ для всех $q \in \pi(Q)$, либо K – минимальная не $H(p)$-группа одного из следующих типов*:

а) *циклическая примарная группа*;

б) *группа кватернионов порядка* 8;

в) *неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q.*

Следствие 2.13 [3]. *Пусть $\mathfrak{H}$ – 2-кратно локальная формация и h – ее максимальный внутренний локальный экран. Формация $\mathfrak{F}$ в том и только в том случае является*

$\mathfrak{H}_l$*-критической, когда* $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}(G)$*, где* G *– такая монолитическая группа с монолитом* $P = G^{\mathfrak{H}}$*, что выполняется одно из следующих условий:*

1) G *– группа простого порядка;*

2) P *– неабелева группа и* $P = G^{h(p)}$ *для всех* $p \in \pi(P)$*;*

3) $G = P \rtimes K$*, где* $P = C_G(P)$ *–* p*-группа, а* K *– такая монолитическая группа с монолитом* $Q = K^{h(p)}$*, что* $(|Q|, |P|) = 1$*,* $Q \not\subseteq \Phi(K)$ *и для всех* $q \in \pi(Q)$ *имеет место* $K^{H(q)} \subseteq Q$*.*

Следствие 2.14 [3]. *Пусть* $\mathfrak{H} = LF(h)$ *– формация классического типа с локальным экраном* h*. Формация* $\mathfrak{F}$ *в том и только том случае является* $\mathfrak{H}_l$*-критической, когда* $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}(G)$*, где* G *– такая монолитическая группа с монолитом* $P = G^{\mathfrak{H}}$*, что выполняется одно из следующих условий:*

1) $P = G$ *– группа простого порядка;*

2) P *– неабелева группа и* $P = G^{\mathfrak{N}_p(h(p)\cap\mathfrak{H})}$ *для всех* $p \in \pi(P)$*;*

3) $G = P \rtimes K$*, где* $P = C_G(P)$ *–* p*-группа, а* K *– такая монолитическая группа с монолитом* $Q = K^{\mathfrak{N}_p(h(p)\cap\mathfrak{H})}$ *(*p *не делит* $|Q|$*), что либо* $\Phi(K) = 1$ *и* $K^{\mathfrak{N}_q(h(q)\cap\mathfrak{H})} \subseteq Q$ *для всех* $q \in \pi(Q)$*, либо* K *– минимальная не* $h(p)$*-группа одного из следующих типов*:

а) *циклическая примарная группа*;

б) *группа кватернионов порядка* 8;

в) *неабелева группа порядка* q^3 *простой нечетной экспоненты* q*.*

Следствие 2.15 [3]. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *– минимальная локальная ненильпотентная формация, когда* $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}(G)$*, где* G *– либо простая неабелева группа, либо группа Шмидта.*

Следствие 2.16 [4, с. 191]. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *– минимальная локальная неметанильпотентная формация, когда* $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}(G)$*, где* G *– такая монолитическая группа с монолитом* P*, что выполняется одно из следующих условий:*

1) $P = G^{\mathfrak{N}}$ *– неабелева группа;*

2) $G = P \rtimes (Q \rtimes N)$*, где* $P = C_G(P)$ *–* p*-группа,* $Q = C_{Q \rtimes N}(Q)$ *– минимальная нормальная подгруппа в* $Q \rtimes N$ *и* N *– нильпотентная группа.*

Следствие 2.17 [4, с. 183]. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *– минимальная локальная не* $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$*-формация, когда* $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}(G)$*, где* G *– такая монолитическая группа с монолитом* P*, что либо* P *– неабелева группа, совпадающая с коммутантом* G*, либо* $G = P \rtimes K$*, где* $P = C_G(P)$*, а* K *– одна из следующих групп:*

а) $Q \rtimes N$*, где* $Q = C_K(Q) = K' \neq 1$;

б) *неабелева группа порядка* q^3 *простой нечетной экспоненты* q;

в) *группа кватернионов порядка* 8.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (проект № 20211328).

Автор выражает глубокую признательность рецензенту за полезные замечания и предложения.

Литература

1. *Шеметков Л. А.* Экраны ступенчатых формаций // Тр. VI Всесоюзн. симпозиума по теории групп. Киев: Наукова думка, 1980. С. 37–50.

2. *Скиба А. Н.* О критических формациях // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1980. № 4. С. 27–33.

3. *Скиба А. Н.* О критических формациях // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. С. 258–268.

4. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.

5. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997.

6. *Сафонов В. Г.* О минимальных кратно локальных не $\mathfrak{H}$-формациях конечных групп // Вопросы алгебры. 1995. Вып. 8. С. 109–138.

7. *Сафонов В. Г.* О критических кратно локальных формациях конечных групп // Вес. Акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. 1997. № 3. С. 57–61.

8. *Джарадин Д.* Минимальные p-насыщенные ненильпотентные формации // Вопросы алгебры. 1995. Вып. 8. С. 59–64.

9. *Сафонова И. Н.* О минимальных ω-локальных несверхразрешимых формациях // Вопросы алгебры. 1998. № 12. С. 123–130.

10. *Сафонова И. Н.* О минимальных ω-локальных не $\mathfrak{H}$-формациях // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. 1999. № 2. С. 23–27.

11. *Сафонова И. Н.* К теории $\mathfrak{H}_{l^{\omega}}$-критических формаций конечных групп // Изв. Гомельского гос. ун-та. 2001. № 3(6). Вопросы алгебры. С. 124–133.

12. *Селькин В. М.* Минимальные наследственные ω-локальные не $\mathfrak{H}$-формации // Украинский математический журнал. 2002. Т. 54, № 3. С. 373–380.

13. *Сафонова И. Н.* О критических частично насыщенных формациях конечных групп // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. 2006. № 2. С. 51–55.

14. *Селькин В. М.* О минимальных τ-замкнутых ω-локальных не $\mathfrak{H}$-формациях // Тр. Ин-та математики. 2008. Т. 16, № 1. С. 81–85.

15. *Рябченко А. И.* К теории частично насыщенных формаций // Изв. Гомельского гос. ун-та. 2008. № 6(51), Ч. 2. С. 153–160.

16. *Сафонов В. Г., Сафонова И. Н.* О минимальных тотально ω-насыщенных ненильпотентных формациях конечных групп // Вестн. Витебского гос. ун-та. 2014. № 6(84). С. 9–15.

17. *Ведерников В. А., Сорокина М. М.* Композиционные наследственные критические формации // Вопросы алгебры. 1997. Вып. 11. С. 59–64.

18. *Сорокина М. М.* О композиционных нормально наследственных критических формациях // Вопросы алгебры. 1998. Вып. 12. С. 23–36.

19. *Близнец И. В., Скиба А. Н.* О $\mathfrak{H}_{\Theta^{\mathfrak{L}}}$-критических формациях // Изв. Гомельского гос. ун-та. 1999. № 1. С. 140–144.

20. *Близнец И. В.* Критические ω-композиционные формации // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. 2002. № 4. С. 115–117.

21. *Задорожнюк М. В.* О минимальных τ-замкнутых ω-композиционных ненильпотентных формациях // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. 2006. № 3. С. 21–24.

22. *Белоус Л. И., Селькин В. М., Скиба А. Н.* Об одном классе критических ω-композиционных формаций // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2006. Т. 50, № 6. С. 36–40.

23. *Belous L. I., Sel'kin V. M.* On minimal ω-composition non-$\mathfrak{H}$-formations // Algebra and discrete mathematics. 2006. N 4. P. 1–11.

24. *Жизневский П. А., Сафонов В. Г.* О критических частично композиционных формациях // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. фiз.-мат. навук. 2010. № 3. С. 44–49.

25. *Жизневский П. А.* О существовании критических формаций // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2011. Т. 55, № 1. С. 27–30.

26. *Сафонов В. Г.* $\mathfrak{H}_{\infty}^{\tau}$-критические формации // Изв. Гомельского гос. ун-та. 2008. № 2(47). С. 169–176.

27. *Сафонов В. Г.* О существовании минимальных τ-замкнутых тотально насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций // Тр. Ин-та математики. 2008. Т. 16, № 1. С. 67–72.

28. *Ведерников В. А., Коптюх Д. Г.* Наследственные критические Ω-композиционные формации // Укр. мат. журн. 2001. Т. 53, № 5. С. 579–588.

29. *Сорокина М. М., Силенок Н. В.* Критические Ω-расслоенные формации конечных групп // Математические заметки. 2002. Т. 72, Вып. 2. С. 269–282.

30. *Корпачева М. А., Сорокина М. М.* О критических ω-веерных формациях конечных групп // Математические заметки. 2006. Т. 79, Вып. 1. С. 87–94.

31. *Сафонов В. Г., Сафонова И. Н.* Приводимые ω-насыщенные формации с разрешимым дефектом $\leqslant 2$ // Изв. Гомельского гос. ун-та. 2005. № 5(32). С. 162–165.

32. *Сафонов В. Г., Сафонова И. Н.* О коммутативных полугруппах разрешимых тотально ω-насыщенных формаций // Проблемы физики, математики и техники. 2015. № 4(25). С. 80–86.

33. *Сафонова И. Н.* О минимальных σ-локальных не $\mathfrak{H}$-формациях конечных групп // Проблемы физики, математики и техники. 2020. № 4(45). С. 105–112.

34. *Skiba A. N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. Vol. 436. P. 1–16.

35. *Skiba A. N.* On one generalization of the local formations // Probl. Phys. Math. Tech. 2018. N 1(34). P. 79–82.

36. *Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N.* On one application of the theory of n-multiply σ-local formations of finite groups // Probl. Phys. Math. Tech. 2018. N 2(35). P. 85–88.

37. *Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N.* On n-multiply σ-local formations of finite groups // Comm. Algebra. 2019. Vol. 47, N 3. P. 957–968.

38. *Tsarev A.* Laws of the lattices of σ-local formations of finite groups // Mediterranean Journal of Mathematics. 2020. Vol. 17, N 3. P. 75.

39. *Safonova I. N., Safonov V. G.* On some properties of the lattice of totally σ-local formations of finite groups // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2020. N 3. P. 6–16.

40. *Воробьев Н. Н., Стаселько И. И., Ходжагулыев А. О.* Отделимые решетки кратно σ-локальных формаций // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 4. С. 721–735.

41. *Safonova I. N.* A criterion for σ-locality of a non-empty formation // Comm. Algebra. 2022. Vol. 50, N 6. P. 2366–2376.

42. *Safonova I. N.* On properties of the lattice of all τ-closed n-multiply σ-local formations // Comm. Algebra. 2023. Vol. 51, N 10. P. 4454–4461.

43. *Safonova I. N.* On σ-inductive lattices of n-multiply σ-local formations of finite groups // J. Algebra and its Applications. https://doi.org/10.1142/S0219498824500178.

I. N. Safonova

On critical σ-local formations of finite groups

Summary

In this article we study minimal σ-local non-$\mathfrak{H}$-formations of finite groups (or, in other words, $\mathfrak{H}_\sigma$-critical formations), i. e. such σ-local formations not included in the class of groups $\mathfrak{H}$, all of whose proper σ-local subformations are contained in $\mathfrak{H}$. A description of minimal σ-local non$\mathfrak{H}$-formations for an arbitrary σ-local formation $\mathfrak{H}$ of classical type is obtained (a σ-local formation is called a σ-local formation of classical type if it has a σ-local definition such that all its non-Abelian values are σ-local). The main result of the work in the class of σ-local formations solves the problem of L. A. Shemetkov (1980) on the description of critical formations for given classes of finite groups. As corollaries, descriptions of $\mathfrak{H}_\sigma$-critical formations are given for a number of specific classes of finite groups, such as the classes of all σ-nilpotent, meta-σ-nilpotent groups, as well as the class all groups with σ-nilpotent commutator subgroup.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 2. С. 81–90

УДК 515.542

О СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ СИСТЕМАМИ УСЛОВНО ПОЛУНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

А. А. Трофимук

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина
e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com
Поступила 26.12.2023

Подгруппы A и B группы G называются cc-*перестановочными* в G, если A перестановочна с B^g для некоторого элемента $g \in \langle A, B \rangle$. Подгруппа A группы G называется *условно полунормальной* в G, если в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и A cc-перестановочна с каждой подгруппой из T. В настоящей работе доказана сверхразрешимость группы G, факторизуемой сверхразрешимыми условно полунормальными подгруппами A и B, в следующих случаях: коммутант G' нильпотентен; $(|A|, |B|) = 1$; G метанильпотентна и $(|G : A|, |G : B|) = 1$; G метанильпотентна и $(|A/A^{\mathfrak{N}}|, |B/B^{\mathfrak{N}}|) = 1$. Кроме того, установлена сверхразрешимость группы, у которой максимальные, силовские, максимальные из силовских, минимальные, 2-максимальные подгруппы являются условно полунормальными подгруппами.

Введение. Рассматриваются только конечные группы. Подгруппы A и B группы G называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Заметим, что равенство $AB = BA$ равносильно тому, что $AB \leqslant G$. Более слабое условие перестановочности было приведено в работе [1]: подгруппы A и B группы G называются cc-*перестановочными* в G, если A перестановочна с B^g для некоторого элемента $g \in \langle A, B \rangle$. При этом подгруппа A группы G называется cc-*перестановочной* в G, если A cc-перестановочна с каждой подгруппой из G.

Подгруппы A и B группы G называются *взаимно (тотально) перестановочными* [2], если $UB = BU$ и $AV = VA$ (соответственно $UV = VU$) для всех $U \leq A$ и $V \leq B$. Результаты, связанные со строением групп с заданными системами взаимно (тотально) перестановочных подгрупп, приведены в разделах 4–5 монографии [3].

Со времени выхода работы [2] теория произведений взаимно и тотально перестановочных подгрупп получила широкое развитие. Так, в работе [4] было введено понятие tcc-подгруппы: подгруппа A группы G называется tcc-*подгруппой* в G, если в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и подгруппы A и T тотально cc-перестановочны. Кроме того, в [4] исследованы группы с заданными системами tcc-подгрупп.

В работе [5, теорема C] доказано утверждение: *предположим, что $G = AB$, где A и B – сверхразрешимые подгруппы группы G. Пусть либо коммутант G' нильпотентен, либо* $(|A|, |B|) = 1$. *Если подгруппа A* cc-*перестановочна с каждой подгруппой из подгруппы B и подгруппа B* cc-*перестановочна с каждой подгруппой из подгруппы A, то G сверхразрешима.*

Подгруппы A и B, удовлетворяющие условию «подгруппа A cc-перестановочна с каждой подгруппой из подгруппы B и подгруппа B cc-перестановочна с каждой подгруппой из подгруппы A», можно кратко называть *взаимно* cc-*перестановочными подгруппами*.

Напомним, что подгруппа A называется *полунормальной* в группе G, если в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и A перестановочна с каждой подгруппой из T. В [6] исследованы группы, факторизуемые полунормальными подгруппами. Вполне естественно рассмотреть следующее

Определение. Подгруппа A группы G называется *условно полунормальной* подгруппой в G, если в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и A cc-перестановочна с каждой подгруппой из T.

Подгруппу T в дальнейшем будем называть *условным добавлением* к подгруппе A в группе G. Очевидно, что всякая tcc-подгруппа является условно полунормальной подгруппой. Обратное неверно. Примером является знакопеременная группа A_4, в которой силовская 2-подгруппа является условно полунормальной подгруппой, но не является tcc-подгруппой.

Если $G = AB$ – произведение взаимно cc-перестановочных подгрупп A и B, то A и B будут условно полунормальными подгруппами в группе G. Обратное неверно, см. [4, пример 1.1].

В настоящей работе доказана сверхразрешимость группы G, факторизуемой сверхразрешимыми условно полунормальными подгруппами A и B, в следующих случаях: коммутант G' нильпотентен; $(|A|,|B|) = 1$; G метанильпотентна и $(|G:A|,|G:B|) = 1$; G метанильпотентна и $(|A/A^{\mathfrak{N}}|,|B/B^{\mathfrak{N}}|) = 1$. Кроме того, установлена сверхразрешимость группы, у которой максимальные, силовские, максимальные из силовских, минимальные, 2-максимальные подгруппы являются условно полунормальными подгруппами.

1. Предварительные рассмотрения. Приведем известные результаты, которые неоднократно будут использоваться в доказательствах.

Используемая терминология соответствует [7; 8]. Запись $H \le G$ означает, что H – подгруппа группы G. Если $H \le G$ и $H \ne G$, то пишем $H < G$. Запись $H \trianglelefteq G$ означает, что H – нормальная подгруппа группы G. Через G', $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются коммутант, центр, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G соответственно; $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ – наибольшие нормальные в G p- и p'-подгруппы соответственно; $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G. Элементарная абелева группа порядка p^t и циклическая группа порядка m обозначаются E_{p^t} и Z_m соответственно, а $A \rtimes B$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B.

Группа называется сверхразрешимой, если порядки ее главных факторов являются простыми числами. Через $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{N}$ обозначим класс всех сверхразрешимых и нильпотентных групп соответственно, а через $H^{\mathfrak{X}}$ – $\mathfrak{X}$-корадикал группы H, см. [7, с. 166]. Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется p-замкнутой, а группа с нормальной p'-холловой подгруппой называется p-нильпотентной.

Лемма 1.1 [9, лемма 6]. *Предположим, что разрешимая группа $G \notin \mathfrak{U}$, но фактор-группа $G/K \in \mathfrak{U}$ для каждой неединичной нормальной в G подгруппы K. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $Z(G) = O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$*;*

(2) *группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N, $N = F(G) = O_p(G) = C_G(N)$ для некоторого $p \in \pi(G)$;*

(3) *G – примитивная группа; $G = N \rtimes M$, где M – максимальная подгруппа в группе G с единичным ядром;*

(4) *N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n, $n > 1$;*

(5) *если подгруппа M абелева, то M циклическая порядка, делящего $p^n - 1$, а n – наименьшее натуральное число такое, что $p^n \equiv 1 \pmod{|M|}$.*

Лемма 1.2 [8, VI.9]. (1) *Класс $\mathfrak{U}$ – наследственная насыщенная формация.*

(2) *Каждая минимальная нормальная подгруппа сверхразрешимой группы имеет простой порядок.*

(3) *Пусть N – нормальная в G подгруппа и G/N сверхразрешима. Если N либо циклическая, либо $N \le Z(G)$, либо $N \le \Phi(G)$, то G сверхразрешима.*

(4) *Каждая сверхразрешимая группа G p-замкнута для наибольшего $p \in \pi(G)$ и q-нильпотентна для наименьшего $q \in \pi(G)$.*

(5) *Коммутант сверхразрешимой группы нильпотентен.*

(6) *Группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая ее максимальная подгруппа имеет простой индекс.*

Лемма 1.3 [8, с. 721; 10]. *Пусть G – минимальная несверхразрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *G разрешима и $|\pi(G)| \leq 3$;*

(2) *G имеет единственную нормальную силовскую подгруппу P и $P = G^{\mathfrak{U}}$. Кроме того, P имеет экспоненту p, если $p \neq 2$, и экспоненту 2 или 4, если $p = 2$;*

(3) *$P/\Phi(P)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G/\Phi(P)$ и $|P/\Phi(P)| > p$;*

(4) *если Q – дополнение к P в G, то $Q/Q \cap \Phi(G)$ – либо примарная циклическая группа, либо минимальная неабелева группа;*

(5) *если $|\pi(Q)| = 2$, то Q – нециклическая группа с циклическими силовскими подгруппами.*

(6) *если G не является группой Шмидта, то G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа.*

2. Свойства условно полунормальных подгрупп.

Лемма 2.1. *Пусть A – условно полунормальная подгруппа группы G и Y – условное добавление к A в G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *A – условно полунормальная подгруппа в H для каждой подгруппы H группы G такой, что $A \leq H$;*

(2) *AN/N – условно полунормальная подгруппа в G/N для каждой $N \trianglelefteq G$;*

(3) *для каждой $X \leqslant Y$ существует $y \in Y$ такой, что $AX^y \leqslant G$. В частности, $AM \leqslant G$ для некоторой максимальной подгруппы M группы Y и $AH \leqslant G$ для некоторой π-холловой подгруппы H разрешимой группы Y и любого $\pi \subseteq \pi(G)$;*

(4) *$AK \leqslant G$ для каждой субнормальной подгруппы K в Y;*

(5) *$AK^g \leqslant G$ для любого $g \in G$ и любой субнормальной подгруппы K из Y;*

(6) *A^x – условно полунормальная подгруппа группы G и Y^x – условное добавление к A^x в G для любого $x \in G$;*

(7) *если A – максимальная подгруппа, то $|G : A|$ – простое число;*

(8) *если Y разрешима и A r-замкнута, r – наибольшее простое число из $\pi(G)$, то ее силовская r-подгруппа A_r субнормальна в G.*

Доказательство. 1. Так как Y – условное добавление к A в G, то $G = AY$. По тождеству Дедекинда $H = H \cap AY = A(H \cap Y)$. Так как $H \cap Y \leqslant Y$, то для любого $Z \leq H \cap Y$ существует элемент $u \in \langle A, Z\rangle$ такой, что $AZ^u \leqslant G$. Поэтому A – условно полунормальная подгруппа в H.

2. Так как $G = AY$, то $G/N = (AN/N)(YN/N)$. Пусть X/N – произвольная подгруппа в YN/N. Так как $N \leqslant X \leqslant YN$. То по тождеству Дедекинда $X = X \cap YN = (X \cap Y)N$. Так как $X \cap Y \leqslant Y$, то $A(X \cap Y)^u \leqslant G$ для некоторого $u \in \langle A, X \cap Y\rangle$. Поэтому

$$(AN/N)(X/N)^{uN} = A(X \cap Y)^u N/N \leqslant G/N$$

для $uN \in \langle A, X \cap Y\rangle N/N \subseteq \langle A, X\rangle N/N = \langle AN/N, X/N\rangle$. Значит, AN/N – условно полунормальная подгруппа в G/N.

3. Так как A – условно полунормальная подгруппа группы G, то по определению для каждой $X \leqslant Y$ существует $u \in \langle A, X\rangle$ такой, что $AX^u \leqslant G$. Так как $u \in G = AY = YA$, то $u = ya$ для некоторых $y \in Y$ и $a \in A$. Тогда

$$AX^u = AX^{ya} = A(X^y)^a = A^a(X^y)^a = (AX^y)^a \leqslant G.$$

Поэтому существует подгруппа AX^y в группе G для некоторого $y \in Y$. Очевидно, что если X – π-холлова подгруппа разрешимой группы Y, то $H = X^y$ – π-холлова подгруппа из Y. Поэтому $AH \leqslant G$. Аналогично и в случае, когда X – максимальная подгруппа группы Y. Тогда $M = X^y$ – максимальная подгруппа группы Y и $AM \leqslant G$.

4. Поскольку K субнормальная подгруппа в Y, то существует цепь подгрупп

$$Y = K_0 \geqslant K_1 \geqslant \ldots \geqslant K_{n-1} \geqslant K_n = K,$$

в которой подгруппа K_{i+1} нормальна в K_i для всех i. Применим индукцию по n. По п. (3) существует $y \in Y$ такой, что $AK_1^y = AK_1 \leqslant G$. Поэтому утверждение справедливо для $n = 0$ и $n = 1$. Значит, $n \geqslant 2$. Согласно п. (1) A – условно полунормальная подгруппа в AK_1 и K_1 – условное добавление к A в AK_1. Так как длина субнормальной цепи между K и K_1 меньше, чем n, то по индукции в группе AK_1 существует подгруппа AK, а следовательно, $AK \leqslant G$.

5. Так $g \in G = AY = YA$, то $g = ya$ для некоторых $y \in Y$ и $a \in A$. Тогда

$$AK^g = AK^{ya} = A(K^y)^a = (AK^y)^a.$$

Так как K субнормальна в Y, то K^y субнормальна в Y. По п. (4) $AK^y \leqslant G$. Значит, $AK^g \leqslant G$.

6. Так как $AY = G$, то $A^xY^x = G$. Пусть $L \leq Y^x$. Тогда $L^{x^{-1}} \leq Y$ и существует $u \in \in \langle A, L^{x^{-1}} \rangle$ такой, что $A(L^{x^{-1}})^u \leqslant G$. Так как $\langle A, L^{x^{-1}} \rangle = \langle A^x, L \rangle^{x^{-1}}$, то существует $v \in \langle A^x, L \rangle$ такой, что $u = v^{x^{-1}}$.

Поскольку $x^{-1}u = vx^{-1}$, то

$$A(L^{x^{-1}})^u = AL^{vx^{-1}} = (A^xL^v)^{x^{-1}}.$$

Поэтому $A^xL^v \leqslant G$. Следовательно, A^x – условно полунормальная подгруппа группы G и Y^x – ее условное добавление к A^x в G.

7. Из п. (3) следует, что $AY_p \leqslant G$ для некоторой силовской p-подгруппы Y_p группы Y. Поскольку A – максимальная подгруппа группы G, то либо $AY_p = A$, либо $AY_p = G$. Если $AY_p = A$ для всех $p \in \pi(Y)$, то $Y \leqslant A$ и $G = AY = A$, противоречие. Значит, существует простое $q \in \pi(Y)$ такое, что $AY_q = G$ и Y_q – условное добавление к A в G. Из п. (4) можно считать, что Y_q – минимальное условное добавление к A в G. По п. (3) $AS < G$ и $|G : AS| = q$ для некоторой максимальной подгруппы S из Y_q. Так как A – максимальная подгруппа группы G, то $|G : A| = |G : AS| = q$.

8. Применим индукцию по порядку группы G. По п. (3) $AY_1 \leqslant G$ для некоторой r'-холловой подгруппы Y_1 группы Y. Если $AY_1 < G$, то по п. (1) A – условно полунормальная подгруппа в AY_1 и по индукции A_r субнормальна в AY_1. Кроме того, A_r субнормальна в некоторой силовской r-подгруппе G_r группы G. Пусть $Y_r \leqslant R$, где R – силовская r-подгруппа группы G и $R^g = G_r$ для некоторого $g \in G$. По [11, теорема 1] A_r субнормальна в

$$G = AY = AY_1Y_r = (AY_1)Y_r^g = (AY_1)G_r.$$

Поэтому будем считать, что $G = AY_1$. По п. (3) $AQ \leqslant G$ для некоторой силовской q-подгруппы Q из Y_1. Если $AQ < G$, то A – условно полунормальная подгруппа в AQ и по индукции A_r субнормальна в AQ. Поэтому A_r нормальна в AQ и $Q \leqslant N_G(A_r)$. Так как это верно для любого $q \in \pi(Y_1)$, то A_r нормальна в $G = AY_1$.

Поэтому $G = AQ$. По п. (4) Q – минимальное условное добавление к A в G. По п. (3) $AM < G$ для некоторой максимальной подгруппы M из Q. Так как A – условно полунормальная подгруппа в AM, то по индукции A_r субнормальна в AM, а следовательно, A_r нормальна в AM. Поскольку $|G : AM| = q$, то $G/(AM)_G$ изоморфна подгруппе группы S_q. Поэтому $G_r \leqslant (AM)_G \leqslant AM$ и $A_r = G_r$ субнормальна в G. □

Лемма 2.2. *Пусть G разрешима и $G = AB$ – произведение условно полунормальных подгрупп A и B. Если силовская p-подгруппа P группы G нормальна в G и абелева, то $P \cap A$ и $P \cap B$ нормальны в G.*

Доказательство. Так как A – условно полунормальная подгруппа в G, то существует подгруппа H такая, что $AH = G$. Тогда по лемме 2.1 (3) $AH_{p'}$ – подгруппа группы G для некоторой холловой p'-подгруппы $H_{p'}$ в H. Очевидно, что $P \cap A$ – силовская p-подгруппа в A. Обозначим $A_p = P \cap A$. Поэтому $P \cap AH_{p'} = A_p$ и A_p нормальна в $AH_{p'}$. Значит, $H_{p'} \leqslant N_G(A_p)$. Пусть H_p – силовская p-подгруппа в H. Так как H_p и A_p содержатся в абелевой подгруппе P, то $H_p \leqslant C_G(A_p)$. Значит, $A_p = P \cap A$ нормальна в

$$G = AH = AH_pH_{p'}.$$

Аналогично доказывается, что $P \cap B$ нормальна в G. □

3. Группы, факторизуемые условно полунормальными подгруппами.

Теорема 3.1. *Пусть A и B – сверхразрешимые условно полунормальные подгруппы группы G и $G = AB$. Тогда G сверхразрешима в следующих случаях:*

(1) *коммутант G' нильпотентен;*

(2) $(|A|, |B|) = 1$.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть N – неединичная нормальная в G подгруппа. Факторгруппа

$$G/N = (AN/N)(BN/N), \;\; AN/N \simeq A/A \cap N, \;\; BN/N \simeq B/B \cap N,$$

поэтому подгруппы AN/N и BN/N сверхразрешимы, а по лемме 2.1 (2) они являются условно полунормальными подгруппами в G/N.

1. Так как

$$(G/N)' = G'N/N \simeq G'/G' \cap N,$$

то коммутант $(G/N)'$ нильпотентен. Следовательно, факторгруппа G/N удовлетворяет всем требованиям теоремы и G/N сверхразрешима по выбору группы G.

Из леммы 1.1 получаем, что группа G примитивна, в G существует минимальная нормальная подгруппа N такая, что $N = C_G(N) = O_p(G) = F(G)$ для некоторого $p \in \pi(G)$, N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n, $n > 1$. Теперь $N \leq G'$, коммутант G' – p-подгруппа и $N = G'$. Так как G/N абелева и $O_p(G/N) = 1$, то N – силовская p-подгруппа группы G.

Предположим, что $AN = G$. Тогда $A \cap N = 1$, A – максимальная в G подгруппа. По условию A – условно полунормальная подгруппа в G. По лемме 2.1 (7) $|G : A| = p$. Поэтому $|N| = p$, противоречие. Значит, предположение неверно и $AN < G$. Аналогично, $BN < G$.

По лемме 2.1 (1) подгруппа A является условно полунормальной подгруппой в AN и сверхразрешима по условию. Так как N нормальна в AN, то N – условно полунормальная подгруппа в AN. Кроме того, N абелева. Поскольку $(AN)' \leq G'$, то коммутант $(AN)'$ нильпотентен. По индукции подгруппа AN сверхразрешима. Аналогично, BN сверхразрешима. Теперь группа $G = (AN)(BN)$ является произведением нормальных сверхразрешимых подгрупп AN и BN и ее коммутант G' нильпотентен. По теореме Бэра [12] группа G сверхразрешима.

2. Так как

$$(|AN/N|, |BN/N|) = (|A/A \cap N|, |B/B \cap N|) = 1,$$

то факторгруппа G/N удовлетворяет всем требованиям теоремы и G/N сверхразрешима по выбору группы G.

Пусть p – наибольшее простое из $\pi(G)$. Так как $(|A|,|B|)=1$, то будем считать, что $p\in\pi(A)$. Пусть Y – условное добавление к A в G. По лемме 2.1 (3) для каждого $q\in\pi(Y)$ существует силовская q-подгруппа Y_q из Y такая, что $AY_q\leqslant G$. Если $q\neq p$, то по лемме 2.1 (8) A_p субнормальна в AY_q, а следовательно, A_p нормальна в AY_q и $Y_q\leqslant N_G(A_p)$. Пусть $q=p$ и $\pi=\pi(A)$. Так как A – π-холлова подгруппа, то $AY_p=A$ и $Y_p\leqslant A$. Поэтому $Y_p\leqslant N_G(A_p)$. Тогда A_p нормальна в $G=AY$, поскольку $Y_q\leqslant N_G(A_p)$ для любого $q\in\pi(Y)$. Очевидно, что A_p силовская p-подгруппа в G. Пусть $P=A_p$. Тогда G разрешима, так как G/P сверхразрешима.

Из леммы 1.1 получаем, что группа G примитивна, в G существует минимальная нормальная подгруппа N такая, что $N=C_G(N)=O_p(G)=F(G)=P$ для наибольшего $p\in\pi(G)$, N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n, $n>1$.

Так как $(|A|,|B|)=1$, то $N\leqslant A$ и B – p'-группа. Так как B – условно полунормальная подгруппа в G, то $G=BH$, где H – условное добавление к B в G и $N\leqslant H$. Пусть N_1 – минимальная нормальная подгруппа в A такая, что $N_1\leqslant N$. По лемме 1.2 (2) $|N_1|=p$. Так как N_1 субнормальна в H, то по лемме 2.1 (4) $BN_1\leqslant G$. Так как G p-замкнута, то $B\leqslant N_G(N_1)$. Поэтому N_1 нормальна в $G=AB$, противоречие. $\square$

Следствие 3.1 [5, теорема C]. *Пусть $G=AB$ – произведение взаимно* cc-*перестановочных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если либо коммутант G' нильпотентен, либо $(|A|,|B|)=1$, то G сверхразрешима.*

Теорема 3.2. *Пусть A и B – сверхразрешимые условно полунормальные подгруппы метанильпотентной группы G и $G=AB$. Тогда G сверхразрешима в следующих случаях:*

(1) $(|G:A|,|G:B|)=1$;

(2) $(|A/A^{\mathfrak{N}}|,|B/B^{\mathfrak{N}}|)=1$.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть N – неединичная нормальная в G подгруппа. Факторгруппа

$$G/N=(AN/N)(BN/N),\ \ AN/N\simeq A/A\cap N,\ \ BN/N\simeq B/B\cap N,$$

поэтому подгруппы AN/N и BN/N сверхразрешимы, а по лемме 2.1 (2) они являются условно полунормальными подгруппами в G/N.

Так как по условию A и B – сверхразрешимые условно полунормальные подгруппы метанильпотентной группы G, то по лемме 2.1 (8) A_p и B_p субнормальны в G для наибольшего простого числа p из $\pi(G)$.

Так как $P=A_pB_p$ является силовской p-подгруппой группы G, то G p-замкнута.

1. Так как

$$(|G/N:AN/N|,|G/N:BN/N|)=(|G:AN|,|G:BN|)=$$
$$=\left(\frac{|G:A|}{|N:A\cap N|},\frac{|G:B|}{|N:B\cap N|}\right),$$

то $(|G/N:AN/N|,|G/N:BN/N|)=1$, поскольку $(|G:A|,|G:B|)=1$. Факторгруппа

$$G/N=(AN/N)(BN/N)$$

сверхразрешима по выбору группы G.

Из леммы 1.1 получаем, что группа G примитивна, в G существует минимальная нормальная подгруппа N такая, что $N=C_G(N)=O_p(G)=F(G)=P$ для наибольшего $p\in\pi(G)$, N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n, $n>1$.

Применяя рассуждения как в теореме 1.1 (1), будем считать, что AN и BN – собственные подгруппы группы G. Подгруппы A и N – условно полунормальные подгруппы в AN и сверхразрешимы, $(|AN:A|,|AN:N|)=1$. Поскольку AN метанильпотентна, то по индукции подгруппа AN сверхразрешима. Аналогично, BN сверхразрешима. Так как G/N нильпотентна, то AN и BN субнормальны в G. Теперь группа $G=(AN)(BN)$ является произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп AN и BN взаимно простых индексов. Согласно [9, следствие 3.1] группа G сверхразрешима.

2. Из [7, лемма 5.8] следует, что

$$(|(AN/N)/(AN/N)^{\mathfrak{N}}|,|(BN/N)/(BN/N)^{\mathfrak{N}}|) =$$
$$= (|AN/(AN)^{\mathfrak{N}}N|,|BN/(BN)^{\mathfrak{N}}N|) =$$
$$= (|AN/A^{\mathfrak{N}}N|,|BN/B^{\mathfrak{N}}N|) = \left(\frac{|A/A^{\mathfrak{N}}|}{|S_1|},\frac{|B/B^{\mathfrak{N}}|}{|S_2|}\right),$$
$$S_1 = (A\cap N)/(A^{\mathfrak{N}}\cap N),\ S_2 = (B\cap N)/(B^{\mathfrak{N}}\cap N).$$

Так как $(|A/A^{\mathfrak{N}}|,|B/B^{\mathfrak{N}}|) = 1$, то

$$(|(AN/N)/(AN/N)^{\mathfrak{N}}|,|(BN/N)/(BN/N)^{\mathfrak{N}}|) = 1.$$

Факторгруппа $G/N = (AN/N)(BN/N)$ сверхразрешима по выбору группы G.

Из леммы 1.1 следует, что $F(G) = N = C_G(N) = P$ – единственная минимальная нормальная в G подгруппа, $G = N \rtimes M$ и N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n, $n > 1$. Очевидно, что M – p'-холлова подгруппа в M и M нильпотентна. Так как $G = AB$, то $M = A_{p'}B_{p'}$, где $A_{p'}$ и $B_{p'}$ – p'-холловы подгруппы из A и B соответственно.

Если $p \in \pi(A)\cap\pi(B)$, то по лемме 2.2 $P\cap A$ и $P\cap B$ нормальны в G. Поэтому $P \leqslant A\cap B$. Так как $O_{p'}(A) = 1$, то по [9, лемма 2] $A_{p'}$ – абелева подгруппа экспоненты, делящей $p-1$. Аналогично, $B_{p'}$ – абелева подгруппа экспоненты, делящей $p-1$. Поскольку A/P нильпотентна, то $(A/P)^{\mathfrak{N}} = A^{\mathfrak{N}}P/P = 1$ и $A^{\mathfrak{N}} \leqslant P$. Аналогично, $B^{\mathfrak{N}} \leqslant P$. Так как $(|A/A^{\mathfrak{N}}|,|B/B^{\mathfrak{N}}|) = 1$, то $(|A_{p'}|,|B_{p'}|) = 1$ и $M = A_{p'}\times B_{p'}$. Поэтому M абелева подгруппа экспоненты, делящей $p-1$. По лемме 1.1 (5) M – циклическая порядка, делящего $p-1$ и $|N| = p$, противоречие.

Пусть $p \notin \pi(B)$. Тогда $B^{\mathfrak{N}} = 1$. Значит, $(|A/A^{\mathfrak{N}}|,|B|) = 1$ и $(|A|,|B|) = 1$, поскольку $A^{\mathfrak{N}}$ – p-подгруппа. По теореме 1.1 (2) G сверхразрешима. □

Пример 3.1. Несверхразрешимая группа $G = E_{7^2} \rtimes S_3$, ([13], IdGroup=[294,7]), факторизуется сверхразрешимыми условно полунормальными подгруппами $A \simeq Z_7\times D_{14}$ и $B \simeq E_{7^2}\rtimes Z_3$ такими, что $(|G:A|,|G:B|) = 1$ и $(|A/A^{\mathfrak{N}}|,|B/B^{\mathfrak{N}}|) = 1$, так как $A^{\mathfrak{N}} \simeq Z_7$ и $B^{\mathfrak{N}} \simeq E_{7^2}$. Поэтому условие метанильпотентности группы G в теореме 3.2 убрать нельзя.

4. Группы, с заданными системами условно полунормальных подгрупп.

Теорема 4.1. *Пусть G – группа. Тогда G сверхразрешима в каждом из следующих случаев:*

(1) *в группе G все максимальные подгруппы являются условно полунормальными подгруппами;*

(2) *в группе G все силовские подгруппы являются условно полунормальными подгруппами;*

(3) *каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из нормальной подгруппы H группы G является условно полунормальной подгруппой в G и G/H сверхразрешима;*

(4) *в группе G все 2-максимальные подгруппы являются условно полунормальными подгруппами;*

(5) *в разрешимой группе G все максимальные подгруппы из каждой нециклической силовской подгруппы являются условно полунормальными подгруппами в G.*

Доказательство. 1. Пусть M – произвольная максимальная подгруппа группы G. По лемме 2.1 (7) $|G:M|$ – простое число. По лемме 1.2 (6) G сверхразрешима.

2. Покажем, что группа G разрешима. Пусть R – силовская r-подгруппа группы G. Тогда R является условно полунормальной подгруппой. Пусть T – условное добавление к R

в группе G. По лемме 2.1 (3) $RQ \leqslant G$ для некоторой силовской q-подгруппы Q группы T, где q – произвольное простое число из $\pi(T) \setminus \{r\}$. Подгруппа RQ является $\{r,q\}$-холловой подгруппой группы G. По [14, теорема 2] G r-разрешима при $r \neq 3$. Пусть t – наименьшее из $\pi(G)$. Если $t > 2$, то G разрешима. Если $t = 2$, то по доказанному G t-разрешима, а, значит, разрешима.

Покажем, что группа G сверхразрешима. Предположим, что G – контрпример минимального порядка. Пусть N – произвольная неединичная нормальная подгруппа группы G и RN/N – силовская r-подгруппа группы G/N. По лемме 2.1 (2) RN/N является условно полунормальной подгруппой группы G/N. Тогда G/N сверхразрешима по выбору группы G.

Пусть P – силовская p-подгруппа группы G, где p – наибольшее из $\pi(G)$. По лемме 2.1 (8) P субнормальна в G, а следовательно, нормальна в G. По лемме 1.1 группа G примитивна, в G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N такая, что $N = C_G(N) = O_p(G) = F(G) = P$, N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n, $n > 1$.

Пусть Q – силовская q-подгруппа из G, $q \neq p$. По условию Q – условно полунормальная подгруппа в G и T – условное добавление к подгруппе Q в G. Очевидно, что $P \leqslant T$. Пусть $P_1 \leqslant P$ такая, что $|P_1| = p$. Тогда по лемме 2.1 (4) $QP_1 \leqslant G$, поскольку P_1 субнормальна в T. Так как G p-замкнута, то $Q \leqslant N_G(P_1)$. Поскольку это включение справедливо для любого $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$, то P_1 нормальна в G, противоречие.

3. Предположим, что утверждение неверно и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть K – собственная подгруппа из G. Очевидно, что

$$K \cap H \trianglelefteq K \text{ и } K/K \cap H \simeq KH/H$$

сверхразрешима. По лемме 2.1 (1) каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из $K \cap H$ является условно полунормальной подгруппой в K. Тогда по выбору группы G подгруппа K сверхразрешима и поэтому G – минимальная несверхразрешимая группа. Кроме того, H также сверхразрешима. Пусть q – наибольшее простое число из $\pi(H)$. Тогда по лемме 1.2 (4) силовская q-подгруппа Q из H нормальна в H и, следовательно, Q нормальна в G. Пусть $\overline{Q_1} = Q_1/Q$ циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из H/Q. Тогда

$$\overline{Q_1} = \langle xQ \rangle = \langle x \rangle Q/Q \simeq \langle x \rangle / \langle x \rangle \cap Q \simeq \langle x \rangle,$$

поскольку $x \notin Q$. Так как $x \in H$, то по лемме 2.1 (2) $\overline{Q_1}$ – условно полунормальная подгруппа в G/Q. Поскольку $(G/Q)/(H/Q)$ сверхразрешима, то по индукции G/Q сверхразрешима.

По лемме 1.3 G разрешима, в G существует единственная нормальная силовская p-подгруппа P и $P = G^{\mathfrak{U}}$, $\overline{P} = P/\Phi(P)$ – минимальная нормальная подгруппа в $\overline{G} = G/\Phi(P)$ и $|P/\Phi(P)| > p$. Кроме того, P имеет экспоненту p, если $p \neq 2$, и экспоненту 2 или 4, если $p = 2$.

Если $p \neq q$, то $G \simeq G/Q \cap P$ сверхразрешима по лемме 1.2 (1), поскольку G/Q и G/P сверхразрешимы. Поэтому $p = q$ и $Q \leqslant P$. Так как $Q\Phi(P)/\Phi(P) \leqslant \overline{P}$ и $\overline{P}$ – минимальная нормальная подгруппа в $\overline{G}$, то $Q \leqslant \Phi(P)$ или $Q\Phi(P) = P$. Если $Q \leqslant \Phi(P)$, то G сверхразрешима по лемме 1.2 (3), поскольку $Q \leqslant \Phi(G)$ и G/Q сверхразрешима, противоречие. Если $Q\Phi(P) = P$, то $Q = P$.

Предположим, что $p = 2$. Пусть $x \in P$ и $P_1 = \langle x \rangle$. Тогда $|P_1| = 2$ или $|P_1| = 4$. По условию P_1 – условно полунормальная подгруппа в G. По лемме 2.1 (3) существует в G холлова $2'$-подгруппа S такая, что $P_1S \leqslant G$. По [8, IV.2.8] $P_1 \leqslant N_G(S)$, а следовательно, $P \leqslant N_G(S)$ и S нормальна в G, противоречие.

В дальнейшем будем считать, что $p > 2$. Пусть $\overline{K} = K/\Phi(P)$ – подгруппа порядка p в $\overline{P}$. Тогда

$$\overline{K} = \langle x\Phi(P) \rangle = \langle x \rangle \Phi(P)/\Phi(P).$$

Так как $x \in P$, то $|\langle x \rangle| = p$ и поэтому из леммы 2.1 (2) следует, что $\overline{K}$ – условно полунормальная подгруппа в $\overline{G}$ и $\overline{T} = T/\Phi(P)$ – условное добавление к $\overline{K}$ в $\overline{G}$. Поэтому по лемме 2.1 (3) для каждого $r \in \pi(\overline{T})$, $r \neq p$, существует силовская r-подгруппа $\overline{R}$ в $\overline{T}$ такая, что $\overline{KR} \leqslant \overline{G}$. Ясно, что $\overline{R}$ – силовская r-подгруппа в $\overline{G}$. Подгруппа

$$\overline{P} \cap \overline{KR} = \overline{K}(\overline{P} \cap \overline{R}) = \overline{K}$$

нормальна в $\overline{KR}$ и $\overline{R} \leqslant N_{\overline{G}}(\overline{K})$. Так как $\overline{P}$ абелева, то $\overline{K}$ нормальна в $\overline{G}$. Значит, $\overline{K} = \overline{P}$, противоречие.

4. Предположим, что утверждение неверно и пусть G – контрпример минимального порядка. По лемме 2.1 (1) и по п. (1) каждая максимальная подгруппа M будет сверхразрешимой. Поэтому G – минимальная несверхразрешимая группа и применима лемма 1.3. Тогда группа G разрешима, $|\pi(G)| \leqslant 3$ и имеет единственную нормальную силовскую подгруппу $P = G^{\mathfrak{U}}$. Очевидно, что $\Phi(G) = 1$. Поэтому P – минимальная нормальная подгруппа порядка p^n, $n > 1$, и $G = P \rtimes M$, где M – некоторая максимальная подгруппа группы G. Поскольку условие теоремы наследуют все факторгруппы, то P – единственная минимальная нормальная подгруппа в G.

Если $|\pi(G)| = 3$, то G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа и $M = [T]R$, где $|T| = t$, $|R| = r$, $t, r \in \pi(G)$. Подгруппы T и R являются 2-максимальными подгруппами группы G. Тогда по условию $TY_1 = G = RY_2$, где Y_1 и Y_2 – их условные добавления в G. Кроме того, $P \leqslant Y_1$ и $P \leqslant Y_2$. Пусть P_1 – минимальная нормальная подгруппа в P. Тогда по лемме 2.1 (4) $T \leqslant N_G(P_1)$ и $R \leqslant N_G(P_1)$. Тогда P_1 нормальна в $G = PM = PTR$, противоречие.

Таким образом, $|\pi(G)| = 2$. Тогда M – q-группа. Если $|M| > q$, то существует в M максимальная подгруппа M_1 такая, что $M_1 \neq 1$. Подгруппа M_1 является 2-максимальной подгруппой группы G. Тогда по условию $M_1Y = G$, где Y – ее условное добавление в G. Очевидно, что $P \leqslant Y$. Если Y – собственная подгруппа в G, то Y сверхразрешима. Пусть P_1 – минимальная нормальная подгруппа в Y такая, что $P_1 \leqslant P$. Тогда по лемме 2.1 (4) $M_1P_1 \leqslant G$ и $M_1 \leqslant N_G(P_1)$. Поэтому P_1 нормальна в $G = M_1Y$, противоречие.

Поэтому будем считать, что $Y = G$. Пусть R – максимальная подгруппа из P. Тогда по лемме 2.1 (4) $T = M_1R \leqslant G$. Очевидно, что $|G : T| = pq$ и T является 2-максимальной подгруппой группы G. Тогда по условию $TX = G$, где X – ее условное добавление в G. По лемме 2.1 (3) существует силовская q-подгруппа Q в X такая, что $L = TQ \leqslant G$. Очевидно, что $|G : L| = p$ и L – максимальная подгруппа в G. Так как $P \nleqslant L$, то $L_G = 1$. Тогда по [7, теорема 4.43] $M = L^g$ для некоторого $g \in G$. Поскольку $R^g \leqslant L^g \cap P^g = M \cap P = 1$, то $R = 1$ и $|P| = p$, противоречие.

Значит, $|M| = q$ и P – максимальная подгруппа в G. Пусть P_1 – максимальная подгруппа в P. Тогда по условию $P_1K = G$, где K – условное добавление к P_1 в G. По лемме 2.1 (3) в подгруппе K существует силовская q-подгруппа K_1 такая, что $P_1K_1 \leqslant G$ и $K_1 \leqslant N_G(P_1)$. Поэтому P_1 нормальна в $G = P_1K = PK_1$. Поэтому $|P| = p$, противоречие.

5. Пусть P – силовская p-подгруппа группы G. Если P циклическая, то G p-сверхразрешима. Пусть P нециклическая. Тогда по лемме 2.1 (3) для каждой максимальной подгруппы P_i из P и каждого $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$ существует силовская q-подгруппа Q в G такая, что $P_iQ \leqslant G$. По [15, теорема 3.4] G p-сверхразрешима. Так как это справедливо для любого $p \in \pi(G)$, то G сверхразрешима. □

Следствие 4.1 [1, теорема 3.10 (a, c)]. *Пусть G – группа. Тогда группа G сверхразрешима в каждом из следующих случаев:*

(1) *в группе G все* 2*-максимальные подгруппы* cc*-перестановочны в G;*

(2) *каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка* 4 *из G является* cc*-перестановочной в G.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф23РНФ-237).

Литература

1. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* Conditionally permutable subgroups and supersolubility of finite groups // Southeast Asian Bull. Math. 2005. Vol. 29. P. 493–510.

2. *Asaad M., Shaalan A.* On the supersolubility of finite groups // Arch. Math. 1989. Vol. 53. P. 318–326.

3. *Ballester-Bolinches A., Estaban-Romero R., Asaad M.* Products of finite groups. Berlin: Walter de Gruyter, 2010.

4. *Trofimuk A. A.* On the supersol4ubility of a group with some tcc-subgroups // J. Algebra Appl. 2021. Vol. 20, N 2. P. 2150020-1–2150020-18.

5. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups // Publ. Math. Debrecen. 2006. Vol. 68, N 3–4. P. 433–449.

6. *Монахов В. С., Трофимук А. А.* О сверхразрешимости группы с полунормальными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2020. Vol. 61, № 1. С. 148–159.

7. *Монахов В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006.

8. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1967.

9. *Монахов В. С., Чирик И. К.* О сверхразрешимом корадикале произведения субнормальных сверхразрешимых подгрупп // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 353–364.

10. *Doerk K.* Minimal nichtüberauflösbare, endliche gruppen // Math. Zeitschrift. 1966. Vol. 91. P. 198–205.

11. *Wielandt H.* Subnormalität in faktorisierten endlichen Gruppen // J. Algebra. 1981. Vol. 69, N 2. P. 305–311.

12. *Baer R.* Supersoluble immersion // Can. J. Math. 1959. Vol. 11. P. 353–369.

13. A system for computational discrete algebra GAP 4.12.2 [Electronic resource]. – Mode of access: https://www.gap-system.org. – Date of access: 22.09.2023.

14. *Tyutyanov V. N., Kniahina V. N.* 14 Finite groups with biprimary Hall subgroups // J. Algebra. 2015. Vol. 443. P. 430–440.

15. *Monakhov V. S., Trofimuk A. A.* On the supersolubility of a finite group with NS-supplemented subgroups // Acta Math. Hungar. 2020. Vol. 160, N 1. P. 161–167.

A. A. Trofimuk

On the supersolubility of a group with given systems of conditionally seminormal subgroups

Summary

The subgroups A and B are said to be cc-*permutable*, if A is permutable with B^x for some $x \in \langle A, B\rangle$. A subgroup A of a finite group G is called *conditionally seminormal subgroup* in G, if there exists a subgroup T of G such that $G = AT$ and A is cc-permutable with all subgroups of T. In this paper, we proved the supersolubility of a group $G = AB$, where A and B are supersoluble conditionally seminormal subgroups in G, in the following cases: the derived subgroup G' is nilpotent; $(|A|, |B|) = 1$; G is metanilpotent and $(|G : A|, |G : B|) = 1$; G is metanilpotent and $(|A/A^{\mathfrak{N}}|, |B/B^{\mathfrak{N}}|) = 1$. Besides, we obtained the supersolubility of a group in which maximal subgroups, Sylow subgroups, maximal subgroups of every Sylow subgroup, minimal subgroups, 2-maximal subgroups are conditionally seminormal subgroups.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 2. С. 91–102

УДК 512.542

О РАЗРЕШИМОСТИ И ФАКТОРИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ π-РАЗРЕШИМЫХ НЕПРИВОДИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП ПРИМАРНОЙ СТЕПЕНИ. ЧАСТЬ III

А. А. Ядченко

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: yadchenko_56@mail.ru
Поступила 23.11.2023

Работа является третьей из серии статей, где для множества π, состоящего из нечетных простых чисел, исследуются конечные π-разрешимые неприводимые комплексные линейные группы степени $2|H|+1$, у которых холловы π-подгруппы H являются TI-подгруппами и не являются нормальными в группах. Цель серии – доказать разрешимость и определить условия факторизации таких групп. Продолжено доказательство теоремы. Установлены дальнейшие свойства минимального контрпримера к теореме.

1. Введение.

Исследуются конечные π-разрешимые неприводимые комплексные линейные группы степени $n=2|H|+1$, у которых холлова π-подгруппа H является TI-подгруппой. В первой части работы [1] были доказаны некоторые предварительные результаты, а также получены некоторые свойства минимального контрпримера Γ к теореме $(^*)$, которая является основой доказательства главной теоремы. Во второй [2] и в данной ее части продолжено изучение свойств минимального контрпримера к теореме $(^*)$.

Условие 1. Пусть π – множество нечетных простых чисел и G – конечная не π-замкнутая π-разрешимая группа с π-холловой TI-подгруппой H, имеющая точный неприводимый характер степени n.

Теорема. *Пусть группа G удовлетворяет условию 1 и $n=2|H|+1>7$. Тогда n – степень простого числа q, группа G разрешима и, если при $|\pi|=1$ характер χ примитивный, то $G=N_G(H)O_q(G)$.*

2. Некоторые определения, обозначения и предварительные результаты. Z_+ – множество целых неотрицательных чисел; если ψ – характер некоторой подгруппы $X\subseteq G$, то $\operatorname{Irr}(\psi)$ обозначает множество всех неприводимых компонент характера ψ; $\pi=\pi(H)$; $\pi'=\pi(X)\setminus\pi$; $X_{\pi'}$ – холлова π'-подгруппа группы X. Если $X\lhd G$ и φ – неприводимый характер подгруппы X, то условие, что φ – g-инвариантен для некоторого элемента $g\in G\setminus X$, запишем для краткости в виде $I_G(\varphi)\neq X$. Все остальные обозначения и определения обычны и их можно найти, например, в [3] или [4]. Всюду под характером группы будем понимать комплексный характер, а под группой – конечную группу.

Пусть $\Gamma=AB$ – группа с подгруппами A и B, где $B\lhd\Gamma$, $(|A|,|B|)=1$ и $|A|$ нечетен (A – *группа копростых автоморфизмов группы* B). Тогда она удовлетворяет условию теоремы 13.1 [4]. Согласно этой теореме существует взаимно-однозначное соответствие $\pi(B,A):\operatorname{Irr}_A(B)\longrightarrow\operatorname{Irr}(C_B(A))$ между множеством всех A-инвариантных неприводимых характеров группы B и множеством всех неприводимых характеров подгруппы $C_B(A)$, которое обладает рядом свойств, зависящих, в частности, от свойств подгруппы A. Пусть $\chi\in\operatorname{Irr}_A(B)$. Тогда, по лемме 13.3 [4] существует такой единственный неприводимый характер $\widehat{\chi}$ группы Γ, что $\widehat{\chi}_B=\chi$ и $A\subseteq\ker(\det\widehat{\chi})$. Он называется *каноническим продолжением характера* χ *на группу* Γ. В дальнейшем под $\widehat{\chi}$ будем понимать именно такой характер.

Условие (*). Скажем, что для Γ, A, B, C, χ и n выполнено условие (*), если $\Gamma = BA$, где B – нормальная в Γ подгруппа, $(|B|,|A|) = 1$, A – группа нечетного порядка, большего 3, которая не является нормальной в группе Γ, $C_B(a) = C_B(A) = C$ для каждого элемента $a \in A^{\#}$, и B имеет точный неприводимый характер χ степени n, который является a-инвариантным хотя бы для одного элемента $a \in A^{\#}$.

Теорема (*). *Пусть для* Γ, A, B, C, χ *и* $n = 2|A|+1$ *выполнено условие* (*). *Тогда группа* Γ *разрешима,* n *является степенью простого числа* q, *подгруппа* $C_{2'}$ *абелева и, если подгруппа* C *не абелева, то в обозначениях леммы* 2.7 [1] *характер* $\chi_C = \beta + |A|\beta_1$, *где* $\beta(1) = |A|+1$ *и* $\beta_1(1) = 1$ *либо* $\beta(1) = 1$ *и* $\beta_1(1) = 2$. *Также, если* $|\pi| > 1$ *и при* $|\pi| = 1$ *характер* $\widehat{\chi}$ *примитивный, то* $G = O_q(B)C$.

Продолжим нумерацию формулировок лемм, начатую в первой части [1] работы. В ней, напомним, мы, в частности, показали, что неприводимый характер $\widehat{\chi}$ точный и что $\widehat{\chi}(1) = q^{\alpha}$ для некоторого нечетного простого числа q и $\alpha \in \mathbf{N}$.

Пусть $N = N_{\Gamma}(B_q)$, где $\widehat{\chi}(1) = q^{\alpha}$. Мы можем считать, что подгруппа B_q является A-инвариантной, т. е. $A \subseteq N$.

Лемма 3.13. *Выполняется* $N \neq \Gamma$.

Доказательство. Допустим обратное, т. е. $N = \Gamma$. Тогда $B_q = O_q(B)$. Из теоремы Клиффорда вытекает, что

$$\widehat{\chi}(1) = e|\Gamma : I_{\Gamma}(\varphi)|\varphi(1),$$

где $\varphi \in \mathrm{Irr}\,(\widehat{\chi}_{B_q})$ и $e = (\widehat{\chi}_{B_q}, \varphi)_{B_q}$ делит $|\Gamma : B_q|$. Так как $B_q \subseteq I_{\Gamma}(\varphi)$ и $\widehat{\chi}(1) = q^{\alpha}$, то $e = |\Gamma : I_{\Gamma}(\varphi)| = 1$. Следовательно, характер $\varphi = \widehat{\chi}_{B_q}$ неприводим. Поэтому неприводим и характер $\widehat{\chi}_X$ для любой такой подгруппы $X \subseteq \Gamma$, что $B_q \subseteq X$.

Очевидно также, что $\widehat{\varphi} = \widehat{\chi}_{AB_q}$.

Так как $A \ntrianglelefteq X$ для $AB_q \subseteq X$, ибо $B_q \nsubseteq C$ по леммам 3.3 и 2.1 [1], то мы легко убеждаемся в том, что для X, A, $X_{\pi'}$, $C_{X_{\pi'}}(A)$, $\chi_{X_{\pi'}}$ и n выполняется условие $(^*)$. Поэтому, если $X \neq \Gamma$, то по индукции

$$X_{\pi'} = B_q C_{X_{\pi'}}(A)$$

и подгруппа $C_{X_{\pi'}}(A)$ и характер $\chi_{C_{X_{\pi'}}(A)}$ удовлетворяют утверждениям теоремы $(^*)$. В дальнейшем это утверждение мы будем применять неоднократно.

Пусть

$$X = \Gamma_1^{(q_i)} = AB_qB_{q_i} \neq \Gamma$$

для таких A-инвариантных силовских q_i-подгрупп B_{q_i}, $q_i \in \pi'$, $q_i \neq q$, что $B_{q_i} \nsubseteq C$. Тогда по только что сказанному

$$\left(\Gamma_1^{(q_i)}\right)_{\pi'} = O_q\left(\left(\Gamma_1^{(q_i)}\right)_{\pi'}\right) C_{\left(\Gamma_1^{(q_i)}\right)_{\pi'}}(A) = B_q C_{\left(\Gamma_1^{(q_i)}\right)_{\pi'}}(A).$$

Мы видим, что $B_{q_i} \subseteq C$. Это противоречит выбору подгруппы B_{q_i}.

Поэтому

$$\Gamma_1^{(q_1)} = AB_qB_{q_1} = \Gamma$$

для некоторого одного простого числа $q_1 \neq q$.

Отсюда мы видим, что подгруппа $B = B_qB_{q_1}$ разрешима.

Рассмотрим группу $X = AB_q(B_{q_1})_0$ для A-инвариантной собственной нормальной подгруппы $(B_{q_1})_0 \subseteq B_{q_1}$. Тогда $X \neq \Gamma$, и мы получим, что $(B_{q_1})_0 \subseteq C_{B_{q_1}}(A)$. Поскольку это утверждение справедливо для любой такой подгруппы $(B_{q_1})_0$, то по теореме 5.3.7 [3] подгруппа A действует неприводимо и нетривиально на факторгруппе $B_{q_1}/(B_{q_1})'$ и при этом либо подгруппа B_{q_1} элементарна абелева, либо подгруппа

$$\Phi(B_{q_1}) = Z(B_{q_1}) = (B_{q_1})' = C_{B_{q_1}}(A)$$

элементарна абелева, т. е. подгруппа B_{q_1} специальная класса 2. Мы также заключаем, что факторгруппа $B_{q_1}/C_{B_{q_1}}(A)$ минимальная A-инвариантная.

При этом $|A|$ делит $|B_{q_1}/C_{B_{q_1}}(A)| - 1$, что легко следует из леммы 1 [5]. Так как $B_{q_1} \not\subseteq C$, то

$$(q_1)^{k_1} = |B_{q_1}/C_{B_{q_1}}(A)| = k_2|A| + 1$$

для некоторых натуральных чисел k_1 и k_2.

В дальнейших рассуждениях нам потребуется тот факт, что

$$C_\Gamma(B_q) = Z(B_q) = Z(\Gamma).$$

Докажем это. Так как характер $\varphi = \widehat{\chi}_{B_q}$ неприводим и характер $\widehat{\chi}$ точный, то по упражнению 2.15 [4] $C_\Gamma(B_q) = Z(\Gamma)$. Понятно, что $Z(B_q) \subseteq C_\Gamma(B_q)$. Поэтому $Z(B_q) \subseteq Z(\Gamma)$.

Убедимся в том, что $Z(\Gamma) \subseteq Z(B_q)$.

Допустим, что это не так. Тогда $(Z(\Gamma))_{q'} \neq 1$. Отсюда, из того, что $\varphi \in \mathrm{Irr}_{AB_{q_1}}(B_q)$, а также из леммы 2 [6] вытекает, что $1 \neq (Z(\Gamma))_{q'} = \ker\chi_1$ для такого неприводимого характера χ_1 группы Γ, что $\varphi = (\chi_1)_{B_q}$.

Предположим вначале, что $A\ker\chi_1/\ker\chi_1 \lhd \Gamma/\ker\chi_1$. Тогда по лемме 2.3 [1] $B = (\ker\chi_1)_{\pi'}C_B(A)$. Поскольку $(\ker\chi_1)_{\pi'} \cap B_q = 1$, ибо характер φ точный, то мы получим, что $B_q \subseteq C_B(A)$, что не так.

Поэтому $A\ker\chi_1/\ker\chi_1 \not\lhd \Gamma/\ker\chi_1$. По лемме 2.3 [1] $A \cap \ker\chi_1 = 1$. Учитывая этот факт нетрудно установить, что для $\overline{\Gamma} = \Gamma/\ker\chi_1, \overline{A} = A\ker\chi_1/\ker\chi_1 \cong A, \overline{B} = B/\ker\chi_1, C_{\overline{B}}(A)$, $(\chi_1^*)_{\overline{B}}$ и n выполняется условие (*). Здесь χ_1^* – неприводимый характер факторгруппы $\overline{\Gamma}$, соответствующий характеру χ_1 в смысле леммы 2.22 [4]. Поскольку $|\overline{\Gamma}| < |\Gamma|$, то по индукции $\overline{B} = \overline{B}_q C_{\overline{B}}(A)$. Мы видим, что $\overline{B}_{q_1} = B_{q_1}\ker\chi_1/\ker\chi_1 \subseteq C_{\overline{B}}(A)$. Значит, $[B_{q_1}, A] \subseteq \ker\chi_1$. Поскольку $\ker\chi_1 \subseteq Z(\Gamma)$, то $[B_{q_1}, A] \subseteq Z(\Gamma)$. Тогда по лемме 2.2 [1]

$$B_{q_1} = [B_{q_1}, A]C_{B_{q_1}}(A) \subseteq C,$$

что не так. Наше предположение о том, что $(Z(\Gamma))_{q'} \neq 1$ ошибочно. Значит, $Z(\Gamma) \subseteq Z(B_q)$. Поэтому $Z(\Gamma) = Z(B_q)$

Желаемое утверждение доказано.

Пользуясь им мы покажем, что

$$C_{\overline{\Gamma}}(\overline{B}_q) = \overline{B}_q = B_q/Z(B_q).$$

Здесь $\overline{\Gamma} = \Gamma/Z(B_q)$.

Предположим, что это не так и $(C_{\overline{\Gamma}}(\overline{B}_q))_{q'} \neq 1$. Тогда для некоторой q'-подгруппы $1 \neq X \subseteq AB_{q_1}$ выполняется утверждение

$$1 \neq XZ(B_q)/Z(B_q) \subseteq C_{\overline{\Gamma}}(\overline{B}_q).$$

Отсюда следует, что $[X, B_q] \subseteq Z(B_q)$. Так как $Z(B_q) = Z(\Gamma)$ и $B_q = [B_q, X]C_{B_q}(X)$ по лемме 2 [1], то $B_q \subseteq C_{B_q}(X)$, т. е. $X \subseteq C_\Gamma(B_q)$. Однако мы ранее убедились в том, что $C_\Gamma(B_q) = Z(B_q)$. Мы получили противоречие. Стало быть, $C_{\overline{\Gamma}}(\overline{B}_q) = \overline{B}_q$.

Так как $C_\Gamma(B_q) = Z(B_q)$, то легко видеть, что $F(\Gamma) = F(B) = B_q$ и $Z(F(\Gamma)) = Z(B_q)$, а также что факторгруппа

$$\overline{F} = F(\Gamma)/Z(F(\Gamma)) = \overline{B}_q$$

самоцентрализуема в группе $\overline{\Gamma}$.

Можем также записать, что

$$\overline{\Gamma} = \Gamma/Z(B_q) = (\overline{B}_q)B_{q_1}A,$$

ибо $\overline{B}_{q_1} = B_{q_1}Z(B_q)/Z(B_q) \cong B_{q_1}$ и $\overline{A} = AZ(B_q)/Z(B_q) \cong A$.

Предположим, что $|\pi| > 1$. Применим лемму 2.9 [1]. По ней $B = F(B)C$. Отсюда и из выше вытекает, что $B = B_qC$. Стало быть, $B_{q_1} \subseteq C$, что не так.

Поэтому мы заключаем, что $|\pi| = 1$. По условию доказываемой теоремы характер $\widehat{\chi}$ примитивный.

Тогда по теореме Д. А. Супруненко [7, теорема 4.4] факторгруппа $\overline{F} = \overline{B}_q$ элементарна абелева порядка $\widehat{\chi}(1)^2 = q^{2\alpha}$. Следовательно,

$$\Phi(B_q) \subseteq Z(B_q).$$

Поскольку факторгруппа $\overline{B}_q$ самоцентрализуема в $\overline{\Gamma} = \Gamma/Z(B_q)$, то факторгруппа $\overline{\Gamma}/\overline{B}_q \cong AB_{q_1}$ изоморфна некоторой подгруппе группы $GL(2\alpha;q)$.

Так как $|\pi| = 1$, то $|A| = p^m$ для $m \in \mathbb{N}$. Значит,

$$n = 2|A| + 1 = 2p^m + 1 = q^\alpha$$

и по лемме 2.8 [1] α – нечетное число и либо $\alpha = 1$, либо $q = 3$ и при этом или $m = 1$, или же $p = 11$, $m = 2$ и $\alpha = 5$.

Предположим вначале, что $\alpha = 1$. Тогда $\widehat{\chi}(1) = q$.

Поскольку в рассматриваемом случае

$$|GL(2;q)| = q(q-1)(q^2-1) = q(2|A|)^2 2(|A|+1) = 8q|A|^2(|A|+1),$$

то $|B_{q_1}|$ делит $8(|A|+1)$. Следовательно,

$$|B_{q_1}| \leqslant 8(|A|+1).$$

С другой стороны, по одному из выделенных ранее равенств

$$(q_1)^{k_1} = k_2|A| + 1 \leqslant |B_{q_1}|$$

для некоторых натуральных чисел k_1 и k_2.

Предположим, что $q_1 = 2$. Тогда $k_2|A| + 1 = 2^{k_1}$. Поскольку $|A|$ – нечетное число, то k_2 – также нечетное натуральное число.

Покажем, что $|A| + 1$ – степень 2. Для этого достаточно убедиться в том, что $k_2 = 1$.

Допустим, что это не так. Тогда $k_2 \geqslant 3$ и $|A| + 1$ делится на некоторое нечетное простое число $p_1 \geqslant 3$. Отсюда и из предпоследних выделенных равенств вытекает, что

$$k_2|A| + 1 \leqslant 8(|A|+1)/p_1.$$

Следовательно,

$$9|A| + 3 = 3(3|A|+1) \leqslant p_1(k_2|A|+1) \leqslant 8(|A|+1).$$

Отсюда $|A| \leqslant 5$. Поскольку по условию теоремы $|A| > 3$, то мы получаем, что $|A| = 5$. Поэтому $q = 2|A| + 1 = 11$ и, значит,

$$|GL(2;11)| = 11(11-1)(11^2-1) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11.$$

При этом подгруппа порядка $q - 1 = 2|A| = 10$ в группе $GL(2;11)$ циклическая. Следовательно,

$$|B_2 : C_{B_2}(A)| \leqslant 2^3 = 8.$$

Поскольку по лемме 1 [5]

$$|B_2 : C_{B_2}(A)| \equiv 1 \pmod{|A|},$$

то мы видим, что $|B_2 : C_{B_2}(A)| = 4$ и $|A| = 3$ или $|B_2 : C_{B_2}(A)| = 8$ и $|A| = 7$, что не так. Противоречие.

Итак, $k_2 = 1$ и $|A|+1 = p^m+1 = 2^k$ для некоторого натурального числа k. Значит, $m = 1$ и $p = 2^k - 1$ – простое число Мерсенна. Так как $|A| > 3$, то мы видим, что k – нечетное натуральное число. Следовательно,

$$2p+1 = 2(2^k-1)+1 = 2^{k+1}-1 = q$$

– также простое число Мерсенна и $k+1$ – четное натуральное число, большее 2. Поэтому

$$2^{k+1}-1 = (2^{(k+1)/2}-1)(2^{(k+1)/2}+1)$$

не является простым числом. Противоречие.

Пусть теперь $q_1 \neq 2$. Так как $|B_{q_1}|$ делит $8(|A|+1)$, то $|B_{q_1}| \leqslant (|A|+1)/2$. Так как $|B_{q_1}/C_{B_{q_1}}(A)| \leqslant |B_{q_1}|$, то

$$k_2|A|+1 = |B_{q_1}/C_{B_{q_1}}(A)| \leqslant (|A|+1)/2$$

с четным натуральным числом k_2. Мы получили неверное неравенство.

Наше предположение о том, что $\alpha = 1$ ошибочно. Поэтому $\alpha \neq 1$ и $q = 3$.

Ранее установлено, что подгруппа B_{q_1} специальная класса 2, т. е.

$$C_{B_{q_1}}(A) = \Phi(B_{q_1}) = Z(B_{q_1}) = (B_{q_1})'$$

элементарна абелева либо $C_{B_{q_1}}(A) = 1$ и подгруппа B_{q_1} абелева. Также факторгруппа $B_{q_1}/C_{B_{q_1}}(A)$ минимальная A-инвариантная.

Если $|(B_{q_1})'| = q_1$, то группа B_{q_1} называется экстра-специальной. Для экстра-специальных групп B_{q_1} по теореме 5.5.2 (i) [3] $|B_{q_1}| = (q_1)^{2r+1}$ для некоторого натурального числа r. А по теореме 5.5.5 [3] все точные неприводимые характеры экстра-специальных групп имеют степень $(q_1)^r$.

Если же $|(B_{q_1})'| = (q_1)^d$, $d > 1$, то все ее неприводимые характеры неточные. При этом ядра всех ее линейных неприводимых характеров содержат $(B_{q_1})'$, а ядра всех нелинейных неприводимых характеров, они имеют степень $(q_1)^r$, специальной группы B_{q_1} содержатся в подгруппе $(B_{q_1})'$ и имеют в ней индекс, равный q_1.

Предположим, что $C_{B_{q_1}}(a) \neq 1$ для некоторого не единичного элемента $a \in A$. Тогда $C_{B_{q_1}}(A) \neq 1$ и поэтому существует элемент $1 \neq b_1 \in C_{B_{q_1}}(A)$ простого порядка q_1.

Поскольку характер $\varphi = \widehat{\chi}_{B_q}$ неприводим, то характер $\widehat{\chi}_{\langle b_1\rangle B_q}$ также неприводим. Причем $\langle b_1\rangle \ntriangleleft \langle b_1\rangle B_q$, ибо, как ранее установлено, $C_\Gamma(B_q) = Z(B_q)$. Мы можем применить лемму 1 [8]. Поскольку q_1 не делит $\widehat{\chi}(1)$ и $q_1 - 1$ не делит $\widehat{\chi}(1)$, если $q_1 \neq 2$, то по ней $|Spec\,\widehat{\chi}(b_1)| = q_1$. Однако, из леммы 2.7 [1] легко видеть, что $|Spec\,\widehat{\chi}(b_1)| \leqslant |\,\mathrm{Irr}\,(\chi_C)| \leqslant 3$. Поэтому $q_1 \leqslant 3$. Так как $q_1 \neq q = 3$, то $q_1 = 2$.

Итак, мы получаем, что либо подгруппа B_{q_1} элементарна абелева и $C_{B_{q_1}}(a) = 1$ для каждого неединичного элемента $a \in A$, либо $q_1 = 2$ и $C_{B_2}(a) \neq 1$ для некоторого неединичного элемента $a \in A$.

Рассмотрим вначале случай, когда подгруппа B_{q_1} элементарна абелева и $C_{B_{q_1}}(a) = 1$.

Рассмотрим при этом группу $B = B_{q_1}B_q$ и подгруппу $D = (B_{q_1}) \cap (B_{q_1})^b$, $b \in B \setminus N_B(B_{q_1})$.

Предположим, что $D \neq 1$ для некоторого элемента $b = b_0$. Тогда $\langle B_{q_1}, (B_{q_1})^{b_0}\rangle \subseteq C_B(D)$. Поскольку $B_{q_1} \subset C_B(D) \subseteq B$ и $(B_{q_1})^{b_{q_0}} \subset C_B(D)$, то $C_0 = C_B(D) \cap B_q \neq 1$. Очевидно, что $Z(B_q) \subseteq C_0$. Так как $\Phi(B_q) \subseteq Z(B_q)$, то $C_0 \lhd B_q$.

Заметим, что $C_0 \neq Z(B_q)$, ибо в противном случае $C_B(D) = B_{q_1} \times Z(B_q)$. Тогда $B_{q_1} = (B_{q_1})^{b_0}$, т. е. $b_0 \in N_B(B_{q_1})$, что не так.

Также $C_0 \neq B_q$, ибо $C_B(B_q) = Z(B_q)$, что доказано ранее.

Пусть $1 \neq b_1 \in D$. Рассмотрим подгруппу $\langle b_1 \rangle B_q$. Понятно, что $C_0 \subseteq C_{B_q}(b_1)$. Поэтому $C_{B_q}(b_1) \lhd B_q$. Также характер $\widehat{\chi}_{<b_1>B_q}$ неприводим и характер $\varphi \in \mathrm{Irr}_{\langle b_1 \rangle}(B_q)$. По теореме 13.32 (b) [4] $\varphi_{C_{B_q}(b_1)}$ содержит единственную неприводимую компоненту, кратность которой сравнима с ± 1 по модулю $|\langle b_1 \rangle|$, а кратности остальных его неприводимых компонент делятся на $|\langle b_1 \rangle|$. Однако характер $\varphi_{C_{B_q}(b_1)}$ разветвляется по теореме Клиффорда, и все его неприводимые компоненты имеют одинаковую кратность. Стало быть, $\varphi_{C_{B_q}(b_1)} = \varphi(1)\xi$, $\xi(1) = 1$, т. е. $C_{B_q}(b_1) \subseteq Z(B_q)$. Поэтому $C_{B_q}(b_1) = Z(B_q)$. Стало быть, и $C_0 = Z(B_q)$, что не так.

Полученное противоречие показывает, что $D = 1$. Это означает, что подгруппа B_{q_1} является TI-подгруппой. Рассмотрим подгруппу $B = B_{q_1} B_q$. В условии В [9] положим, что $H = B_{q_1}$ и $O_{\pi'}(G) = B_q$. По лемме 7 [9] (заметим, что она справедлива и для подгрупп H четного порядка) подгруппа B_{q_1} изоморфна дополнительному множителю некоторой группы Фробениуса. Поскольку она элементарна абелева, то B_{q_1} циклическая простого порядка, т. е. $|B_{q_1}| = q_1$.

Так как подгруппа B_{q_1} является A-инвариантной, то $|A|$ делит $q_1 - 1$, т. е. $q_1 - 1 = d|A|$ и, значит, $q_1 = d|A| + 1$.

Допустим, что d – нечетное натуральное число. Тогда $q_1 = dp^m + 1$ – четное простое число, т. е. $|B_{q_1}| = q_1 = 2$. Это невозможно.

Так как $2|A| + 1 = \widehat{\chi}(1) = 3^\alpha$, то $d \geqslant 4$. Мы получаем, что

$$\widehat{\chi}(1) = 2|A| + 1 < 3|A| \leqslant |B_{q_1}| - 1.$$

По теореме 1 [10] подгруппа $B_{q_1} \lhd \Gamma$. Тогда $B_{q_1} \subseteq C_\Gamma(B_q)$, т. е. подгруппа $B_{q_1} \subseteq Z(\Gamma) \subseteq C$ и абелева, что и требуется.

Рассмотрим теперь случай, когда подгруппа B_{q_1} не является элементарной абелевой. Следовательно, она специальная 2-группа класса 2.

Выше отмечено, что ее нелинейные неприводимые характеры имеют равную степень 2^r, $r \in \mathbb{N}$, их ядра содержатся в подгруппе $(B_2)'$ и имеют в ней индекс, равный 2. Количество нелинейных неприводимых характеров в группе B_2 равно $|C_{B_2}(A)| - 1$, все они A-инвариантны по теореме 13.1 [4] и по лемме 13.3 [4] продолжаются на группу AB_2. Поэтому, если ψ один из таких характеров, то группа AB_2 имеет неприводимый характер $\widehat{\psi}$ степени 2^r.

Предположим, что

$$A \ker \widehat{\psi} / \ker \widehat{\psi} \lhd AB_2 / \ker \widehat{\psi}.$$

Тогда $A \ker \widehat{\psi} \lhd AB_2$. Но

$$(\ker \widehat{\psi})_2 \subseteq (B_2)' = C_{B_2}(A),$$

что ранее установлено. Поэтому $A \lhd A \ker \widehat{\psi}$, что влечет $A \lhd AB_2$. Значит, $B_2 \subseteq C$, что не так.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$A \ker \widehat{\psi} / \ker \widehat{\psi} \ntriangleleft AB_2 / \ker \widehat{\psi}.$$

По лемме 2.1 [1] $\ker \widehat{\psi} \cap A = 1$. По теореме [11]

$$2^r \equiv \pm 1 \pmod{|A|}.$$

Тогда

$$2^r = k_2 |A| \mp 1 \tag{1}$$

для некоторого, легко видеть, нечетного натурального числа k_2.

Пусть

$$\widehat{\chi}_{AB_2} = \sum_i \alpha_i \varphi_i, \quad \varphi_i \in \mathrm{Irr}\,(AB_2), \quad \alpha_i \in \mathbb{N}.$$

Поскольку A – p-группа нечетного порядка и изоморфна некоторому дополнительному множителю группы Фробениуса по лемме 7 [9], то она циклическая и, значит, можно доказать, что

$$c.d.(AB_2) \in \{1; |A|; 2^r\}$$

и что $(AB_2)' \subseteq \ker\varphi_i$, если $\varphi_i(1)$ не степень 2.

Допустим, что $\varphi_i(1)$ не степень 2 для всех i. Тогда

$$(B_2)' \subseteq \cap_i \ker\varphi_i = \ker\widehat{\chi}_{B_2A} = 1.$$

Противоречие, ибо мы рассматриваем случай, когда подгруппа B_2 не является абелевой.

Стало быть, $\varphi_{i_0}(1) = 2^r$ для некоторого i_0. Понятно, что $\widehat{\chi}_{AB_2}(1) \geqslant \alpha_{i_0}\varphi_{i_0}(1)$. Значит, с учетом равенства (1)

$$2|A|+1 = 3^\alpha \geqslant \alpha_{i_0}2^r = \alpha_{i_0}(k_2|A| \mp 1).$$

Предположим, что $k_2 = 1$. Стало быть, $2^r = |A| \mp 1$.

Пусть $2^r = |A|-1$. Тогда $|A| = 2^r+1$. Поэтому

$$3^\alpha = 2|A|+1 = 2(2^r+1)+1 = 2^{r+1}+3.$$

Мы получаем, что натуральное число 2^{r+1} делится на 3, что не так.

Пусть теперь $2^r = |A|+1$. Тогда $|A| = 2^r-1$. Поэтому

$$3^\alpha = 2|A|+1 = 2(2^r-1)+1 = 2^{r+1}-1.$$

Получаем, что $2^{r+1}-1$ – простое число Мерсенна. И так как оно делится на 3, то $\alpha = 1$. Поэтому $2|A|+1 = 3$, т. е. $|A| = 1$, что тоже не так.

Рассмотрим теперь случай, когда $k_2 \geqslant 3$. Тогда из чуть выше выделенного неравенства получаем что

$$2|A|+1 \geqslant 3|A| \mp 1,$$

т. е. $|A| \leqslant 2$, что не так. $\square$

Пусть далее $q_1 \in \pi'$, B_{q_1} – A-инвариантная силовская q_1-подгруппа из B и $N^{(q_1)} = N_\Gamma(B_{q_1})$.

Лемма 3.14. *Выполняется* $N^{(q_1)} \neq \Gamma$.

Доказательство. Допустим обратное, т. е. $N^{(q_1)} = \Gamma$. Тогда $B_{q_1} \lhd \Gamma$, т. е. $B_{q_1} = O_{q_1}(B)$. Также из леммы 3.13 следует, что $q_1 \neq q$. Рассмотрев характер $\widehat{\chi}_{B_{q_1}}$ степени q^α, мы с помощью теоремы Клиффорда устанавливаем, что все его неприводимые компоненты линейные и, следовательно, подгруппа B_{q_1} абелева.

Так как $B_{q_1} \lhd \Gamma$, то по теореме Шура–Цассенхауза группа Γ содержит q_1-дополнение $\Gamma_1 = AD$, где $D = B_{(q_1)'}$ – A-инвариантная холлова q_1'-подгруппа из B. Тогда

$$\Gamma_1 = AD \neq \Gamma = B_{q_1}\Gamma_1.$$

Поскольку $B = B_{q_1}D$, то мы также можем считать, что $B_q \subseteq D$, т. е. $B_q \subseteq \Gamma_1$.

Допустим, что характер $\widehat{\chi}$ примитивный. По следствию 6.13 [4] $B_{q_1} \subseteq Z(\Gamma)$. Поэтому $\Gamma = B_{q_1} \times \Gamma_1$. Тогда $\widehat{\chi} = \mu' \times \chi'$ для точного линейного характера μ' подгруппы B_{q_1} и точного неприводимого характера $\chi' = \widehat{\chi}_{\Gamma_1}$. Поскольку $A \ntriangleleft \Gamma_1$, ибо в противном случае $A \lhd \Gamma$, что противоречит условию $(^*)$, то легко заметить, что для Γ_1, A, $(\Gamma_1)_{\pi'}$, $C_{(\Gamma_1)_{\pi'}}(A)$, $(\chi')_{(\Gamma_1)_{\pi'}} = \chi_{(\Gamma_1)_{\pi'}}$ и n выполняется условие $(^*)$. По индукции

$$(\Gamma_1)_{\pi'} = O_q((\Gamma_1)_{\pi'})C_{(\Gamma_1)_{\pi'}}(A)$$

и для подгруппы $C_{(\Gamma_1)_{\pi'}}(A)$, а также для ее характера $\chi_{C_{(\Gamma_1)_{\pi'}}(A)}$ выполняются все заключения доказываемой теоремы. Тогда все эти заключения справедливы и для подгруппы C

и ее характера χ_C, а также $B = O_q(B)C$ и по утверждению (1) леммы 3.5 [2] подгруппа C удовлетворяет всем заключениям доказываемой теоремы. В рассматриваемом случае теорема верна. Это противоречит выбору группы Γ.

Поэтому в дальнейшем доказательстве этой леммы характер $\widehat{\chi}$ не является примитивным. Из условия $(^*)$ вытекает, что $|\pi| > 1$.

Предположим, что группа Γ разрешима. По лемме 2.9 [1] $B = F(B)C$. Тогда $AF(B) \lhd \Gamma$. Применим теорему Клиффорда к характеру $\widehat{\chi}_{AF(B)}$.

Если он неприводим, то по индукции, которую, очевидно, мы можем применить,

$$F(B) = O_q(F(B))C_{F(B)}(A).$$

Легко видеть, что $B = O_q(B)C$, что приводит к противоречию с выбором группы Γ.

Предположим, что характер $\widehat{\chi}_{AF(B)}$ не является неприводимым. Тогда из теоремы Клиффорда вытекает, что для каждой его неприводимой компоненты ψ^x, $x \in C_B(A)$, выполняется, что $\psi^x(1) = q^{\alpha_1}$ для некоторого натурального числа $\alpha_1 < \alpha$. Так как $\widehat{\chi}(1) =$ $= 2|A| + 1 = q^{\alpha}$, то мы замечаем, что

$$\psi^x(1) \notin \{|A|-1; |A|; |A|+1; 2|A|-2; 2|A|-1; 2|A|\}.$$

Из лемм 2.1 и 2.10 [1] вытекает, что

$$(A\ker\psi)^x / \ker\psi^x \lhd AF(B)/\ker\psi^x.$$

Отсюда следует, что

$$A\ker\psi^x \lhd AF(B), \;\; x \in C_B(A).$$

Значит,

$$A = \cap_x A\ker\psi^x \lhd AF(B).$$

Тогда $A \lhd \Gamma_1$, что не так.

Делаем вывод, что $|\pi| > 1$, группа Γ не является разрешимой и характер $\widehat{\chi}$ импримитивный.

Пусть $\lambda \in \operatorname{Irr}(\widehat{\chi}_{B_q})$ и пусть $\lambda' \in \operatorname{Irr}(I = I_\Gamma(\lambda))$ – такой характер, что по теореме 6.11 (a) [4]

$$\widehat{\chi} = (\lambda')^\Gamma.$$

Поскольку $B_{q_1} \subseteq I$ и $\Gamma = B_{q_1}\Gamma_1$, то $\Gamma = I\Gamma_1$. Тогда из упражнения 5.2 [4] вытекает, что

$$\widehat{\chi}_{\Gamma_1} = ((\lambda')^{I\Gamma_1})_{\Gamma_1} = ((\lambda')_{I\cap\Gamma_1})^{\Gamma_1}.$$

Если $A \lhd \Gamma_1$, то $B_q \subseteq C$, что будет противоречить лемме 3.3 [1]. Поэтому $A \ntriangleleft \Gamma_1$.

Допустим вначале, что характер $\widehat{\chi}_{\Gamma_1}$ неприводим. Так как $A \ntriangleleft \Gamma_1$, то нам нетрудно убедиться в том, что для группы Γ_1, A, $(\Gamma_1)_{\pi'}$, $C_{(\Gamma_1)_{\pi'}}(A)$, $\chi_{(\Gamma_1)_{\pi'}}$ и n выполняется условие $(^*)$. Поскольку $|\Gamma_1| < |\Gamma|$, то по индукции

$$(\Gamma_1)_{\pi'} = O_q((\Gamma_1)_{\pi'})C_{(\Gamma_1)_{\pi'}}(A).$$

Отсюда вытекает, что $AO_q((\Gamma_1)_{\pi'}) \lhd \Gamma_1$.

Предположим, что характер $\widehat{\chi}_{AO_q((\Gamma_1)_{\pi'})}$ не является неприводимым. Как чуть ранее получаем, что $A \lhd \Gamma_1$, что не так.

Пусть теперь характер $\widehat{\chi}_{AO_q((\Gamma_1)_{\pi'})}$ не является приводимым. Тогда для подгруппы $\Gamma^{(')} = AB_{q_1}O_q((\Gamma_1)_{\pi'})$ неприводим и характер $\widehat{\chi}_{\Gamma^{(')}}$. Нетрудно убедиться в том, что для группы $\Gamma^{(')}$ мы можем применить индукцию, если $|\Gamma^{(')}| < |\Gamma|$. Тогда

$$(\Gamma^{(')})_{\pi'} = O_q((\Gamma^{(')})_{\pi'})C_{(\Gamma^{(')})_{\pi'}}(A).$$

Следовательно, $B_{q_1} \subseteq C$. Отсюда и из выше сказанного вытекает, что $B = O_q(B)C$, что и требуется.

Предположим теперь, что $|\Gamma^{(')}| = |\Gamma|$. Значит,

$$\Gamma = AB_{q_1}O_q((\Gamma_1)_{\pi'}).$$

Мы замечаем, что $O_q((\Gamma_1)_{\pi'}) = B_q$ и что группа $\Gamma = A(B = B_{q_1}B_q)$ разрешима, что не так.

Осталось рассмотреть случай, когда характер $\widehat{\chi}_{\Gamma_1}$ не является неприводимым. Поскольку $A \ntriangleleft \Gamma_1$, то для некоторой компоненты θ характера $\widehat{\chi}_{\Gamma_1}$ подгруппы Γ_1 выполняется утверждение

$$A\ker\theta/\ker\theta \ntriangleleft \Gamma_1/\ker\theta.$$

С учетом леммы 2.1 [1] по лемме 2.10 [1] получаем, что $\theta(1) = |A|-1;\ |A|;\ |A|+1;\ 2(|A|-1);\ 2|A|-1$ или $2|A|$.

Рассмотрим все эти значения.

Предположим, что $\theta(1) = |A|-1;\ |A|+1$ или $2(|A|-1)$. Из теоремы 3 [12] вытекает, что

$$(\Gamma_1)_{\pi'} = O_2((\Gamma_1)_{\pi'})C_{(\Gamma_1)_{\pi'}}(A).$$

Поскольку $B_q \subseteq (\Gamma_1)_{\pi'}$, то $B_q \subseteq C_{(\Gamma_1)_{\pi'}}(A) \subseteq C$. Это противоречит лемме 3.3 [1].

Пусть теперь $\theta(1) = |A|$. Из указанной выше теоремы вытекает, что

$$(\Gamma_1)_{\pi'} = [(\Gamma_1)_{\pi'}, A] \times C_{(\Gamma_1)_{\pi'}}(A)$$

и $[(\Gamma_1)_{\pi'}, A] \subseteq Z((\Gamma_1)_{\pi'})$. Следовательно,

$$\Gamma^* = AB_{q_1}[(\Gamma_1)_{\pi'}, A] \lhd \Gamma.$$

Рассмотрим характер $\widehat{\chi}_{\Gamma^*}$.

Допустим, что он не является неприводимым. Так как $\widehat{\chi}(1) = 2|A|+1 = q^{\alpha}$, $q > 2$, то, ввиду теоремы Клиффорда, все его неприводимые компоненты имеют q-степень меньшую, чем $|A|-1$. Как и ранее, с помощью леммы 2.10 [1], мы легко убеждаемся в том, что $A \lhd \Gamma^*$. Тогда $[(\Gamma_1)_{\pi'}, A] \subseteq C$. Отсюда, а также из выше выделенного равенства и из леммы 2.2 [1] вытекает, что $B_q \subseteq C$, что не так.

Предположим теперь, что характер $\widehat{\chi}_{\Gamma^*}$ неприводим.

Если $|\Gamma^*| < |\Gamma|$, то, учитывая, что $A \ntriangleleft \Gamma^*$, по индукции

$$(\Gamma^*)_{\pi'} = O_q((\Gamma^*)_{\pi'})C_{(\Gamma^*)_{\pi'}}(A).$$

Отсюда вытекает, что $B_{q_1} \subseteq C_{(\Gamma^*)_{\pi'}}(A) \subseteq C$. Так как $B_{q_1} \lhd \Gamma$, то с применением теоремы Клиффорда и леммы 2.7 [1] мы убеждаемся в том, что $B_{q_1} \subseteq Z(\Gamma)$. Следовательно, $\Gamma = B_{q_1} \times \times \Gamma_1$ и характер $\widehat{\chi}_{\Gamma_1}$ неприводим. Как и ранее в таком случае мы придем к противоречию с выбором группы Γ.

Пусть теперь $|\Gamma^*| = |\Gamma|$. Тогда $\Gamma^* = \Gamma$ и группа Γ разрешима, что не так.

Предположим теперь, что $\theta(1) = 2|A|-1 = (q_2)^{\alpha'}$ и $\theta(1) \neq 17$. Здесь $q \neq q_2 \neq q_1$ – простое нечетное число и $\alpha' \in \mathbb{N}$. Тогда по указанной ранее теореме

$$(\Gamma_1)_{\pi'} = O_{q_2}((\Gamma_1)_{\pi'})C_{(\Gamma_1)_{\pi'}}(A).$$

Отсюда мы видим, что $B_q \subseteq C$, что не так.

Пусть $\theta(1) = 2|A|-1 = 17$. Мы получаем, что $|A| = 9$. Значит, $\pi = \{3\}$, что не так.

Осталось рассмотреть случай, когда $\theta(1) = 2|A|$. В обозначениях леммы 3.2 [1] $\widehat{\chi}_{\Gamma_1} = \eta + \theta$, $\eta(1) = 1$ и $A\ker\eta \lhd \Gamma_1$. По ней же характер $\theta_{A\ker\eta}$ точен,

$$(\Gamma_1)_{\pi'} = (\ker\eta)_{\pi'}C((\Gamma_1)_{\pi'})(A)$$

и факторгруппа $(\Gamma_1)_{\pi'}/(\ker\eta)_{\pi'}$ абелева. Поскольку группа Γ не является разрешимой, то подгруппа $(\ker\eta)_{\pi'}$ тоже неразрешима.

Поскольку $\Gamma = AB = B_{q_1}\Gamma_1$, то

$$AB_{q_1}(\ker\eta)_{\pi'} \lhd \Gamma.$$

Как и ранее, рассмотрев характер $\widehat{\chi}_{AB_{q_1}(\ker\eta)_{\pi'}}$, мы убеждаемся в том, что

$$\Gamma = AB_{q_1}(\ker\eta)_{\pi'}.$$

Поэтому

$$\Gamma_1 = A(\ker\eta)_{\pi'}.$$

Из утверждений леммы 3.2 [1] следует, что характер θ_{Γ_1} неприводим и к нему применима теорема [13]. Так как подгруппа $(\ker\eta)_{\pi'}$ неразрешима, то выполняется только утверждение (2_{iii}) этой теоремы. По этому утверждению

$$(\ker\eta)_{\pi'} = \big(K_1 = ((\ker\eta)_{\pi'})_{\{2;3;5\}}\big) \times \big(K_2 = ((\ker\eta)_{\pi'})_{\{2;3;5\}'}\big)$$

и $K_2 \subseteq Z((\ker\eta)_{\pi'})$.

При этом или

$$(\ker\eta)_{\pi'}/Z((\ker\eta)_{\pi'}) \cong \prod_{a\in A}(PSL(2;5))^a$$

– прямое произведение факторгрупп и, следовательно, подгруппа $(\ker\eta)_{\pi'}$ является центральным произведением некоторых своих подгрупп, или $K_1 \subseteq C_{(\ker\eta)_{\pi'}}(A)$.

Допустим, что $K_2 \neq 1$. Тогда группа $\Gamma^{(1)} = AB_{q_1}K_2$ разрешима. Поскольку $|\pi| > 1$, то по лемме 2.9 [1]

$$B_{q_1}K_2 = F(B_{q_1}K_2)C_{B_{q_1}K_2}(A).$$

Пусть при этом $C_{B_{q_1}K_2}(A) \neq 1$. Поскольку подгруппа $F(B_{q_1}K_2)$ абелева, то

$$F(B_{q_1}K_2) = [F(B_{q_1}K_2),A] \times C_{F(B_{q_1}K_2)}(A)$$

и, нетрудно видеть, что

$$B_{q_1}K_2 = [F(B_{q_1}K_2),A]C_{B_{q_1}K_2}(A)$$

и

$$[F(B_{q_1}K_2),A] \cap C_{B_{q_1}K_2}(A) = 1.$$

Мы делаем вывод, что

$$\Gamma = A[F(B_{q_1}K_2),A]K_1C_{B_{q_1}K_2}(A)$$

и $\Gamma_1 = A[F(B_{q_1}K_2),A]K_1 \lhd \Gamma$. При этом $\Gamma_1 \neq \Gamma$. Как и ранее нетрудно убедиться в том, что характер $\widehat{\chi}_{\Gamma_1}$ неприводим и к нему и к группе Γ_1 можем применить индукцию. По ней

$$(\Gamma_1)_{\pi'} = (O_q((\Gamma_1)_{\pi'}))C_{(\Gamma_1)_{\pi'}}(A).$$

Следовательно, $B = O_q(B)C$, и мы придем к противоречию с выбором группы Γ.

Пусть теперь $C_{B_{q_1}K_2}(A) = 1$. Тогда подгруппа $B_{q_1}K_2$ абелева и, значит,

$$K_2 \subseteq Z(B = B_{q_1}K_1 \times K_2) = Z(\Gamma).$$

Поэтому $\Gamma = (\Gamma_1 = AB_{q_1}K_1) \times K_2$ и $\Gamma_1 \neq \Gamma$. Так как $A \ntriangleleft \Gamma_1$, ибо $A \ntriangleleft \Gamma$, то к группе Γ_1 и ее характеру $\widehat{\chi}_{\Gamma_1}$ можем также применить индукцию. Как и ранее придем к противоречию с выбором группы Γ.

Итак, $K_2 = 1$. Стало быть, $\Gamma = AB_{q_1}K_1$ т. е. в данном случае $\Gamma_1 = AK_1$ и

$$K_1/Z(K_1) \cong \prod_{a\in A}(PSL(2;5))^a,$$

ввиду того, что $K_1 \nsubseteq C$, ибо в противном случае $B_q \subseteq C$, что не так.

Мы видим, что $B_{q_1}Z(K_1) \lhd \Gamma$. Пусть $\psi \in \mathrm{Irr}\,(\widehat{\chi}_{AB_1Z(K_1)})$.

Покажем, что характер $\widehat{\chi}_{B_{q_1}Z(K_1)}$ содержит линейную компоненту.

Предположим, что $(\psi(1), p) \neq 1$ для некоторого такого характера ψ и для некоторого простого числа $p \in \pi$. Тогда $|A|$ делит $\psi(1)$ ввиду того, что A – TI-подгруппа в $AB_1Z(K_1)$. Так как $\widehat{\chi}(1) = 2|A| + 1$, то

$$\psi(1) \in \{|A|; 2|A|\}.$$

Если $\psi(1) = |A|$, то по теореме Клиффорда характер $\psi_{B_{q_1}Z(K_1)}$ разветвляется в сумму линейных компонент, каждая из которых является неприводимой компонентой характера $\widehat{\chi}_{B_{q_1}Z(K_1)}$.

Если $\psi(1) = 2|A|$, то характер $(\widehat{\chi} - \psi)_{B_{q_1}Z(K_1)}$ неприводим степени 1.

Так как характер $\widehat{\chi}_{B_{q_1}Z(K_1)}$ содержит линейную компоненту, то с помощью теоремы Клиффорда мы убеждаемся в том, что все неприводимые компоненты указанного характера линейные, и их ядра содержат $(B_{q_1}Z(K_1))'$, т. е. $(B_{q_1}Z(K_1))' \subseteq \ker\widehat{\chi} = 1$. Мы видим, что подгруппа $B_{q_1}Z(K_1)$ абелева. Следовательно, $Z(K_1) \subseteq I$ и поэтому $Z(K_1) \subseteq I \cap K_1$. Отсюда и из ранее сказанного вытекает, что $|K_1 : I \cap K_1|$ делит $|PSL(2;5)|$.

Так как $\Gamma = I\Gamma_1 = IK_1$, то мы получаем, что

$$\widehat{\chi}(1) = |\Gamma : I| = |IK_1 : I| = |K_1 : I \cap K_1| = q^{\alpha}.$$

Мы видим, что $q = 3$ или $q = 5$.

И так как среди всех примарных индексов подгрупп группы $PSL(2;5)$ существует только индекс равный 5, то мы видим, что $q = 5$. Поэтому $2|A| + 1 = 5^{\alpha}$. Отсюда следует, что $2|A| = 5^{\alpha} - 1$. Однако мы видим, что для любого натурального числа α число $5^{\alpha} - 1$ делится на 4. Левая же часть последнего равенства делится только на 2.

Указанный выше случай невозможен.

Следовательно, $(\psi(1), p) = 1$ для всех простых чисел $p \in \pi$ и для всех $\psi \in$ $\in \mathrm{Irr}\left(\widehat{\chi}_{B_{q_1}Z(K_1)}\right)$. Тогда характер $\psi_{B_{q_1}Z(K_1)}$ неприводим, и его степень равна q^{α_1}, $\alpha_1 \leqslant \alpha$.

Если $\alpha_1 \neq \alpha$, то $\psi(1) < |A| - 1$ для всех неприводимых компонент ψ характера $\widehat{\chi}_{AB_{q_1}Z(K_1)}$ и, значит, по лемме 2.10 [1] $A\ker\psi/\ker\psi \lhd AB_{q_1}Z(K_1)/\ker\psi$. Поскольку

$$\cap_{\psi} \in \mathrm{Irr}\,(\widehat{\chi}_{AB_{q_1}Z(K_1)}) = 1,$$

то мы получаем, что $A \lhd AB_{q_1}Z(K_1)$. Это означает, что $B_{q_1}Z(K_1) \subseteq C$. Так как $B_{q_1} \lhd \Gamma$ и $B_{q_1} \subseteq$ $\subseteq C$, то с помощью теоремы Клиффорда и леммы 2.7 мы заключаем, что $B_{q_1} \subseteq Z(B) = Z(\Gamma)$. Тогда $\Gamma = \Gamma_1 \times B_{q_1}$. Такой случай раасматривался ранее.

Если же $\alpha_1 = \alpha$, то $\psi = \widehat{\chi}_{AB_{q_1}Z(K_1)}$. Поскольку $A \ntriangleleft AB_{q_1}Z(K_1)$, в чем мы только что убедились и $|AB_{q_1}Z(K_1)| < |\Gamma|$, то мы сможем применить индукцию. По ней

$$B_{q_1}Z(K_1) = O_q(B_{q_1}Z(K_1))C_{B_{q_1}Z(K_1)}(A).$$

Мы вновь замечаем, что $B_{q_1} \subseteq C$. Этот случай невозможен.

Это последнее противоречие, которое доказывает лемму 3.14. □

Литература

1. *Ядченко А. А.* О разрешимости и факторизации некоторых π-разрешимых неприводимых линейных групп примарной степени. Часть I // Тр. Ин-та математики. 2022. Т. 30, № 1–2. С. 84–98.

2. *Ядченко А. А.* О разрешимости и факторизации некоторых π-разрешимых неприводимых линейных групп примарной степени. Часть II // Тр. Ин-та математики. 2023. Т. 31, № 1. С. 77–89.

3. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Harper and Row,1968.
4. *Isaacs I. M.* Character theory of finite groups. New York: Academic Press, 1976.
5. *Ядченко А. А.* О П-разрешимых неприводимых линейных группах с холловой TI-подгруппой нечетного порядка. II // Тр. Ин-та математики. 2009. Т. 17, № 2. С. 94–104.
6. *Романовский А. В., Ядченко А. А.* О силовских подгруппах линейных групп // Математический сб. 1988. Т. 137(179), № 4(12). С. 568–573.
7. *Dixon J.* The structure of linear groups. L.: Butler and Tanner Ltd., 1971.
8. *Ядченко А. А.* О спектрах p-элементов конечных комплексных p-разрешимых линейных групп // Математические заметки. 1991. Т. 50, № 3. С. 143–151.
9. *Ядченко А. А.* О π-разрешимых неприводимых линейных группах схолловой TI-подгруппой нечетного порядка I // Тр. Ин-та математики. 2008. Т. 16, № 2. С. 118–130.
10. *Ядченко А. А.* О конечных π-разрешимых линейных группах // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Минск: Наука и техника, 1986. С. 181–207.
11. *Ядченко А. А.* Разрешимые неприводимые линейные группы произвольной степени с холловской TI-подгруппой // Математические заметки. 1990. Т. 48, № 2. С. 137–144.
12. *Ядченко А. А.* О факторизации некоторых π-разрешимых неприводимых линейных групп // Тр. Ин-та математики. 2019. Т. 27, № 1–2. С. 79–107.
13. *Ядченко А. А.* О нормальных подгруппах и факторизации некоторых π-разрешимых неприводимых линейных групп // Тр. Ин-та математики. 2021. Т. 29, № 1–2. С. 149–164.

A. A. Yadchenko

On the solvability and factorization of some π-solvable irreducible linear groups of primary degree. Part III

Summary

The article is the third one in a series of papers, where for a set π consisting of odd primes, finite π-solvable irreducible complex linear groups of degree $2|H|+1$ are investigated, for which Hall π-subgroups are TI-subgroups and are not normal in groups. The purpose of the series is to prove solvability and to determine the conditions for factorization of such groups. The proof of the theorem is continued. Further properties of the minimal counterexample to the theorem are established.

Адрес редколлегии: 220072, г. Минск, ул. Сурганова, 11, к. 45.
Телефон (017) 379-17-84, e-mail: tbusel@gmail.com

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Статья представляется в редакцию в двух экземплярах на русском или английском языках и является оригиналом для печати.

2. В статье должен быть указан соответствующий ей индекс по Универсальной десятичной классификации (УДК), полное название учреждения (вуза), где выполнена работа, адрес электронной почты. В нее следует включить аннотацию (на русском языке), резюме (на английском языке) с указанием фамилии и инициалов автора (авторов) и названия статьи (на английском языке). Ее необходимо подписать всем авторам, указать также почтовый адрес, номер телефона (служебный и домашний).

3. Авторы вместе с окончательным вариантом (после рецензирования) представляют TeX-файл со статьей, подготовленной в LaTeX (новых команд не вводить) с опцией 12pt в стандартном стиле article (\textwidth 162 mm, \textheight 240 mm), при этом объем статьи не должен превышать 12 страниц и ее разметка не требуется. Не допускается использование в TeX-файлах «нестандартных» TeX-команд (т. е. команд, не входящих в стандартную поставку LaTeX), а также переопределение стандартных команд.

Рисунки должны быть вставлены в текст статьи.

В указанный выше объем входят текст, summary, список литературы, таблицы и рисунки.

4. Занумерованные формулы выключаются в отдельную строку, номер формулы ставится у правого края страницы. Нумеровать следует лишь те формулы, на которые имеются ссылки. Формулировки утверждений (типа теорем, лемм и следствий) должны быть набраны курсивом, определения, замечания – обычным шрифтом.

5. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте и оформляется следующим образом:

для книг: фамилия и инициалы автора. Полное название книги. Место издания, год. Номер тома, выпуска;

для журнальных статей: фамилия и инициалы автора. Название статьи. Название журнала. Год, номер тома, выпуска. Страницы от–до.

Ссылки в тексте обозначаются порядковым номером в квадратных скобках. При ссылке на книгу указываются страницы, например, [4, с. 10–25]. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.