ТРУДЫ
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

Минск. 2023. ТОМ 31. № 1

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 1. С. 3–5

АКАДЕМИК В. И. ЯНЧЕВСКИЙ. К 75-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

Коллектив сотрудников Института математики НАН Беларуси

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: math@im.bas-net.by
Поступила 11.06.2023

9 июля 2023 г. исполнилось 75 лет со дня рождения академика НАН Беларуси Вячеслава Ивановича Янчевского – ученого мирового уровня, специалиста в области алгебраической геометрии и алгебры. Этот человек – ученый и педагог – бесспорно заслуживает того, чтобы о нем было больше известно в профессиональном сообществе.

Вячеслав Иванович родился 9 июля 1948 г. в Минске. В школьные годы он серьезно заинтересовался математикой, проявил незаурядные математические способности и в 1964 г. поступил в школу-интернат № 18 физико-математического профиля при Московском университете (ныне специализированный учебно-научный центр МГУ – школа им. А. Н. Колмогорова), которую окончил в 1966 г.

В 1966 г. В. И. Янчевский поступил на математический факультет Белорусского государственного университета, который окончил с отличием в 1971 г. После окончания аспирантуры в БГУ с 1974 г. Вячеслав Иванович работает в Институте математики НАН Беларуси, где прошел путь от младшего научного сотрудника до заведующего отделом алгебры. В 1974 г. защитил кандидатскую диссертацию «Строение классических групп над конечномерными телами» под руководством академика В. П. Платонова, а в 1980 г. В. И. Янчевский защитил докторскую диссертацию «Приведенная унитарная *K*-теория». В 1990 г. ему присвоено ученое звание профессора. В 2009 г. он избран членом-корреспондентом, а в 2014 г. – действительным членом НАН Беларуси.

Основные области его научных интересов: теория анизотропных алгебраических групп, алгебраическая геометрия маломерных многообразий, теория групп Брауэра полей и алгебраических многообразий, алгебраическая *K*-теория, теория конечномерных алгебр. Работы Вячеслава Ивановича внесли существенный вклад в развитие этих направлений. Им построены приведенная унитарная и спинорная *K*-теории. Полученная им серия результатов о конечномерных алгебрах с делением над произвольными гензелевыми полями завершила классические исследования Хассе, Брауэра, Нетер, Витта, Алберта, Накаямы, Шарлау. Несколько лет назад им получен ряд глубоких и во многом неожиданных результатов, которые привели к решению двух старых известных проблем алгебраической *K*-теории и теории алгебраических групп. Совместно с А. Уодсвортом (университет Калифорния-Беркли, США, 2012) Вячеславом Ивановичем было закончено построение приведенной унитарной K-теории изотропных эрмитовых форм градуированных алгебр с делением, что завершило многолетние исследования ряда известных специалистов из Германии, США, Великобритании и России. С помощью алгебро-геометрических методов им совместно с У. Реманном (университет Билефельда, ФРГ) и С. В. Тихоновым была решена проблема вложимости произвольных алгебр Адзумайи в циклические с сохранением их индексов и экспонент (2012), в течение 40 лет не поддававшаяся решению. Недавно В. И. Янчевский совместно с Л. Роуэном и Б. Э. Кунявским (Университет Бар-Илан, Израиль) установил цикличность центральных простых алгебр над полем функций проективной плоскости с ветвлением в кониках, кубиках и квадриках. Кроме того, он доказал существование расширений скаляров, являющихся полями функций некоторых многообразий Севери–Брауэра, над которыми алгебры имеют предписанные свойства (являются скрещенными произведениями с заданной группой Галуа, сохраняют индексы, имеют заданные экспоненты). В 2022 г. им получены важные результаты о строении инволютивных гензелевых слабо разветвленных алгебр с делением, позволившие найти формулы для вычисления приведенных унитарных групп Уайтхеда внешних форм анизотропных алгебраических групп типа A_n.

Вячеслав Иванович – автор более 200 научных работ, получивших широкое международное признание. Среди них статьи в ведущих математических журналах («Математический сборник», «Доклады РАН», «Известия РАН. Серия математическая», «Записки научных семинаров ПОМИ», Journal of Algebra, Communications in Algebra, Manuscripta Mathematica, Proceedings of the American Mathematical Society, Transactions of the American Mathematical Society, Bulletin of the Belgian Mathematical Society, Algebra and Discrete Mathematics и др.).

В. И. Янчевский активно участвует в международном научном сотрудничестве. Он был белорусским координатором ряда международных проектов Еврокомиссии, ИНТАС и БРФФИ, неоднократно приглашался для проведения научных исследований в научных центрах Германии, Бельгии, Израиля, Швейцарии, выступал с докладами на многих представительных международных математических форумах, в том числе на международных конгрессах математиков (Мадрид, 2006, Хайдарабад, 2010, Сеул, 2014) и европейских математических конгрессах (Будапешт, 1996, Краков, 2012), на конференции, посвященной 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ (Москва, 2019), на конференции «Числа и функции», посвященной 80-летию А. Н. Паршина (Москва, 2022).

В последнее время быстро возрастает значение алгебры (и в особенности алгебраической геометрии) для решения проблем защиты информации. Это вызвано использованием все более сложных алгебраических объектов в современных и перспективных криптографических системах. Под руководством В. И. Янчевского был успешно выполнен ряд прикладных НИР по защите информации в рамках государственных программ «Гранит» и «Гранит-2».

Вячеслав Иванович много сил уделяет подготовке научных кадров. Более 20 лет он возглавлял кафедру геометрии, топологии и методики преподавания математики БГУ и был членом Ученого совета механико-математического факультета БГУ, в настоящее время является научным руководителем этой кафедры. Он разработал программы и прочел большое количество оригинальных специальных курсов по различным разделам алгебры и алгебраической геометрии. Вячеслава Ивановича всегда волнует уровень математической культуры студентов, уровень их понимания изучаемого материала. Именно поэтому он вместе с коллегами написал два основополагающих учебных пособия: «Введение в математику» (совместно с С. Г. Кононовым и Р. И. Тышкевич) и «Основы аффинной геометрии» (совместно с С. Г. Кононовым, А. В. Прокопчуком и Т. В. Тихоновой).

В. И. Янчевский подготовил 12 кандидатов наук. Его ученики успешно работают в научных центрах Беларуси, США, ФРГ и Великобритании. Он ведет большую научно-организационную работу. В настоящее время он председатель Национального комитета математиков Беларуси, реализующего связи белорусских математиков с Международным математическим союзом. Он много лет руководит специализированным советом по защитам диссертаций при Институте математики НАН Беларуси, является членом редколлегий журналов «Труды Института математики», «Известия НАН Беларуси» (серия физико-математических наук), «Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика» и Algebra and Discrete Mathematics.

Вячеслав Иванович – лауреат премии НАН Беларуси 2008 года, он награжден нагрудным знаком «Отличник образования Беларуси» и нагрудным знаком отличия имени В. М. Игнатовского Национальной академии наук Беларуси, ему присвоено почетное звание «Заслуженный работник Белорусского государственного университета». Не менее важно, что

Вячеслав Иванович – человек с отличным чувством юмора, многогранно талантливый и высоко эрудированный.

В. И. Янчевский пользуется уважением не только в коллективе Института математики, но и во многих научных центрах разных стран мира, где ведутся исследования по алгебре. Глубокие творческие идеи, высокий профессионализм и организаторские способности обеспечили В. И. Янчевскому авторитет талантливого ученого и педагога. Сердечно поздравляем Вячеслава Ивановича с юбилеем, желаем ему крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 1. С. 6–13

УДК 515.12

О ФУНКТОРИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ Ω-НАСЫЩЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО T_1-ПРОСТРАНСТВА

А. С. Бедрицкий

Белорусский государственный университет
e-mail: bedrickiAS@bsu.by
Поступила 08.11.2022

Для топологического T_1-пространства рассматривается насыщение типа $\Omega,$ в определенном смысле максимальное по включению среди всех насыщений такого типа, которое канонически вкладывается в волмэновское расширение $\omega X.$ Находится класс отображений $X \xrightarrow{f} Y,$ допускающих непрерывное продолжение $s_\Delta X \xrightarrow{\tilde{f}} s_\Delta Y,$ где $s_\Delta X$ и $s_\Delta Y$ – указанные выше Ω-насыщения пространств X и Y соответственно. Показано, что эти отображения вместе с классом топологических T_1-пространств образуют категорию, а конструкция рассмотренного в работе Ω-насыщения определяет ковариантный функтор из указанной категории в категорию **TOP** топологических пространств и непрерывных отображений.

1. Введение. В случае, когда для топологического пространства X определяется некоторое новое топологическое пространство $\Phi(X),$ $X \subset \Phi(X)$ (X – подпространство в $\Phi(X)$ или X некоторым каноническим образом вкладывается в $\Phi(X)$), то, как правило, возникает вопрос о функториальных свойствах этой конструкции, связанный с задачей непрерывного продолжения на $\Phi(X)$ и $\Phi(Y)$ некоторого отображения $X \xrightarrow{f} Y.$ А именно, если отображения, допускающие такое продолжение, образуют вместе с некоторым классом топологических пространств категорию, то будет ли отображение $\Phi,$ ставящее в соответствие пространству X пространство $\Phi(X),$ а отображению $X \xrightarrow{f} Y$ – его непрерывное продолжение $\Phi(X) \xrightarrow{\Phi(f)} \Phi(Y),$ ковариантным функтором из указанной категории в категорию **TOP** топологических пространств и непрерывных отображений.

Здесь нам важен следующий пример. Как хорошо известно, любое замкнутое непрерывное отображение $X \xrightarrow{f} Y$ ($X,$ Y – топологические T_1-пространства) допускает непрерывные продолжения $\omega X \xrightarrow{\tilde{f}} \omega Y$ [1] и $\exp X \xrightarrow{\bar{f}} \exp Y$ [2, 3, с. 134], где ωX и $\exp X$ – волмэновское компактное расширение и, соответственно, экспонента (или гиперпространство) пространства $X.$ Тем самым, возникают функторы ω и $\exp$ из категории T_1-пространств и замкнутых непрерывных отображений в категорию **TOP**, ставящие в соответствие каждому морфизму $X \xrightarrow{f} Y$ их непрерывные продолжения $\omega X \xrightarrow{\tilde{f}} \omega Y$ и $\exp X \xrightarrow{\bar{f}} \exp Y.$

Д. Харрисом [4] был расширен класс отображений, допускающих продолжение на волмэновское расширение. Такие отображения были названы им WO-отображениями (или отображениями, удовлетворяющими условию (WO)). Таким образом, функтор ω был продолжен на категорию T_1-пространств и WO-отображений (в [4] обозначенную через WO).

Идея работы [4] получила дальнейшее развитие. Так, рассмотрение в работе [5] модификации условия $(WO),$ обозначенной там через $WO(2\text{-}2),$ позволило продолжить функтор exp на категорию T_1-пространств и WO (2-2)-отображений, более широкую, чем категория T_1-пространств и непрерывных замкнутых отображений.

Условие, схожее с условием (WO) (в определенном смысле, локальная модификация условия (WO)), использовалось и в статье [6] при исследовании функториальных свойств Ω-насыщения топологического пространства (определение см. ниже). При регулярности пространства Y были установлены необходимые и достаточные условия существования для отображения $X \xrightarrow{f} Y$ непрерывного продолжения $S \xrightarrow{\tilde{f}} E$, где S и E – некоторые Ω-насыщения пространств X и Y соответственно (обозначения из [6]), а далее были определены категории, содержащие регулярные пространства в качестве объектов, для которых конструкция Ω-насыщения определяет ковариантные функторы из этих категорий в категорию **TOP**.

В предлагаемой работе обобщаются некоторые результаты работы [6]. Показано, что определенный в [6] функтор s_Δ можно продолжить на более широкую категорию, содержащую уже все топологические T_1-пространства.

2. Основные определения, понятия и обозначения. Пространством назовем произвольное топологическое T_1-пространство. Пусть X – пространство, $A \subset X$. Обозначим: $[A]_X$ – замыкание множества A в X; $Cov(A, X)$ – семейство всех покрытий множества A открытыми в X множествами; $\mathbb{N}$ – натуральный ряд. Будем писать $A \underset{op}{\subset} X$ ($A \underset{cl}{\subset} X$), если A открыто (замкнуто соответственно) в X. Множество A назовем дискретом в X, если A счетно, дискретно (как подпространство) и замкнуто в X. Семейство всех дискретов пространства X будем обозначать Δ_X. Подсемейство $\beta \subset \Delta_X$ назовем Δ-базой в X, если для любого $A \in \Delta_X$ можно выбрать $B \in \beta$ так, чтобы $B \subset A$.

Пусть X и Y – пространства и X – подпространство в Y. Если $U \underset{op}{\subset} X$ и α – семейство некоторых открытых в X множеств, то положим $\widehat{U} = \bigcup\{G \underset{op}{\subset} Y \mid G \cap X = U\}$ (т. е. $\widehat{U}$ – максимальное открытое раздутие U в Y) и $\widehat{\alpha} = \{\widehat{U} \mid U \in \alpha\}$.

Пространство Y называется насыщением пространства X [7], если X – всюду плотное подпространство в Y (т. е. Y – расширение для X), любое бесконечное множество $A \subset X$ имеет предельную точку в Y, и любое счетно-компактное замкнутое в X множество замкнуто и в Y.

Пусть далее Y – расширение для X, β – некоторая Δ-база в X. Пространство Y названо Ω-насыщением для X [8], соответствующим Δ-базе β, если выполняются условия: 1) для любой точки $y \in Y \setminus X$ найдется дискрет $A \in \beta$ такой, что $y \in [A]_Y$ и, обратно, $[A]_Y \cap (Y \setminus X) \neq \varnothing$ для любого $A \in \beta$; 2) если $B \subset A \in \beta$ и $B \subset U \underset{op}{\subset} X$, то $[B]_Y \subset \widehat{U}$; 3) множества вида $\widehat{U}$, где $U \underset{op}{\subset} X$, образуют базу топологии пространства Y; 4) компактны все множества $[A]_Y$, где $A \in \beta$.

Далее нам понадобится понятие волмэновского компактного расширения. Напомним, что нарост $\omega X \setminus X$ волмэновского расширения ωX составляют замкнутые (т. е. состоящие из замкнутых множеств) свободные (т. е. имеющие пустое пересечение) ультрафильтры; базу топологии в ωX образуют множества вида $W(U) = U \cup \{\xi \in \omega X \setminus X \mid F \subset U$ для некоторого $F \in \xi\}$, где $U \underset{op}{\subset} X$. Если $F \underset{cl}{\subset} X$ и $F \subset U \underset{op}{\subset} X$, то $[F]_{\omega X} = F \cup \{\xi \in \omega X \setminus X \mid F \in \xi\}$ и $[F]_{\omega X} \subset W(U)$, а также $W(U_1 \cup \ldots \cup U_n) = W(U_1) \cup \ldots \cup W(U_n)$ и $[F_1 \cap \ldots \cap F_n]_{\omega X} = [F_1]_{\omega X} \cap \ldots \cap [F_n]_{\omega X}$, где $U_i \underset{op}{\subset} X$, $F_i \underset{cl}{\subset} X$, $1 \leqslant i \leqslant n$ (подробнее см. [9, с. 272–274]).

В [8] построено Ω-насыщение $s_\Delta X$ пространства X, являющееся подпространством волмэновского расширения ωX,

$$s_\Delta X = X \cup \left(\bigcup_{A \in \Delta_X} [A]_{\omega X} \right).$$

Там же установлены следующие его свойства: 1) множества вида $\widehat{U}$, где $U \underset{op}{\subset} X$, образуют базу топологии в $s_\Delta X$; 2) если $A \in \Delta_X$, то $[A]_{s_\Delta X} = [A]_{\omega X}$; 3) если $F \underset{cl}{\subset} X$ и $F \subset U \underset{op}{\subset} X$, то $[F]_{s_\Delta X} \subset \widehat{U}$; 4) если $U = U_1 \cup \ldots \cup U_n$, то $\widehat{U} = \widehat{U}_1 \cup \ldots \cup \widehat{U}_n$, где $U_i \underset{op}{\subset} X$, $1 \leqslant i \leqslant n$; 5) если X регулярно, то $s_\Delta X$ хаусдорфово.

Отметим, что свойства 3) и 4) очевидным образом вытекают из соотношений $X \subset s_\Delta X \subset \omega X$ и $\widehat{U} = W(U) \cap s_{\Delta X}$, где $U \underset{op}{\subset} X$.

Также показано, что для любого Ω-насыщения Y пространства X существует каноническое (т. е. тождественное на X) вложение пространства Y в $s_\Delta X$, т. е. $s_\Delta X$ является максимальным по включению (в указанном здесь смысле) среди всех Ω-насыщений пространства X.

Напомним некоторые определения и утверждения. Пусть далее в этой части $F \underset{cl}{\subset} X$.

Определение 1 [6]. Покрытие $\alpha \in Cov(F, X)$ назовем F-Δ-крупным, если для каждого $A \in \Delta_X$ пересечение $F \cap A$ покрывается конечным числом элементов α.

Совокупность всех F-Δ-крупных покрытий множества F обозначим через $BCov(F, X)$.

Определение 2 [6]. Множество F назовем Δ-компактным, если из любого покрытия $\alpha \in BCov(F, X)$ выделяется конечное подсемейство, покрывающее F.

Утверждение 1 [6]. *Пусть* $\alpha \in Cov(F, X)$ *и* $\widehat{\alpha} = \{\widehat{U} | U \in \alpha\}$. *Семейство* $\widehat{\alpha}$ *покрывает* $[F]_{s_\Delta X}$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha \in BCov(F, X)$.

Из утверждения 1 вытекает

Утверждение 2 [6]. *Множество* $[F]_{s_\Delta X}$ *компактно тогда и только тогда, когда* F Δ-*компактно.*

3. Продолжение отображения на Ω-насыщения. Рассматриваемые далее отображения считаем непрерывными.

Определение 3 [6]. Отображение $X \xrightarrow{f} Y$ называется Δ-согласованным, если множество $[f(A)]_Y$ Δ-компактно для любого $A \in \Delta_X$.

Определение 4 [6]. Говорят, что отображение $X \xrightarrow{f} Y$ удовлетворяет условию H_Δ, если для любых дискрета $A \in \Delta_X$ и конечного покрытия $v \in Cov([f(A)]_Y, Y)$ можно выбрать конечное покрытие $u \in Cov(A, X)$ и каждому $U \in u$ поставить в соответствие $V_U \in v$ таким образом, что $f(U) \subset V_U$ и $[f(A' \cap U)]_Y \subset V_U$ при $A' \in \Delta_X$.

Одним из основных результатов статьи [6] является

Теорема 1 [6]. *Пусть* Y *регулярно. Если отображение* $X \xrightarrow{f} Y$ *допускает непрерывное продолжение* $s_\Delta X \xrightarrow{\tilde{f}} s_\Delta Y$, *то оно единственно, а отображение* f Δ-*согласовано и удовлетворяет условию* H_Δ. *Обратно, если* $X \xrightarrow{f} Y$ Δ-*согласовано и удовлетворяет условию* H_Δ, *то* f *допускает непрерывное продолжение* $s_\Delta X \xrightarrow{\tilde{f}} s_\Delta Y$.

Там же показано, что классы регулярных пространств (в качестве объектов) и Δ-согласованных отображений, удовлетворяющих условию H_Δ (в качестве морфизмов), образуют категорию (обозначенную через $\mathbf{K}_\Delta$), и что сопоставление каждому морфизму $X \xrightarrow{f} Y$ из категории $\mathbf{K}_\Delta$ его непрерывного продолжения $s_\Delta X \xrightarrow{\tilde{f}} s_\Delta Y$ является ковариантным функтором из категории $\mathbf{K}_\Delta$ в категорию **TOP**.

Далее мы покажем, что достаточность условий Δ-согласованности и H_Δ в теореме 1 можно доказать и без предположения о регулярности пространства Y.

Теорема 2. *Пусть отображение* $X \xrightarrow{f} Y$ Δ*-согласовано и удовлетворяет условию* H_Δ *(*X *и* Y *– произвольные топологические* T_1*-пространства). Тогда существует и единственно непрерывное продолжение* $s_\Delta X \xrightarrow{\tilde{f}} s_\Delta Y$.

Доказательство. Пусть $\xi \in s_\Delta X \setminus X$, A – произвольный дискрет, принадлежащий ультрафильтру ξ. Паре (ξ, A), как и в [6], поставим в соответствие множество $\Phi(\xi, A) = \bigcap_{F \in \xi} [f(A \cap F)]_{s_\Delta Y}$. То, что $\Phi(\xi, A) \neq \varnothing$ и не зависит от выбора дискрета A, доказано в [6] без использования отделимости пространства Y. Докажем, что множество $\Phi(\xi, A)$ состоит из одного элемента. Сначала предположим от противного, что $\Phi(\xi, A)$ содержит различные ультрафильтры η_1 и η_2 из нароста $s_\Delta Y \setminus Y$. Так как $\eta_1 \neq \eta_2$, то найдутся замкнутые непересекающиеся множества $F_1 \in \eta_1$ и $F_2 \in \eta_2$. Определим множества $V_1 = Y \setminus F_1$ и $V_2 = Y \setminus F_2$. Ясно, что семейство $v = \{V_1, V_2\}$ образует покрытие пространства Y и, как следствие, множества $[f(A)]_Y$. Согласно условию H_Δ найдется покрытие $u = \{U_1, ..., U_n\} \in Cov(A, X)$ такое, что каждому $U_i \in u$ соответствует некоторое множество $V_j \in v$ ($j = 1$ или 2) и при этом $[f(B \cap U_i)]_Y \subset V_j$ для любого $B \in \Delta_X$. Так как $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, то $\xi \in [A]_{s_\Delta X} \subset \widehat{\bigcup_{i=1}^{n} U_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \widehat{U}_i$ (см. свойства $s_\Delta X$ выше). Тогда найдется $\widehat{U}_k \ni \xi$. Следовательно, можно выбрать $F_0 \in \xi$ так, чтобы $U_k \supset F_0$, откуда получаем, что $A \cap F_0 \subset A \cap U_k$. Далее возможны две ситуации: первая, когда $[f(A \cap F_0)]_Y \subset V_1$, вторая, когда $[f(A \cap F_0)]_Y \subset V_2$. Предположив первое, получим, что $[f(A \cap F_0)]_Y \cap F_1 = \varnothing$, откуда следует (в силу свойств ультрафильтра), что $[f(A \cap F_0)]_Y \notin \eta_1$. Получили противоречие. Предположив второе, также придем к противоречию, получив $[f(A \cap F_0)]_Y \notin \eta_2$. Таким образом, $\eta_1 = \eta_2$. Остается рассмотреть случаи, когда $\Phi(\xi, A)$ содержит точку $y \in Y$ и ультрафильтр η из нароста $s_\Delta Y \setminus Y$, и когда содержит две различные точки y_1 и y_2 из Y. В первом случае строим покрытие множества $[f(A)]_Y$, состоящее из множеств $V_1 = Y \setminus F$, $V_2 = Y \setminus y$, где $F \in \eta$, $y \notin F$, а во втором – из множеств $V_1 = Y \setminus \{y_1\}$, $V_2 = Y \setminus \{y_2\}$. Далее приходим к противоречию аналогичным образом. Тем самым доказано, что $\Phi(\xi, A)$ одноэлементно. Продолжение $\tilde{f}$ отображения f определим, полагая, $\tilde{f} = \Phi(\xi, A)$ для $\xi \in s_\Delta X \setminus X$ ($A \in \Delta_X \cap \xi$) и $\tilde{f}(x) = f(x)$ для $x \in X$.

Докажем теперь, что определенное выше отображение непрерывно. Пусть сначала $x \in X$ и $\tilde{f}(x) = f(x) \in \widehat{V}$, где $V \underset{op}{\subset} Y$. Рассмотрим произвольный дискрет $A \in \Delta_X$. Дополним его до дискрета $A_0 = \{x\} \cup A$. Для $[f(A_0)]_Y$ выберем покрытие $\{V, V_0\}$, где $V_0 = Y \setminus \{f(x)\}$.

В силу условия H_Δ существует покрытие $u=\{U_1,\dots,U_n\}$ множества A_0, описанное в определении 4. Очевидно, что из u можно выбрать элемент $U_j \ni x$ так, чтобы $f(U_j)\subset V$ и $[f(B\cap U_j)]_Y \subset V$ для любого $B\in\Delta_X$. Рассмотрим произвольный ультрафильтр $\xi \in \widehat{U}_j \setminus U_j$. Покажем, что $\tilde{f}(\xi)\in\widehat{V}$. Выберем множество $F_0\in\xi$ такое, что $F_0\subset U_j$. Из последнего включения следует, что для произвольного дискрета $B\in\xi$ имеет место $[f(B\cap F_0)]_{s_\Delta Y}\subset[f(B\cap U_j)]_{s_\Delta Y}\subset\widehat{V}$, а в силу определения продолжения $\tilde{f}$ справедливо $\tilde{f}(\xi)\in[f(B\cap F_0)]_{s_\Delta Y}$. Таким образом, $\tilde{f}(\widehat{U}_j)\subset\widehat{V}$. Непрерывность $\tilde{f}$ на X доказана. Доказательство непрерывности $\tilde{f}$ на $s_\Delta X\setminus X$ проведено в [6] независимо от отделимости пространства Y.

Единственность. В силу определения Ω-насыщения топологического пространства для каждого ультрафильтра $\xi\in s_\Delta X\setminus X$ найдется дискрет A такой, что $\xi\in[A]_{s_\Delta X}$. Тогда для любого непрерывного продолжения $s_\Delta X \xrightarrow{g} s_\Delta Y$ отображения f и любого $F\in\xi$ справедливо соотношение $g(\xi)\in g([A\cap F]_{s_\Delta X})\subset[f(A\cap F)]_{s_\Delta Y}$, откуда следует, что $g(\xi)=\tilde{f}(\xi)$. Теорема доказана.

4. Функториальные свойства Ω-насыщения. К сожалению, Δ-согласованные отображения, удовлетворяющие условию H_Δ, и топологические T_1-пространства не образуют категорию, поскольку композиция указанных отображений может таковой уже и не быть. Приведем следующий достаточно простой

Пример. Пусть $X=\mathbb{N}$ с дискретной топологией, $Y=[0;1]$ с евклидовой топологией, $Z=[0;1]$ с топологией, в которой замкнутыми считаются конечные множества и весь отрезок $[0;1]$. Отображение $X\xrightarrow{f}Y$ задано правилом $f(n)=\dfrac{1}{n}$, а $Y\xrightarrow{g}Z$ – тождественное отображение.

Отображение f является Δ-согласованным в силу компактности пространства Y.

Проверим выполнение условия H_Δ. Рассмотрим бесконечное подмножество $A\subset\mathbb{N}$ (т. е. произвольный дискрет в X). Тогда $[f(A)]_Y=\{0\}\cup\left\{\dfrac{1}{a}\mid a\in A\right\}$. Пусть $v=\{V_1,\dots,V_n\}$ – покрытие $[f(A)]_Y$ и $V_j\ni\{0\}$. Тогда, начиная с некоторого $a_0\in A$, справедливо $\left\{\dfrac{1}{a}\mid a\in A, a\geqslant a_0\right\}\subset V_j$. Конечное покрытие u множества A строим следующим образом: $u=\{\{a\}|a\in A, a<a_0\}\cup\{a\in A|a\geqslant a_0\}$. Очевидно, что покрытие u удовлетворяет требуемым условиям (см. определение 4).

В силу компактности пространств Y и Z условия Δ-согласованности и H_Δ для отображения g выполнены очевидным образом ($\Delta_Y=\Delta_Z=\varnothing$).

Однако композиция $g\circ f$, хотя и является Δ-согласованным отображением, но условию H_Δ не удовлетворяет. Действительно, замыкание образа любого дискрета A пространства X при отображении $g\circ f$ совпадает с отрезком $[0;1]$. Тогда рассмотрим покрытие $v=\{[0;1),(0;1]\}$ пространства Z. Так как для любого конечного покрытия u множества A найдется $U\in u$, содержащее бесконечное число точек из A, то замыкание образа множества $A\cap U$ при отображении $g\circ f$ не вкладывается ни в один из элементов покрытия v.

В связи с этим отметим еще одно обстоятельство. Пусть $h=g\circ f$. Покажем, что отображение $s_\Delta X=\omega X\xrightarrow{\tilde{h}}Z$, действующее по правилу: $\tilde{h}(\xi)=r$ для любого $\xi\in\omega X\setminus X$, где

$r \in [0;1] = Z$, и $\tilde{h} = h(x)$, где $x \in X$, непрерывно. В самом деле, прообраз $\tilde{h}^{-1}(\xi) = \omega X \setminus X$, очевидно, замкнут в силу локальной компактности пространства X [9, с. 260]. Замкнутость прообразов остальных замкнутых подмножеств пространства Z также очевидна. Поскольку точка r выбрана произвольным образом, условие единственности продолжения на Ω-насыщение $s_\Delta X$ не выполнено.

Для устранения указанных «неприятностей» введем следующие определения.

Определение 5. Отображение $X \xrightarrow{f} Y$ назовем вполне Δ-согласованным, если $[f(F)]_Y$ Δ-компактно для любого замкнутого в X Δ-компактного множества F.

Определение 6. Скажем, что отображение $X \xrightarrow{f} Y$ удовлетворяет условию H_Δ^* (усиление условия H_Δ), если для любых Δ-компактного множества $F \underset{cl}{\subset} X$ и конечного покрытия $v \in Cov([f(F)]_Y, Y)$ можно выбрать конечное покрытие $u \in Cov(F, X)$ и каждому $U \in u$ поставить в соответствие $V_U \in v$ таким образом, что $[f(F')]_Y \subset V_U$ для любого Δ-компактного множества $F' \underset{cl}{\subset} X$, лежащего в U.

Покажем, что описанные выше усиления условий Δ-согласованности и H_Δ не ведут к сужению класса морфизмов $X \xrightarrow{f} Y$ при регулярности пространства Y.

Теорема 3. *Пусть отображение $X \xrightarrow{f} Y$ является Δ-согласованным и удовлетворяет условию H_Δ, а пространство Y регулярно. Тогда отображение $X \xrightarrow{f} Y$ является вполне Δ-согласованным и удовлетворяет условию H_Δ^*.*

Доказательство. Полная Δ-согласованность. В силу теоремы 1, существует и единственно непрерывное продолжение $s_\Delta X \xrightarrow{\tilde{f}} s_\Delta Y$ отображения $X \xrightarrow{f} Y$. Пусть $F \underset{cl}{\subset} X$ и F Δ-компактно. Тогда множество $[F]_{s_\Delta X}$ компактно (см. утверждение 2), и следовательно компактно и $\tilde{f}([F]_{s_\Delta X})$. В силу регулярности пространства Y пространство $s_\Delta Y$ хаусдорфово (см. свойства $s_\Delta X$ выше), следовательно, множество $\tilde{f}([F]_{s_\Delta X})$ замкнуто. Непрерывность $\tilde{f}$ влечет соотношение $\tilde{f}([F]_{s_\Delta X}) \subset [f(F)]_{s_\Delta Y}$, а учитывая включение $f(F) \subset \tilde{f}([F]_{s_\Delta X})$ и замкнутость $\tilde{f}([F]_{s_\Delta X})$ в $s_\Delta Y$ получаем $\tilde{f}([F]_{s_\Delta X}) = [f(F)]_{s_\Delta Y}$. Таким образом, множество $[f(F)]_{s_\Delta Y}$ компактно, откуда следует Δ-компактность множества $[f(F)]_Y$. Итак, отображение $X \xrightarrow{f} Y$ вполне Δ-согласованно.

Выполнение условия H_Δ^*. Рассмотрим конечное покрытие $v \in Cov([f(F)]_Y, Y)$, где, как и выше, $F \underset{cl}{\subset} X$ и F Δ-компактно. Тогда $\hat{v} \in Cov([f(F)]_{s_\Delta Y}, s_\Delta Y)$ (см. свойства $s_\Delta X$ выше). Так как $\tilde{f}([F]_{s_\Delta X}) = [f(F)]_{s_\Delta Y}$, то в силу компактности $[F]_{s_\Delta X}$ и непрерывности продолжения $s_\Delta X \xrightarrow{\tilde{f}} s_\Delta Y$, можно выбрать конечное покрытие вида $\hat{u}$, $\hat{u} \in Cov([F]_{s_\Delta X}, s_\Delta X)$, так, чтобы для любого $\widehat{U} \in \hat{u}$ существовало такое $\widehat{V}_U \in \hat{v}$, для которого $\tilde{f}(\widehat{U}) \subset \widehat{V}_U$. Тогда, если $F' \underset{cl}{\subset} X$, $F' \subset U$ и множество F' Δ-компактно, то $[F']_{s_\Delta X} \subset \widehat{U}$, и следовательно $\tilde{f}([F']_{s_\Delta X}) \subset \widehat{V}_U$. А поскольку $\tilde{f}([F']_{s_\Delta X} = [f(F')]_{s_\Delta Y}$, то $[f(F')]_{s_\Delta Y} \subset \widehat{V}_U$, и следовательно $[f(F')]_Y \subset V_U$. Итак, условие H_Δ^* выполняется. Теорема доказана.

Докажем далее, что определенный выше класс отображений (вполне Δ-согласованные и удовлетворяющие условию H_Δ^*) замкнут относительно операции композиции отображений.

Утверждение 3. *Пусть отображения* $X \xrightarrow{f} Y$ *и* $Y \xrightarrow{g} Z$ *являются вполне* Δ-*согласованными и удовлетворяют условию* H_Δ^*. *Тогда отображение* $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ *также является вполне* Δ-*согласованным и удовлетворяет условию* H_Δ^*.

Доказательство. Полная Δ-согласованность. Пусть множество $F \subset X$ замкнуто и Δ-компактно. Из включений $g(f(F)) \subset g([f(F)]_Y) \subset [g(f(F))]_Z$ следует, что $[g(f(F))]_Z = [g([f(F)]_Y)]_Z$. Далее ввиду полной Δ-согласованности отображений $X \xrightarrow{f} Y$ и $Y \xrightarrow{g} Z$ получаем Δ-компактность множества $[g(f(F))]_Z$. Таким образом, полная Δ-согласованность композиции установлена.

Выполнение условия H_Δ^*. Рассмотрим конечное покрытие $w \in Cov([g(f(F))]_Z, Z)$. Из рассуждений выше получаем, что $w \in Cov([g([f(F)]_Y)]_Z, Z)$. Так как $Y \xrightarrow{g} Z$ удовлетворяет условию H_Δ^*, то можно выбрать конечное покрытие $v \in Cov([f(F)]_Y, Y)$ и каждому $V \in v$ поставить в соответствие $W_V \in w$ так, чтобы $[g(G)]_Z \subset W_V$ для всякого Δ-компактного и замкнутого в Y множества $G \subset V$. Аналогичным образом можно выбрать конечное покрытие $u \in Cov(F, X)$. Проверим, что u искомое. Пусть $U \supset F' \underset{cl}{\subset} X$ и F' Δ-компактно, где $U \in u$. В силу вышеизложенного существует $V = V_U \in v$ такое, что $[f(F')]_Y \subset V$. Так как $[f(F')]_Y$ Δ-компактно, а $Y \xrightarrow{g} Z$ удовлетворяет условию H_Δ^*, то найдется $W_V \in w$ со свойством $[g([f(F')]_Y)]_Z \subset W_V$. Ввиду равенства $[g([f(F')]_Y)]_Z = [g(f(F'))]_Z$ получаем требуемое. Утверждение доказано.

Утверждение 3 позволяет определить категорию **K**, объявив объектом в **K** любое T_1-пространство, а морфизмом – любое вполне Δ-согласованное отображение, удовлетворяющее условию H_Δ^*. Далее определим отображение s_Δ из категории **K** в категорию **TOP**, поставив в соответствие каждому морфизму $X \xrightarrow{f} Y$ из **K** его непрерывное продолжение $s_\Delta X \xrightarrow{\tilde{f}} s_\Delta Y$.

Проверим сохранение отображением s_Δ операции композиции.

Утверждение 4. *Пусть* $X \xrightarrow{f} Y$ *и* $Y \xrightarrow{g} Z$ *– морфизмы из* **K**. *Тогда отображения* $s_\Delta X \xrightarrow{\widetilde{g \circ f}} s_\Delta Z$ *и* $s_\Delta X \xrightarrow{\tilde{g} \circ \tilde{f}} s_\Delta Z$ *совпадают.*

Доказательство. Так как $g \circ f$ вполне Δ-согласованно и удовлетворяет условию H_Δ^*, то существует и единственно продолжение $s_\Delta X \xrightarrow{\widetilde{g \circ f}} s_\Delta Z$ отображения $X \xrightarrow{g \circ f} Z$. Отображения $X \xrightarrow{f} Y$ и $Y \xrightarrow{g} Z$ также обладают единственными продолжениями $s_\Delta X \xrightarrow{\tilde{f}} s_\Delta Y$ и $s_\Delta Y \xrightarrow{\tilde{g}} s_\Delta Z$ соответственно. Композиция $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ также определяет продолжение отображения $X \xrightarrow{g \circ f} Z$. В силу единственности продолжения $s_\Delta X \xrightarrow{\widetilde{g \circ f}} s_\Delta Z$ получаем, что $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$. Что и требовалось доказать.

Итогом наших рассмотрений является следующая

Теорема 4. *Отображение* s_Δ *является ковариантным функтором из категории* **K** *в категорию* **TOP**.

Замечание. В силу теоремы 3 категория $\mathbf{K}_\Delta$ является полной подкатегорией категории $\mathbf{K}$ (т. е., если X и Y – объекты из $\mathbf{K}_\Delta$, то морфизмы из X в Y в категории $\mathbf{K}_\Delta$ те же, что и в категории $\mathbf{K}$).

Литература

1. *Пономарев В. И.* О замкнутых отображениях // Успехи математических наук. 1959. Т. 14. Вып. 4(88). С. 203–206.
2. *Lončar I.* Hyperspaces of the inverse limit space // Glasnik Matematicki. 1992. Vol. 27(47). P. 71–84.
3. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Физматлит, 2006.
4. *Harris D.* The Wallman compactification as a functor // General Topology and its Applications. 1971. Vol. 1, № 3. P. 273–281.
5. *Кукрак Г. О., Тимохович В. Л.* Расширение Волмэна и экспонента. Функториальные свойства // Тр. Ин-та математики. 2022. Т. 30, № 1–2. С. 37–43.
6. *Бедрицкий А. С., Тимохович В. Л.* Функториальные свойства Ω-насыщения топологического пространства // Журнал БГУ. Математика. Информатика. 2023. № 1. С. 31–37.
7. *Голдовт И. Ю., Тимохович В. Л.* Насыщение топологических пространств и проблема Морита // Докл. АН БССР. 1977. Т. 21, № 9. С. 777–780.
8. *Кукрак Г. О., Тимохович В. Л.* О счетнокомпактифицируемости в смысле Морита // Журнал БГУ. Математика. Информатика. 2021. № 1. С. 46–53.
9. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.

A. S. Biadrytski

On the functor properties of the Ω-saturation of a topological T_1-space

Summary

For a topological T_1-space we consider a Ω-saturation, which is canonically embedded in the Wallman extension ωX. In a certain sense, this saturation is maximal with respect to inclusion among all saturations of this type. A class of maps $X \xrightarrow{f} Y$ which admit a continuous extension $s_\Delta X \xrightarrow{\tilde{f}} s_\Delta Y$, where $s_\Delta X$ and $s_\Delta Y$ are the Ω-saturations (mentioned above) of the spaces X and Y respectively is found. It is shown that these maps, together with the class of topological T_1-spaces, form a category, and the construction of the Ω-saturation considered in the paper defines a covariant functor from the indicated category into the category **TOP** of topological spaces and continuous maps.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 1. С. 14–23

УДК 512.543.76

Многообразия представлений одной группы Баумслага–Солитера

В. В. Беняш-Кривец, А. Н. Адмиралова

Белорусский государственный университет
e-mail: benyashvv@gmail.com, al.admiralova@gmail.com
Поступила 30.10.2023

Исследуются многообразия представлений одной группы Баумслага–Солитера. Найдены неприводимые компоненты многообразий представлений этой группы, вычислена их размерность и доказана рациональность.

Пусть $G=\langle g_1,\dots,g_m\rangle$ – конечно порожденная группа, K – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Тогда любое линейное представление $\rho: G\to GL_n(K)$ однозначно определяется набором элементов $\rho(g_1),\dots,\rho(g_m)$. Эти элементы удовлетворяют всем определяющим соотношениям группы G и, таким образом, имеет место вложение $\rho\mapsto(\rho(g_1),\dots,\rho(g_m))$ множества $\hom(G,GL_n(K))$ в $GL_n(K)^m$. Образ $\hom(G,GL_n(K))$ относительно этого вложения является аффинным K-многообразием $R_n(G)\subset GL_n(K)^m$, и это многообразие называют многообразием n-мерных представлений группы G [1].

О структуре многообразий $R_n(G)$ в общем случае известно немного. Однако для некоторых классов групп такие описания получены. В статьях [2] и [3] описаны многообразия представлений фундаментальных групп компактных ориентируемых и неориентируемых поверхностей. В работе [4] исследованы многообразия представлений групп Баумслага–Солитера для взаимно простых p и q, в [5] результаты работы [4] расширены на случай не взаимно простых показателей p и q. В статье [6] описаны структура и свойства многообразий представлений групп, имеющих копредставление

$$H=\left\langle x_1,y_1,\dots,x_g,y_g,t\mid t([x_1,y_1]\dots[x_g,y_g])^p t^{-1}=([x_1,y_1]\dots[x_g,y_g])^q\right\rangle,$$

где $g\ge 2$, а p и q взаимно просты. В статье [7] исследованы многообразия представлений двух классов групп. Первый класс состоит из групп с копредставлением

$$G=\left\langle a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_k,x_1,\dots,x_g\mid a_1^{m_1}=\dots=a_s^{m_s}=x_1^2\dots x_g^2W(a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_k)=1\right\rangle,$$

где $g\ge 3$, $m_i\ge 2$ для $i=1,\dots,s$ и $W(a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_k)$ – элемент в нормальной форме в свободном произведении циклических групп $H=\langle a_1\mid a_1^{m_1}\rangle*\dots*\langle a_s\mid a_s^{m_s}\rangle*\langle b_1\rangle*\dots*\langle b_k\rangle$.

Второй класс состоит из групп с копредставлением

$$G(p,q)=\left\langle a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_k,x_1,\dots,x_g,t\mid a_1^{m_1}=\dots=a_s^{m_s}=1, tU^pt^{-1}=U^q\right\rangle,$$

где p и q – целые числа, такие, что $p>|q|\ge 1$, $(p,q)=1$, $m_i\ge 2$ для $i=1,\dots,s$, $g\ge 3$, $U=x_1^2\dots x_g^2W(a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_k)$ и $W(a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_k)$ – элемент, определенный выше. Найдены неприводимые компоненты многообразий представлений $R_n(G)$ и $R_n(G(p,q))$, вычислены их размерности и доказано, что каждая неприводимая компонента является рациональным многообразием.

Баумслагом и Солитером в [5] впервые предложены примеры нехопфовых конечно представленных групп. Напомним, что группа G называется хопфовой, если всякий эпиморфизм $f: G \to G$ является автоморфизмом. Соответственно, группа G нехопфова, если она изоморфна своей собственной факторгруппе. Группы Баумслага–Солитера $BS(p,q)$ имеют копредставление

$$BS(p,q) = \langle a,t \mid ta^p t^{-1} = a^q \rangle,$$

где p и q не равны нулю. В работах [5] и [6] доказано, что группа $BS(p,q)$ хопфова в следующих случаях: либо $p \mid q$, либо $q \mid p$, либо p и q имеют равные множества простых делителей. В остальных случаях группа $BS(p,q)$ не является хопфовой. Легко видеть, что $BS(p,q) \cong BS(-p,-q)$ и $BS(p,q) \cong BS(q,p)$.

В предлагаемой статье мы рассмотрим группу $G = BS(1,-1) = \langle a,b \mid aba^{-1} = b^{-1} \rangle$, многообразия представлений которой ранее не изучались. Описание многообразий представлений этой группы – первый шаг к описанию многообразий представлений групп Баумслага–Солитера вида $\langle a,b \mid ab^m a^{-1} = b^{-m} \rangle$.

Многообразие $R_n(G)$ отождествляется с множеством

$$R_n(G) = \{(X,Y) \in GL_n(K) \times GL_n(K) \mid XYX^{-1} = Y^{-1}\}.$$

Рассмотрим бирегулярный морфизм

$$\psi: GL_n(K) \times GL_n(K) \to GL_n(K) \times GL_n(K), \quad \psi(X,Y) = (X_1, Y_1) = (X, XY^{-1}).$$

Если $(X,Y) \in R_n(G)$, то для точки (X_1, Y_1) имеем $X_1^2 = Y_1^2$, поэтому при этом морфизме $R_n(G)$ отображается в многообразие

$$W = \{(X_1, Y_1) \in GL_n(K) \times GL_n(K) \mid X_1^2 = Y_1^2\}.$$

Поэтому мы можем отождествить $R_n(G)$ с бирегулярно изоморфным ему многообразием W.

Для описания компонент $R_n(G)$ нам понадобятся следующие обозначения. Для любых целых чисел $s,t \in \mathbb{Z}$ таких, что $0 \le s \le n/2$, $0 \le t \le n-2s$, обозначим через $\varphi_{s,t}$ рациональный морфизм

$$\varphi_{s,t}: \mathbb{A}^s \times \mathbb{A}^{n-2s} \times GL_2(K)^s \times GL_n(K) \to GL_n(K) \times GL_n(K),$$

переводящий элемент

$$\alpha = (a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_{n-2s}, Z_1, \dots, Z_s, A),$$

где $a_i, b_j \in K^*$, $Z_i \in GL_2(K)$, $A \in GL_n(K)$, в точку (X,Y), где

$$X = A\mathrm{diag}(a_1, -a_1, \dots, a_s, -a_s, b_1, \dots, b_{n-2s})A^{-1},$$

$$Y = A\mathrm{diag}(Z_1 \mathrm{diag}(a_1, -a_1) Z_1^{-1}, \dots, Z_s \mathrm{diag}(a_s, -a_s) Z_s^{-1}, -b_1, \dots, -b_t, b_{t+1}, \dots, b_{n-2s})A^{-1}.$$

Легко проверить, что для указанных выше матриц X, Y выполняется соотношение $X^2 = Y^2$ и, следовательно, $\mathrm{Im}\varphi_{s,t} \subset R_n(G)$. Обозначим через $V_{s,t}$ замыкание $\mathrm{Im}\,\varphi_{s,t}$ в топологии Зарисского. Следующая теорема дает описание многообразия $R_n(G)$.

Теорема 1. 1. *Многообразия $V_{s,t}$ являются различными неприводимыми компонентами $R_n(G)$ размерности $n^2 + s$.*

2. *Число неприводимых компонент многообразия $R_n(G)$ равно $(n^2+4n+4)/4$, если n – четно, и $(n^2+4n+3)/4$, если n – нечетно.*

3. *$V_{s,t}$ – $\mathbb{Q}$-рациональное многообразие.*

Для доказательства теоремы 1 нам нужен ряд лемм.

Лемма 1. *Для любой неприводимой компоненты V многообразия $R_n(G)$ множество*

$$U = \{(X,Y) \in V \mid X, Y - \textit{регулярные элементы}\}$$

не пусто.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $v=(X,Y)\in V$, не лежащую на остальных компонентах. Легко проверить, что для любой $A\in Z_{GL_n(K)}(XY^{-1})$ справедливо равенство $(XA)^2=(YA)^2$. Это означает, что неприводимое множество

$$C=\{(XA,YA)\mid A\in Z_{GL_n(K)}(XY)\}$$

лежит в $R_n(G)$. Кроме того, так как v по построению принадлежит только V и лежит в C, то $C\subseteq V$. В силу предложения 1 из [2] множество $XZ_{GL_n(K)}$ содержит регулярный элемент. Следовательно, множество $U_1=\{(X,Y)\in V\mid X - \text{регулярный элемент}\}$ открыто и не пусто. Аналогично, множество $U_2=\{(X,Y)\in V\mid Y - \text{регулярный элемент}\}$ открыто и не пусто. Отсюда $U=U_1\cap U_2\subset V$ также открыто и не пусто. Лемма 1 доказана.

Основная часть доказательства теоремы 1 сосредоточена в следующем утверждении.

Лемма 2. *Пусть V – произвольная неприводимая компонента многообразия $R_n(G)$. Тогда V содержит непустое открытое подмножество U, состоящее из точек (X,Y) с регулярными полупростыми X, Y.*

Доказательство. Так как множество регулярных полупростых элементов открыто в $GL_n(K)$, то достаточно найти хотя бы одну точку $(X,Y)\in V$ с регулярными полупростыми X, Y.

Из леммы 1 следует, что найдется точка $(X_0,Y_0)\in V$, не лежащая ни в какой другой неприводимой компоненте многообразия $R_n(G)$, с регулярными X_0, Y_0. Так как все компоненты $R_n(G)$ устойчивы относительно сопряжения, дополнительно можем считать, что

$$X_0=\operatorname{diag}(X_1,\ldots,X_k), \tag{1}$$

где $X_i=\operatorname{diag}(J_{r_i}(a_i),-J_{s_i}(a_i))$, $a_i^2\neq a_j^2$ при $i\neq j$ и $r_i\geq s_i\geq 0$ для всех $i\in\{1,\ldots,k\}$.

Рассмотрим вначале случай $k=1$, т. е. когда $X_0=\operatorname{diag}(J_r(a),-J_s(a))$, $r\geq s\geq 0$. Очевидно, что $J_r(a)^2$ и $J_r(a^2)$ подобны, и поэтому при возведении произвольной матрицы X в квадрат структура ее жордановой нормальной формы (т. е. число блоков Жордана и их размеры) не изменяется. Отсюда, с учетом равенства $X_0^2=Y_0^2$, получаем, что Y_0 сопряжена с матрицей $\tilde{Y}_0=\operatorname{diag}(\varepsilon J_r(a),\delta J_s(a))$, где $\varepsilon=\pm1$, $\delta=\pm1$, причем $\delta=-\varepsilon$, ибо Y_0 (а значит и $\tilde{Y}_0$) – регулярная матрица. Итак, Y_0 сопряжена с матрицей $\tilde{Y}_0=\Omega X_0$, где через Ω обозначена диагональная матрица $\Omega=\operatorname{diag}(\varepsilon E_r,-\varepsilon E_s)$.

Чтобы завершить доказательство в случае $k=1$, достаточно построить неприводимое многообразие F и морфизм $\psi: F\to R_n(G)$, образ которого с одной стороны содержит (X_0,Y_0) (и значит, полностью лежит в V), а с другой стороны содержит точки (X,Y) с регулярными полупростыми X, Y.

Пусть $T_1=\{\operatorname{diag}(A,B)\}$, где

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a_2 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_r\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} -a_1 & -1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & -a_2 & -1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_s\end{pmatrix}$$

и $a_i\in K^*$, $a_i^2\neq a_j^2$ при $i\neq j$, и $T_2=\{X\operatorname{diag}(A,B)X^{-1}\mid X\in GL_n(K),\operatorname{diag}(A,B)\in T_1\}$. Ясно, что T_2 – неприводимое множество, состоящее из полупростых элементов, и что X_0 лежит в его замыкании. Несложно убедиться также, что для $X\in T_2$

$$\dim Z_{GL_n(K)}(X^2) = \dim Z_{GL_n(K)}(X_0^2) = n + 2s.$$

Поэтому множество $T_3 = \{X \in \overline{T}_2 \mid \dim Z_{GL_n(K)}(X^2) = n + 2s\}$ содержит X_0, открыто в $\overline{T}_2$ и тем самым неприводимо. Окончательно положим

$$F = \{(X, Z) \in T_3 \times GL_n(K) \mid X^2 Z = Z X^2\},$$

$$\varphi : F \to R_n(G), \quad (X, Z) \mapsto (X, Z\Omega X Z^{-1}).$$

По построению многообразие F задается системой уравнений, линейных относительно коэффициентов z_{ij} матрицы Z, причем ее ранг является константой на T_3. Согласно лемме 3 из [2] многообразие F, построенное выше, неприводимо, и очевидно, что образ $\varphi(F)$ содержит элементы (X, Y) с регулярными полупростыми X, Y. Покажем, что $(X_0, Y_0) \in \varphi(F)$, т. е. проверим, что Y_0 имеет вид $Y_0 = Z\Omega X_0 Z^{-1}$ для некоторого элемента Z, перестановочного с X_0^2. Выше было установлено, что Y_0 сопряжен с $\widetilde{Y}_0 = \Omega X_0$. Пусть $Y_0 = Z\Omega X_0 Z^{-1}$. Тогда из равенства $Y_0^2 = X_0^2$ и из перестановочности Ω и X_0 следует, что $X_0^2 = Y_0^2 = Z X_0^2 \Omega^2 Z^{-1} = Z X_0^2 Z^{-1}$, т. е. $X_0^2 Z = Z X_0^2$.

Рассмотрим теперь случай произвольного k. Утверждается, что жорданова нормальная форма матрицы Y_0 также имеет вид, аналогичный (1). Действительно, так как $X_0^2 = Y_0^2$, то в разложение Жордана матрицы Y_0 входят блоки

$$J_{r_1}(\varepsilon_1 a_1),\ J_{s_1}(\delta_1 a_1), \ldots,\ J_{r_k}(\varepsilon_k a_k),\ J_{s_k}(\delta_k a_k),$$

где для всех i имеем $\varepsilon_i = \pm 1$, $\delta_i = \pm 1$, причем обязательно $\delta_i = -\varepsilon_i$, ибо Y_0 – регулярная матрица. Положим

$$\widetilde{Y}_i = \operatorname{diag}(\varepsilon_i J_{r_i}(a_i), -\varepsilon_i J_{s_i}(a_i)), \quad \widetilde{Y}_0 = \operatorname{diag}(\widetilde{Y}_1, \ldots, \widetilde{Y}_l).$$

Тогда $Y_0 = Z\widetilde{Y}_0 Z^{-1}$ и, как и выше, проверяется, что $ZX_0^2 = X_0^2 Z$. Так как дополнительно мы имеем $a_i^2 \neq a_j^2$ для всех $i \neq j$, то Z – блочно-диагональная матрица вида $Z = \operatorname{diag}(Z_1, \ldots, Z_k)$, где $Z_i \in Z_{GL_{r_i+s_i}(K)}(X_i^2)$ и, следовательно, $Y_0 = \operatorname{diag}(Y_1, \ldots, Y_k)$, где $Y_i = Z_i \widetilde{Y}_i Z_i^{-1}$.

Рассмотрим произвольную неприводимую компоненту $V_i \subset R_{r_i+s_i}(G)$, содержащую (X_i, Y_i), и пусть $W = V_1 \times \ldots \times V_k$. По построению, многообразие W неприводимо, содержит (X_0, Y_0) и, значит, полностью лежит в V. С другой стороны, очевидное индуктивное рассуждение показывает, что W содержит элементы (X, Y) с регулярными полупростыми X, Y, что и доказывает лемму 2.

Дальнейшее доказательство теоремы 1 разобьем на ряд шагов.

Лемма 3. $R_n(G) = \cup_{s,t} V_{s,t}$.

Доказательство. Пусть V – произвольная неприводимая компонента $R_n(G)$ и $U \subset V$ – непустое открытое подмножество, состоящее из точек (X, Y) с регулярными полупростыми X, Y. Поскольку множество V, а значит и U, устойчивы относительно сопряжения, то любое представление $\rho = (X, Y) \in U$ эквивалентно представлению $\rho' = (X', Y')$, где $X' = (a_1, -a_1, \ldots, a_s, -a_s, b_1, \ldots, b_{n-2s})$ – диагональная регулярная матрица. Тогда, как было установлено выше, вторая компонента имеет следующий вид:

$$Y' = \operatorname{diag}\left(Z_1 \operatorname{diag}(a_1, -a_1) Z_1^{-1}, \ldots, Z_s \operatorname{diag}(a_s, -a_s) Z_s^{-1}, \varepsilon_1 b_1, \ldots, \varepsilon_{n-2s} b_{n-2s}\right),$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$, $Z_i \in GL_2(K)$. Переходя при необходимости к эквивалентному представлению, без ограничения общности можем считать, что $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_t = -1$, $\varepsilon_{t+1} = \ldots = \varepsilon_{n-2s} = 1$. Поэтому $\rho' \in \mathrm{Im}\varphi_{s,t}$, откуда $U \subset \cup_{s,t} \mathrm{Im}\varphi_{s,t}$ и, следовательно, $V = \overline{U} \subset \cup_{s,t} \overline{\mathrm{Im}\varphi_{s,t}} = \cup_{s,t} V_{s,t}$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. $\dim V_{s,t} = n^2 + s$.

Доказательство. Рассмотрим проекцию на первую компоненту

$$\pi : R_n(G) \to GL_n(K), \qquad (X,Y) \mapsto X.$$

Очевидно, что $\dim \overline{\pi(V_{s,t})} = n^2 - s$ и тем самым достаточно установить, что $\dim(\pi^{-1}(X) \cap V_{s,t}) = 2s$ для всех точек X из плотного в $\overline{\pi(V_{s,t})}$ подмножества

$$U' = \{A\,\mathrm{diag}(a_1, -a_1, \ldots, a_s, -a_s, b_1, \ldots, b_{n-2s})A^{-1} \mid$$
$$a_i^2 \neq a_j^2 \text{ при } i \neq j, b_k \neq b_l \text{ при } k \neq l, a_i^2 \neq b_k^2 \text{ для всех } i, k\}.$$

Обозначим

$$X_0 = (a_1, -a_1, \ldots, a_s, -a_s, b_1, \ldots, b_{n-2s}),\ X = AX_0A^{-1}, T = \left\{Y \in GL_n(K) \mid Y^2 = X^2\right\}.$$

Очевидно, что $T \simeq \pi^{-1}(X)$, и так как X – регулярная полупростая матрица, то любой $Y \in T$ имеет вид

$$Y = A\mathrm{diag}(Z_1\mathrm{diag}(a_1, -a_1)Z_1^{-1}, \ldots, Z_s\mathrm{diag}(a_s, -a_s)Z_s^{-1}, \varepsilon_1 b_1, \ldots, \varepsilon_{n-2s} b_{n-2s})A^{-1}, \qquad (2)$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$ для всех $i \in \{1, \ldots, n-2s\}$ и $Z_1, \ldots, Z_s \in GL_2(K)$.

Пусть $T_\varepsilon \subset T$ – неприводимое подмногообразие, состоящее из всех Y, у которых в разложении (2) набор знаков $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2s})$ фиксирован. По построению $T = \cup_\varepsilon T_\varepsilon$ и

$$\pi^{-1}(X) = \cup_\varepsilon \{(X,Y) \mid Y \in T_\varepsilon\}.$$

Положим $W_i = \{Z_i(a_i, -a_i)Z_i^{-1} \mid Z_i \in GL_2(K)\}$. Имеем $\dim W_i = 2$ и $T_\varepsilon \simeq W_1 \times \ldots \times W_s$. Поэтому $\dim T_\varepsilon = 2s$ для всех наборов ε. Отсюда следует, что T также имеет размерность $2s$, и остается заметить, что $\pi^{-1}(X) \cap V_{s,t}$ состоит из объединения тех множеств (X, T_ε), у которых набор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2s})$ обладает следующим свойством: среди $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2s}$ число (–1) встречается t раз. Лемма 4 доказана.

Завершает доказательство пункта 1 теоремы 1

Лемма 5. *Если пары* (s,t) *и* (s_1,t_1) *различны, то многообразия* $V_{s,t}$ *и* V_{s_1,t_1} *не содержатся друг в друге.*

Доказательство. Рассмотрим отдельно два случая. Пусть вначале $s = s_1$. Тогда по лемме 4 имеем $\dim V_{s,t} = \dim V_{s_1,t_1}$, и поэтому, если бы одно из многообразий лежало в другом, то имели бы равенство $V_{s,t} = V_{s_1,t_1}$. Пусть

$$U = \{(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_{n-2s}) \mid a_i^2 \neq a_j^2, b_k \neq b_l, a_i^2 \neq b_k^2\}.$$

Так как множества $\varphi_{s,t}(U \times GL_2(K)^s \times GL_n(K))$ и $\varphi_{s_1,t_1}(U \times GL_2(K)^s \times GL_n(K))$ плотны в $V_{s,t} = V_{s_1,t_1}$, то они пересекаются по непустому множеству. С другой стороны, если

$$(X,Y) \in \varphi_{s,t}(U \times GL_2(K)^s \times GL_n(K)) \cap \varphi_{s_1,t_1}(U \times GL_2(K)^s \times GL_n(K)),$$

то у матриц X, Y должно быть в точности $n - s - t = n - s_1 - t_1$ общих собственных значений. Последнее невозможно, ибо $s = s_1$ и $t \neq t_1$.

Пусть теперь $s \neq s_1$. Для определенности предположим, что $s > s_1$. Тогда $\dim V_{s,t} = n^2 + s > \dim V_{s_1,t_1} = n^2 + s_1$. Если бы $V_{s_1,t_1} \subset V_{s,t}$, то при проекции на первую компоненту мы также имели бы включение $\pi(V_{s_1,t_1}) \subset \pi(V_{s,t})$. Но это невозможно, ибо $\dim \overline{\pi(V_{s_1,t_1})} = n^2 - s_1$, $\dim \overline{\pi(V_{s,t})} = n^2 - s$ и по предположению $s_1 < s$. Лемма 5 доказана.

Доказательство пункта 2 теоремы 1. Чтобы подсчитать число компонент многообразия $R_n(G)$, заметим, что при фиксированном s у нас есть $n-2s+1$ компонент $V_{s,t}$, так как t пробегает все значения от 0 до $n-2s$. Кроме того, само s может принимать значения от 0 до $[n/2]$. Поэтому при четном n общее число компонент равно

$$\sum_{s=0}^{n/2}(n-2s+1)=1+3+\ldots+(n+1)=\sum_{k=0}^{n/2}(2k+1)=(n/2+1)^2=(n^2+4n+4)/4,$$

а при нечетном n число компонент равно

$$\sum_{s=0}^{(n-1)/2}(n-2s+1)=2+4+\ldots+(n+1)=2\sum_{i=1}^{(n+1)/2}i=(n+1)(n+3)/4=(n^2+4n+3)/4,$$

что и тебовалось доказать.

Доказательство пункта 3 теоремы 1. Основная идея доказательства состоит в том, чтобы вначале реализовать поле $\mathbb{Q}$-рациональных функций $\mathbb{Q}(V_{s,t})$ в виде поля инвариантов $\mathbb{Q}(u_1,\ldots,u_{n^2+s})^G$ конечной группы G, действующей на чисто трансцендентном расширении $\mathbb{Q}(u_1,\ldots,u_{n^2+s})$ поля $\mathbb{Q}$, а затем прямым вычислением убедиться в рациональности поля $\mathbb{Q}(u_1,\ldots,u_{n^2+s})^G$.

Рассмотрим (n^2+s)-мерное многообразие

$$W=\Big\{(a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_{n-2s},Z_1,\ldots,Z_s,A)\in\mathbb{A}^s\times\mathbb{A}^{n-2s}\times GL_2(K)^s\times GL_n(K)\mid$$

$$a_i,b_i\in K^*,\ Z_i=\begin{pmatrix}u_i & 1\\ 1 & v_i\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}1 & \ldots & 1\\ a_{21} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}\Big\}. \tag{3}$$

Лемма 6. *Ограничение* $\varphi_{s,t}|_W : W\to V_{s,t}$ *– конечнолистный доминантный морфизм.*

Доказательство. Поскольку размерности W и $V_{s,t}$ совпадают, достаточно установить, что для точки «общего» положения (3) слой $\varphi_{s,t}^{-1}(\varphi_{s,t}(w))$ конечен. Предположим, что найдется еще одна точка $\widetilde{w}\in W$, для которой $\varphi_{s,t}(w)=\varphi_{s,t}(\widetilde{w})$ и пусть

$$\widetilde{w}=(\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_s,\tilde{b}_1,\ldots,\tilde{b}_{n-2s},\widetilde{Z}_1,\ldots,\widetilde{Z}_s,\widetilde{A}),$$

где

$$\widetilde{Z}_i=\begin{pmatrix}\tilde{u}_i & 1\\ 1 & \tilde{v}_i\end{pmatrix},\quad \widetilde{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \ldots & \tilde{a}_{nn}\end{pmatrix}.$$

Тогда справедливы следующие два равенства:

$$A\operatorname{diag}(a_1,-a_1,\ldots,a_s,-a_s,b_1,\ldots,b_{n-2s})A^{-1}=\widetilde{A}\operatorname{diag}(\tilde{a}_1,-\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_s,-\tilde{a}_s,\tilde{b}_1,\ldots,\tilde{b}_{n-2s})\widetilde{A}^{-1}, \tag{4}$$

$$A\operatorname{diag}(Z_1(a_1,-a_1)Z_1^{-1},\ldots,Z_s\operatorname{diag}(a_s,-a_s)Z_s^{-1},-b_1,\ldots,-b_t,b_{t+1},\ldots,b_{n-2s})A^{-1}=$$

$$=\widetilde{A}\operatorname{diag}(\widetilde{Z}_1(\tilde{a}_1,-\tilde{a}_1)\widetilde{Z}_1^{-1},\ldots,\widetilde{Z}_s\operatorname{diag}(\tilde{a}_s,-\tilde{a}_s)\widetilde{Z}_s^{-1},-\tilde{b}_1,\ldots,-\tilde{b}_t,\tilde{b}_{t+1},\ldots,\tilde{b}_{n-2s})\widetilde{A}^{-1}. \tag{5}$$

Из (4) следует, что две диагональные матрицы

$$\operatorname{diag}(a_1,-a_1,\ldots,a_s,-a_s,b_1,\ldots,b_{n-2s}) \tag{6}$$

$$\operatorname{diag}(\tilde{a}_1,-\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_s,-\tilde{a}_s,\tilde{b}_1,\ldots,\tilde{b}_{n-2s}) \tag{7}$$

сопряжены при помощи $A^{-1}\widetilde{A}$ так, что их собственные значения совпадают. Поскольку w – точка «общего» положения, без ограничения общности мы можем дополнительно считать, что собственные значения матрицы (6) различны и, кроме того, $a_i^2 \neq a_j^2$, $a_i^2 \neq b_j^2$, $b_i^2 \neq b_j^2$. Тогда

$$\{\pm a_1, \ldots, \pm a_s\} = \{\pm \tilde{a}_1, \ldots, \pm \tilde{a}_s\}, \quad \{b_1, \ldots, b_{n-2s}\} = \{\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_{n-2s}\}. \tag{8}$$

Рассматривая аналогично (5), легко также убедиться, что (8) распадается на равенства

$$\{b_1, \ldots, b_t\} = \{\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_t\}, \quad \{b_{t+1}, \ldots, b_{n-2s}\} = \{\tilde{b}_{t+1}, \ldots, \tilde{b}_{n-2s}\}.$$

Таким образом, найдутся числа $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$, равные ± 1, и подстановки

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & s \\ i_1 & \ldots & i_s \end{pmatrix}, \ \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & t \\ j_1 & \ldots & j_t \end{pmatrix}, \ \tau_3 = \begin{pmatrix} t+1 & \ldots & n-2s \\ k_{t+1} & \ldots & k_{n-2s} \end{pmatrix},$$

действующие соответственно на множествах $\{1, \ldots, s\}$, $\{1, \ldots, t\}$, $\{t+1, \ldots, n-2s\}$, для которых выполняются следующие равенства:

$$\tilde{a}_i = \varepsilon_i a_{\tau_1(i)}, \ \ i \in \{1, \ldots, s\}, \ \ \tilde{b}_j = b_{\tau_2(j)}, \ \ j \in \{1, \ldots, t\}, \ \ \tilde{b}_k = b_{\tau_3(k)}, \ \ k \in \{t+1, \ldots, n-2s\}. \tag{9}$$

Обратимся к анализу матриц A и $\tilde{A}$. Так как (6) и (7) – регулярные полупростые матрицы, то легко видеть, что $A^{-1}\tilde{A} = \omega d$, где d – диагональная матрица, а ω – блочно диагональная матрица вида $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ и ω_1, ω_2, ω_3 – мономиальные матрицы размеров соответственно $2s$, t, $n-2s-t$. Рассматривая в равенстве $\tilde{A} = A\omega d$ первые строки, убеждаемся, что $d = 1$. Поскольку умножение справа на мономиальную матрицу равносильно перестановке столбцов, окончательно получаем, что A и $\tilde{A}$ отличаются друг от друга перестановками столбцов, причем из (4), (5), (9) вытекает, что мономиальные матрицы ω_2, ω_3 соответствуют перестановкам τ_2, τ_3, а ω_1 обладает свойством

$$\omega_1 \operatorname{diag}(\tilde{a}_1, -\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_s, -\tilde{a}_s)\omega_1^{-1} = \operatorname{diag}(a_1, -a_1, \ldots, a_s, -a_s). \tag{10}$$

Для дальнейшего нам нужна более точная информация о строении ω_1 и $\tilde{A}$. А именно, из (9) и (10) следует, что в зависимости от знака ε_i матрица ω_1 переводит (2×2)-блок $d_i = (\tilde{a}_i, -\tilde{a}_i)$ либо в $d_{\tau_1^{-1}(i)}$, либо в $-d_{\tau_1^{-1}(i)}$. Следовательно, мономиальная матрица ω_1 должна иметь блочный вид $\omega_1 = (w_{i,j})$, где $w_{i,j}$ – (2×2)-блоки, определяемые формулой

$$w_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq \tau_1(j); \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{если } i = \tau_1(j), \ \varepsilon_i = 1; \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{если } i = \tau_1(j), \ \varepsilon_i = -1. \end{cases} \tag{11}$$

Обозначим через A_j (соответственно, $\tilde{A}_j$) j-й столбец матрицы A (соответственно, $\tilde{A}$). Тогда из равенства $\tilde{A} = A\omega$ с учетом (11) имеем:

$$(\tilde{A}_{2j-1}, \tilde{A}_{2j}) = \begin{cases} (A_{2\tau_1(j)-1}, A_{2\tau_1(j)}), & \text{если } \varepsilon_i = 1, \\ (A_{2\tau_1(j)}, A_{2\tau_1(j)-1}), & \text{если } \varepsilon_i = -1 \end{cases} \tag{12}$$

для всех $j \in \{1, \ldots, s\}$ и

$$(\tilde{A}_{2s+1}, \ldots, \tilde{A}_{2s+t}) = (A_{2s+\tau_2(1)}, \ldots, A_{2s+\tau_2(t)}), \tag{13}$$

$$(\tilde{A}_{2s+t+1}, \ldots, \tilde{A}_n) = (A_{2s+\tau_3(t+1)}, \ldots, A_{2s+\tau_3(n-2s)}). \tag{14}$$

Чтобы завершить доказательство леммы, нам остается показать, что для матриц $\tilde{Z}_1, \ldots, \tilde{Z}_s$ также существует лишь конечное число возможностей. С этой целью подставим выражение $\tilde{A} = A\omega$ в равенство (5) и рассмотрим левый верхний угол размерности $2s$. После избавления от матрицы A имеем:

$$\operatorname{diag}(Z_1\operatorname{diag}(a_1,-a_1)Z_1^{-1},\ldots,Z_s\operatorname{diag}(a_s,-a_s)Z_s^{-1}) =$$
$$=\omega_1\operatorname{diag}(\tilde{Z}_1\operatorname{diag}(\tilde{a}_1,-\tilde{a}_1)\tilde{Z}_1^{-1},\ldots,\tilde{Z}_s\operatorname{diag}(\tilde{a}_s,-\tilde{a}_s)\tilde{Z}_s^{-1})\omega_1^{-1}. \qquad (15)$$

Пусть $Z=(Z_1,\ldots,Z_s)$, $\tilde{Z}=(\tilde{Z}_1,\ldots,\tilde{Z}_s)$. Тогда из (10) и (15) получаем, что

$$\operatorname{diag}(a_1,-a_1,\ldots,a_s,-a_s)=(Z^{-1}\omega_1\tilde{Z}\omega_1^{-1})\operatorname{diag}(a_1,-a_1,\ldots,a_s,-a_s)(Z^{-1}\omega_1\tilde{Z}\omega_1^{-1})^{-1}, \qquad (16)$$

и тем самым $Z^{-1}\omega_1\tilde{Z}\omega_1^{-1}=t$ – диагональная матрица. Но как мы знаем (см. (11)), сопряжение при помощи ω_1 переводит блок $\tilde{Z}_i$ матрицы $\tilde{Z}$ либо в блок $\tilde{Z}_{\tau_1^{-1}(i)}$ (если $\varepsilon_i=1$), либо в блок

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\tilde{Z}_{\tau_1^{-1}(i)}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\tilde{v}_{\tau_1^{-1}(i)}&1\\1&\tilde{u}_{\tau_1^{-1}(i)}\end{pmatrix},$$

получающийся из $\tilde{Z}_{\tau_1^{-1}(i)}$ перестановкой диагональных элементов (если $\varepsilon_i=-1$).

Отсюда следует, что обязательно $t=1$, а для элементов $\tilde{u}_i$, $\tilde{v}_i$ имеем следующие выражения:

$$(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)=\begin{cases}(u_{\tau_1(i)},v_{\tau_1(i)}), & \text{если } \varepsilon_i=1,\\ (v_{\tau_1(i)},u_{\tau_1(i)}), & \text{если } \varepsilon_i=-1.\end{cases}$$

Итак, существует лишь конечное число точек $\tilde{w}\in W$, для которых $\varphi_{s,t}(w)=\varphi_{s,t}(\tilde{w})$ и все они описываются формулами (9), (12), (13), (14), (16). Лемма 6 доказана.

Продолжим доказательство пункта 3) теоремы 1. Рассмотрим конечную группу

$$G=S_s\times S_t\times S_{n-2s-t}\times\prod_{i=1}^{s}H_i,$$

где S_s, S_t, S_{n-2s-t} – симметрические группы и $H_i=\langle\sigma_i\mid\sigma_i^2=1\rangle$ – группы второго порядка, и определим действие G на поле $\mathbb{Q}(W)$ следующим образом. Пусть

$$\mathbb{Q}(W)=\mathbb{Q}(a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_{n-2s},a_{21},\ldots,a_{2n},\ldots,a_{n1},\ldots,a_{nn},u_1,\ldots,u_s,v_1,\ldots,v_s),$$

где a_i, b_i, a_{ij}, u_i, v_i – соответствующие координатные функции. Тогда элементы группы S_s переставляют столбцы в матрицах

$$\begin{pmatrix}u_1&u_2&\ldots&u_s\\a_{21}&a_{23}&\ldots&a_{22s-1}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&a_{n3}&\ldots&a_{n2s-1}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}v_1&v_2&\ldots&v_s\\a_{22}&a_{24}&\ldots&a_{22s}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n2}&a_{n4}&\ldots&a_{n2s}\end{pmatrix}$$

и элементы в множестве $\{a_1,\ldots,a_s\}$; элементы групп S_t, S_{n-2s-t} переставляют столбцы соответственно в матрицах

$$\begin{pmatrix}b_1&\ldots&b_t\\a_{22s+1}&\ldots&a_{22s+t}\\\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n2s+1}&\ldots&a_{n2s+t}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}b_{t+1}&\ldots&b_{n-2s}\\a_{22s+t+1}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n2s+t+1}&\ldots&a_{nn}\end{pmatrix};$$

образующий σ_i группы H_i переводит элементы a_i, u_i, v_i, $a_{k,2i-1}$, $a_{k,2i}$ ($k\in\{2,\ldots,n\}$) соответственно в $-a_i$, v_i, u_i, $a_{k,2i}$, $a_{k,2i-1}$ и оставляет неподвижными остальные переменные.

Как мы знаем (см. (9), (12), (13), (14), (16)), поле $\mathbb{Q}$-рациональных функций $\mathbb{Q}(V_{s,t})$ отождествляется при помощи коморфизма $\varphi_{s,t}^{*}$ с полем инвариантов $\mathbb{Q}(W)^G$, которое, очевидно, совпадает с композитом полей

$$K_1 = \mathbb{Q}(a_1,\ldots,a_s,u_1,\ldots,u_s,v_1,\ldots,v_s,a_{21},\ldots,a_{22s},\ldots,a_{n1},\ldots,a_{n2s})^{S_s\times\prod H_i},$$

$$K_2 = \mathbb{Q}(b_1,\ldots,b_t,a_{22s+1},\ldots,a_{22s+t},a_{n2s+1},\ldots,a_{n2s+t})^{S_t},$$

$$K_3 = \mathbb{Q}(b_{t+1},\ldots,b_{n-2s},a_{22s+t+1},\ldots,a_{2n},a_{n2s+t+1},\ldots,a_{nn})^{S_{n-2s-t}},$$

и поэтому достаточно установить рациональность каждого из них.

Введем в поле $\mathbb{Q}(a_1,\ldots,a_s,u_1,\ldots,u_s,v_1,\ldots,v_s,a_{21},\ldots,a_{22s},\ldots,a_{n1},\ldots,a_{n2s})$ новый базис трансцендентности. Пусть

$$\tilde{u}_i = a_i(u_i - v_i),\quad \tilde{v}_i = u_i + v_i,\quad \tilde{a}_i = a_i,\ i\in\{1,\ldots,s\},$$

$$\tilde{a}_{i2j-1} = a_j(a_{i2j-1} - a_{i2j}),\quad \tilde{a}_{i2j} = a_{i2j+1} + a_{i2j},\quad i\in\{2,\ldots,n\},\ j\in\{1,\ldots,s\}.$$

Элементы группы $\prod_{i=1}^{s} H_i$ оставляют неподвижными $\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_s,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_s,\tilde{a}_{21},\ldots,\tilde{a}_{n,2s}$. Поэтому

$$K_1 = \mathbb{Q}(\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_s,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_s,\tilde{a}_{21},\ldots,\tilde{a}_{n2s},\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_s)^{S_s\times\prod_{i=1}^{s} H_i} =$$

$$= \mathbb{Q}(\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_s,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_s,\tilde{a}_{21},\ldots,\tilde{a}_{n2s},\tilde{a}_1^2,\ldots,\tilde{a}_s^2)^{S_s}.$$

Из нашего построения также вытекает, что элементы группы S_s переставляют столбцы в матрицах

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_1 & \tilde{u}_2 & \ldots & \tilde{u}_s \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{23} & \ldots & \tilde{a}_{22s-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n3} & \ldots & \tilde{a}_{n2s-1} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 & \ldots & \tilde{v}_s \\ \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{24} & \ldots & \tilde{a}_{2,2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{a}_{n2} & \tilde{a}_{n4} & \ldots & \tilde{a}_{n,2s} \end{pmatrix}$$

и элементы в множестве $\{a_1^2,\ldots,a_s^2\}$. В [8] доказано следующее утверждение.

Лемма 7 ([8]). *Пусть L – поле, на котором конечная группа G действует точно, и предположим, что M – пермутационный G-модуль. Тогда поле $L(M)$ порождается над L алгебраически независимыми G-инвариантными элементами. В частности, $L(M)^G$ является чисто трансцендентным расширением поля L^G.*

Отсюда сразу получаем, что поля K_1, K_2, K_3, а значит и $\mathbb{Q}(V_{s,t})$, являются чисто трансцендентными расширениями поля $\mathbb{Q}$. Теорема 1 доказана.

Приведем одно непосредственное следствие явного описания неприводимых компонент многообразия $R_n(G)$.

Следствие. *Множество $\pi_0(R_n(G)_{\mathbb{C}})$ состоит из двух элементов; более точно, связными компонентами комплексного многообразия $R_n(G)_{\mathbb{C}}$ являются множества*

$$W_1 = \bigcup_{t\text{ – четно}} V_{s,t},\quad W_2 = \bigcup_{t\text{ – нечетно}} V_{s,t}.$$

Доказательство следствия. Очевидно, что $W_1 \cup W_2 = R_n(G)$ и что W_1 и W_2 не пересекаются, ибо регулярная функция $\det(XY^{-1})$ принимает на W_1 значение 1, а на W_2 – значение -1. Тем самым, достаточно установить, что W_i $(i=1,2)$ связно в комплексной топологии. Рассмотрим, например, W_1 (случай W_2 рассматривается аналогично). Пусть

$$X_0 = \mathrm{diag}(a_1,-a_1,\ldots,a_s,-a_s,b_1,\ldots,b_{n-2s}),$$

$$Y_0 = \mathrm{diag}(a_1,-a_1,\ldots,a_s,-a_s,-b_1,\ldots,-b_{2k},b_{2k+1},\ldots,b_{n-2s}),$$

$$\tilde{Y}_0 = \mathrm{diag}(-a_1,a_1,\ldots,-a_s,a_s,b_1,\ldots,b_{n-2s}).$$

Тогда $(X_0, Y_0) \in V_{s,2k} \cap V_{0,2k}$, и поэтому $\cup_{s=0}^{[n/2]} V_{s,2k}$ связно. Далее, $(X_0, \widetilde{Y}_0) \in V_{0,2k} \cap V_{k,0}$, $(X_0, X_0) \in V_{k,0} \cap V_{0,0}$. Отсюда следует, что $U_k = \left(\cup_{s=0}^{[n/2]} V_{s,2k}\right) \cup V_{k,0} \cup V_{0,0}$ – связно. Поскольку $V_{0,0} \subset \cap_k U_k$, то $W_1 = \cup_k U_k$ также связное множество. Следствие доказано.

Литература

1. *Lubotzky A., Magid A.* Varieties of representations of finitely generated groups // Memoirs AMS. 1985. Vol. 58, № 336. P. 1–116.

2. *Benyash-Krivetz V. V., Rapinchuk A. S., Chernousov V. I.* Representation varieties of the fundamental groups of compact orientable surfaces // Israel J. Math. 1996. Vol. 93. P. 29–71.

3. *Беняш-Кривец В. В., Черноусов В. И.* Многообразия представлений фундаментальных групп компактных неориентируемых поверхностей // Матем. сборник. 1997. Т. 188, № 7. С. 47–92.

4. *Беняш-Кривец В. В., Говорушко И. О.* Многообразия представлений и характеров групп Баумслага–Солитера. // Алгебра, геометрия и теория чисел: сб. ст. к 75-летию со дня рождения академика Владимира Петровича Платонова. Труды МИАН. 2016. Т. 292. С. 26–42.

5. *Беняш-Кривец В. В., Говорушко И. О.* Многообразия представлений групп Баумслага–Солитера в случае не взаимно простых показателей // Весцi Нац. акад. навук Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2016. № 1. С. 52–56.

6. *Адмиралова А. Н., Беняш-Кривец В. В.* О многообразиях представлений и характеров одного класса групп с одним соотношением // Вестник БГУ, сер. 1. 2016. № 3. С. 166–172.

7. *Адмиралова А. Н., Беняш-Кривец В. В.* О многообразиях представлений некоторых свободных произведений циклических групп с одним соотношением // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, № 1. С. 62–81.

8. *Masuda K.* On a problem of Chevalley // Nagoya Math. J. 1955. Vol. 8. P. 59–63.

V. V. Beniash-Kryvets, A. N. Admiralova

Representation varieties of one Baumslag–Solitar group

Summary

Representation varieties of one Baumslag–Solitar group are investigated. All irreducible components of the representation variety of this group are found, their dimensions are calculated and their rationality is proved.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 1. С. 24–32

УДК 512. 542

Об $\mathfrak{F}$-достижимых подгруппах в группах с операторами

Р. В. Бородич

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: borodich@gsu.by
Поступила 05.10.2023

В работе изучается поведение $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп в обобщенно фраттиниевых расширениях.

Все рассматриваемые группы конечны. Исследование пересечений максимальных подгрупп относится к одному из классических направлений теории конечных групп. Начало этой теории восходит к работе Фраттини [1] 1885 года. Полученные им результаты в дальнейшем развивались в работах таких авторов, как Л. А. Шеметков [2], М. В. Селькин [3], А. Баллестер-Болинше [4], Д. Бейдлеман и Ш. Смит [5] и многих других (см. монографии [2, 3]).

В работе Д. Бейдлемана и Ш. Смита [5] был поставлен следующий вопрос: «Если H субнормальная подгруппа группы G, содержащая $\Phi(G)$, то будет ли из сверхразрешимости $H/\Phi(G)$ следовать сверхразрешимость подгруппы H?». Эта задача рассматривалась в работах многих авторов (см. монографию [3]). В данной работе дается ответ на более общий вопрос: «Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа. В каком случае из $H/\Phi_\theta(G,A)\in\mathfrak{F}$ будет следовать, что $H\in\mathfrak{F}$?».

1. Определения и обозначения

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Тогда подгруппа H конечной группы G называется $\mathfrak{F}$-достижимой, если имеется такая цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G,$$

что для каждого $i=1,2,\ldots,n$ выполняется одно из условий: 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i; 2) $\mathfrak{F}$-корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1}. Если выполняется только условие 2), то такую подгруппу называют $\mathfrak{F}$-субнормальной.

Понятие $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппы, введенное О. Кегелем в работе [6], позволило систематизировать многие закономерности, связанные с нормальными и субнормальными подгруппами, а также их обобщениями. В данной работе идея $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппы используется для исследования поведения нормальных и обобщенно субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп во фраттиниевых расширениях конечных групп.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольный непустой класс групп. Сопоставим со всякой группой $G\in\mathfrak{X}$ некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Согласно [7] будем говорить, что τ – подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор (подгрупповой функтор на $\mathfrak{X}$), если для всякого эпиморфизма $\phi: A\mapsto B$, где $A,B\in\mathfrak{X}$, выполнены включения $(\tau(A))^{\phi}\subseteq\tau(B)$, $(\tau(B))^{\phi^{-1}}\subseteq\tau(A)$, и, кроме того, для любой группы $G\in\mathfrak{X}$ имеет место $G\in\tau(G)$.

Если $\mathfrak{X}=\mathfrak{G}$ – класс всех групп, то подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор называют просто подгрупповым функтором.

В дальнейшем функтор θ будем называть:

1) абнормально полным, если для любой группы G среди элементов множества $\theta(G)$ содержатся все абнормальные подгруппы группы G;

2) абнормальным, если $\theta(G)\setminus\{G\}$ совпадает с множеством всех абнормальных подгрупп;

3) тривиальным, если функтор θ выделяет в группе G все ее подгруппы.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (пересечение всех подгрупп из G, сопряженных с подгруппой M).

Учитывая, что максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение конечных групп, рассмотрим максимальные подгруппы среди подгрупп, обладающих общим заданным свойством, и изучим их пересечения и влияние на нормальное строение группы.

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f: A \mapsto Aut(G)$, где $Aut(G)$ – группа автоморфизмов группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, т. е. $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им автоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A, а так же не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе [8].

С используемыми в работе определениями и обозначениями можно ознакомиться в публикациях [8, 9].

Пусть $\Phi_\theta(G, A) \neq G$. Определим подгруппу $\widetilde{F}_\theta(G, A)$ группы G следующими двумя условиями:

1) $\widetilde{F}_\theta(G, A) \supseteq \Phi_\theta(G, A)$;

2) $\widetilde{F}_\theta(G, A) / \Phi_\theta(G, A) = Soc(G / \Phi_\theta(G, A))$.

На подгруппу $\widetilde{F}_\theta(G, A)$ можно смотреть как на обобщение подгруппы Фиттинга $F(G)$, тем более, что она сохраняет основное свойство подгруппы Фиттинга разрешимой группы – содержать свой централизатор.

2. Вспомогательные результаты

В дальнейшем нам понадобятся следующие результаты об $\mathfrak{F}$-достижимых подгруппах.

Лемма 2.1 [3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация, H, K и N – подгруппы группы G, причем подгруппа N нормальна в G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то $H \cap K$ – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы K, а HN / N – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G / N;*

2) *если $H \supseteq N$, то подгруппа H $\mathfrak{F}$-достижима в G тогда и только тогда, когда подгруппа H / N $\mathfrak{F}$-достижима в G / N;*

3) *если H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то $H^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа группы G.*

Лемма 2.2. *Пусть группа G имеет группу операторов A. Тогда $\Phi(G) \subseteq \Phi(G, A)$.*

Доказательство. Предположим, что $\Phi(G) \nsubseteq \Phi(G, A)$. Тогда существует максимальная A-допустимая подгруппа M такая, что $M \not\supseteq \Phi(G)$. Так как $\Phi(G)$ является характеристической подгруппой, то $\Phi(G)$ – A-допустима. Так как произведение A-допустимых подгрупп является A-допустимым, то $M\Phi(G) = G$. Учитывая, что $\Phi(G)$ состоит из необразующих элементов, получаем, что $M = G$. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Лемма 2.3 [2]. *Пусть f – локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Группа G тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $G / F_p(G) \in f(p)$, для любого $p \in \pi(G)$.*

Лемма 2.4 [8]. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, θ *– абнормально полный функтор,* $K \subseteq N \lhd G$, $K \lhd G$, N *–* A*-допустимая подгруппа группы* G *и* $K \subseteq \Phi_\theta(G,A)$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *если* N/K π*-замкнута, то и* N π*-замкнута;*

2) $F_p(N/K)=F_p(N)/K$.

3. Основной результат

Теорема 3.1. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A, *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, θ *– абнормально полный подгрупповой функтор,* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация,* $\pi=\pi(\mathfrak{F})$. *Если субнормальная* A*-допустимая подгруппа* H *группы* G *содержит* $O_\pi(\Phi_\theta(G,A))$ *и* $H/O_\pi(\Phi_\theta(G,A))\in\mathfrak{F}$, *то* $H\in\mathfrak{F}$.

Доказательство. Согласно теореме 4.3 гл. IV [6] $\mathfrak{F}$ содержится в $\mathfrak{E}_\pi$ классе всех π-групп. Не ограничивая общности, можно считать, что $\Phi_\theta(G,A)$ – π-группа. Таким образом H – π-группа и $H/\Phi_\theta(G,A)\in\mathfrak{F}$. Пусть $p\in\pi$. Так как H – субнормальная подгруппа группы G и согласно лемме 2.4 $F_p(G/\Phi_\theta(G,A))=F_p(G)/\Phi_\theta(G,A)$, получаем, что $F_p(H/\Phi_\theta(G,A))=F_p(H)/\Phi_\theta(G,A)$. Так как $H/\Phi_\theta(G,A)\in\mathfrak{F}$, то, используя леммы 2.3 и 2.4, получаем, что

$$(H/\Phi_\theta(G,A))/F_p(H/\Phi_\theta(G,A))=H/\Phi_\theta(G,A)/F_p(H)/\Phi_\theta(G,A)\simeq$$
$$\simeq H/F_p(H)\in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p\in\pi(H)$, то по лемме 2.3 подгруппа H входит в $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

В случае, когда $\mathfrak{F}$ содержит формацию нильпотентных групп, тогда $\pi=\mathbb{P}$ и теорема 3.1 дает ответ на вопрос: «Если H – субнормальная подгруппа группы G, такая, что $H/\Phi_\theta(G,A)\in\mathfrak{F}$, то $H\in\mathfrak{F}$».

Если группа операторов A единична, а θ – абнормальный подгрупповой функтор, то подгруппа $\Phi_\theta(G,A)$ совпадает с подгруппой Гашюца $\Delta(G)$ и из теоремы 3.1 получаем

Следствие 3.1.1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация,* $\pi=\pi(\mathfrak{F})$. *Если субнормальная подгруппа* H *группы* G *содержит* $O_\pi(\Delta(G)(G))$ *и* $H/O_\pi(\Delta(G)(G))\in\mathfrak{F}$, *то* $H\in\mathfrak{F}$.

Если группа операторов A единична, а θ – тривиальный подгрупповой функтор, то подгруппа $\Phi_\theta(G,A)$ совпадает с подгруппой Фраттини $\Phi(G)$ и из теоремы 3.1 получаем

Следствие 3.1.2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация,* $\pi=\pi(\mathfrak{F})$. *Если субнормальная подгруппа* H *группы* G *содержит* $O_\pi(\Phi(G))$ *и* $H/O_\pi(\Phi(G))\in\mathfrak{F}$, *то* $H\in\mathfrak{F}$.

Замечание. Если локальная формация $\mathfrak{F}$ не содержит формацию нильпотентных групп, то даже в случае единичной группы операторов из того, что $H/\Phi_\theta(G)\in\mathfrak{F}$ для субнормальной подгруппы H, не всегда следует, что $H\in\mathfrak{F}$. Действительно, пусть $\mathfrak{F}=\mathfrak{S}_p$ – насыщенная формация всех p-групп, p – простое число. Рассмотрим $q\neq p$ и пусть $G=C_{p^2}\times C_{q^2}$ циклическая группа порядка p^2q^2. Если $H=C_{p^2}\Phi_\theta(G)$, тогда $H\lhd G$ и $H/\Phi_\theta(G)\in\mathfrak{F}$, но $H\notin\mathfrak{F}$.

Теорема 3.2. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A, *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, θ *– абнормально полный подгрупповой функтор,* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация. Если* N *– субнормальная* A*-допустимая подгруппа группы* G *и* $N/N\cap\Phi_\theta(G,A)\in\mathfrak{F}$. *Тогда* N *представима в виде прямого произведения* $N=N_1\times N_2$, *множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $N_2 \subseteq \Phi_\theta(G, A)$.

Доказательство. Пусть $D = N \cap \Phi_\theta(G, A)$, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. По теореме 3.1 подгруппа N представима в виде $N = N_1 \times N_2$, где N_1 – холловская π-подгруппа из N. Так как $N_2 \subseteq \Phi_\theta(G, A)$, то $N / D \simeq N_1 / D_1 \in \mathfrak{F}$, где $D_1 = N_1 \cap \Phi_\theta(G, A)$. Пусть $p \in \pi$. Так как $N_1 / D_1 \in \mathfrak{F}$, то, используя лемму 2.3 и лемму 2.4, получаем, что

$$(N_1 / D_1) / F_p(N_1 / D_1) = N_1 / D_1 / F_p(N_1) / D_1 \simeq N_1 / F_p(N_1) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(N_1)$, то по лемме 2.3 подгруппа N_1 входит в $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Следствие 3.2.1. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|) = 1$, θ – абнормально полный подгрупповой функтор, $\mathfrak{F}$ – локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – субнормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N / N \cap \Phi_\theta(G, A) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.*

Теорема 3.3. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|) = 1$, θ – абнормально полный подгрупповой функтор, $C_G(\widetilde{F}_\theta(G, A)) \subseteq F(G)$ для любой группы G.*

Доказательство. Положим $H = \widetilde{F}_\theta(G, A)$, $C = C_G(H)$, $F = F(G)$. Если $\Phi_\theta(G, A) \neq 1$, то рассматриваем $G / \Phi_\theta(G, A)$, для которой теорема верна по индукции. Тогда

$$C\Phi_\theta(G, A) / \Phi_\theta(G, A) \subseteq F / \Phi_\theta(G, A) = F(G / \Phi_\theta(G, A)),$$

откуда $C \subseteq F$. Рассмотрим теперь случай $\Phi_\theta(G, A) = 1$. Ввиду того, что подгруппа Фиттинга $F(G)$ совпадает с пересечением централизаторов в G всех главных факторов группы G, получаем, что $F \subseteq C$.

Предположим, что $C \neq F$ и рассмотрим такой главный фактор N / F группы G, что $N \subseteq C$. Так как $Soc(N)$ содержится в H, следовательно, он централизуется подгруппой N. Если $N \neq G$, то по индукции $N = F(N) = F(G)$, что невозможно. Пусть $N = G$, т. е. G / F – главный фактор группы G. По лемме 7.9 из [2]

$$G = LF,\ L \cap F = 1,\ F \subseteq H.$$

В рассматриваемом случае $G = C$. Поэтому $G = L \times F$. Так как $G / F \simeq L$, то L либо проста, либо есть прямое произведение изоморфных простых групп. Так как $F \neq G$, то L неабелева и, несложно заметить, $L = G'$. Значит, L является минимальной нормальной подгруппой группы G, т. е. $L \subseteq H$. Но это невозможно, так как L неабелева и $G = C$. Теорема доказана.

Теорема 3.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная формация, θ – абнормально полный подгрупповой функтор и группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|) = 1$. Если H – $\mathfrak{F}$-достижимая A-допустимая подгруппа группы G и $H / H \cap \Phi_\theta(G, A) \in \mathfrak{F}$, то H представима в виде прямого произведения $H = H_1 \times H_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $H_2 \subseteq \Phi_\theta(G, A)$.

Доказательство. Так как подгруппа H $\mathfrak{F}$-достижима в G, то она, очевидно, $\mathfrak{S}_\pi$-достижима в G, где $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Ввиду леммы 2.1 подгруппа $H\Phi_\theta(G, A) / \Phi_\theta(G, A)$ $\mathfrak{S}_\pi$-достижима в группе $G / \Phi_\theta(G, A)$. Значит, на основании работы [5] имеем, что

$$H\Phi_\theta(G,A)/\Phi_\theta(G,A)\subseteq O_\pi(G/\Phi_\theta(G,A)).$$

Пусть $O_\pi(G/\Phi_\theta(G,A))=K/\Phi_\theta(G,A)$. По теореме 3.2 подгруппа K представима в виде $K=K_1\times K_2$, где K_1 – π-группа, $\pi(K_2)\cap\pi=\varnothing$, $K_2\subseteq\Phi_\theta(G,A)$. Пусть H_1 – холловская π-подгруппа группы H, H_2 – холловская π'-подгруппа группы H. Очевидно, $H_1\subseteq K_1$, $H_2\subseteq K_2$. Поэтому $H=H_1\times H_2$, причем, H_1 – π-группа, $\pi(H_2)\cap\pi=\varnothing$, $H_2\subseteq\Phi_\theta(G,A)$.

Покажем, что $H_1\in\mathfrak{F}$. Предположим, что это неверно и группа G является контрпримером минимального порядка. Тогда в G найдется $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа T, такая, что из $T/T\cap\Phi_\theta(G,A)\in\mathfrak{F}$ следует равенство $T=T_1\times T_2$, где T_1 – π-группа, $\pi(T_2)\cap\pi=\varnothing$, $T_2\subseteq\Phi_\theta(G,A)$, но подгруппа T_1 не принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Среди всех таких подгрупп выберем подгруппу H, имеющую в G наименьший индекс. Очевидно, что $H_1\neq 1$. Поэтому $O_\pi(G)\neq 1$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как
$$H\Phi_\theta(G,A)N/\Phi_\theta(G,A)N\simeq H\Phi_\theta(G,A)/H\Phi_\theta(G,A)\cap\Phi_\theta(G,A)N,$$
то $H\Phi_\theta(G,A)N/\Phi_\theta(G,A)N\in\mathfrak{F}$. С другой стороны, $H\Phi_\theta(G,A)N/\Phi_\theta(G,A)N\simeq$ $\simeq HN/HN\cap\Phi_\theta(G,A)N$. Поэтому $HN/HN\cap\Phi_\theta(G,A)N\in\mathfrak{F}$.

Так как $\Phi_\theta(G,A)N/N\subseteq\Phi_\theta(G/N,A)$, то $(HN/N)/(HN/N)\cap\Phi_\theta(G/N,A)\in\mathfrak{F}$.

Кроме того, на основании леммы 2.1 подгруппа HN/N $\mathfrak{F}$-достижима в группе G/N. Теперь ввиду выбора группы G имеем $H_1N/N\in\mathfrak{F}$. Если L – минимальная нормальная подгруппа группы G, отличная от N, то аналогично доказывается, что $H_1L/L\in\mathfrak{F}$. Отсюда следует, что
$$H_1/L\cap N\simeq H_1\in\mathfrak{F}.$$

Пришли к противоречию.

Итак, N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Из $N\subseteq\Phi_\theta(G,A)\cap O_\pi(G)$ следует, что N – абелева p-группа для некоторого $p\in\pi(\mathfrak{F})$. Кроме того, $H_2=1$, $H=H_1$ и $HN/N\in\mathfrak{F}$. Если N не содержится в H, то $|G:HN|<|G:H|$. Кроме того, $HN/HN\cap\Phi_\theta(G,A)\in\mathfrak{F}$. Значит, ввиду выбора подгруппы H имеем, что $HN\in\mathfrak{F}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ является наследственной, то $H\in\mathfrak{F}$. Снова пришли к противоречию. Значит, в дальнейшем полагаем, что $N\subseteq H$.

Предположим, что H – собственная подгруппа группы $HO_p(G)$. Ввиду леммы 2.1 подгруппа H $\mathfrak{F}$-достижима в группе $HO_p(G)$. Поэтому существует такая цепь
$$H=H_0\subseteq H_1\subseteq\ldots\subseteq H_n=HO_p(G),$$
что для каждого $i=1,2,\ldots,n$ выполняется одно из условий: 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i; 2) $\mathfrak{F}$-корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1}.

Пусть $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Если подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, то, очевидно, $H_{i-1}^{f(p)}$ – нормальная подгруппа группы H_i. По теореме 4.7 из [2] формация $f(p)$ является наследственной. Поэтому $H_{i-1}^{f(p)}\subseteq H_i^{f(p)}$. Значит, подгруппа $H_{i-1}^{f(p)}$ нормальна в группе $H_i^{f(p)}$.

Пусть теперь $H_i^{\mathfrak{F}}\subseteq H_{i-1}$. Так как $H_i=H_{i-1}(O_p(G)\cap H_i)$, то
$$H_i/(H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G)\cap H_i)\simeq H_{i-1}/(H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G)\cap H_{i-1}).$$

Поэтому
$$(H_i)^{f(p)}\subseteq(H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G)\cap H_i).$$

Так как $H_{i-1}^{f(p)} \subseteq H_i^{f(p)}$, то

$$(H_i)^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i) = (H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i). \qquad (*)$$

По лемме 2.3, для любого $j \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ имеем

$$(H_j)^{f(p)} / (H_j)^{\mathfrak{F}} \subseteq O_{p'p}(H_j / (H_j)^{\mathfrak{F}}).$$

Так как экран f является внутренним максимальным, то на основании теоремы 3.3 из [2] $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$. Отсюда следует, что

$$(H_j)^{f(p)} / (H_j)^{\mathfrak{F}} \subseteq O_{p'}(H_j / (H_j)^{\mathfrak{F}}).$$

Так как $H_j O_j(G) / O_p(G) \in \mathfrak{F}$, то $(H_j)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_j \cap O_p(G)$. Таким образом,

$$(H_j)^{f(p)} = (H_j)_{p'}^{f(p)}(H_j)^{\mathfrak{F}},$$

где $(H_j)_{p'}^{f(p)}$ – холловская p'-подгруппа группы $(H_j)^{f(p)}$. Теперь из равенства $(*)$ следует, что холловская p'-подгруппа $(H_{i-1})_{p'}^{f(p)}$ группы $(H_{i-1})^{f(p)}$ является холловской p'-подгруппой группы $(H_i)^{f(p)}$. Значит,

$$(H_i)^{f(p)} = (H_{i-1})_{p'}^{f(p)}(H_i)^{\mathfrak{F}}.$$

Так как $(H_i)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$, то $(H_i)^{f(p)} \subseteq H_{i-1}$. Итак,

$$(H_{i-1})^{f(p)} \subseteq (H_i)^{f(p)} \subseteq H_i.$$

Отсюда следует, что подгруппа $(H_{i-1})^{f(p)}$ нормальна в группе $(H_i)^{f(p)}$.

Итак, подгруппа $H^{f(p)}$ субнормальна в группе $HO_p(G)$. Тогда подгруппа $(H/N)^{f(p)} = H^{f(p)}N/N$ является субнормальной подгруппой группы $(H/N)O_p(G/N)$. Так как $H/N \in \mathfrak{F}$, то

$$(H/N)^{f(p)} \subseteq O_{p'}(H/N).$$

Из субнормальности $(H/N)^{f(p)}$ в $HO_p(G)/N$ следует, что

$$(H/N)^{f(p)} \subseteq O_{p'}(HO_p(G)/N).$$

Значит,

$$(H/N)^{f(p)}O_p(G/N) \subseteq O_{p'p}(HO_p(G)/N).$$

Так как

$$HO_p(G)/H^{f(p)}O_p(G) \simeq H/H \cap H^{f(p)}O_p(G) \in f(p),$$

то

$$(HO_p(G)/N)/O_{p'p}(HO_p(G)/N) \in f(p).$$

Используя теорему 4.1 из [2], получаем, что все главные факторы группы $HO_p(G)/N$, содержащиеся в $O_p(G)/N$, являются $\mathfrak{F}$-центральными. Поэтому из $HO_p(G)/O_p(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $HO_p(G)/N \in \mathfrak{F}$.

Очевидно, подгруппа $HO_p(G)$ $\mathfrak{F}$-достижима в группе G. Так как

$$|G : HO_p(G)| < |G : H|,$$

то ввиду выбора подгруппы H имеем, что $HO_p(G) \in \mathfrak{F}$. Из наследственности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $H \in \mathfrak{F}$. Пришли к противоречию.

Итак, $O_p(G) \subseteq H$. Пусть φ – естественный гомоморфизм группы G на группу $G/\Phi_\theta(G,A)$. Отметим, что так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $\Phi_\theta(G,A) \subseteq O_p(G)$. Пусть $S = \varphi^{-1}(O_p(G^\varphi))$ – полный прообраз подгруппы

$O_p(G^\varphi)$. На основании теоремы 3.2 подгруппа S представима в виде $S = S_1\Phi_\theta(G, A)$, где S_1 – холловская p'-подгруппа группы S. Теперь из того, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа, имеем $O_p(G^\varphi) = 1$. Таким образом, все абелевы минимальные нормальные подгруппы группы G^φ являются p-группами.

Пусть K – неабелева минимальная нормальная подгруппа группы G^φ. Предположим, что K не принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Тогда $K = K^{\mathfrak{F}}$. Так как подгруппа H^φ $\mathfrak{F}$-достижима в G^φ, то из работы [10] $K \subseteq N_{G^\varphi}(H)$. Значит, $K \cap H^\varphi$ – нормальная подгруппа группы K и поэтому $(K \cap H^\varphi)^{\mathfrak{F}} = K \cap H^\varphi$. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то $(K \cap H^\varphi)^{\mathfrak{F}} \subseteq (H^\varphi)^{\mathfrak{F}}$. Теперь из $H^\varphi \in \mathfrak{F}$ следует, что $K \cap H^\varphi = 1$. Значит, $KH^\varphi = K \times H^\varphi$.

Пусть теперь $K \in \mathfrak{F}$. Предположим, что K не содержится в H^φ. Так как подгруппа H^φ $\mathfrak{F}$-достижима в $H^\varphi K$, то существует такая цепь

$$H^\varphi = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_s = H^\varphi K,$$

что для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$ выполняется одно из условий: 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i; 2) $\mathfrak{F}$-корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1}. В частности, либо подгруппа H^φ нормальна в группе H_1, либо $(H_1)^{\mathfrak{F}} \subseteq H^\varphi$.

Пусть $(H_1)^{\mathfrak{F}} \subseteq H^\varphi$. Так как $H^\varphi K / K \in \mathfrak{F}$, то $(H^\varphi K)^{\mathfrak{F}} \subseteq K$. Из наследственности формации $\mathfrak{F}$ имеем, что $(H_1)^{\mathfrak{F}} \subseteq K$. Так как подгруппа H_1 $\mathfrak{F}$-достижима в $H^\varphi K$, то ввиду леммы 2.1 $(H_1)^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа группы $H^\varphi K$. Очевидно, подгруппа K представима в виде $K = K_1 \times \ldots \times K_n$, где K_i – изоморфные простые группы. Так как подгруппа K неабелева, то $(H_1)^{\mathfrak{F}}$ – произведение некоторых подгрупп K_i для i из $\{1, 2, \ldots, n\}$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $(H_1)^{\mathfrak{F}} = K_1 \times \ldots \times K_m$, где $k < m$. Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы H^φ, содержащаяся в $(H_1)^{\mathfrak{F}}$. Так как подгруппа L неабелева, то $K = L \times C_K(L)$. Отсюда, в частности, следует, что L – минимальная нормальная подгруппа группы $H^\varphi K$. Так как $L \subseteq H^\varphi$, то

$$H^\varphi K = H^\varphi(LC_K(L)) = H^\varphi C_K(L) = H^\varphi C_{H^\varphi K}(L).$$

Поэтому

$$H^\varphi K / C_{H^\varphi K}(L) = H^\varphi C_{H^\varphi K}(L) / C_{H^\varphi K}(L) \simeq H^\varphi / H^\varphi \cap C_{H^\varphi K}(L) = H^\varphi / C_{H^\varphi}(L).$$

Так как $H^\varphi \in \mathfrak{F}$, то $H^\varphi / C_{H^\varphi}(L) \in f(L)$. Но тогда $H^\varphi K / C_{H^\varphi K}(L) \in f(L)$, т. е. L – $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор группы $H^\varphi K$. Так как формация $f(L)$ наследственна, то L – $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор группы H_1. Отсюда из строения подгруппы $(H_1)^{\mathfrak{F}}$ следует, что все H_1-главные факторы группы $(H_1)^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{F}$-центральны в H_1. Значит, подгруппа H_1 принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Так как подгруппа H_1 $\mathfrak{F}$-достижима в H_1K, а подгруппа $H_1K = H^\varphi K$ $\mathfrak{F}$-достижима в G^φ, то H_1 – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G^φ. Пусть $\varphi^{-1}(H_1)$ – полный прообраз подгруппы H_1. Тогда $\varphi^{-1}(H_1)$ – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, $\varphi^{-1}(H_1) / \Phi_\theta(G, A) \in \mathfrak{F}$ и $|G : \varphi^{-1}(H_1)| < |G : H|$. Ввиду выбора подгруппы H имеем, что $\varphi^{-1}(H_1) \in \mathfrak{F}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ наследственна, то $H \in \mathfrak{F}$. Пришли к противоречию.

Пусть теперь подгруппа H^φ нормальна в H. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что H_1 / H^φ – простая группа. Предположим, что $(H_1)^{\mathfrak{F}} \not\subseteq H^\varphi$. Тогда

$$H_1 = H^{\varphi}(H_1)^{\mathfrak{F}} = H^{\varphi}(K_1 \times \ldots \times K_m).$$

Так как

$$H_1 / H^{\varphi} \simeq K_1 \times \ldots \times K_m / K_1 \times \ldots \times K_m \cap H^{\varphi},$$

то из $K \in \mathfrak{F}$ следует, что $(H_1)^{\mathfrak{F}} \subseteq H^{\varphi}$. Пришли к противоречию с предположением.

Значит, $(H_1)^{\mathfrak{F}} \subseteq H^{\varphi}$. Как показано выше, это приводит к противоречию с выбором подгруппы H.

Итак, если K – минимальная нормальная подгруппа группы G^{φ}, то либо $K = K^{\varphi}$ и $[K, H^{\varphi}] = 1$, либо $K \in \mathfrak{F}$ и $K \subseteq H^{\varphi}$. Если $K = K^{\mathfrak{F}}$, то, очевидно, $O_p(H^{\varphi}) \subseteq C_{G^{\varphi}}(K)$. Пусть $K \in \mathfrak{F}$. Тогда $K \subseteq H^{\varphi}$. Так как все минимальные нормальные подгруппы группы G являются либо p-группами, либо pd-группами, то из $K \subseteq H^{\varphi}$ снова получаем, что $O_p(H^{\varphi}) \subseteq C_{G^{\varphi}}(K)$. Таким образом,

$$O_p(H^{\varphi}) \subseteq C_{G^{\varphi}}(Soc(G^{\varphi})).$$

Так как $\Phi_{\theta}(G^{\varphi}, A) = 1$, то $Soc(G^{\varphi}) = \widetilde{F}_{\theta}(G^{\varphi}, A)$. По теореме 3.3

$$O_p(H^{\varphi}) \subseteq F(G^{\varphi}) = O_p(H^{\varphi}).$$

Значит, $O_p(H^{\varphi}) = 1$.

Так как $H^{\varphi} \in \mathfrak{F}$, то ввиду леммы 2.3 из условия $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ следует, что $H^{\varphi} / O_p(H^{\varphi}) \in f(p)$. Так как $O_p(H^{\varphi}) = 1$, то $H^{\varphi} = H / \Phi_{\theta}(G, A) \in f(p)$. Теперь из $\Phi_{\theta}(G, A) \subseteq O_p(G)$ и $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ следует, что $H \in f(p)$. Так как экран f является внутренним, то $H^{\varphi} \in \mathfrak{F}$. Снова пришли к противоречию. Теорема доказана.

Следствие 3.4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, θ – абнормально полный подгрупповой функтор и группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если N – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G и $N / N \cap \Phi_{\theta}(G, A) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.*

Так как $\mathfrak{F}$-субнормальные и субнормальные подгруппы являются $\mathfrak{F}$-достижимыми, то в качестве следствия из теоремы 3.4 можно получить аналогичные утверждения для этих подгрупп.

Литература

1. *Frattini G.* Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni // Atti Acad. Dei Lincei. 1885. Vol. 1. P. 281–285.

2. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. – 272 с.

3. *Селькин М. В.* Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Мн.: Беларуская навука, 1997. – 144 с.

4. *Ballester-Bolinches A., Perez-Ramos M. D.* On $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups and Frattini-like subgroups of a finite group // Glasgow Math. J. 1994. Vol. 36. P. 241–247.

5. *Beidleman J. C., Smith H.* On Frattini-like subgroups // Glasgow Math. J. 1993. Vol. 35. P. 95–98.

6. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

7. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Мн.: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

8. *Borodich R. V.* A generalized Frattini subgroup // Asian-European Journal of Mathematics. 2021. Vol. 14, № 2. Art. 21500261. https://doi.org/10.1142/S1793557121500261

9. *Бородич Р. В.* О пересечении максимальных подгрупп конечных групп // Укр. мат. журн. 2019. Т. 71, № 11. С. 1455–1465.

10. *Авдашкова Л. П., Каморников С. Ф.* О нормализаторах $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1996. № 1. С. 33–35.

R. V. Borodich

On $\mathfrak{F}$-reachable subgroups in groups with operators

Summary

This paper studies the behavior of $\mathfrak{F}$-reachable subgroups in generalized Frattini extensions.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 1. С. 33–43

УДК 519.6

Обратные задачи восстановления коэффициентов и источников переноса в нелинейных уравнениях теплопроводности

В. Т. Борухов, Г. М. Заяц, О. И. Костюкова

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: val01@tut.by, zayats@im.bas-net.by, kostyukova@im.bas-net.by
Поступила 25.09.2023

Обсуждаются методы функциональной идентификации, обратных динамических систем и поэтапной субоптимальной оптимизации для решения обратных задач восстановления коэффициентов, граничных условий и источников переноса в нелинейном уравнении теплопроводности.

Основы теории обратных задач (ОЗ) были заложены в 50–80-х годах XX в. в трудах А. Н. Тихонова и его последователей. ОЗ, в отличии от прямых задач, не обладают свойством корректности в смысле Ж. Адамара. В связи с этим А. Н. Тихоновым разработана теория регуляризации некорректно поставленных задач и предложены устойчивые методы их решения [1]. Библиография по общей теории некорректных задач содержит сотни наименований. Очерк теории, алгоритмы и демонстрация в МАТЛАБ решений ОЗ представлены в монографии [2]. Разностные методы решений ОЗ математической физики (МФ) рассмотрены в монографии [3]. Отметим, что в 70–90-х годах прошлого столетия в области общей теории ОЗ активно работал сотрудник Института математики НАН Беларуси О. А. Лисковец [4].

С физической точки зрения прямые нестационарные задачи МФ согласованы с термодинамической стрелой времени, направленной от прошлого к будущему. Тем самым обеспечивается корректность правильно поставленных прямых задач МФ. Отсюда же следует физическая нереализуемость и некорректность по Адамару ОЗ МФ. Таким образом, теория ОЗ МФ призвана обслуживать задачи, связанные с креативной деятельностью природы, понимаемой в широком смысле, включающей, в частности, деятельность человека. В таком контексте теорию ОЗ МФ можно рассматривать в рамках математической теории систем [5–7] как инструмент для решения задач управления, наблюдения и идентификации процессов различной физической природы.

В настоящее время для приложений актуальны исследования алгоритмической реализуемости и численной имплементации задач диагностики и управления процессами переноса информации, энергии и вещества [8–10]. В Институте математики НАН Беларуси такие исследования проводятся по следующим направлениям:

- функциональная идентификация нелинейных уравнений теплопроводности параболического типа,
- восстановление граничных потоков и источников процессов переноса, описываемых линейными и нелинейными уравнениями теплопроводности параболического и гиперболического типов.

Краткий обзор полученных в Институте математики НАН Беларуси результатов по указанным направлениям приводится далее. В заключительной части обзора обсуждаются некоторые аспекты взаимодействия теории ОЗ МФ и математической теории систем.

1. Функциональная идентификация коэффициентов уравнения теплопроводности. Функциональный подход к задаче идентификации коэффициентов уравнения теплопроводности развивался в работах [11–19]. В основу этого подхода заложена схема метода сопряженных градиентов без привлечения априорной процедуры сужения искомых коэффициентов на множество функций, разложимых по заданной конечной системе базисных функций. Указанная процедура сведения исходной бесконечномерной задачи к конечномерной (параметрической) использовалась многими авторами. Однако такому подходу присущи недостатки, обусловленные, прежде всего, проблемой выбора подходящей базисной системы функций. Как следствие, для параметрического подхода характерна сильная зависимость качества идентификации от структурных особенностей искомых коэффициентов.

В монографии [8] отмечается, что для градиентных методов переход от функциональной к параметрической идентификации коэффициентов был обусловлен трудностями, возникающими при численной реализации значений оператора, сопряженного оператору внутренней суперпозиции. В связи с этим в работе [11] предложен новый способ построения соответствующих сопряженных операторов, основанный на дифференциально-интегральных представлениях линейных отображений банаховых пространств. Численная реализация значений сопряженных операторов для таких представлений достаточно проста [12], что позволяет развивать функциональный подход идентификации коэффициентов нелинейных уравнений.

Отметим также применение методологии быстрого автоматического дифференцирования [20] для решения задач идентификации коэффициентов в нелинейных уравнениях теплопроводности [21, 22].

1.1. Постановка задачи. В области $\Omega = \omega\times(0,t_f]$, где $\omega\in\mathbf{R}^n$ $(n\in\{1,2,3\})$, рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\rho(T)c(T)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \mathrm{div}(\lambda(T)\mathrm{grad}\,T)+F(T),\ \ x\in\omega,\ \ t\in(0,t_f]. \tag{1}$$

Присоединим к (1) начальные и краевые условия

$$T(x,0)=\overline{T}(x)\quad \forall x\in\omega,\quad T(x,t)\ \Big|_{x\in\partial\omega} = g(x,t),\quad \forall t\in[0,t_f]. \tag{2}$$

Соотношения (1), (2) определяют прямую начально-краевую задачу для нахождения функции $T(x,t)$.

Под идентификацией уравнения (1) будем понимать задачу определения одного из коэффициентов $c(T), \lambda(T), F(T)$. Для определенности положим $F(T)=0$ и рассмотрим задачу восстановления коэффициента $\lambda(T)$ по данным

$$y(t)=T(x_*,t)\qquad \forall t\in[0,t_f]$$

о температурном поле в точке $x_*\in\omega$, условиям (2) и заданному коэффициенту $C(T)=\rho(T)c(T)$.

Как обычно предполагается, что область Ω и функции $\rho,c,\lambda:[\Theta_1,\Theta_2]\to R$ $\left(\Theta_1=\inf\limits_{(x,t)\in\Omega}T(x,t),\Theta_2=\sup\limits_{(x,t)\in\Omega}T(x,t)\right)$, $\overline{T}:\omega\to R$, $g:\partial\omega\times(0,t_f)\to R$, таковы, что существует единственное непрерывно дифференцируемое в замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω решение $\mathrm{T}:\overline{\Omega}\to R$ начально-краевой задачи (1), (2). Кроме того, функции ρ,c,λ положительны на $[\Theta_1,\Theta_2]$ и принадлежат пространству Соболева $W_2[\Theta_1,\Theta_2]$ абсолютно непрерывных функций с суммируемыми в квадрате производными.

1.2. Итерационный процесс. Идентификация коэффициента λ, основанная на методе сопряженных градиентов [8, 9], представляет собой итерационный процесс минимизации целевого функционала

$$J(\lambda)=\int_0^{t_f}(T(\lambda;x_*,t)-y(t))^2\,dt. \tag{3}$$

Следуя [7, 11, 12], опишем три варианта алгоритма минимизации функционала (3), отмечая их индексом $i=1,2,3$. Для первого варианта $(i=1)$ область определения функционала J является открытой областью в пространстве $L_2[\Theta_1,\Theta_2]$ суммируемых с квадратом функций, а в случае $i=2,3$ – открытой областью в пространстве $W_2[\Theta_1,\Theta_2]$.

Итерации, определяющие минимизирующую последовательность функционала (3), задаются рекурсией [8]

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \beta_k l_k, \;\; l_k = J'^{i}_{\lambda k} - \gamma^i_{k-1} l_{k-1}, \; l_{-1}=0, \;\; k \in \{0,1,...,\}, \tag{4}$$

где i – номер алгоритма, λ_{k+1} – $k+1$-е приближение для λ, l_k – направление спуска на k+1-й итерации, $J'^{i}_{\lambda k}$ – градиент функционала (3) в точке $\lambda = \lambda_k$, формулы для параметров β_k, γ^i_{k-1} приведены в [11]. Отметим, что число итераций в алгоритме (4) является параметром регуляризации ОЗ [8].

Обозначим $\chi(z,s)$ – характеристическая функция множества $\{(z,s) \,|\, \Theta_1 \le s \le z \le \Theta_2\}$, $R_k(z,x,t)$ – характеристическая функция множества $\eta_k(z) = \{(x,t) \in \Omega \,|\, T_k(x,t) \le z \le \Theta_2\}$, $r_k(z,x,t)$ – характеристическая функция множества $\Omega \setminus \eta_k(z)$.

Теорема 1 [7]. *Функция* $J'^{i}_{\lambda k}$ *– градиент функционала (1. 3) в точке* $\lambda = \lambda_k$ *– вычисляется в зависимости от варианта алгоритма* $i \in \{1,\, 2,\, 3\}$ *по одной из следующих формул:*

$$J'^{1}_{\lambda k} = -\frac{d}{dz}\int_\Omega \chi(z,T_k)\,\mathrm{grad}\,T_k \cdot \mathrm{grad}\,w\,dxdt = -\frac{d}{dz}\int_\Omega R_k(z,x,t)\,\mathrm{grad}\,T_k \cdot \mathrm{grad}\,w\,dxdt,$$

$$J'^{2}_{\lambda k} = -\int_\Omega \mathrm{grad}\,T_k \cdot \mathrm{grad}\,w\,dxdt - \int_{\Theta_1}^{z}\int_\Omega r_k(\tau,x,t)\,\mathrm{grad}\,T_k \cdot \mathrm{grad}\,w\,dxdtd\tau,$$

$$J'^{3}_{\lambda k} = -\int_\Omega \mathrm{grad}\,T_k \cdot \mathrm{grad}\,w\,dxdt - \int_{z}^{\Theta_2}\int_\Omega R_k(\tau,x,t)\,\mathrm{grad}\,T_k \cdot \mathrm{grad}\,w\,dxdtd\tau,$$

где $w = w(x,t)$ *– решение неоднородной начально-краевой задачи*

$$\rho(T_k(x,t))c(T_k(x,t))\frac{\partial w}{\partial t} = -\lambda_k(T_k(x,t))\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,w - \delta(x-x_*)\,p_k(t),$$

$$w(x,t)\,|_{x\in\partial\omega} = 0, \quad w(x,t_f) = 0,$$

сопряженной к начально-краевой задаче

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho(T_k)c(T_k)v) = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(\lambda_k(T_k)v)) + \mathrm{div}(u(T_k)\,\mathrm{grad}\,T_k),$$

$$v(x,t)\,|_{x\in\partial\omega} = 0, \quad v(x,0) = 0$$

для вариаций u, v *функций* λ_k, T_k.

Отметим, что алгоритмы $i = 2{,}3$ обладают сглаживающим эффектом [16] и, следовательно, устойчивы к высокочастотным помехам в данных измерений. С другой стороны, используя алгоритм $i = 1$ в случае слабых помех, можно практически без искажений восстановить коэффициент $\lambda(T)$ произвольно сложной структуры [7–15], в частности, выявить точки излома графика функции $\lambda(T)$, обусловленные фазовыми переходами.

Вопросы неединственности решения ОЗ рассматривались в работах [15, 19]. Предложено понятие инвариантных нулей решений уравнения теплопроводности и определены классы ОЗ восстановления коэффициента $\lambda(T)$ с неединственным решением. Получено явное описание множества $\{\lambda(T)\}$ в случае, когда температурное поле имеет вид бегущей волны, либо является автомодельным, либо содержит инвариантные нули. При численной реализации подхода функциональной идентификации множество $\{\lambda(T)\}$ параметризуется элементами множества начальных условий для алгоритма (4). Таким образом, метод функциональной идентификации позволяет численно выявлять неединственность решения ОЗ.

Метод функциональной идентификации применялся [13] для определения теплопроводности некоторых марок стали. В связи с задачей математического моделирования тепловых процессов в контейнерах с отработанным ядерным топливом, в работе [18] предложен подход восстановления эффективного коэффициента теплопроводности в квазистационарном уравнении переноса с источником тепла.

2. Обратные динамические системы и задачи восстановления источников. Для решения ряда ОЗ эффективно применяется метод обратных динамических систем. Понятия динамической системы (ДС) вход–состояние–выход и обратной динамической системы (ОДС) возникли в математической теории систем [5, 23, 24]. Метод ОДС содержит два этапа: вывод системы уравнений и краевых условий, определяющих ОДС, и решение начально-краевой задачи, полученной на первом этапе. Краткий обзор применений метода ОДС дан в [7, 25].

Важно отметить, что начально-краевая задача, определяющая ОДС, является нестандартной (неклассической) задачей [26–29], поскольку в общем случае она содержит интегро-дифференциальные и функционально-дифференциальные термы. С другой стороны, ОДС можно рассматривать как замыкание обратной связью некоторой стандартной калибровочной ДС. Это свойство ОДС можно использовать для имплементации численной схемы решения нестандартной начально-краевой задачи. А именно, нестандартные термы задачи можно вычислять на текущем временном слое исходя из данных предыдущего временного слоя. Такой подход применялся в работах [25, 30, 31] для численного решения задачи восстановления источников в уравнениях параболического и гиперболического типов.

2.1. Постановка задачи [25]**.** Рассмотрим систему нелинейных уравнений гиперболического типа

$$\rho(T)c(T)\frac{DT}{Dt}=-\frac{\partial q}{\partial x}+g(x,t), \tag{5}$$

$$\tau\frac{Dq}{Dt}=-\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}-q, \quad x\in[0,l], \quad t\in[0,t_f], \tag{6}$$

где $T=T(x,t), \quad q=q(x,t)$ – искомые функции, $\dfrac{D}{Dt}=\dfrac{\partial}{\partial t}+v(x)\dfrac{\partial}{\partial x}$ – материальная производная, $\rho(T)>0, c(T)>0, \lambda(T)>0, v(x), g(x,t)$ – гладкие функции. Система (5), (6) описывает, в частности, процессы распространения тепла в нелинейной среде с учетом времени релаксации теплового потока τ и конвективной составляющей тепла [32, 33]. При $\tau=0$ эта система уравнений приводима к одному нелинейному уравнению теплопроводности параболического типа, а при $\tau>0$ и при отсутствии конвективного терма – к одному нелинейному уравнению теплопроводности гиперболического типа.

Дополним систему (5), (6) начальными и краевыми условиями

$$T(x,0)=T_0(x), \quad q(x,0)=q_0(x), \quad T(0,t)=g_1(t), \quad T(l,t)=g_2(t)$$

и рассмотрим обратную задачу восстановления источника $g(x,t)$.

ОЗ состоит в идентификации временных компонент $u(t)=\operatorname{colon}\left(u_1(t),\ldots,u_m(t)\right)$ функции источника

$$g(x,t)=\sum_{i=1}^{m}b_i(x)u_i(t)=b(x)u(t), \quad b(x)=\left(b_1(x),\ldots,b_m(x)\right),$$

по данным измерений взвешенных температур $y(t)=\operatorname{colon}\left(y_1(t),\ldots,y_m(t)\right)$, определяемых равенством

$$y(t)=\int_0^l T(s,t)p(s)ds, \quad t\in[0,t_f],$$

где $p(x)=\operatorname{colon}\left(p_1(x),\ldots,p_m(x)\right)$, $p_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, – обобщенные функции (распределения конечного порядка сингулярности).

Начально-краевые условия и вектор взвешенных температур служат дополнительными данными для ОЗ. В частном случае вектор взвешенных температур может совпадать с набором изменяющихся во времени значений температурного поля в заданных точках среды.

2.2. Применение метода обратных динамических систем. В нашем подходе прямая задача вычисления температурного поля и вектора взвешенных температур соотносится с распределенной ДС (обозначим ее символом Σ_τ) [7]. При этом пара {температурное поле, тепловой поток} является состоянием ДС Σ, вектор $u(t)$ временных компонент источника тепла рассматривается как входной сигнал ДС, а вектор взвешенных температур $y(t)$ определяет выходной сигнал ДС. Метод ОДС состоит в построении системы обратной к системе Σ.

Без существенного ограничения общности (см. [25]) будем считать, что $\rho(T)c(T) \equiv 1$. Используя замену переменных (калибровку поля T)

$$T(x,t) = w(x,t) + b(x)f(t), \quad f(t) = \int_0^t u(s)ds,$$

перейдем к системе (обозначим ее символом $\Sigma_{\tau g}$)

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial q}{\partial x} - v(x)\frac{db}{dx} f(t), \tag{7}$$

$$\tau \frac{Dq}{Dt} = -\lambda(w(x,t) + b(x)f(t))\frac{\partial w}{\partial x} - q - \lambda(w(x,t) + b(x)f(t))\frac{db}{dx} f(t), \tag{8}$$

$$y(t) = \int_0^l w(s,t)p(s)ds + \int_0^l p(s)b(s)ds\ f(t) \tag{9}$$

с начально-краевыми условиями

$$w(x,0) = T_0(x), \quad q(x,0) = q_0(x), \tag{10}$$

$$w(0,t) = -b(0)f(t) + g_1(t), \quad w(l,t) = -b(l)f(t) + g_2(t). \tag{11}$$

Обозначим $\tilde{\mathcal{D}} = \int_0^l p(s)b(s)ds$ и предположим, что $m \times m$ матрица $\tilde{\mathcal{D}}$ существует и обратима. Тогда из (9) следует, что

$$f(t) = \tilde{\mathcal{D}}^{-1}\left(-\int_0^l w(s,t)p(s)ds + y(t)\right). \tag{12}$$

Подставляя (12) в уравнения (7), (8), (11), получим начально-краевую задачу для описания динамики обратной ДС $\Sigma_{\tau g}^{-1}$. Поскольку

$$u(t) = \frac{d}{dt}\tilde{\mathcal{D}}^{-1}\left(-\int_0^l w(s,t)p(s)ds + y(t)\right), \tag{13}$$

то ДС $\Sigma_{\tau}^{-1} := \Sigma_{\tau g}^{-1}$, обратная к ДС Σ_{τ}, задается системой уравнений (7), (8), (10)–(13) или, в эквивалентной форме, системой уравнений (7), (8), (10)–(12), замкнутой обратной связью (13). Таким образом, динамика обратной ДС $\Sigma_{\tau g}^{-1}$ определяется нестандартной системой интегро-дифференциальных уравнений в частных производных и неклассическими краевыми условиями, а решение ОЗ – соотношением (13).

В [25] доказано существование траекторий ДС $\Sigma_{\tau g}^{-1}$, удовлетворяющих начальным и краевым условиям (10), (11). Для численного решения полученной нестандартной начально-краевой задачи можно использовать классические разностные схемы. Численные примеры приводятся в работах [25, 26, 30, 31].

В отсутствии конвективной составляющей тепла ($v = 0$) рассмотренная система уравнений (5), (6) эквивалентна нелинейному уравнению теплопроводности гиперболического типа

$$\tau \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(T)c(T)\frac{\partial T}{\partial t}\right) + \rho(T)c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + b(x)u(t) + \tau\, b(x)\frac{du}{dt},$$

с начально-краевыми условиями

$$T(x,0) = T_0(x), \ \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{t=0} = -\frac{dq}{dx} + b(x)u(0), \quad T(0,t) = g_1(t), \ T(l,t) = g_2(t).$$

Данное уравнение и начально-краевые условия вместе с уравнением $y(t) = \int_0^l T(s,t)p(s)ds$, $t \in [0, t_f]$, описывают ДС, которую далее будем обозначать символом $\Sigma_{h\tau}$.

Как и ранее будем считать, что $\rho(T)c(T)=1$. Тогда обратная ДС $\Sigma_{h\tau}^{-1}$ задается уравнением

$$\tau\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(w+b(x)f(t))\frac{\partial}{\partial x}(w+b(x)f(t))\right),$$

краевыми условиями (11), начальными условиями

$$w(x,0)=T_0(x),\quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=-\frac{dq}{dx},$$

обратной связью (12) и уравнением (13), определяющим выходной сигнал ДС $\Sigma_{h\tau}^{-1}$.

Таким образом, ОЗ восстановления вектор-функции $u(t)$ (временной компоненты функции источника $g(x,t)$) сведена к прямой, в общем случае, неклассической начально-краевой задаче. Отметим, что при дополнительных ограничениях [25, 30, 31] на вектор-функции $b(x)$, $p(x)$ регуляризация ОДС сводится к регуляризации оператора $\frac{d}{dt}$ в выражении (13).

Примеры ОЗ, для которых ОДС можно редуцировать к начально-краевым задачам для уравнения параболического типа, приведены в работах [7, 34].

Метод ОДС применялся в Институте технологии металлов НАН Беларуси для определения коэффициентов теплоотдачи в процессе затвердевания отливок в струйных кристаллизаторах [34].

3. Восстановление теплового потока с помощью подхода поэтапной субоптимальной оптимизации и хьюбер-тихоновской фильтрации входных данных. Для приложений важна задача восстановления изменяющихся во времени коэффициентов теплоотдачи по данным измерений температуры во внутренних точках объекта. Восстановление коэффициентов теплоотдачи тесно связано также с определением граничных тепловых потоков. Эти две задачи являются исторически первыми ОЗ теплопроводности (см. библиографию в [9, 35]). К настоящему времени имеется несколько подходов к решению указанных задач. Однако среди них нет универсальных, что обусловлено как трудностями решения некорректных задач, так и требованиями эффективной реализуемости и быстродействия численных процедур решения.

В работах [36–41] представлен подход поэтапной субоптимальной оптимизации (ПСО). Подход ПСО развивает идеи последовательного оценивания [35] и полуинтервальной регуляризации [42], что позволяет вести обработку данных в реальном масштабе времени. Это важно, например, при реализации управления тепловыми процессами в форме обратной связи.

Для фильтрации шума предлагается подход, в котором сочетаются метод ПСО и метод робастной оценки в смысле [43]. Мы представляем фильтр как задачу оптимального управления для простейшего дифференциального уравнения первого порядка. При этом функционал качества для задачи управления является суммой функционала Хьюбера для невязки и функционала Тихонова для управления. Это позволяет при подходящем выборе параметров настройки фильтра сглаживать как отдельные большие всплески значений данных измерений, так и стандартные случайные погрешности.

3.1. Постановка задачи. Для нелинейной системы гиперболического типа

$$\rho(T)c(T)\frac{DT}{Dt}=\frac{\partial q}{\partial x}, \tag{14}$$

$$\tau\frac{Dq}{Dt}=-q-\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x},$$

где $T=T(x,t),\ \ q(x,t),\ \ x_0\le x\le x_*,\ \ t_0\le t\le t_*,$

с начальными и краевыми условиями

$$T(x,t_0)=T_{in}(x),\ \ q(x,t_0)=q_{in}(x),\ \ x_0\le x\le x_*;\ \ T(x_*,t)=T_*(t),\ \ t_0\le t\le t_*, \tag{15}$$

рассмотрим задачу восстановления теплового потока $q_0(t) = q(x_0, t)$, $t \in [t_0, t_*]$, в точке $x = x_0$ на основе измерений

$$y(t_i) = T(x_1^*, t_i) + w(t_i)\sigma, \quad i = 0, 1, ..., M, \qquad (16)$$

температурного поля в заданной точке x_1^*, $x_0 \le x_1^* < x_*$.

Здесь $t_i = t_0 + i\Delta t$, $\Delta t = (t_* - t_0)/M$, σ – стандартная величина отклонения ошибок измерений, $w(t_i)$ – реализация случайной величины w с нормальным распределением, нулевым средним и единичным стандартным отклонением, $\Delta t > 0$ – временной шаг, с которым производятся измерения (16).

При выполнении указанных стандартных предположений плотность вероятности величины w определяется формулой $f^*(w) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-w^2/2)$. В нестандартном случае будем предполагать, что плотность вероятности ошибок измерений имеет вид [43]

$$\bar{f}(w) = (1-\varepsilon) f^*(w) + \varepsilon g(w) \quad (0 \le \varepsilon < 1), \qquad (17)$$

где ε – весовой параметр, $g(w)$– неизвестная функция возмущений Гаусовой плотности. Отметим, что плотность вероятности ошибок в форме (17) можно рассматривать как модель больших ошибок [43] в данных измерений.

Пусть теплофизические параметры $\rho(T)$, $\lambda(T)$, $c(T)$, τ, $\nu(x)$, температуры $T_{in}(x)$, $x \in [x_0, x_*]$, $T_*(t)$, $t \in [t_0, t_*]$, тепловой поток $q_{in}(x)$, $x \in [x_0, x_*]$, весовой параметр ε и величина отклонения ошибоки σ известны. Тогда общая задача идентификации теплового потока состоит в восстановлении функции $q_0(t) = q(x_0, t), t \in [t_0, t_*]$, по данным (16) и системе (14), (15).

Одна из отличительных особенностей предлагаемого подхода состоит в применении процедуры фильтрации данных (16). В результате этой процедуры получаются очищенные от шума измерения $y^*(t), t \in [t_0, t_*]$, и восстановление потока $q_0(t)$, $t \in [t_0, t_*]$, осуществляется на основе этих новых данных.

3.2. Процедура фильтрации с использованием функции Хьюбера и тихоновского регуляризатора. Пусть задана функция $y(t)$, $t \in [t_0, t_*]$, о которой известно, что она представима в виде

$$y(t) = y^0(t) + v(t), \quad t \in [t_0, t_*], \qquad (18)$$

где $y^0(t)$, $t \in [t_0, t_*]$, – некоторая неизвестная гладкая функция, $v(t), t \in [t_0, t_*]$, – неизвестная функция возмущений. Требуется, используя заданную функцию (18), найти гладкую функцию $y^*(t)$, $t \in [t_0, t_*]$, которая аппроксимирует функцию $y^0(t)$, $t \in [t_0, t_*]$.

Пусть z^0, $u^0(t)$, $t \in [t_0, t_*]$, – решение задачи

$$\int_{t_0}^{t_*} f(x(t) - y(t))dt + R(u(\cdot)) \to \min_{z, u(\cdot)}, \quad \dot{x}(t) = u(t),\ x(0) = z.$$

Тогда функция $y^*(t) = z^0 + \int_{t_0}^{t} u^0(\tau)d\tau$, $t \in [t_0, t_*]$, принимается за очищенную от шума аппроксимацию неизвестной функции $y^0(t)$, $t \in [t_0, t_*]$.

Конкретный выбор функций $f(z)$ и $R(u(\cdot))$ зависит от априорной информации о восстанавливаемой функции $y^0(t), t \in [t_0, t_*]$, и от природы шума $v(t), t \in [t_0, t_*]$. Наиболее часто в качестве функции $f(z)$ используются l_1- и l_2-нормы, а в качестве $R(u(\cdot))$ используется регуляризатор тихоновского типа [1, 2]. В работах [39, 40] в качестве функции отклонения $f(z)$ предлагается использовать функцию Хьюбера [43]. Эта функция является комбинацией l_1- и l_2- норм и имеет вид $f_\gamma(z) = z^2/2$, если $|z| \le \gamma$, $\quad f_\gamma(z) = \gamma|z| - \gamma^2/2$, если $|z| > \gamma$.

Параметр настройки γ связан с весовым параметром ε из (17) неявным уравнением [43]

$$(1-\varepsilon)^{-1} = \gamma^{-1}\sqrt{2/\pi}\exp(-\gamma^2/2) + \mathrm{erf}(\gamma/\sqrt{2}).$$

Функция Хьюбера является более робастной, чем l_2-норма в том смысле, что она менее чувствительна к резким выбросам (спайк-шумам), присутствующим в заданных экспериментальных данных.

3. 3. Восстановление теплового потока методом ПСО. Задача восстановления теплового потока $q(x_0, t)$, $t \in [t_0, t_*]$, формулируется в виде задачи оптимального управления, в которой роль искомого управления играет восстанавливаемый тепловой поток и целью оптимизации является минимизация функционала от квадрата отклонения между вычисленными значениями $T(x_1^*, t_i)$ и очищенными данными измерений $y^*(t_i)$, $i = 1,...,M$. Задача оптимального управления решается методом ПСО.

Идея метода ПСО состоит в сведении задачи восстановления теплового потока $q(x_0, t)$ на всем отрезке времени $t \in [t_0, t_*]$ к последовательному решению p задач восстановления теплового потока на малых интервалах $t \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$, $j = 0,1,..., p-1$, где $\tau_j = t_0 + jL\Delta t$ – момент времени из множества $\{t_i, i = 0,1,...,M\} \subset [t_0, t_*]$, $L > 0$, $p > 0$ – целые числа. Здесь $L\Delta t$ – длина этапа, задаваемая параметром L и временным шагом $\Delta t > 0$, с которым осуществлялись неточные измерения (16).

Подробное описание и обоснование алгоритма, его численная реализация и примеры численного восстановления теплового потока приведены в работах [36–39].

Заключение. Некорректные ОЗ МФ непосредственно связаны с прикладными задачами диагностики и управления процессами переноса энергии и вещества. С другой стороны, теория некорректных задач развивается в пределах современной математики. В частности, понятие тихоновского регуляризатора некорректной задачи предполагает исследование фундаментальной проблемы аппроксимаций разрывных отображений топологических пространств непрерывными отображениями. Возможность такой аппроксимации с любой наперед заданной точностью означает регуляризуемость некорректной задачи. Решение ОЗ в этом случае следует выбирать из семейства аппроксимаций, сообразуясь с точностью исходных данных задачи. Проблему выбора подходящей аппроксимации можно рассматривать как задачу управления, что позволяет использовать методы теории оптимального управления для решения ОЗ МФ.

Важно отметить еще, что ОЗ МФ имеют естественное толкование в рамках теории открытых ДС (в другой терминологии, ДС вход–состояние–выход). В теории открытых ДС изучаются структурные свойства систем, инвариантные относительно действия тех или иных групп преобразований. Такие инвариантные свойства, как управляемость, наблюдаемость, обратимость и др. лежат в основе современных методов анализа, синтеза и оптимизацци систем управленния. Согласно [7] эти же свойства открытых ДС определяют и классифицируют ОЗ МФ. Например, классическую задачу восстановления потенциала (ОЗ Штурма–Лиувилля) можно интерпретировать как задачу реализации ДС вход–выход в пространстве состояний. При этом выясняется [7, 44], что применяемые в теории ОЗ Штурма–Лиувилля сплетающие операторы Дельсартра совпадают с операторами наблюдаемости и управляемости, а линейные уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко–Крейна, определяющие решение ОЗ, легко следуют из представления отображения вход–выход в форме Ганкеля.

Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси в рамках ГПНИ «Конвергенция–2025» (подпрограмма «Математические модели и методы»).

Литература

1. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

2. *Леонов А. С.* Решение некорректно поставленных обратных задач: Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. М.: Изд-во Либроком, 2016.

3. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Изд-во ЛКИ, 2009.

4. *Лисковец О. А.* Вариационные методы решения неустойчивых задач. Минск: Наука и техника, 1981.

5. *Калман Р. Е., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем / пер. с англ. М.: Едиториал УРСС, 2004.

6. *Бабичев А. В., Бутковский А. Г., Похьолайнен С.* К единой геометрической теории управления. М.: Наука, 2001.

7. *Борухов В. Т., Гайшун И. В., Тимошпольский В. И.* Структурные свойства динамических систем и обратные задачи математической физики. Минск: Бел. наука, 2009.

8. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.

9. *Ozisik M. N.,* Orlande *H. R. B.* Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications. Routledge, 2018.

10. *Мацевитый Ю. М., Бут Е. Н.* Сплайн-идентификация теплофизических процессов. Киев: Наукова думка, 2010.

11. *Борухов В. Т., Тимошпольский В. И.* Функциональная идентификация градиентными методами нелинейного коэффициента теплопроводности. I. Сопряженные операторы // ИФЖ. 2005. Т. 78, № 4. С. 68–74.

12. *Борухов В. Т., Тимошпольский В. И., Заяц Г. М., Цурко В. А.* Функциональная идентификация градиентными методами нелинейного коэффициента теплопроводности. II. Численное моделирование // ИФЖ. 2005. Т. 78, № 4. С. 75–81.

13. *Борухов В. Т., Тимошпольский В. И., Герман М. Л., Заяц Г. М., Цурко В. А.* Восстановление нелинейных коэффициентов теплопроводности методом функциональной идентификации // Тр. междунар. конф. «Проблемы управления и приложения (техника, производство, экономика)». Минск, 2005. Т. 1: Управление и оптимизация. С. 120–127.

14. *Борухов В. Т., Тимошпольский В. И., Заяц Г. М., Калиневич Е. В., Цурко В. А.* Определение нелинейного коэффициента теплопроводности для изделий трубчатой формы методом функциональной идентификации // ИФЖ. 2006. Т. 79, № 6. С. 23–30.

15. *Борухов В. Т., Заяц Г. М., Цурко В. А.* Применение метода функциональной идентификации для решения обратной задачи теплопроводности в условиях неединственности // Тр. 4-й междунар. конф. «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (AMADE-2006). Минск, 2006. Т. 2. С. 32–37.

16. *Борухов В. Т., Заяц Г. М., Цурко В. А.* Идентификация коэффициента теплопроводности в нелинейном параболическом уравнении с возмущенными входными данными // Информатика. 2008. № 4. С. 29–38.

17. *Borukhov V. T., Tsurko V. A., Zayats G. M.* The functional identification approach for numerical reconstruction of the temperature-dependent thermal-conductivity coefficient // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2009. Vol. 52. P. 232–238.

18. *Мацевитый Ю. М., Алехина С. В., Борухов В. Т., Заяц Г. М., Костиков А. О.* Идентификация коэффициента теплопроводности для квазистационарных уравнений теплопроводности // ИФЖ. 2017. Т. 90, № 6. С. 1364–1370.

19. *Borukhov V. T., Zayats G. M.* The inverse problem of heat conduction in the case of non-uniqueness: a functional identification approach. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=4060732 or http://dx. doi. org/10. 2139/ssrn. 4060732

20. *Evtushenko Yu. G., Zubov V. I.* Generalized fast automatic differentiation technique // J. Comput. Math. Math. Phys. 2016. Vol. 56 (11). P. 1819–1833.

21. *Zubov V. I.* Application of fast automatic differentiation for solving the inverse coefficient problem for the heat equation // J. Comput. Math. Math. Phys. 2016. Vol. 56 (10). P. 1743–1757.

22. *Albu A. F., Evtushenko Y. G., Zubov V. I.* Use of second-order optimization methods for solving the inverse coefficient problem in the three-dimensional formulation // Proc. of IMM Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. 2021. Vol. 27 (4). P. 19–34.

23. *Silverman L. M.* Inversion of multivariate linear systems // Automat. Control, IEEE Trans. 1969. Vol. 14. P. 270–276.

24. *Borukhov V. T.* Inversion of distributed linear time-invariant dynamical systems // Automation and Remote Control. 1982. Vol. 43. P. 593–599.

25. *Borukhov V. T., Zayats G. M.* Identification of a time-dependent source term in nonlinear hyperbolic or parabolic heat equation // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2015. Vol. 91. P. 1106–1113.

26. *Borukhov V. T., Vabishchevich P. N.* Numerical solution of the inverse problem of reconstructing a distributed right-hand side of a parabolic equation // Comput. Phys. Commun. 2000. Vol. 126 (1–2). P. 32–36.

27. *Боруховъ В. Т., Корзюк В. И.* Применение неклассических краевых задач для восстановления граничных режимов процессов переноса // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3. С. 54–57.

28. *Борухов В. Т., Вабищевич П. Н., Корзюк В. И.* Сведение одного класса обратных задач теплопроводности к прямым начально-краевым задачам // ИФЖ. 2000. Т. 73, № 4. С. 744–747.

29. *Корзюк В. И., Борухов В. Т.* Смешанные задачи для уравнения теплопроводности с интегро-дифференциальными условиями на границе // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 1. С. 57–64.

30. *Борухов В. Т., Заяц Г. М.* Идентификация источников процессов переноса, описываемых уравнениями параболического типа // Тр. IX Междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления», SICPRO'12. Москва, 30 января – 2 февраля 2012 г.; Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН. С. 94–108.

31. *Борухов В. Т., Заяц Г. М.* Восстановление входных сигналов для одного класса квазилинейных систем гиперболического типа // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16–19 июня 2014 г.: труды. М.: ИПУ РАН, 2014. С. 2777–2786.

32. *Соболев С. Л.* Локально-неравновесные модели процессов переноса // Успехи физ. наук. 1997. Т. 167, № 10. С. 1095–1106.

33. *Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon J.* Extended Irreversible Thermodynamics. Berlin: Springer, 2010.

34. *Борухов В. Т., Заяц Г. М., Стеценко Ю. В., Коновалов Р. В.* Определение коэффициентов теплоотдачи в процессе затвердевания отливки в струйном кристаллизаторе // ИФЖ. 2012. Т. 85, № 1. С. 181–187.

35. *Beck J. V., Blackwell B., Clair C. R. St.* Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems. New York: Wiley, 1985.

36. *Borukhov V. T., Kostyukova O. I., Kurdina M. A.* Tracking of the preset program of weighted temperatures and reconstruction of heat transfer coefficients // J. Eng. Phys. Thermophys. 2010. Vol. 83, N 3. P. 622–631.

37. *Borukhov V. T., Kostyukova O. I.* Identification of time-dependent coefficients of heat transfer by the method of suboptimal stage-by-stage optimization // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2013. Vol. 59. P. 286–294.

38. *Borukhov V. T., Kostyukova O. I.* Reconstruction of the Surface Heat Flux for a Quasilinear System of the Hyperbolic Type Heat-Conduction Equations // Communications in Computer and Information Science. 2015. Vol. 499. P. 49–67.

39. *Borukhov V. T., Kostyukova O. I.* Reconstruction of heat transfer coefficients using the approach of stage-by-stage suboptimal optimization and Huber–Tikhonov filtering of input data // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. Vol. 47, N 6. P. 289–299.

40. *Kostyukova O. I., Kostina E. A., Fedortsova N. M.* Parametric optimal control problems with weighted L_1-norm in the cost function // Automatic Control and Computer Sciences. 2010. Vol. 44, iss. 4. P. 179–190.

41. *Костюкова О. И., Костина Е. А., Федорцова Н. М.* Параметрические задачи оптимального управления со взвешенными L_1- и L_2-нормами в критерии качества // Тр. Ин-та математики. 2011. Т. 19, № 2. С. 47–59.

42. *Алифанов О. М.* Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов (введение в теорию обратных задач теплообмена). М.: Машиностроение, 1979.

43. *Huber P. J.* Robust estimation of a location parameter // Annals Math. Stat. 1964. Vol. 35, N 1. P. 73–101.

44. *Борухов В. Т.* Обратная задача Штурма–Лиувилля в теории реализации линейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1994. № 4. С. 13–21.

V. T. Borukhov, G. M. Zayats, O. I. Kostyukova

Inverse problems of reconstruction of coefficients and transport sources in nonlinear heat conduction equations

Summary

We discuss methods of functional identification, inverse dynamical systems and stepwise suboptimal optimization for solving inverse problems of reconstruction of coefficients, boundary conditions and transport sources in the nonlinear heat conduction equation.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 1. С. 44–49

УДК 517.925:517.977

Управление асинхронным спектром линейных периодических систем с вырожденным левым верхним диагональным блоком усреднения матрицы коэффициентов

А. К. Деменчук

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: demenchuk@im.bas-net.by
Поступила 10.04.2023

Рассматривается линейная периодическая система управления с постоянной матрицей при управлении. Программное управление является периодическим, причем множество его частот содержится в модуле частот матрицы коэффициентов. Предполагается, что у матрицы при управлении есть нулевые строки, усреднение матрицы коэффициентов имеет вырожденный левый верхний диагональный блок, а остальные ее блоки – нулевые. Для рассматриваемого класса систем исследуется вопрос разрешимости задачи управления асинхронным спектром.

Введение и постановка задачи. Рассмотрим линейную систему управления
$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \tag{1}$$
в которой $A(t)$ – непрерывная ω-периодическая $n \times n$-матрица, B – постоянная $n \times r$-матрица $r \leq n$, u – управление. Вопросы управляемости линейных систем изучались во многих работах [1, 2] и др., при этом в периодическом случае множества частот решения и самой системы совпадали.

Вместе с тем, как показали Х. Массера [3], Я. Курцвейль и О. Вейвода [4] и др., система обыкновенных дифференциальных периодических (почти периодических) уравнений может допускать решения, пересечение частотного модуля которых с модулем частот системы тривиально. Позднее такого рода решения были названы сильно нерегулярными, их частотный спектр – асинхронным, а описываемые ими колебания – асинхронными. Отметим, что случае периодических систем нерегулярность означает несоизмеримость периодов решения и системы.

Задача синтеза периодических дифференциальных систем, обладающих сильно нерегулярными решениями, была сформулирована в работе [5] как задача управления асинхронным спектром. В монографии [6, гл. III] исследована разрешимость такой задачи для некоторых классов линейных периодических систем с линейной по фазовым переменным периодической обратной связью.

В данной работе в качестве управляющего воздействия $u(\cdot)$ в системе (1) будем использовать непрерывные на вещественной оси периодические r-вектор-функции, множество показателей Фурье которых $\mathrm{Exp}(u)$ содержится в модуле частот $\mathrm{Mod}(A)$ матрицы коэффициентов $A(\cdot)$. Тогда применительно к системе (1) задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L состоит в следующем: выбрать такое программное управление
$$u = U(t) \tag{2}$$
из указанного допустимого множества, чтобы система
$$\dot{x} = A(t)x + Bu(t) \tag{3}$$
имела сильно нерегулярное периодическое решение с заданным спектром частот L (целевым множеством).

Вопросы разрешимости сформулированной задачи для системы (1) с программным управлением и нулевым средним значением матрицы коэффициентов исследованы в работе [7], а с невырожденным средним – в [8]. Случай максимального ранга матрицы при управлении, который равен числу ее столбцов, изучен в работе [9]. В [10] рассмотрена система (1) с нулевыми строками матрицы при управлении, при этом среднее значение матрицы коэффициентов имеет невырожденный левый верхний диагональный блок и остальные ее блоки – нулевые. В настоящей статье приведем решение задачи управления асинхронным спектром в случае, когда указанный диагональный блок является вырожденным.

Детализируем постановку задачи. Для этого используем принятые в [10] обозначения. Пусть $P=(p_{ij})$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, – некоторая матрица и $1\le k_1<\ldots<k_s\le n$, $1\le l_1<\ldots<l_q\le m$ – две упорядоченные последовательности натуральных чисел. Через $P^{l_1\ldots l_q}_{k_1\ldots k_s}$ обозначим $s\times q$-матрицу, образованную из элементов матрицы P, стоящих на пересечении строк с номерами $k_1,\ldots,k_s$ и столбцов с номерами $l_1,\ldots,l_q$

$$P^{l_1\ldots l_q}_{k_1\ldots k_s}=\begin{pmatrix} p_{k_1l_1} & \cdots & p_{k_1l_q} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k_sl_1} & \cdots & p_{k_sl_q}\end{pmatrix}.$$

Для непрерывной на всей числовой оси ω-периодической вещественнозначной матрицы (вектора) $F(t)$ определим ее среднее значение

$$\hat{F}=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}F(t)dt$$

и осциллирующую часть $\tilde{F}(t)=F(t)-\hat{F}.$ Пусть $\operatorname{Mod}(F)$ – модуль частот матрицы $F(t),$ т. е. множество всевозможных линейных комбинаций с целыми коэффициентами показателей Фурье этой матрицы. Через $\operatorname{rank}_{\mathrm{col}}F$ обозначим столбцовый ранг матрицы $F(t)$ – наибольшее число ее линейно независимых столбцов. Подобным образом можно определить и строчный ранг матрицы. Очевидно, что в общем случае строчный и столбцовый ранги матрицы $F(t)$ не обязаны совпадать. Будем говорить, что $F(t)$ – матрица *неполного столбцового ранга*, если ее столбцовый ранг меньше числа столбцов.

Принимая во внимание [9] далее считаем, что ранг матрицы B не является максимальным и строки с номерами $k_1,\ldots,k_d$, $1\le k_1<\ldots<k_d\le n$ нулевые, т. е.

$$\operatorname{rank}B=r_1<r,\quad B^{1\ldots r}_{k_1\ldots k_d}=0\quad (d=n-r_1). \tag{4}$$

Последнее ограничение не является потерей общности рассуждений, так как этого можно добиться с помощью линейного неособенного преобразования системы (1), используя алгоритмы элементарных преобразований строк матрицы [11, с. 20].

Будем также предполагать, что среднее значение матрицы коэффициентов представимо в виде

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}\hat{A}^{k_1\ldots k_d}_{k_1\ldots k_d} & \hat{A}^{k_{d+1}\ldots k_n}_{k_1\ldots k_d} \\ \hat{A}^{k_1\ldots k_d}_{k_{d+1}\ldots k_n} & \hat{A}^{k_{d+1}\ldots k_n}_{k_{d+1}\ldots k_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{A}^{k_1\ldots k_d}_{k_1\ldots k_d} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \hat{A}^{k_1\ldots k_d}_{k_1\ldots k_d}=\operatorname{diag}\left(\hat{a}_{k_1k_1},\ldots,\hat{a}_{k_dk_d}\right), \tag{5}$$

причем, в отличие от [10], $\hat{a}_{k_1k_1}\cdots\hat{a}_{k_dk_d}=0.$ Последнее условие означает, что среди диагональных элементов блока $\hat{A}^{k_1\ldots k_d}_{k_1\ldots k_d}$ имеются нулевые. Без ограничения общности можно считать, что эти элементы стоят в начале диагонали

$$\hat{a}_{k_{1+i-1}k_1+i-1}=0,\quad i=\overline{1,m},\quad 1\le m<d, \tag{6}$$

а остальные элементы ненулевые. В противном случае этого можно добиться с помощью линейного невырожденного преобразования системы (1), равносильного перестановке первых d ее уравнений в требуемом порядке.

В настоящей статье для описанного класса систем (1) исследуем вопрос о разрешимости задачи управления асинхронным спектром.

Основной результат. Пусть $k_{d+1},\ldots,k_n,\ \ 1\le k_{d+1}<\ldots<k_n\le n$ – номера ненулевых строк матрицы B. С учетом нумерации нулевых и ненулевых строк этой матрицы для упрощения записи примем следующие обозначения:

$$A_{11}(t)=A^{k_1\ldots k_d}_{k_1\ldots k_d}(t),\quad A_{12}(t)=A^{k_{d+1}\ldots k_n}_{k_1\ldots k_d}(t),\quad A_{21}(t)=A^{k_1\ldots k_d}_{k_{d+1}\ldots k_n}(t),\quad A_{22}(t)=A^{k_{d+1}\ldots k_n}_{k_{d+1}\ldots k_n}(t),$$

$$x'=\operatorname{col}\left(x_{k_1},\ldots,x_{k_d}\right),\quad x''=\operatorname{col}\left(x_{k_{d+1}},\ldots,x_{k_n}\right).$$

Если у некоторой матрицы (вектора) $(\cdot)$ произвольным образом поменять местами ее строки, то через $\operatorname{ord}_{\mathrm{row}}(\cdot)$ обозначим обратную процедуру упорядочивания строк по возрастанию их номеров. Тогда, в частности, будем иметь $\operatorname{ord}_{\mathrm{row}}(\operatorname{col}(x',x''))=x$.

Применительно к матрице при управлении B для краткости положим

$$B_{11}=B^{1\ldots r}_{k_1\ldots k_d},\quad B_{21}=B^{1\ldots r}_{k_{d+1}\ldots k_n}.$$

Из условия (4) вытекает, что $d\times r$-матрица B_{11} нулевая, а $r_1\times r$-матрица B_{21}, составленная из ненулевых строк матрицы B с номерами $1\le k_{d+1}<\ldots<k_n\le r$ имеет максимальный ранг, равный числу ее строк

$$\operatorname{rank}B_{21}=r_1.$$

Через $\tilde A^{(1)}_{11}(t)$ обозначим $d\times m$-матрицу, составленную из первых m столбцов $d\times d$-блока $\tilde A_{11}(t)$. Построим $d\times(m+r_1)$-матрицу

$$\tilde A_*(t)=[\tilde A^{(1)}_{11}(t)\ \ A_{12}(t)].\tag{7}$$

Справедлива

Теорема. *Для линейных систем* (1), (4)–(6), *задача управления асинхронным спектром с целевым множеством* L *разрешима тогда и только тогда, когда* $L=\{0\}$ *и выполняется неравенство*

$$\operatorname{rank}_{\mathrm{col}}\tilde A_*(t)=r_2<r_1+m.\tag{8}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть для указанного класса линейных систем выполнены условия теоремы. Программное управление, решающее задачу, будем искать в так называемом каноническом виде [7]

$$u=U(t)=\hat U+\tilde U(t),$$

где $\tilde U(t)$ – осциллирующая составляющая, т. е. периодический вектор с нулевым средним значением, множество частот которого содержится в Mod(A), а $\hat U$ – стационарная составляющая программного управления $U(t)$. Из [12] следует, что в смысле существования сильно нерегулярных периодических решений система (3) эквивалентна следующей системе, состоящей из двух подсистем:

$$\dot x=\hat Ax+B\hat U,\quad \tilde A(t)x+B\tilde U(t)=0.\tag{9}$$

Поэтому поставленная задача сводится к построению такой вектор-функции $U(t)$ из допустимого множества, чтобы система (9) имела сильно нерегулярное периодическое решение.

В принятых ранее обозначениях система (9) запишется в виде

$$\begin{pmatrix}\dot x'\\ \dot x''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat A_{11} & \hat A_{12}\\ \hat A_{21} & \hat A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ x''\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_{11}\\ B_{21}\end{pmatrix}\hat U,$$

$$\begin{pmatrix}\tilde A_{11}(t) & A_{12}(t)\\ A_{21}(t) & A_{22}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ x''\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_{11}\\ B_{21}\end{pmatrix}\tilde U(t)=0,$$

откуда в силу условия (4) получаем состоящую из четырех подсистем систему

$$\dot x'=\hat A_{11}x'+\hat A_{12}x'',\quad \dot x''=\hat A_{21}x'+\hat A_{22}x''+B_{21}\hat U,$$

$$\tilde{A}_{11}(t)x' + A_{12}(t)x'' = 0, \quad A_{21}(t)x' + A_{22}(t)x'' + B_{21}\tilde{U}(t) = 0.$$

С учетом предположений (5), (6) о структуре усреднения $\hat{A}$ матрицы коэффициентов, последняя система примет вид

$$\dot{x}' = \mathrm{diag}(0,\ldots,0,\hat{a}_{k_{m+1}k_{m+1}},\ldots,\hat{a}_{k_d k_d})x', \quad \dot{x}'' = B_{21}\hat{U},$$

$$\tilde{A}_{11}(t)x' + A_{12}x'' = 0, \quad A_{21}(t)x' + A_{22}(t)x'' + B_{21}\tilde{U}(t) = 0. \qquad (10)$$

Так как числа $\hat{a}_{k_{m+1}k_{m+1}},\ldots,\hat{a}_{k_d k_d}$ отличны от нуля и первая подсистема системы (10) диагональная, то ее периодическое решение $x'(t)$ может быть только стационарным, при этом его структура следующая:

$$x'(t) = \mathrm{col}(x'_*(t),0,\ldots,0), \quad x'_*(t) = \mathrm{col}(x_{k_1},\ldots,x_{k_m}) \equiv \mathrm{const}.$$

Вторая подсистема системы (10) имеет периодическое решение $x''(t)$ лишь в том случае, когда выполняется равенство

$$B_{21}\hat{U} = 0.$$

В таком случае

$$x''(t) = \mathrm{col}(x_{k_{d+1}},\ldots,x_{k_n}) \equiv \mathrm{const}.$$

Рассмотрим последнюю систему как линейную однородную систему относительно неизвестного постоянного вектора $\hat{U}$. Так как ранг $r_1 \times r$-матрицы B_{21} равен числу r_1 ее строк, которое меньше числа столбцов, то эта система имеет $r - r_1$-параметрическое семейство стационарных решений $\hat{U}_*(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-r_1})$, компоненты которого являются линейными формами произвольных вещественных постоянных $\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-r_1}$. Поэтому для разрешимости второй подсистемы системы (10) необходимо выбрать стационарную составляющую $\hat{U}$ следующим образом:

$$\hat{U} = \hat{U}_*(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-r_1}). \qquad (11)$$

Далее возьмем третью подсистему из (10) и запишем ее в виде

$$[\tilde{A}_{11}(t) \;\; A_{12}(t)]\,\mathrm{col}(x', x'') = 0. \qquad (12)$$

Найденные выше постоянные векторы $x'(t)$ и $x''(t)$ должны удовлетворять и системе (12). С учетом того, что $x'(t) = \mathrm{col}(x'_*(t),0,\ldots,0)$, система (12) примет вид

$$[\tilde{A}_{11}^{(1)}(t) \;\; A_{12}(t)]\mathrm{col}(x'_*, x'') = \tilde{A}_*(t)\mathrm{col}(x'_*, x'') = 0. \qquad (13)$$

В силу оценки (8) столбцовый ранг матрицы $A_{12}(t)$ является неполным. Тогда найдется постоянная неособенная $(m+r_1)\times(m+r_1)$-матрица Q такая, что у матрицы $\tilde{A}_*(t)Q$ первые $d_2 = r - m - r_1$ столбцов будут нулевыми, а остальные r_2 столбцов будут линейно независимыми (один из алгоритмов построения такой матрицы Q приведен в [6, с. 43]). Обозначим матрицу, составленную из первых $m + r_1 - r_2 = d_2$ строк матрицы Q через $Q_{m+r_1-r_2\, m+r_1}$, а через $Q_{r_2\, m+r_1}$ – матрицу составленную из оставшихся r_2 строк. В силу неособенности матрицы Q ранги этих матриц равны числу их строк

$$\mathrm{rank}Q_{m+r_1-r_2\, m+r_1} = d_2, \quad \mathrm{rank}Q_{r_2\, m+r_1} = r_2. \qquad (14)$$

Систему (13) при помощи замены переменных

$$\mathrm{col}(x'_*, x'') = Qz \qquad (15)$$

приведем к системе

$$\tilde{A}_*(t)Qz = 0. \qquad (16)$$

Исследуем систему (16) на предмет наличия стационарных решений

$$z(t) = \mathrm{const},$$

которые в силу неособенности преобразования (15), порождают стационарные решения x'_*, x'' системы (13). Поскольку последние r_2 столбцов матрицы $\tilde{A}_*(t)Q$ линейно независимы, то соответствующие компоненты постоянного вектора $z(t)$ должны быть нулевыми

$$z(t) = \mathrm{col}(C_1, \ldots, C_{d_2}, 0, \ldots, 0), \tag{17}$$

где $C_1, \ldots, C_{d_2}$ – произвольные вещественные постоянные.

Тогда, принимая во внимание (14), (15), (17), находим d_2-параметрическое семейство решений системы (13)

$$x'_*(t) = Q_{m+r_1-r_2\ m+r_1} \mathrm{col}(C_1, \ldots, C_{d_2}, 0, \ldots, 0),$$
$$x''(t) = Q_{r_2\ m+r_1} \mathrm{col}(C_1, \ldots, C_{d_2}, 0, \ldots, 0), \tag{18}$$

а вместе с ним и решение первых трех подсистем системы (10)

$$x'(t) = \mathrm{col}(Q_{m+r_1-r_2\ m+r_1} \mathrm{col}(C_1, \ldots, C_{d_2}, 0, \ldots, 0), 0, \ldots, 0),$$
$$x''(t) = Q_{r_2\ m+r_1} \mathrm{col}(C_1, \ldots, C_{d_2}, 0, \ldots, 0). \tag{19}$$

Выберем далее осциллирующую составляющую управления $\tilde{U}(t)$ так, чтобы векторы (19) удовлетворяли и четвертой подсистеме системы (10), т. е. чтобы выполнялось тождество

$$A_{21}(t)\mathrm{col}(Q_{m+r_1-r_2\, m+r_1} \mathrm{col}(C_1, \ldots, C_{d_2}, 0, \ldots, 0), 0, \ldots, 0) +$$
$$A_{22}(t) Q_{r_2\, m+r_1} \mathrm{col}(C_1, \ldots, C_{d_2}, 0, \ldots, 0) + B_{21}\tilde{U}(t) \equiv 0. \tag{20}$$

Пусть $E_{r_1 r_1}$ – единичная $r_1 \times r_1$-матрица. Так как ранг матрицы B_{21} равен числу ее строк, то матричное уравнение

$$B_{21} V + E_{r_1 r_1} = 0$$

разрешимо относительно постоянной $r \times r_1$-матрицы V. Возьмем какое-либо его решение $V = V_E$. Несложно проверить, что при подстановке вектора

$$\tilde{V}(t) = -V_E A_{22}(t) Q_{11} \mathrm{col}(C_1, \ldots, C_{r_1 - r_2}) \tag{21}$$

в (20) получим верное тождество, при этом выполняется включение

$$\mathrm{Exp}(\tilde{U}) \subseteq \mathrm{Mod}(A).$$

В итоге, построено управление (11), (21) такое, что система (10) будет иметь решение (19), записав которое в виде

$$x(t) = \mathrm{ord}_{\mathrm{row}}(\ \mathrm{col}(x'(t), x''(t))), \tag{22}$$

получим искомое решение системы (9). Как отмечено выше, вектор, определяемый равенством (22), будет удовлетворять также и системе (3).

Необходимость. Предположим, что построено управление $U(t)$ из допустимого множества такое, что система (3) имеет нетривиальное периодическое решение $x = x(t)$ с частотным спектром L. Из [12] следует, что вектор $x(t)$ удовлетворяет тождеству

$$\dot{x}(t) \equiv \hat{A}x(t) + B\hat{U},$$

т. е. является решением линейной дифференциальной системы с постоянными матрицей коэффициентов $\hat{A}$ и неоднородной частью $B\hat{U}$. Отсюда, в силу условия (5) на матрицу $\hat{A}$ вытекает, что $x(t) \equiv \mathrm{const}$. Следовательно, $L = \{0\}$.

Кроме этого также должно выполняться тождество

$$\tilde{A}(t)x(t) - \hat{A}x - B\tilde{U}(t) \equiv 0,$$

из которого для компонет $x'_*(t)$ и $x''(t)$ вектора $x(t)$ в силу предположений (4), (5) получаем, в частности, тождество

$$\tilde{A}_*(t)\mathrm{col}(x'_*(t), x''(t)) \equiv 0.$$

Так как $\operatorname{Mod}(x) \cap \operatorname{Mod}(\tilde{A}_*) = 0,$ то в случае полного столбцового ранга матрицы $\tilde{A}_*(t)$ из последнего тождества согласно [6, с. 41] следует $\operatorname{col}(x'_*(t), x''(t)) \equiv 0,$ что противоречит исходному допущению о нетривиальности решения $x(t).$ Поэтому для столбцового ранга матрицы $\tilde{A}_*(t)$ выполняется оценка (8).

Необходимость, а вместе с ней и теорема доказаны.

Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси в рамках ГПНИ «Конвергенция–2025» (подпрограмма «Математические модели и методы»).

Литература

1. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.

2. *Макаров Е. К., Попова С. Н.* Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларус. навука, 2012.

3. *Massera J. L.* Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales // Bol. de la Facultad de Ingenieria. 1950. Vol. 4, № 1. P. 37–45.

4. *Курцвейль Я., Вейвода О.* О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Чехосл. матем. журнал. 1955. Т. 5, № 3. С. 362–370.

5. *Деменчук А. К.* Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний // Доклады НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 4. С. 37–42.

6. *Деменчук А. К.* Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления. Saarbrucken: Lambert Academic Publishing, 2012.

7. *Деменчук А. К.* Управление асинхронным спектром линейных систем с нулевым средним значением матрицы коэффициентов // Тр. Ин-та математики. 2018. Т. 26, № 1. С. 31–34.

8. *Деменчук А. К.* Управление асинхронным спектром линейных систем с невырожденным средним значением матрицы коэффициентов // Тр. Ин-та математики. 2020. Т. 28, № 1–2. С. 11–16.

9. *Деменчук А. К.* Управление асинхронным спектром линейных систем с матрицей при управлении максимального ранга // Тр. Ин-та математики. 2019. Т. 27, № 1–2. С. 23–28.

10. *Деменчук А. К.* Управление асинхронным спектром линейных систем с невырожденным диагональным блоком усреднения матрицы коэффициентов // Тр. Ин-та математики. 2022. Т. 30, № 1–2. С. 22 –29.

11. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Наука, 1989.

12. *Грудо Э. И., Деменчук А. К.* О периодических решениях с несоизмеримыми периодами линейных неоднородных периодических дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 3. С. 409–416.

A. K. Demenchuk

On control problem of asynchronous spectrum of linear system with singular upper left diagonal block of coefficient matrix

Summary

We consider the linear control periodic system with constant matrix under control. It is supposed that the average matrix coefficient has singular upper left diagonal block. The control problem of asynchronous spectrum is solved.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 1. С. 50–57

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ СО СЛАБО СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА

В. Н. Княгина, В. С. Монахов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: victor.monakhov@gmail.com, knyagina@inbox.ru
Поступила 05.04.2023

Конечная ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта. Подгруппа H группы G называется *слабо субнормальной* в G, если H порождается двумя подгруппами, одна из которых субнормальна в G, а другая полунормальна в G. Устанавливается 3-разрешимость конечной группы со слабо субнормальными $\{2, 3\}$-подгруппами Шмидта. Отсюда выводится разрешимость конечной группы со слабо субнормальными $\{2,3\}$-подгруппами Шмидта и 5-замкнутыми $\{2,5\}$-подгруппами Шмидта. Доказывается нильпотентность коммутанта конечной группы, в которой все подгруппы Шмидта слабо субнормальны.

Введение. Рассматриваются только конечные группы. Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Группам Шмидта посвящены отдельные параграфы монографий Хупперта [1] и Л. А. Шеметкова [2]. Подробный обзор результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта в конечных группах и их приложениях в теории классов конечных групп содержится в [3].

Группы с субнормальными $\{p,q\}$-подгруппами Шмидта, p и q – различные фиксированные простые числа, исследовались в [4]. В частности, для группы G, в которой субнормальны все pd-подгруппы Шмидта, установлена p-разложимость фактор-группы $G/F(G)$, а в случае, когда субнормальны все подгруппы Шмидта – $G/F(G)$ абелева [4]. В. А. Ведерников [5] для группы G, в которой все подгруппы Шмидта субнормальны, доказал, что $G/H(G)$ является прямым произведением групп Фробениуса конкретных типов, откуда вытекает цикличность $G/F(G)$. Здесь $F(G)$ и $H(G)$ – подгруппа Фиттинга и гиперцентр группы G соответственно. Эти результаты для σ-субнормальных и $\mathrm{K}\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп Шмидта развивались в работах [6–9].

Подгруппа A называется *полунормальной* в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AX – подгруппа для каждой подгруппы X из B. Это понятие впервые введено в [10]. Группы с некоторыми (силовскими, холловыми, подгруппами простых порядков и др.) полунормальными подгруппами исследовались в работах [11–15].

Группы с полунормальными подгруппами Шмидта изучены в [16]. Группы, в которых каждая подгруппа Шмидта полунормальна или субнормальна, исследовались в [17, 18]. В частности, в [18] установлено, что такая группа имеет нильпотентный коммутант.

А. Н. Скиба [19] предложил понятие слабо субнормальной подгруппы: подгруппа H называется *слабо субнормальной* в группе G, если $H = \langle A, B\rangle$ для некоторой субнормальной подгруппы A и полунормальной подгруппы B из G. Ясно, что все субнормальные и все полунормальные подгруппы слабо субнормальны. Обратное не всегда выполняется. Кроме того, каждая слабо субнормальная подгруппа в простой группе полунормальна, а в нильпотентной группе – субнормальна.

Пример 1. В группе $G = A_4 \times D_{10}$, $A_4 = \langle a,b,c\rangle$, $|a| = 2$, $D_{10} = \langle k,h\rangle$, $|k| = 2$, подгруппа $H = \langle a\rangle \times \langle k\rangle$ является слабо субнормальной в G, но H не полунормальна и не субнормальна. Здесь A_4 – знакопеременная группа степени 4, а D_{10} – группа диэдра порядка 10.

Признаки разрешимости и сверхразрешимости факторизуемой группы со слабо субнормальными сомножителями получены в работах [19, 20].

Согласно [19] подгруппа H *частично субнормальна* в группе G, если $H = \langle A,B\rangle$ для некоторой субнормальной в G подгруппы A и $\mathfrak{U}$-нормальной в G подгруппы B. Напомним, что $\mathfrak{U}$*-нормальная подгруппа* – это подгруппа B из группы G такая, что каждый G-главный фактор между B_G и B^G циклический. В частности, модулярная подгруппа $\mathfrak{U}$-нормальна. В [19] приведены примеры групп, в которых некоторая частично субнормальная подгруппа не является слабо субнормальной подгруппой, а также примеры групп, в которых некоторая слабо субнормальная подгруппа не является частично субнормальной подгруппой.

Кроме факторизационных результатов в работе [19, теорема 1.9] доказывается нильпотентность коммутанта группы, в которой каждая подгруппа Шмидта частично субнормальна.

В настоящей статье исследуется строение группы G со слабо субнормальной подгруппой Шмидта H. Для случая, когда H^G простая, доказывается, что $H \cong A_4$ и $H^G \cong SL(2,4)$, теорема 1. Устанавливается 3-разрешимость группы со слабо субнормальными $\{2, 3\}$-подгруппами Шмидта, теорема 2. Доказывается нильпотентность коммутанта группы G, в которой все подгруппы Шмидта слабо субнормальны, теорема 3, и приведен пример, показывающий, что фактор-группа $G/F(G)$ может быть нециклической.

1. Вспомогательные утверждения. Запись $H \le G$ ($H < G$, $H \lhd G$, $H \lessdot G$) означает, что H – подгруппа группы G (соответственно, H – собственная подгруппа группы G, H – нормальная подгруппа в группе G, H – максимальная подгруппа в группе G). Запись $H = \langle A,B\rangle$ означает, что подгруппа H порождается подгруппами A и B, а $A \rtimes B$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B. Если $H \le G$ и $X \subseteq G$, то $H^X = \langle H^x \mid x \in X\rangle$, в частности, $H^G = \langle H^g \mid g \in G\rangle$ – подгруппа, порожденная всеми сопряженными с H подгруппами из G, а $H_G = \cap_{g\in G} H^g$ – ядро подгруппы H в группе G.

Группу с нормальной силовской p-подгруппой называют p-замкнутой, а p-нильпотентной – группу порядка $p^a m$, p не делит m, с нормальной подгруппой порядка m. Если p и q – простые числа, то группа порядка $p^a q^b$, где a и b – неотрицательные целые числа, называется $\{p,q\}$-группой. Группа, порядок которой делится на простое число p называется pd-группой.

Через G', $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются коммутант, центр, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G соответственно; $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G. Если π – некоторое множество простых чисел, то $O_\pi(G)$ – наибольшая нормальная в G подгруппа, для которой $\pi(O_\pi(G)) \subseteq \pi$, а $O_{\pi'}(G)$ – наибольшая нормальная в G подгруппа, для которой $\pi(O_{\pi'}(G)) \cap \pi = \varnothing$.

Лемма 1. *Пусть H, K и N – подгруппы группы G, где H слабо субнормальна в G и N нормальна в G.*

(1) *HN/N слабо субнормальна в G/N.*

(2) *Если $H \le K$, то H слабо субнормальна в K.*

(3) *Если $N \le L \le G$ и L/N слабо субнормальна в G/N, то L слабо субнормальна в G.*

(4) *HN слабо субнормальна в G.*

(5) *Подгруппа $HO_{\pi(H)}(G)$ полунормальна в G.*

(6) *Если* X *– непустое подмножество в* G, *то* H^X *слабо субнормальна в* G.

Доказательство. Утверждения (1)–(3) доказаны в [19, лемма 2.1]. Утверждение (4) следует из (1) и (3).

(5) По определению слабо субнормальной подгруппы $H = \langle A, B\rangle$ для некоторой субнормальной в G подгруппы A и полунормальной подгруппы B из G. Так как $A \le O_{\pi(H)}(G)$, то $HO_{\pi(H)}(G) = \langle A, B\rangle O_{\pi(H)}(G) = BO_{\pi(H)}(G)$ полунормальна в G согласно [16, лемма 2 (2)].

(6) Подгруппа A^X субнормальна в G [20, 2.43], а подгруппа B^X полунормальна в G [16, лемма 5], поэтому $H^X = \langle A^X, B^X\rangle$ слабо субнормальна в G.

Лемма 2. *Пусть* H *– слабо субнормальная подгруппа группы* G.

(1) *Если* H 2*-нильпотентна, то* H^G *разрешима.*

(2) *Если* H *разрешима и* 3 *не делит порядок* H, *то* H^G *разрешима.*

(3) *Пусть* p *– наименьший простой делитель порядка группы* G. *Если* p *не делит порядок* H, *то* p *не делит порядок* H^G.

Доказательство. Утверждения (1) и (3) доказаны в [21, лемма 3.4 (1), (2)].

(2) Так как H слабо субнормальна в G, то по определению $H = \langle A, B\rangle$ для некоторой субнормальной в G подгруппы A и полунормальной подгруппы B из G. Поскольку

$$H = \langle A, B\rangle \le \langle A^G, B^G\rangle = A^G B^G \lhd G,$$

то $H^G \le A^G B^G$. Так как $A^G \le H^G$ и $B^G \le H^G$, то $H^G = A^G B^G$. По условию 3 не делит порядок A, A разрешима и субнормальна, поэтому 3 не делит порядок A^G и A^G разрешима [20, теорема 5.31]. Согласно [16, лемма 10 (2)] подгруппа B^G разрешима. Значит, $H^G = A^G B^G$ разрешима. Лемма доказана.

Замечание 1. Из лемм 1 и 2 следует, что некоторые результаты о группах с полунормальными подгруппами справедливы для группы со слабо субнормальными подгруппами. В частности, справедливы следующие утверждения, которые для полунормальных подгрупп получены в [14].

Предложение 1. *Пусть в группе* G *существует слабо субнормальная* π*-холлова подгруппа* H. *Тогда* G π*-разрешима в каждом из следующих случаев:*

(1) H *2-нильпотентна,*

(2) H *разрешима и* $3 \not\in \pi$.

Предложение 2. *Пусть* G *–* π*-разрешимая группа со слабо субнормальной* π*-холловой подгруппой* H. *Тогда:*

(1) $H' \le O_\pi(G)$,

(2) $l_\pi(G) \le 2$, $l_{\pi'}(G) \le 2$,

(3) $l_\pi^n(G) \le 1 + n(H)$, $l_\pi^a(G) \le 1 + d(H)$,

(4) *если* $G_{\pi'}$ q*-сверхразрешима для некоторого* $q \in \pi'$, *то группа* G q*-сверхразрешима.*

Предложение 3. (1) *Если в группе* G *каждая силовская подгруппа слабо субнормальна, то* G *сверхразрешима.*

(2) *Если в группе* G *каждая нециклическая силовская подгруппа слабо субнормальна, то третий коммутант группы* G *нильпотентен.*

Доказательство. Из леммы 1 (5) следует, что слабо субнормальная холлова подгруппа является полунормальной подгруппой. Поэтому применимы результаты работы [14], из которой получаем все три предложения.

Пример 2. В группе $G \cong GL_2(3)$ порядка 48 силовская 2-подгруппа полунормальна, а силовская 3-подгруппа имеет порядок 3. Поэтому эта группа удовлетворяет условию предложения 1. Так как

$$G' \cong SL_2(3),\ (G')' \cong A_4,\ ((G')')' \cong E_4,\ [22, \text{SmallGroup}(48, 29)],$$
то второй коммутант в предложении 3 (2) может быть ненильпотентным.

Лемма 3 ([1–3]). *Пусть S – группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $S = P \rtimes Q,$ *где P – нормальная силовская p-подгруппа, $Q = \langle y \rangle$ – циклическая ненормальная силовская q-подгруппа, $y^q \in Z(S),$ p и q – различные простые числа;*

(2) *если P абелева, то P – элементарная абелева порядка p^m, где m – показатель числа p по модулю q;*

(3) *если P неабелева, то $Z(P) = P' = \Phi(P)$ и $|P/Z(P)| = p^m$;*

(4) *S имеет точно два класса сопряженных максимальных подгрупп: $\{\Phi(P) \times \langle x^{-1}yx \rangle \mid x \in P \setminus \Phi(P)\}$ и $P \times \langle y^q \rangle \lhd G.$*

В дальнейшем $S_{<p,q>}$-группой будем называть группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной циклической силовской q-подгруппой. Для $S_{<p,q>}$-группы S будем использовать запись $S = P \rtimes Q,$ где P – нормальная силовская p-подгруппа, а Q – циклическая ненормальная силовская q-подгруппа.

Лемма 4. *Пусть в группе G все $S_{<p,q>}$-подгруппы слабо субнормальны.*

(1) *Если $H \le G,$ то в H все $S_{<p,q>}$-подгруппы слабо субнормальны.*

(2) *Если $N \lhd G,$ то в G/N все $S_{<p,q>}$-подгруппы слабо субнормальны.*

Доказательство. Утверждение (1) следует из леммы 1 (2).

(2) Пусть S/N – $S_{<p,q>}$-подгруппа группы $G/N,$ а L – минимальная подгруппа из S такая, что $S = LN.$ Согласно [4, лемма 2 (3)] подгруппа L содержит $S_{<p,q>}$-подгруппу A такую, что $L = A^L.$ По условию подгруппа A слабо субнормальна в $G,$ а по лемме 1 (6) подгруппа L слабо субнормальна в $G.$ Теперь по лемме 1 (1) подгруппа $LN/N = S/N$ слабо субнормальна в $G/N.$

2. Группы со слабо субнормальной подгруппой Шмидта.

Теорема 1. *Пусть H – слабо субнормальная подгруппа Шмидта группы $G.$*

(1) *Если подгруппа H^G неразрешима, то $H/Z(H) \cong A_4.$*

(2) *Если подгруппа H^G простая, то $H \cong A_4$ и $H^G \cong SL(2,4).$*

Доказательство. (1) Если порядок H нечетен, то H^G имеет нечетный порядок по лемме 2 (3). По теореме Томпсона–Фейта H^G разрешима. Если H 2-нильпотентна, то H^G разрешима по лемме 2 (1). Если 3 не делит порядок $H,$ то H^G разрешима по лемме 2 (2). Итак, H^G может быть неразрешимой только в случае, когда H – 2-замкнутая $\{2, 3\}$-подгруппа. Из леммы 3 (2)–(3) получаем, что $H/Z(H) \cong A_4.$

(2) Пусть H^G – простая группа. По условию $H = \langle A, B \rangle$ для некоторой субнормальной в G подгруппы A и полунормальной в G подгруппы $B.$ По лемме 1 (2) подгруппа H слабо субнормальна в H^G, поэтому $A = 1$ и $H = B$ – полунормальная подгруппа в H^G. Значит, существует подгруппа $K \le H^G$ такая, что $H^G = HK$ и HX – собственная подгруппа в H^G для каждой собственной подгруппы X из $K.$ Пусть K_1 – максимальная подгруппа в $K.$ Предположим, что подгруппа $K_1 \ne 1.$ Тогда $1 \ne K_1^G = H^G$ и K_1^g не содержится в H для некоторого $g \in H^G$. Поэтому HK_1^g – собственная подгруппа группы H^G. Согласно [16, лемма 2 (3)] подгруппа H перестановочна с K_1^x для каждого $x \in H^G$ и $H^{(H^G)} \ne H^G$ по [1, VI.4.10].

Получили противоречие с простотой группы H^G. Значит $|H^G : H| = |K|$ – простое число. Теперь $Z(H)=1$ по [1, V.7.2] и $H \cong A_4$. Применяя [23, теорема 2], получаем, что $H^G \cong SL(2,4)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если в группе G все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта слабо субнормальны, то группа G 3-разрешима.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть N – нормальная подгруппа группы G. По лемме 4 в подгруппе N и в фактор-группе G/N все $\{2, 3\}$-подгруппы Шмидта слабо субнормальны. Если $G \neq N \neq 1$, то по индукции подгруппа N и фактор-группа G/N 3-разрешимы. Отсюда следует, что группа G 3-разрешима. Поэтому необходимо считать, что группа G простая.

Предположим, что в группе G имеется $\{2,3\}$-подгруппа Шмидта A. По теореме 1 (2) фактор-подгруппа $A/Z(A) \cong A_4$ и группа $G = A^G \cong SL(2,4)$. Но в $SL(2,4)$ имеется подгруппа Шмидта $B \cong S_3$, которая по условию слабо субнормальна в G. По теореме 1 (1) подгруппа B^G разрешима, противоречие.

Таким образом, в группе G нет $\{2,3\}$-подгрупп Шмидта. Проверим, что в этом случае группа G является S_4-свободной, где S_4 – симметрическая группа степени 4. Допустим противное, т. е. предположим, что существуют подгруппы H и K такие, что K нормальна в H и $H/K \cong S_4$. Так как S_4 содержит подгруппу S_3, которая является $S_{<3,2>}$-подгруппой, то в H существует подгруппа T такая, что $K \leq T$ и $T/K \cong S_3$. Согласно [4, лемма 2 (3)] в подгруппе T имеется $S_{<3,2>}$-подгруппа, противоречие.

Следовательно, G будет S_4-свободной. Согласно [24, 4.174] либо силовская 2-подгруппа в G абелева, либо $G \in \{Sz(2^n),\ U(3,2^n)\}$, n – нечетное. Простые группы с абелевыми силовскими подгруппами известны [24, 4.126], в каждой из этих групп имеется неабелева подгруппа порядка 6, которая будет $S_{<3,2>}$-подгруппой. В группе $U(3,2^n)$, n – нечетное, также содержится $S_{<3,2>}$-подгруппа. Поэтому эти группы исключаются. Группа Сузуки $Sz(2^n)$ имеет порядок, не делящийся на 3, следовательно, группа G 3-разрешима.

Следствие 2.1. *Если в группе G слабо субнормальны все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые $\{2,5\}$-подгруппы Шмидта, то группа G разрешима.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть N – нормальная подгруппа. По лемме 4 в подгруппе N и в фактор-группе G/N все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта и все $S_{<5,2>}$-подгруппы слабо субнормальны. Если $N \neq 1$, то N и G/N разрешимы по индукции, значит, разрешима и группа G. Поэтому следует считать, что G – простая группа. Но по теореме 2 группа G 3-разрешима, следовательно, число 3 не делит порядок группы G и $G \cong Sz(2^n)$, n – нечетное по теореме Томпсона. Согласно [25, XI.3.6, XI.3.10] в группе G имеется $S_{<5,2>}$-подгруппа A. По теореме 1 (1) подгруппа A^G разрешима, противоречие. Следствие доказано.

Пример 3. (1) В $PSL(2,3^3)$ нет $S_{<5,2>}$-подгрупп и $S_{<3,2>}$-подгрупп [26], поэтому условие слабой субнормальности $S_{<2,3>}$-подгрупп в следствии 2.1 не является лишним.

(2) В $SL(2,8)$ нет $S_{<5,2>}$-подгрупп и $S_{<2,3>}$-подгрупп [26], поэтому группы со слабо субнормальными $S_{<5,2>}$-подгруппами и $S_{<2,3>}$-подгруппами могут быть неразрешимыми, а условие слабой субнормальности $S_{<3,2>}$-подгрупп в следствии 2.1 не является лишним.

(3) В $Sz(8)$ нет $\{2,3\}$-подгрупп Шмидта, поэтому группы со слабыми субнормальными $\{2,3\}$-подгруппами Шмидта могут быть неразрешимыми и условие слабой субнормальности 5-замкнутых $S_{<5,2>}$-подгрупп в следствии 2.1 не является лишним.

Теорема 3. *Если в группе G каждая подгруппа Шмидта слабо субнормальна, то G' нильпотентна.*

Доказательство. Группа G разрешима по следствию 2.1. Нильпотентность коммутанта G' равносильна тому, что $G \in NA.$ Воспользуемся индукцией по порядку группы и докажем, что $G \in NA.$ Согласно лемме 4 (1) в каждой подгруппе группы G все подгруппы Шмидта слабо субнормальны. По индукции все собственные подгруппы группы G имеют нильпотентный коммутант. Поэтому G – разрешимая минимальная не NA-группа и фактор-группа $G/F(G)$ будет минимальной неабелевой группой [27, лемма 3].

По лемме 3 (2) в каждой фактор-группе группы G все подгруппы Шмидта слабо субнормальны. По индукции, $G/N \in NA$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G. Поскольку класс NA – насыщенная наследственная формация [2, с. 36], то группа G примитивна:

$$G = N \rtimes M,\ M \lessdot G,\ N = F(G) = O_p(G) = C_G(N),\ p \in \pi(G)$$

и $G/F(G) \cong M$ – неабелева группа, в которой все собственные подгруппы абелевы.

Если M – непримарная группа, то M является группой Шмидта, и по условию теоремы M слабо субнормальна в G. Так как $M_G = 1$ и каждая субнормальная в G подгруппа из M сдержится в M_G, то M полунормальна в G и $|G:M| = |N| = p$ – простое число по [10, лемма 7]. Теперь G сверхразрешима, а значит, $G \in NA.$

Пусть M – примарная q-группа. Тогда N – силовская p-подгруппа группы G и G – p-замкнутая $\{p,q\}$-группа. Поскольку M – неабелева q-группа, в которой все собственные подгруппы абелевы, то $|M'| = q$ [1, s. 286]. Ясно, что $NM' \le G'$ и $G/(NM')$ абелева, поэтому $N \rtimes M' = G'$. Если в группе G все подгруппы Шмидта субнормальны, то фактор-группа $G/F(G)$ абелева по [4, теорема (5)], а значит, $G \in NA,$ противоречие. Поэтому в G существует несубнормальная подгруппа Шмидта $S = P \rtimes Q,\ Q = \langle y \rangle$. Если $P = N$, то S субнормальна в G, противоречие. Значит, P – собственная подгруппа в N. Поскольку M неабелева, а Q циклическая, то можно считать, что $Q < M$. Кроме того, поскольку P абелева, то Q максимальна в S в силу леммы 3 (4).

Предположим, что S полунормальна в G. Тогда существует подгруппа T такая, что $G = ST$ и $ST_1 < G$ для каждой подгруппы $T_1 < T$. Теперь $M = QT_q$ для некоторой силовской q-подгруппы T_q из T [1, IV.4.6]. Из полунормальности подгруппы S следует, что $ST_q = T_qS$. Так как группа G p-замкнута, то P нормальна в ST_q. Поскольку N абелева и $P < N$, то P нормальна в N. Теперь P нормальна в G, противоречие с тем, что $1 \ne P \ne N$, и N – минимальная нормальная в G подгруппа.

Следовательно, предположение неверно и подгруппа S не полунормальна в G. Но по условию S слабо субнормальна в G. Поэтому существуют подгруппы A и B такие, что $S = \langle A, B \rangle$, подгруппа A субнормальна в G, подгруппа B полунормальна в G, причем $1 \ne A < S$ и $1 \ne B < S$, в частности, A и B нильпотентны. Так как $A \le F(G) = N$, то A – p-подгруппа и $A \le P.$ Если $|B|$ не делится на $|Q|$, то $B \le P \times \langle y^q \rangle$ по лемме 3 (4) и $S = \langle A, B \rangle \le P \times \langle y^q \rangle \ne S,$ противоречие. Поэтому $|Q|$ делит $|B|$. Так как Q максимальна в S, то без ущерба для доказательства можно считать, что $Q = B$. Поскольку Q полунормальна в S, то $|S:Q| = |P| = p$ и q делит $p-1$.

Так как $C_G(N) = N$, то $G' = N \rtimes M'$ ненильпотентна и существует в G' подгруппа Шмидта $S_1 = P_1 \rtimes Q_1,\ \ P_1 \le N,\ \ Q_1 = M'$. Поскольку q делит $p-1$, то $|P_1| = p$. По теореме Машке

$N = P_1 \times \ldots \times P_n$, $n \geq 2$, и $P_i \rtimes Q_1$ – подгруппы Шмидта для каждого i ввиду того, что $N_G(Q_1) = N_G(M') = M$. Если $P_i \rtimes Q_1$ субнормальна в G для некоторого i, то для любого $j \neq i$ имеем:

$$P_i \rtimes Q_1 \cap P_j \rtimes Q_1 = Q_1 \lhd P_j \rtimes Q_1, P_j \rtimes Q_1 = P_j \times Q_1,$$

противоречие. Предположим, что $P_i \rtimes Q_1$ полунормальна в G для некоторого i. Тогда существует подгруппа V такая, что $G = (P_i \rtimes Q_1)V$, $(P_i \rtimes Q_1)V_1 < G$ для всех $V_1 < V$. Согласно [1, IV.4.6] $M = Q_1 V_q$ для некоторой силовской q-подгруппы V_q из V. Так как $Q_1 \leq \Phi(M)$, то $M = V_q$ и $V = G$. Но теперь $P_i \rtimes Q_1$ перестановочна с $(P_i \rtimes Q_1)^g$ для любого $g \in G$, поэтому $P_i \rtimes Q_1$ субнормальна в G, противоречие.

Следовательно, подгруппа $P_1 \rtimes Q_1$ не субнормальна и не полунормальна в G. Но по условию $P_1 \rtimes Q_1$ слабо субнормальна в G. Поэтому существуют подгруппы A_1 и B_1 такие, что $P_1 \rtimes Q_1 = \langle A_1, B_1 \rangle$, подгруппа A_1 субнормальна в G, подгруппа B_1 полунормальна в G, причем $1 \neq A_1 < S_1$ и $1 \neq B_1 < S_1$. Но в этом случае, $A_1 = P_1$ и $B_1 = Q_1$. Теперь существует подгруппа W такая, что $G = Q_1 W$ и $Q_1 W_1 < G$ для любой подгруппы $W_1 < W$. Согласно [1, IV.4.6] $M = Q_1 W_q$ для некоторой силовской q-подгруппы W_q из W. Так как $Q_1 \leq \Phi(M)$, то $M = W_q$ и $W = G$. Но теперь Q_1 перестановочна с $(Q_1)^g$ для любого $g \in G$, поэтому Q_1 субнормальна в G, противоречие. Теорема доказана.

Пример 4. Пусть D_n – диэдральная группа порядка n и

$$G = D_6 \times D_{10} = ([\langle x \rangle]\langle a \rangle) \times ([\langle y \rangle]\langle b \rangle), \quad |x| = 3, \quad |y| = 5, \quad |a| = |b| = 2.$$

Ясно, что $F(G) = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$ и $G/F(G) \cong \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ – нециклическая группа. В G каждая подгруппа Шмидта изоморфна D_6 или D_{10}. Согласно [21, SmallGroup(60, 8)] в группе G каждая подгруппа Шмидта полунормальна, а значит и слабо субнормальна. Поэтому в теореме 3 фактор-группа $G/F(G)$ может быть нециклической.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция-2025», задание 1.1.02.

Литература

1. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

2. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. Москва: Наука, 1978.

3. *Монахов В. С.* Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Тр. Укр. матем. конгресса 2001. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Секция 1. С. 81–90.

4. *Княгина В. Н., Монахов В. С.* О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. матем. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1316–1322.

5. *Ведерников В. А.* Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 44, № 6. С. 669–687.

6. *Al-Sharo Kh. A., Skiba A. N.* On finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups // Comm. Algebra. 2017. Vol. 4 (10). P. 4158–4165.

7. *Yi X., Kamornikov S. F.* Finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups // J. Algebra. 2020. Vol. 560. P. 181–191.

8. *Guo W., Safonova I. N., Skiba A. N.* On σ-subnormal subgroups of finite groups // Southeast Asian Bull. Math. 2021. Vol. 45. P. 813–824.

9. *Hu B., Huang J., Song D., Safonova I. N.* Finite groups with K-$\mathfrak{F}$-subnormal Schmidt subgroups // Comm. Algebra. 2021. Vol. 49 (10). P. 4513–4518.

10. *Su Xiongying.* On semi-normal subgroups of finite group // J. Math. (Wuhan). 1988. Vol. 8 (1). P. 7–9.

11. *Wang P.* Some sufficient conditions of a nilpotent Group // J. Algebra. 1992. Vol. 148. P. 289–295.

12. *Carocca A., Matos H.* Some solvability criteria for finite groups // Hokkaido Math. J. 1997. Vol. 26. P. 157–161.

13. *Подгорная В. В.* Полунормальные подгруппы и сверхразрешимость конечных групп // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2000. № 4. С. 22–25.

14. *Монахов В. С.* Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой // Матем. заметки. 2006. Т. 80, № 4. С. 573–581.

15. *Guo Wen Bin.* Finite Groups with Seminormal Sylow Subgroups // Acta Math. Sinica. English Series. 2008. Vol. 24, N 10. P. 1751–1758.

16. *Княгина В. Н., Монахов В. С.* Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 4. С. 448–458.

17. *Knyagina V. N., Monakhov V. S.* Finite groups with semi-subnormal Schmidt subgroups // Algebra Discrete Math. 2020. Vol. 29, N 1. P. 66–73.

18. *Княгина В. Н.* Нильпотентность коммутанта конечной группы с полусубнормальными подгруппами Шмидта // ПФМТ. 2022. № 3(52). С. 86–89.

19. *Хуан Ц., Ху Б., Скиба А. Н.* Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62, № 1. С. 210–220.

20. *Монахов В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006.

21. *Трофимук А. А.* О конечных группах, факторизуемых слабо субнормальными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62, № 6. С. 1401–1408.

22. A system for computational discrete algebra GAP 4.11.1 [Electronic resource]. Mode of access: http://www.gap-system.org. Date of access: 14.04.2022.

23. *Монахов В. С.* Произведение бипримарной и 2-разложимой групп // Матем. заметки. 1978. Т. 23, № 5. С. 641–649.

24. *Gorenstein D.* Finite simple groups: An introduction to their classification. New York: Plenum Publ. Corp., 1982.

25. *Huppert B., Blackburn N.* Finite Groups II. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1982.

26. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. London: Clarendon, 1985.

27. *Монахов В. С.* О группах с формационно субнормальными 2-максимальными подгруппами // Матем. заметки. 2019. Т. 105, № 2. С. 269–277.

V. N. Kniahina, V. S. Monakhov

Finite groups with weakly subnormal Schmidt subgroups

Summary

A non-nilpotent finite group whose all proper subgroups are nilpotent is called a Schmidt group. A subgroup H of a group G is called *weakly subnormal* in G if H is generated by two subgroups, one of which is subnormal in G and the other is seminormal in G. We establish 3-solvability of a finite group with weakly subnormal $\{2,3\}$-Schmidt subgroups. This implies solvability of a finite group with weakly subnormal $\{2,3\}$-Schmidt subgroups and 5-closed $\{2, 5\}$-Schmidt subgroups. We prove nilpotency of the derived subgroup of a finite group in which all Schmidt subgroups are weakly subnormal.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 1. С. 58–69

УДК 517.518.45

О СОПРЯЖЕННЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ ФУРЬЕ И ИХ АППРОКСИМАЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ

Н. Ю. Козловская, Е. А. Ровба

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
e-mail: kozlowskaya_natalya@tut.by, rovba.ea@gmail.com
Поступила 15.02.2023

В работе рассматриваются сопряженные рациональные тригонометрические ряды Фурье. Получено интегральное представление их частичных сумм и признак Дини сходимости данных рядов. Исследуются приближения функции, сопряженной к функции $|\sin x|^s$, $s > 0$, частичными суммами сопряженного рационального ряда Фурье. Для указанных приближений получены интегральное представление, поточечная и равномерная оценка. На основе полученной равномерной оценки исследуются полиномиальный случай, случай заданного числа геометрически различных полюсов и общий случай.

Введение. На сегодняшний день полиномиальные сопряженные тригонометрические ряды Фурье достаточно хорошо исследованы.

Рядом, сопряженным с тригонометрическим рядом

$$\sigma = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \tag{1}$$

называют ряд

$$\overline{\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-b_n \cos nx + a_n \sin nx\right). \tag{2}$$

Ряды (1) и (2) представляют собой действительную и мнимую части степенного ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - ib_n\right) z^n \tag{3}$$

на единичной окружности $|z| = 1$.

Систематическое изучение свойств сопряженных тригонометрических рядов берет начало с опубликованной в 1911 г. работы У. Юнга [1], в которой было доказано, что если f – 2π-периодическая функция ограниченной вариации, то необходимым и достаточным условием сходимости сопряженного ряда $\overline{\sigma}(f)$ в точке x является существование предела

$$\lim_{\varepsilon \to +0}\left(-\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{t}{2}}\,dt\right),$$

который впоследствии стали называть сопряженной функцией $\overline{f}(x)$.

Теория рядов, сопряженных к полиномиальным рядам Фурье, и функций, сопряженных к суммируемым, включает в себя большое число интересных результатов. Со многими из них можно познакомиться, например, в монографии Н. К. Бари [2].

Рациональные сопряженные тригонометрические ряды Фурье были введены в работе А. А. Китбаляна [3]. В этой работе им также был исследован вопрос сходимости рациональных рядов Фурье и сопряженных рациональных рядов Фурье в метрике L_p.

В нашей работе получено интегральное представление для частичных сумм сопряженного рационального ряда Фурье, доказан признак Дини сходимости сопряженных рациональных рядов Фурье. Рассмотрены приближения функции, сопряженной к функции $|\sin x|^s$, частичными суммами сопряженных рациональных рядов Фурье.

Основная часть. Рассмотрим систему рациональных функций Такенаки–Мальмквиста

$$\varphi_0(z)=1,\quad \varphi_n(z)=\frac{\sqrt{1-|\alpha_n|^2}}{1-\overline{\alpha_n}z}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}, \tag{4}$$

$$\alpha_k\in\mathbb{C},\quad \alpha_0=0,\quad |\alpha_k|<1,\quad k=1,2,...,n-1;\quad n=1,2,....$$

Введем в рассмотрение систему функций

$$\varphi_0(z)=1,\ \operatorname{Re}\varphi_1(z),\ \operatorname{Im}\varphi_1(z),\ \operatorname{Re}\varphi_2(z),\ \operatorname{Im}\varphi_2(z)...,\ \operatorname{Re}\varphi_n(z),\ \operatorname{Im}\varphi_n(z),... \tag{5}$$

Лемма 1. *Функции* $\operatorname{Re}\varphi_n(e^{ix})$ *и* $\operatorname{Im}\varphi_n(e^{ix})$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$, *являются рациональными тригонометрическими функциями порядка не выше* n.

Доказательство леммы 1 основано на том, что рациональными функциями порядка n являются функции $\varphi_n(z)$, как это было показано в [4].

Лемма 2. *Система тригонометрических функций* (5) *является ортогональной на единичной окружности.*

Справедливость леммы 2 следует из ортогональности системы функций (4).

Пусть функция $f\in L_1(-\pi,\pi)$. Рассмотрим ряд Фурье по системе рациональных функций (5)

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\operatorname{Re}\varphi_n\left(e^{ix}\right)+b_n\operatorname{Im}\varphi_n\left(e^{ix}\right)\right), \tag{6}$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\operatorname{Re}\varphi_n\left(e^{it}\right)dt,\quad n=0,1,...;\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\operatorname{Im}\varphi_n\left(e^{it}\right)dt,\quad n=1,2,...$$

Введем в рассмотрение следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-b_n\operatorname{Re}\varphi_n\left(e^{ix}\right)+a_n\operatorname{Im}\varphi_n\left(e^{ix}\right)\right). \tag{7}$$

Ряд (7) естественно называть рядом Фурье, сопряженным с рядом (6) [3].

Рассмотрим n-ю частичную сумму сопряженного ряда Фурье

$$\overline{S_n}(x,f)=\sum_{k=1}^{n}\left(-b_k\operatorname{Re}\varphi_k\left(e^{ix}\right)+a_k\operatorname{Im}\varphi_k\left(e^{ix}\right)\right).$$

Теорема 1. *Для частичной суммы* $\overline{S_n}(x,f)$ *ряда* (7) *справедливо представление*

$$\overline{S_n}(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\overline{D_n(x,t)}dt, \tag{8}$$

где

$$\overline{D_n(x,t)}=\frac{1}{2\sin\frac{x-t}{2}}\left(\cos\frac{x-t}{2}-\cos\lambda_n^+(x,t)\right)$$

– сопряженное ядро Дирихле,

$$\lambda_n^+(x,t)=\int_t^x\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\theta_k)+|\alpha_k|^2}\right)du,\quad \theta_k=\arg\alpha_k,\quad k=1,2,...,n.$$

Доказательство. Очевидно,

$$\overline{S_n}(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sum_{k=1}^{n}\left(-\operatorname{Re}\varphi_k\left(e^{ix}\right)\operatorname{Im}\varphi_k\left(e^{it}\right)+\operatorname{Im}\varphi_k\left(e^{ix}\right)\operatorname{Re}\varphi_k\left(e^{it}\right)\right)dt.$$

Заметим, что если $\varphi_k\left(e^{it}\right)=a+ib,\ \varphi_k\left(e^{ix}\right)=c+id,$ то

$$-bc+ad=\operatorname{Im}\left(\left(a-ib\right)\left(c+id\right)\right)=\operatorname{Im}\left(\overline{\varphi_k\left(e^{it}\right)}\,\varphi_k\left(e^{ix}\right)\right),$$

откуда

$$\overline{S_n}\left(x,f\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(t\right)\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{\varphi_k\left(e^{it}\right)}\,\varphi_k\left(e^{ix}\right)\right)dt.$$

Далее, на основании леммы 2 из [4] несложно получить, что

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{\varphi_k\left(e^{it}\right)}\,\varphi_k\left(e^{ix}\right)=\frac{e^{i(x-t)}}{1-e^{i(x-t)}}\left(1-\exp\left(i\lambda_n\left(x,t\right)\right)\right),$$

$$\lambda_n\left(x,t\right)=\int_t^x\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\left|\alpha_k\right|^2}{1-2\left|\alpha_k\right|\cos\left(u-\theta_k\right)+\left|\alpha_k\right|^2}du,\quad \theta_k=\arg\alpha_k,\quad k=1,2,...,n.$$

Найдем мнимую часть полученного выражения – сопряженное ядро Дирихле:

$$\overline{D_n\left(x,t\right)}=\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{n}\overline{\varphi_k\left(e^{it}\right)}\,\varphi_k\left(e^{ix}\right)=$$

$$=\operatorname{Im}\left(-\frac{1}{2i}\cdot\frac{\cos\frac{x-t}{2}+i\sin\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\left(1-\cos\left(\lambda_n\left(x,t\right)\right)-i\sin\left(\lambda_n\left(x,t\right)\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x-t}{2}}\left(\cos\frac{x-t}{2}-\cos\left(\lambda_n\left(x,t\right)\right)\cos\frac{x-t}{2}+\sin\left(\lambda_n\left(x,t\right)\right)\sin\frac{x-t}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x-t}{2}}\left(\cos\frac{x-t}{2}-\cos\lambda_n^+\left(x,t\right)\right),$$

$$\lambda_n^+\left(x,t\right)=\int_t^x\left(\frac{1}{2}+\lambda_n\left(u\right)\right)du,\quad \lambda_n\left(u\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\left|\alpha_k\right|^2}{1-2\left|\alpha_k\right|\cos\left(u-\theta_k\right)+\left|\alpha_k\right|^2}.$$

Отсюда и следует утверждение теоремы.

Признак Дини сходимости сопряженных рядов Фурье

Лемма 3. *Пусть* $\alpha_1=0$ *и выполняется условие*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|\alpha_k|)=+\infty, \tag{9}$$

то для произвольной функции $\varphi\left(t\right)\in L_1\left[0,\pi\right]$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\varphi\left(t\right)\exp\left(\pm i\lambda_n(x,t)\right)dt=0$$

равномерно относительно $x,\ x\in\mathbb{R}.$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $\varphi\left(t\right)\in L_1[-\pi,\pi]$ и $\varphi\left(t\right)=0$ при $t\in[-\pi,0]$. Тогда при выполнении условия (9) для любого $\varepsilon>0$ существует рациональная функция [5]

$$R_{2n_0}(\xi)=\sum_{m=-n_0}^{-1}\frac{c_m}{1-\overline{\alpha_m}\xi}+\sum_{m=1}^{n_0}\frac{c_m}{\xi-\alpha_m}+c_0, \tag{10}$$

$\xi=e^{it}$, $c_m\in\mathbb{C}$, $m=0,\pm1,\pm2,..,\pm n_0$, такая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi(t)-R_{2n_0}(\xi)\right|dt<\varepsilon.$$

Поэтому

$$\left|\int_{0}^{\pi}\varphi(t)\exp\left(\pm i\lambda_n(x,t)\right)dt\right|\le\int_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi(t)-R_{2n_0}(\xi)\right|dt+ \tag{11}$$

$$+\left|\int_{-\pi}^{\pi}R_{2n_0}(\xi)\exp\left(\pm i\lambda_n(x,t)\right)dt\right|<2\pi\varepsilon+\left|\int_{-\pi}^{\pi}R_{2n_0}(\xi)\exp\left(\pm i\lambda_n(x,t)\right)dt\right|.$$

Рассмотрим слагаемое

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}R_{2n_0}(\xi)\exp\left(\pm i\lambda_n(x,t)\right)dt\right|$$

из оценки (11). Поскольку [4]

$$\exp\left(i\lambda_n(x,t)\right)=\prod_{k=0}^{n}\frac{1-\overline{\alpha_k}\xi}{\xi-\alpha_k}\prod_{k=0}^{n}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z},\ z=e^{ix},$$

то в силу представления (10) и того, что $\prod_{k=0}^{n}\left|\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}\right|=1$, получим

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}R_{2n_0}(\xi)\exp\left(i\lambda_n(x,t)\right)dt\right|\le\sum_{m=-n_0}^{-1}|c_m|\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1-\overline{\alpha_m}\xi}\prod_{k=0}^{n}\frac{1-\overline{\alpha_k}\xi}{\xi-\alpha_k}dt\right|+ \tag{12}$$

$$+\sum_{m=1}^{n_0}|c_m|\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\xi-\alpha_m}\prod_{k=0}^{n}\frac{1-\overline{\alpha_k}\xi}{\xi-\alpha_k}dt\right|+|c_0|\left|\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{k=0}^{n}\frac{1-\overline{\alpha_k}\xi}{\xi-\alpha_k}dt\right|,$$

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}R_{2n_0}(\xi)\exp\left(-i\lambda_n(x,t)\right)dt\right|\le\sum_{m=-n_0}^{-1}|c_m|\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1-\overline{\alpha_m}\xi}\prod_{k=0}^{n}\frac{\xi-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}\xi}dt\right|+ \tag{13}$$

$$+\sum_{m=1}^{n_0}|c_m|\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\xi-\alpha_m}\prod_{k=0}^{n}\frac{\xi-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}\xi}dt\right|+|c_0|\left|\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{k=0}^{n}\frac{\xi-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}\xi}dt\right|.$$

Рассмотрим интегралы

$$I_{mn}^{(1)}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1-\overline{\alpha_m}\xi}\prod_{k=0}^{n}\frac{1-\overline{\alpha_k}\xi}{\xi-\alpha_k}dt,\quad I_{mn}^{(2)}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1-\overline{\alpha_m}\xi}\prod_{k=0}^{n}\frac{\xi-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}\xi}dt,$$

$$I_{mn}^{(3)}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\xi-\alpha_m}\prod_{k=0}^{n}\frac{1-\overline{\alpha_k}\xi}{\xi-\alpha_k}dt,\quad I_{mn}^{(4)}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\xi-\alpha_m}\prod_{k=0}^{n}\frac{\xi-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}\xi}dt,\quad m=1,2,\dots,n_0;$$

$$I_{n}^{(1)}=\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{k=0}^{n}\frac{1-\overline{\alpha_k}\xi}{\xi-\alpha_k}dt,\quad I_{n}^{(2)}=\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{k=0}^{n}\frac{\xi-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}\xi}dt.$$

В рассматриваемых интегралах выполним замену $\xi=e^{it}$ $\left(d\xi=i\xi dt,\ dt=\frac{d\xi}{i\xi}\right)$. Будем иметь

$$I_{mn}^{(1)}=\frac{1}{i}\int_{|\xi|=1}\frac{1}{1-\overline{\alpha_m}\xi}\prod_{k=0}^{n}\frac{1-\overline{\alpha_k}\xi}{\xi-\alpha_k}\frac{d\xi}{\xi}=0,\quad I_{mn}^{(3)}=\frac{1}{i}\int_{|\xi|=1}\frac{1}{\xi-\alpha_m}\prod_{k=0}^{n}\frac{1-\overline{\alpha_k}\xi}{\xi-\alpha_k}\frac{d\xi}{\xi}=0,$$

$$I_n^{(1)} = \frac{1}{i}\int\limits_{|\xi|=1}\prod_{k=0}^{n}\frac{1-\overline{\alpha_k}\xi}{\xi-\alpha_k}\frac{d\xi}{\xi} = 0,$$

поскольку при $n > n_0$ подынтегральные функции этих интегралов аналитические вне контура $|\xi|=1,$ и на бесконечности имеют нуль не ниже второго порядка;

$$I_{mn}^{(2)} = \frac{1}{i}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{1}{1-\overline{\alpha_m}\xi}\prod_{k=1}^{n}\frac{\xi-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}\xi}d\xi = 0, \quad I_{mn}^{(4)} = \frac{1}{i}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{1}{\xi-\alpha_m}\prod_{k=1}^{n}\frac{\xi-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}\xi}d\xi = 0, \quad m \neq 0,$$

$$I_{0,n}^{(4)} = \frac{1}{i}\int\limits_{|\xi|=1}\prod_{k=2}^{n}\frac{\xi-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}\xi}d\xi = 0, \quad I_n^{(2)} = \frac{1}{i}\int\limits_{|\xi|=1}\prod_{k=1}^{n}\frac{\xi-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}\xi}d\xi,$$

поскольку при $n > n_0$ подынтегральные функции аналитичны внутри контура $|\xi|=1.$

Таким образом, из оценок (11)–(13) следует, что

$$\left|\int_0^{\pi}\varphi(t)\exp\left(\pm i\lambda_n(x,t)\right)dt\right| < 2\pi\varepsilon, \ n > n_0,$$

а значит, выполняется утверждение леммы.

Для произвольной 2π-периодической функции $f(x) \in L_1[0,\pi]$ рассмотрим сопряженную с ней функцию [3]

$$\overline{f(x)} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt. \tag{14}$$

Теорема 2 (Признак Дини сходимости сопряженных рациональных рядов Фурье). *Пусть последовательность* $\{a_k\}$ *удовлетворяет условию* (9), *и*

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_{n+k} = -\alpha_k, \quad k = 1,2,\ldots n. \tag{15}$$

Если в точке $x, \ x \in \mathbb{R},$ *сходятся интегралы*

$$\int_0^{\pi}\frac{|f(x\pm t)-f(x)|}{t}dt,$$

то последовательность $\left\{\overline{S_{2n}}(x,f)\right\}$ *частичных сумм сопряженного рационального ряда Фурье сходится в точке* x *к сопряженной функции* (14).

Доказательство. Для 2π-периодической функции $f(x)$ имеем

$$\overline{S_{2n}}(x,f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+t)\overline{D_{2n}(x,x+t)} + f(x-t)\overline{D_{2n}(x,x-t)}\right)dt.$$

Учитывая, что

$$\cos\lambda_{2n}^{+}(x,t) = \cos\left(\lambda_{2n}(x,t)\right)\cos\frac{x-t}{2} - \sin\left(\lambda_{2n}(x,t)\right)\sin\frac{x-t}{2},$$

получим

$$\overline{S_{2n}}(x,f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x+t)\left(\frac{\cos\frac{t}{2}}{-2\sin\frac{t}{2}} + \frac{\cos\lambda_{2n}(x,x+t)\cos\frac{t}{2} + \sin\lambda_{2n}(x,x+t)\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\right)dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x-t)\left(\frac{\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{\cos\lambda_{2n}(x,x-t)\cos\frac{t}{2} - \sin\lambda_{2n}(x,x-t)\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\right)dt =$$

$$=\overline{f(x)}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x+t)\left(\frac{\cos\lambda_{2n}(x,x+t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}+\sin\lambda_{2n}(x,x+t)\right)dt-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x-t)\left(\frac{\cos\lambda_{2n}(x,x-t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}-\sin\lambda_{2n}(x,x-t)\right)dt,$$

$$\overline{S_{2n}}(x,f)=\overline{f(x)}+J_1+J_2, \tag{16}$$

где

$$J_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+t)\frac{\cos\lambda_{2n}(x,x+t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}-f(x-t)\frac{\cos\lambda_{2n}(x,x-t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\right)dt,$$

$$J_2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(f(x+t)\sin\lambda_{2n}(x,x+t)+f(x-t)\sin\lambda_{2n}(x,x-t)\Big)dt.$$

Из леммы 3 следует, что

$$J_2 \rightrightarrows 0, \quad n\to\infty. \tag{17}$$

Рассмотрим интеграл J_1:

$$J_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\big(f(x+t)-f(x-t)\big)\frac{\cos\lambda_{2n}(x,x+t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt+ \tag{18}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x-t)\left(\frac{\cos\lambda_{2n}(x+t,x)-\cos\lambda_{2n}(x,x-t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\right)dt=I_1+I_2,$$

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\big(f(x+t)-f(x-t)\big)}{t}\cos\lambda_{2n}(x,x+t)\,dt+ \tag{19}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\big(f(x+t)-f(x-t)\big)\cos\lambda_{2n}(x,x+t)\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right)dt,$$

$$I_2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x-t)\left(\frac{\cos\lambda_{2n}(x+t,x)-\cos\lambda_{2n}(x,x-t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\right)dt. \tag{20}$$

Нетрудно показать, что функция, стоящая в скобках во втором интеграле равенства (19), непрерывна на $[0,\pi]$, а значит, принадлежит $L_1[0,\pi]$. На основании леммы 3 получим, что в точке x

$$I_1\to 0, \quad n\to\infty. \tag{21}$$

Займемся интегралом I_2. В интеграле

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\cos\lambda_{2n}(x+t,x)-\cos\lambda_{2n}(x,x-t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt \tag{22}$$

выполним замены $z=e^{ix}$, $\xi=e^{it}$. С учетом того, что

$$\exp\left(i\int_0^t\lambda_{2n}(u)du\right)=\prod_{k=1}^{2n}\frac{\xi-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}\xi},$$

получим

$$I=\frac{1}{2}\int_C\frac{1-\xi}{(1+\xi)\xi}\left(\prod_{k=1}^{2n}\frac{\xi z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}\xi z}\frac{1-\overline{\alpha_k}z}{z-\alpha_k}-\prod_{k=1}^{2n}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}\frac{\xi-\overline{\alpha_k}z}{z-\alpha_k\xi}+\right.$$

$$\left.+\prod_{k=1}^{2n}\frac{1-\overline{\alpha_k}\xi z}{\xi z-\alpha_k}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}-\prod_{k=1}^{2n}\frac{1-\overline{\alpha_k}z}{z-\alpha_k}\frac{z-\alpha_k\xi}{\xi-\overline{\alpha_k}z}\right)d\xi=\frac{1}{2}\left(I^{(1)}+I^{(2)}\right),\ C=\{\xi:\xi=e^{it},\quad t\in(0,\pi)\},$$

где

$$I^{(1)}=\int_C\frac{1-\xi}{(1+\xi)\xi}\left(\prod_{k=1}^{2n}\frac{\xi z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}\xi z}\frac{1-\overline{\alpha_k}z}{z-\alpha_k}-\prod_{k=1}^{2n}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}\frac{\xi-\overline{\alpha_k}z}{z-\alpha_k\xi}\right)d\xi,$$

$$I^{(2)}=\int_C\frac{1-\xi}{(1+\xi)\xi}\left(\prod_{k=1}^{2n}\frac{1-\overline{\alpha_k}\xi z}{\xi z-\alpha_k}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}-\prod_{k=1}^{2n}\frac{1-\overline{\alpha_k}z}{z-\alpha_k}\frac{z-\alpha_k\xi}{\xi-\overline{\alpha_k}z}\right)d\xi.$$

При $\alpha_1=0$

$$I^{(1)}=\int_C\frac{1-\xi}{1+\xi}\left(\prod_{k=2}^{2n}\frac{\xi z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}\xi z}\frac{1-\overline{\alpha_k}z}{z-\alpha_k}-\prod_{k=2}^{2n}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}\frac{\xi-\overline{\alpha_k}z}{z-\alpha_k\xi}\right)d\xi.$$

Подынтегральная функция интеграла $I^{(1)}$ аналитична внутри контура $C\cup[-1,1]$, в точке $\xi=-1$ имеем с учетом условия (15):

$$\lim_{\xi\to-1}\left(\prod_{k=1}^{2n}\frac{\xi z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}\xi z}\frac{1-\overline{\alpha_k}z}{z-\alpha_k}-\prod_{k=1}^{2n}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}\frac{\xi-\overline{\alpha_k}z}{z-\alpha_k\xi}\right)=$$

$$=\prod_{k=1}^{2n}\frac{z+\alpha_k}{1+\overline{\alpha_k}z}\frac{1-\overline{\alpha_k}z}{z-\alpha_k}-\prod_{k=1}^{2n}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}\frac{1+\overline{\alpha_k}z}{z+\alpha_k}=0.$$

Поэтому

$$I^{(1)}=-\int_{-1}^{1}\frac{1-\xi}{1+\xi}\left(\prod_{k=2}^{2n}\frac{\xi z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}\xi z}\frac{1-\overline{\alpha_k}z}{z-\alpha_k}-\prod_{k=2}^{2n}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}\frac{\xi-\overline{\alpha_k}z}{z-\alpha_k\xi}\right)d\xi. \tag{23}$$

Подынтегральная функция интеграла $I^{(2)}$ аналитична вне контура $C\cup[-1,1]$, при выполнении условия (15) в точке $\xi=-1$ имеем

$$\lim_{\xi\to-1}\left(\prod_{k=1}^{2n}\frac{1-\overline{\alpha_k}\xi z}{\xi z-\alpha_k}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}-\prod_{k=1}^{2n}\frac{1-\overline{\alpha_k}z}{z-\alpha_k}\frac{z-\alpha_k\xi}{\xi-\overline{\alpha_k}z}\right)=0.$$

Поэтому

$$I^{(2)}=\int_{-\infty}^{-1}\frac{1-\xi}{(1+\xi)\xi}\left(\prod_{k=1}^{2n}\frac{1-\overline{\alpha_k}\xi z}{\xi z-\alpha_k}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}-\prod_{k=1}^{2n}\frac{1-\overline{\alpha_k}z}{z-\alpha_k}\frac{z-\alpha_k\xi}{\xi-\overline{\alpha_k}z}\right)d\xi+$$

$$+\int_{1}^{+\infty}\frac{1-\xi}{(1+\xi)\xi}\left(\prod_{k=1}^{2n}\frac{1-\overline{\alpha_k}\xi z}{\xi z-\alpha_k}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}-\prod_{k=1}^{2n}\frac{1-\overline{\alpha_k}z}{z-\alpha_k}\frac{z-\alpha_k\xi}{\xi-\overline{\alpha_k}z}\right)d\xi.$$

Выполним замену $\eta=\dfrac{1}{\xi}$, $d\xi=-\dfrac{1}{\eta^2}d\eta$, получим

$$I^{(2)}=\int_{-1}^{1}\frac{\eta-1}{(\eta+1)\eta}\left(\prod_{k=1}^{2n}\frac{\eta-\overline{\alpha_k}z}{z-\alpha_k\eta}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}-\prod_{k=1}^{2n}\frac{1-\overline{\alpha_k}z}{z-\alpha_k}\frac{\eta z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}\eta z}\right)d\eta=$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\eta - 1}{(\eta+1)\eta} \left(\frac{1}{\eta} \prod_{k=2}^{2n} \frac{\eta - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k \eta} \frac{z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} z} - \frac{1}{\eta} \prod_{k=2}^{2n} \frac{1 - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k} \frac{\eta z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} \eta z} \right) d\eta,$$

поскольку $\alpha_1 = 0.$ Отсюда с учетом формулы (22) найдем

$$I = \frac{1}{2}\left(I^{(1)} + I^{(2)} \right) = 0.$$

Таким образом, интеграл (20) может быть представлен в виде

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(f(x-t) - f(x) \right) \left(\frac{\cos \lambda_{2n}(x+t, x) - \cos \lambda_{2n}(x, x-t)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right) dt.$$

и на основании леммы 3 можем заключить, что $I_2 \rightrightarrows 0,\ n \to \infty,$ а потому, как следует из формул (18) и (21), интеграл J_1 в точке x сходится к нулю.

Отсюда с учетом представления (16), а также асимптотической оценки (15), получим, что последовательность частичных сумм $\overline{S_{2n}(x, f)}$ в точке x сходится к сопряженной функции $\overline{f(x)},$ что завершает доказательство теоремы.

Приближения функции, сопряженной к функции $|\sin x|^s$

Пусть

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0, \quad r = \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil; \quad \alpha_k \in [0,1), \quad \alpha_k = -\alpha_{n+k}, \quad k = 1, 2, \ldots n, \quad n > r. \tag{24}$$

Обозначим

$$\lambda_{2n}(u) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k| \cos(u - \arg \alpha_k) + |\alpha_k|^2}.$$

Очевидно, что при определенном выше выборе параметров

$$\lambda_{2n}(u) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - \alpha_k^4}{1 - 2\alpha_k^2 \cos 2u + \alpha_k^4}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = |\sin x|^s,\ s > 0,\ x \in \mathbb{R}.$

Для сопряженной функции

$$\overline{f(x)} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin t|^s}{tg \frac{t-x}{2}} dt$$

рассмотрим частичные суммы ее сопряженного тригонометрического рационального ряда Фурье (8).

Введем обозначение

$$\overline{\varepsilon_{2n}}(x, \alpha) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin t|^s}{tg \frac{t-x}{2}} dt - \overline{S_{2n}}\left(x, |\sin x|^s \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Лемма 4. *Справедливо равенство*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \lambda_n^+(x,t)}{\sin \frac{x-t}{2}} dt = 0.$$

Доказательство. В рассматриваемом интеграле выполним замены $z = e^{ix},\quad \xi = e^{it}.$ С учетом того, что

$$\exp\left(i\int\limits_o^t \lambda_n^+(u)du \right) = \xi^{1/2}\chi_n(\xi),$$

где

$$\chi_n(\xi) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\xi-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}\xi},$$

получим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\lambda_n^+(x,t)}{\sin\frac{x-t}{2}}dt = \int\limits_C \prod_{k=1}^{n}\frac{\xi-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}\xi}\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\overline{\alpha_k}z}{z-\alpha_k}\frac{d\xi}{z-\xi} + \int\limits_C \prod_{k=1}^{n}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\overline{\alpha_k}\xi}{\xi-\alpha_k}\frac{zd\xi}{\xi(z-\xi)}, \qquad (25)$$

где $C = \{\xi : \xi = e^{it}, t \in (0,\pi)\}$.

Воспользуемся формулами Сохоцкого [6] для нахождения предельных значений $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ интеграла типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau$$

при стремлении z к точке t контура L слева и справа от L соответственно:

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau,$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau.$$

С учетом того, что подынтегральная функция 1-го интеграла в равенстве (25) не имеет особых точек внутри контура C, а подынтегральная функция 2-го интеграла – вне контура C, получим

$$\int\limits_C \prod_{k=1}^{n}\frac{\xi-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}\xi}\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\overline{\alpha_k}z}{z-\alpha_k}\frac{d\xi}{z-\xi} = \pi i\left(-\prod_{k=1}^{n}\frac{\xi-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}\xi}\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\overline{\alpha_k}z}{z-\alpha_k} \right)\Bigg|_{\xi=z} = -\pi i,$$

$$\int\limits_C \prod_{k=1}^{n}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\overline{\alpha_k}\xi}{\xi-\alpha_k}\frac{zd\xi}{\xi(z-\xi)} = -\pi i\left(-\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\overline{\alpha_k}\xi}{\xi-\alpha_k}\frac{z}{\xi} \right)\Bigg|_{\xi=z} = \pi i.$$

Отсюда и из равенства (25) следует утверждение леммы.

Теорема 3. *Для приближений функции, сопряженной к функции* $|\sin x|^s$, $s > 0$, *частичными суммами сопряженных рациональных тригонометрических рядов Фурье справедливо следующее представление:*

$$\overline{\varepsilon_{2n}}(x,\alpha) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^s \frac{\chi_{2n}(t)}{t^2 - 2t\cos x + 1}\times \qquad (26)$$

$$\times\left(\sin x\cos\lambda_{2n}(0,x) + \frac{1-t\cos x}{t}\sin\lambda_{2n}(0,x) \right)dt, \quad n > \frac{s}{2}.$$

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству соответствующей теоремы работы [7].

Теорема 4. *Для приближений функции, сопряженной к функции* $|\sin x|^s$, $s > 0$, *частичными суммами сопряженных рациональных тригонометрических рядов Фурье справедливы следующие оценки:*

$$\left|\overline{\varepsilon_{2n}}(x,\alpha)\right| \le \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\int\limits_{-1}^{1}\left|\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^s\frac{\chi_{2n}(t)}{t}\right|\frac{dt}{\sqrt{t^2-2t\cos x+1}},$$

$$\left|\overline{\varepsilon_{2n}}(\alpha)\right| \le \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \int_0^1 \frac{u^{s-1}}{\left(1-u^2\right)^{s/2}\left(1-u\right)} \left|\tau_n\left(u\right)\right| du, \qquad (27)$$

где $\tau_n(u) = \prod_{k=1}^{n} \frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}$, $\beta_k = \frac{1-\alpha_k^2}{1+\alpha_k^2}$, $k = 1, 2, ..., n$, $n > \frac{s}{2}$.

Доказательство. Так как справедливо неравенство $|a\cos x + b\sin x| \le \sqrt{a^2+b^2}$, $x \in \mathbb{R}$, то

$$\left|\sin x\cos\lambda_{2n}(0,x) + \frac{1-t\cos x}{t}\sin\lambda_{2n}(0,x)\right| \le \sqrt{\sin^2 x + \left(\frac{1-t\cos x}{t}\right)^2} = \frac{\sqrt{t^2-2t\cos x+1}}{|t|},$$

откуда на основании представления (26) будем иметь

$$\left|\overline{\varepsilon_{2n}}(x,\alpha)\right| \le \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \int_{-1}^{1} \left|\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^s \frac{\chi_{2n}(t)}{t}\right| \frac{dt}{\sqrt{t^2-2t\cos x+1}}.$$

Переходя в интеграле из неравенства выше к отрезку $[0,1]$, получим

$$\left|\overline{\varepsilon_{2n}}(x,\alpha)\right| \le \frac{2^{2-s}}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \int_0^1 \frac{\left(1-t^2\right)^{s-1}}{t^{s+1}} \left|\chi_{2n}(t)\right| dt.$$

Выполним замену $\xi = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}$. В итоге будем иметь

$$\left|\overline{\varepsilon_{2n}}(x,\alpha)\right| \le \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \int_0^1 \frac{u^{s-1}}{\left(1-u^2\right)^{s/2}\left(1-u\right)} \left|\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)\right| du,$$

где $\beta_k = \frac{1-\alpha_k^2}{1+\alpha_k^2}$, $k = 1, 2, ..., n$.

Полиномиальный случай

В полиномиальном случае $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, $\left|\tau_n(u)\right| = \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n$. На основании оценки (27) будем иметь

$$\left|\overline{\varepsilon_{2n}}(0)\right| \le \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \int_0^1 \frac{u^{s-1}}{\left(1-u^2\right)^{s/2}\left(1-u\right)} \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n du.$$

Исследуем асимптотическое поведение интеграла в правой части последнего равенства. Представим его в виде

$$J_n = \int_0^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2}\left(1-u\right)} e^{n\ln\frac{1-u}{1+u}} du.$$

Для получения асимптотической оценки воспользуемся методом Лапласа. А именно, применим теорему Эрдейи [8]. Приведем ее формулировку.

Теорема Эрдейи. *Пусть* $I(x)$ *– интеграл вида*

$$I(x) = \int_a^b q\left(t\right) e^{xp(t)} dt,$$

где $p(t)$ *– действительная функция действительной переменной, функция* $q(t)$ *может быть как комплекснозначной, так и действительнозначной, значение* a *конечное,* b *может быть как конечным, так и бесконечным.*

Кроме того, пусть выполняются условия:

1) *функция* $p(t)$ *достигает максимума при* $t = a$, *причем* $p(t) < p(a)$ *при* $a < t \le b$;

2) *функции* $p'(t)$ *и* $q(t)$ *непрерывны в некоторой окрестности точки* a, *за исключением, возможно, самой точки* a;

3) *интеграл* $I(x)$ *сходится абсолютно во всей области интегрирования при всех достаточно больших* x;

4) *справедливы асимптотические равенства*

$$p(t) \sim p(a) - P(t-a)^{\mu}, \quad t \to a+0, \quad q(t) \sim Q(t-a)^{\lambda-1}, \quad t \to a+0,$$

где P, μ, λ *– положительные постоянные, а* $Q \neq 0$ *– действительная или комплексная постоянная; при этом первое из указанных равенств допускает дифференцирование.*

Тогда

$$I(x) \sim \frac{Q}{\mu}\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\cdot\frac{e^{xp(a)}}{(Px)^{\frac{\lambda}{\mu}}}, \quad x \to +\infty. \tag{28}$$

Проверим выполнение условий указанной теоремы.

1. Найдем максимум функции $p(u) = \ln\frac{1-u}{1+u}$. Так как $p'(u) = -\frac{2}{1-u^2} < 0$, $u \in [0,1)$, то функция $p(u)$ убывает на $[0,1)$, и значит, имеет максимум только в точке $u = 0$.

2. Функции $p'(u)$ и $q(u) = \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2}(1-u)}$ непрерывны в достаточно малой окрестности точки $u = 0$ (функция $q(u)$ – за исключением самой точки $u = 0$ при $s < 1$).

3. Интеграл $J(n)$ сходится при $n \geq \frac{s+1}{2}$, поскольку при таких n подынтегральная функция непрерывна при $u \in [0,1]$.

4. Выполняются асимптотические равенства

$$p(u) = \ln\frac{1-u}{1+u} \sim -2u, \quad u \to 0,$$

$$q(u) = \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2}(1-u)} \sim u^{s-1}, \quad u \to 0,$$

откуда $P = 2$, $\mu = 1$, $Q = 1$, $\lambda = s$.

Тогда, согласно формуле (28),

$$J_n \sim \frac{\Gamma(s)}{(2n)^s}, \quad n \to \infty.$$

В результате получим

Следствие. *Для полиномиальных приближений функции, сопряженной к функции* $|\sin x|^s$, $s > 0$, *частичными суммами ее сопряженного ряда Фурье справедливо соотношение*

$$\left|\overline{\varepsilon_{2n}}(0)\right| \leq \varepsilon^*_{2n},$$

где

$$\varepsilon^*_{2n} = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\frac{\Gamma(s)}{(2n)^s} + o\left(\frac{1}{n^s}\right), \quad n \to \infty.$$

Случай заданного числа геометрически различных полюсов

Пусть A_{2n} – множество точек $(\alpha_1, \alpha_2, ..., a_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$, которые удовлетворяют условиям (28). Положим $n > r$, $r = \left[\frac{s+1}{2}\right]$, $n_1 = n - r$ и q – заданное произвольное целое число, $0 \leq q \leq n_1$; $A_{2n,2q}$ – множество точек $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2n}) \in A_{2n}$ таких, что среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ не более q различных, не равных нулю, и кратность каждой точки равна $m = \left[\frac{n_1}{q+1}\right]$.

Обозначим также

$$\overline{\varepsilon_{2n,2q}} = \inf_{\alpha \in A_{2n,2q}} \overline{\varepsilon_{2n}}(\alpha).$$

На основе оценки (27) получим следующий результат.

Теорема 5. *При произвольных целых* n *и* q, $0 \le q < n$, $n > r$, *имеет место следующая оценка приближений функции, сопряженной к функции* $|\sin x|^s$, $s > 0$, *частичными суммами сопряженных рациональных тригонометрических рядов Фурье с заданным числом* $2q$ *геометрически различных полюсов в открытой комплексной плоскости:*

$$\overline{\varepsilon_{2n,2q}} \le C(s)\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \inf_{1<t<\infty}\left(e^{-\frac{n}{2t}} + \left(\frac{q+1}{n}\right)^s \left(1+\frac{t}{q+1}\right)^{-2qs}\right),$$

где $C(s)$ *– некоторая положительная постоянная, которая зависит только от* s.

Общий случай

Теорема 6. *Для приближений функции, сопряженной к функции* $|\sin x|^s$, $s > 0$, *частичными суммами сопряженных рациональных тригонометрических рядов Фурье справедлива оценка*

$$\overline{\varepsilon_{2n}} \le C_1(s)\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\sqrt{n}e^{-\pi\sqrt{ns}},$$

где $C_1(s)$ *– некоторая положительная постоянная, которая зависит только от* s.

Доказательство теоремы 6 основано на оценке (27).

Литература

1. *Young W. H.* Konvergenzbedingunger fur die verwandte Reihe einer Fourierschen Reihe // Munchener Sitzungsberichte. 1911. Vol. 41. P. 261–371.

2. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.

3. *Китбалян А. А.* Разложения по обобщенным тригонометрическим системам // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук. 1956. Т. 16, № 6. С. 3–24.

4. *Джрбашян М. М.* К теории рядов Фурье по рациональным функциям // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук. 1956. Т. 9, № 7. С. 3–28.

5. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.

6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

7. *Казлоўская Н. Ю., Роўба Я. А.* Аб апраксімацыі функцыі $|\sin x|^S$ частковымі сумамі трыганаметрычных рацыянальных шэрагаў Фур’е // Доклады Нац. акад. наук Беларуси. 2021. Т. 65, № 1. С. 11–17.

8. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения. М.: Физматгиз, 1962.

N. Ju. Kazlouskaya, Ya. A. Rovba

On conjugate rational trigonometric Fourier series and their approximation properties

Summary

The article considers conjugate rational trigonometric Fourier series. An integral representation of their partial sums and the Dini test for the convergence of the given series were obtained. The approximation of functions conjugate to $|\sin x|^s$, $s > 0$ by partial sums of conjugate rational trigonometric Fourier series is investigated. An integral representation, uniform and point estimates for the above-mentioned approximation were obtained. On the base of the uniform estimate polynomial, a fixed number of geometrically different poles, and general cases were studied.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 1. С. 70–80

УДК 517.954

ЗАДАЧА ПИКАРА НА ПЛОСКОСТИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. И. Корзюк, О. А. Ковнацкая

Белорусский государственный университет,
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: Korzyuk@bsu.by, Kovnatskaya@bsu.by
Поступила 12.09.2023

В данной работе получены классические решения задач для квазилинейного гиперболического уравнения второго порядка в случае двух независимых переменных с заданными для искомой функции условиями в сочетании как на характеристических линиях, так и на нехарактеристических линиях. Задачи сводятся к системе уравнений с вполне непрерывным оператором. Решения строятся методом последовательных приближений. Проводятся обоснования. Кроме того, показывается для каждой рассмотренной задачи и единственность полученного классического решения. Доказаны необходимые и достаточные условия согласования заданных функций в случае каждой из рассмотренных в статье задач, при выполнении которых классические решения их существуют при наличии определенной гладкости заданных функций.

Введение. В книге [1, п. 4.6] дается постановка задач для гиперболического уравнения двух независимых переменных, главная часть которого представлена во втором каноническом виде. Среди них задачи Гурса и Пикара. В связи с этим можно смотреть и книгу [2]. В [3–5] авторами данной статьи рассмотрены аналогичные задачи для одномерного волнового уравнения, когда условия для искомых функций заданы только на характеристиках или при наличии условия на одной из характеристик и на одной из нехарактеристических линий плоскости. В [3, 4] использовано представление общего решения для волнового уравнения. В данной статье, как и в [5], классические решения строятся методом последовательных приближений. Здесь следует отметить и работу [6], в которой изучается классическое решение первой смешанной задачи в криволинейной полуполосе для уравнения типа волнового уравнения с переменными коэффициентами и неоднородным дифференциальным оператором.

Такого рода задачи, близкие к нашей статье, рассмотрены в [7–10]. Однако в представленной здесь работе в каждом случае решение рассматриваемых задач представлено в аналитическом виде в виде последовательных приближений непрерывно дифференцируемых функций. Особый интерес представляет случай, когда исходное уравнение задано на всей плоскости. Здесь присоединяются условия Дирихле, одно из которых задано на выбранной характеристике уравнения и на некоторой нехарактеристической линии, на которую налагаются определенные условия.

1. Постановка задачи П-1. На плоскости $\mathbb{R}^2$ независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\mathcal{L}u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}) = a(\boldsymbol{x})\partial_{x_1}^2 u(\boldsymbol{x}) + 2b(\boldsymbol{x})\partial_{x_1}\partial_{x_2} u(\boldsymbol{x}) + c(\boldsymbol{x})\partial_{x_2}^2 u(\boldsymbol{x}) + \mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

относительно искомой функции $u : \mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$, где a, b, c, f – заданные функции на всей плоскости, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$. Оператор $\mathcal{L}^{(1)}$ рассматриваем как функцию $\mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ от переменных $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, которая удовлетворяет следующему условию Липшица.

Условие 1. *Для любого* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ *существует константа* $L \in \mathbb{R}$, *для которой для любых* $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ *и* $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ *из* $\mathbb{R}^3$ *выполняется неравенство*

$$|\mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x},\xi)-\mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta})|\leqslant L|\xi-\boldsymbol{\eta}|, \tag{2}$$

где $|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|=\left(\sum_{j=1}^{3}(\xi_j-\eta_j)^2\right)^{1/2}$.

Условие 2. *На всей плоскости* $\mathbb{R}^2$ *уравнение* (1) *является гиперболическим* [1], *т. е. дискриминант, составленный из коэффициентов главной части его является положительным, т. е.*

$$b^2(\boldsymbol{x})-a(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x})\geqslant A>0 \tag{3}$$

для любого $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ *и некоторой константы* A *из множества действительных чисел* $\mathbb{R}$.

Будем считать, что коэффициент $a(\boldsymbol{x})\neq 0$ или $c(\boldsymbol{x})\neq 0$ (если $a(\boldsymbol{x})=c(\boldsymbol{x})=0$, то мы уже имеем второй канонический вид уравнения (1)). Из условия 2 следует, что уравнение (1) имеет два семейства характеристик $\varphi^{(1)}(\boldsymbol{x})=C_1$ и $\varphi^{(2)}(\boldsymbol{x})=C_2$, которые являются решениями соответствующего уравнения характеристик

$$a(\boldsymbol{x})(\mathrm{d}x_2)^2-2b(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2+c(\boldsymbol{x})(\mathrm{d}x_1)^2=0. \tag{4}$$

К уравнению (1) присоединим условия

$$u(\boldsymbol{x})|_{\gamma^{(1)}}=\psi^{(1)}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\gamma^{(1)}, \tag{5}$$

$$u(\boldsymbol{x})|_{\gamma^{(2)}}=\psi^{(2)}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\gamma^{(2)}, \tag{6}$$

которые задаются на характеристике $\gamma^{(1)}=\{\boldsymbol{x}\,|\,\varphi^{(2)}(\boldsymbol{x})=C_2^{(0)}\}$ и некоторой линии $\gamma^{(2)}=\{\boldsymbol{x}\,|\,x_2=\mu(x_1)\}$, $\mu\in C^2(\mathbb{R})$, которая выбирается таким образом, чтобы она пересекалась с $\gamma^{(1)}$ только в одной точке $M^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)})\in\mathbb{R}^2$, $x_1\in\mathbb{R}$, рис. 1. Здесь $a(\boldsymbol{x})\neq 0$, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$. Если $c(\boldsymbol{x})\neq 0$, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$, то линию $\gamma^{(2)}$ можно представить в виде $\gamma^{(2)}=\{\boldsymbol{x}\,|\,x_1=\tilde{\mu}(x_2)\}$, $\tilde{\mu}\in C^2(\mathbb{R})$. Если для некоторых $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ $a(\boldsymbol{x})=0$, а для других $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ $c(\boldsymbol{x})=0$, но $a^2(\boldsymbol{x})+c^2(\boldsymbol{x})\neq 0$, то в этом случае рассматриваем в совокупности предыдущие случаи.

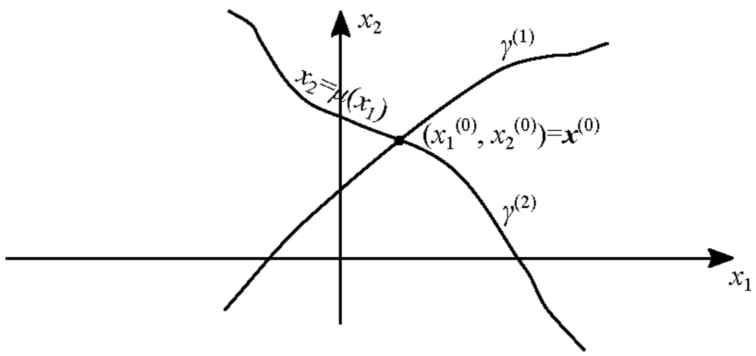

Рис. 1

Определение 1. *Функцию* u *из класса* $C^2(\mathbb{R}^2)$ *назовем классическим решением задачи* (1), (5), (6), *если она удовлетворяет уравнению* (1) *и условиям* (5), (6).

2. Интегральное уравнение для задачи П-1. Пусть $a(\boldsymbol{x})\neq 0$ для любых независимых переменных $\boldsymbol{x}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ и заданные функции уравнения (1) достаточно гладкие, например, a, b, c, $\mathcal{L}^{(1)}$ являются функциями из класса $C^2(\mathbb{R}^2)$. Согласно условию 2 уравнение (4) имеет два семейства характеристик [1]

$$\varphi^{(j)}(\boldsymbol{x})=C_j,\quad j=1,2.$$

Через полученные функции $\varphi^{(j)}$ делаем замену независимых переменных $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)$

$$y_1=\varphi^{(1)}(\boldsymbol{x}),\quad y_2=\varphi^{(2)}(\boldsymbol{x}). \tag{7}$$

Замена (7) является невырожденной [1] и $y_j \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, из (7) имеем обратную замену, т. е.

$$x_j = \tilde{\varphi}^{(j)}(\boldsymbol{y}), \quad j = 1,2.$$

С помощью замены (7) относительно функции $v(\boldsymbol{y}) = u(\boldsymbol{x})$ уравнение приведется ко второму каноническому виду

$$\partial_{y_1}\partial_{y_2} v + \mathcal{L}^{(2)}(\boldsymbol{y}, v) = g(\boldsymbol{y}). \tag{8}$$

Условия (5), (6) преобразуются следующим образом:

$$v(y_1, y_2 = C^{(0)}) = \xi^{(1)}(y_1), \quad y_1 \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

$$v(y_1 = \nu(y_2), y_2) = \xi^{(2)}(y_2), \quad y_2 \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

где $y_1 = \nu(y_2)$ – линия, в которую переходит $\gamma^{(2)}$ при замене (7) в системе координат y_1 и y_2. На линию $\gamma^{(2)}$, а следовательно, и на функцию ν, налагаем ограничения в виде условия.

Условие 3. *Линия* $\gamma^{(2)}$ *такова, что функция* ν *из класса* $C^2(\mathbb{R})$ *имеет обратную функцию* $y_2 = \nu^{-1}(y_1)$ *и производная* $\mathrm{d}\nu^{-1} \neq 0$ *для любого значения* $y_1 \in \mathbb{R}$, *рис.* 2.

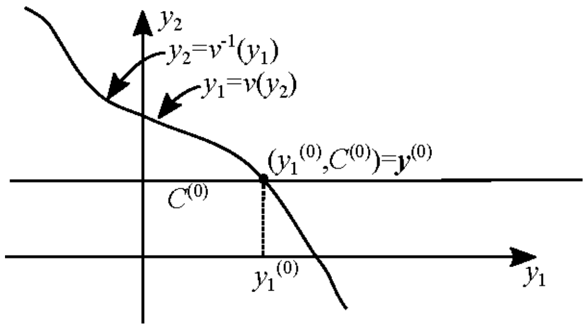

Рис. 2

Так как замена (7) является невырожденной, т. е. якобиан не равен нулю для всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, то оператор $\mathcal{L}^{(2)}$ удовлетворяет условию 1, возможно с другой константой L.

Теорема 1. *Пусть функции* a, b, c, $\mathcal{L}^{(1)}$, f *из класса* $C^1(\mathbb{R}^2)$, $\psi^{(j)}$, $j = 1,2$, *– из класса* $C^2(\mathbb{R})$. *Если* u *является классическим решением задачи* (1), (5), (6), *то* $v(\boldsymbol{y}) = u(\boldsymbol{x})$ *является классическим решением задачи* (8)–(10). *И наоборот, классическое решение задачи* (8)–(10) *является классическим решением* $u(\boldsymbol{x}) = v(\boldsymbol{y})$ *задачи* (1), (5), (6).

Доказательство следует из того, что замена (7) является невырожденной, и того, что заданные функции рассматриваемой задачи (1), (5), (6) достаточно гладкие (последнее будет доказано позже при конструкции классического решения задачи (8)–(10)).

Так как u – классическое решение задачи (1), (5), (6), то

$$\psi^{(1)}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \psi^{(2)}(\boldsymbol{x}^{(0)}). \tag{11}$$

Будет доказано, что условие (11) является и достаточным для того, чтобы решение $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, и для решения задачи (8)–(10) имеем условие согласования

$$\xi^{(1)}(y_1^{(0)}) = \xi^{(2)}(C^{(0)}). \tag{12}$$

Условия согласования (11) (условие (12)) является не только необходимым, но и достаточным условием существования классического решения задачи (1), (5), (6) (задачи (8)–(10)). Достаточность этих условий будет доказана при исследовании классического решения задачи (8)–(10).

Таким образом, рассматриваем классическое решение задачи (8)–(10) (см. также [1, п. 4.7]).

Вводим дополнительные обозначения и функции следующим образом:

$$\partial_{y_1} v(\boldsymbol{y}) = w^{(1)}(\boldsymbol{y}), \quad \partial_{y_2} v(\boldsymbol{y}) = w^{(2)}(\boldsymbol{y}).$$

Теперь уравнение (8) в новых обозначениях запишется в виде

$$\partial_{y_2} w^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)}(\boldsymbol{y}, v, w^{(1)}, w^{(2)}) = g(\boldsymbol{y}), \tag{13}$$

или

$$\partial_{y_1} w^{(2)} + \mathcal{L}^{(2)}(\boldsymbol{y}, v, w^{(1)}, w^{(2)}) = g(\boldsymbol{y}). \tag{14}$$

Запишем уравнения (13), (14) в интегральном виде через функции $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$, используя условия (9), (10). В результате получим систему интегральных уравнений второго рода

$$w^{(1)}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}\xi^{(2)}(y_1) + \int_{C^{(0)}}^{y_2} (g(y_1, z) - \mathcal{L}^{(2)}(y_1, z, v(y_1, z), w^{(1)}(y_1, z), w^{(2)}(y_1, z)))\mathrm{d}z,$$

$$w^{(2)}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}\xi^{(1)}(y_2) + \int_{\nu^{-1}(y_1)}^{y_1} (g(z, y_2) - \mathcal{L}^{(2)}(z, y_2, v(z, y_2), w^{(1)}(z, y_2), w^{(2)}(z, y_2)))\mathrm{d}z, \tag{15}$$

$$v(\boldsymbol{y}) = \xi^{(2)}(y_2) + \int_{C^{(0)}}^{y_2} w^{(2)}(y_1, z)\mathrm{d}z.$$

Наряду с системой (15), рассмотрим и эквивалентную ей систему, состоящую из первых двух уравнений системы (15) и уравнения

$$v(\boldsymbol{y}) = \xi^{(1)}(y_1) + \int_{\nu^{-1}(y_1)}^{y_1} w^{(1)}(z, y_2)\mathrm{d}z,$$

которая потребуется нам в дальнейшем при доказательстве теоремы 3 для установления гладкости вторых производных функции v.

Теорема 2. *Пусть* $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $w^{(1)}, w^{(2)}, a, b, c, f, \mathcal{L}^{(1)} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\psi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$. *Тогда задача* (8)–(10) *и система уравнений* (15) *эквивалентны.*

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству соответствующего утверждения из книги [1].

Теорема 3. *Если* $a, b, c, \mathcal{L}^{(1)}, f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\psi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$, *то единственное решение* $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $w^{(1)}, w^{(2)} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ *системы уравнений* (15) *существует, а функция* v *является решением задачи* (8)–(10)*, тогда и только тогда, когда выполняется условие согласования* (12).

Доказательство. Применим метод последовательных приближений. За нулевое приближение системы (15) возьмем $w_0^{(1)} = \mathrm{d}\xi^{(2)}$, $w_0^{(2)} = \mathrm{d}\xi^{(1)}$, $v_0 = \xi^{(2)}$. Следующие приближения вычисляются по формуле

$$w_k^{(1)}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}\xi^{(2)}(y_1) + \int_{y_2^{(0)}}^{y_2} (g(y_1, z) - \mathcal{L}^{(2)}(y_1, z, v_{k-1}(y_1, z), w_{k-1}^{(1)}(y_1, z), w_{k-1}^{(2)}(y_1, z)))\mathrm{d}z,$$

$$w_k^{(2)}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}\xi^{(1)}(y_2) + \int_{y_1^{(0)}}^{y_1} (g(z, y_2) - \mathcal{L}^{(2)}(z, y_2, v_{k-1}(z, y_2), w_{k-1}^{(1)}(z, y_2), w_{k-1}^{(2)}(z, y_2)))\mathrm{d}z, \tag{16}$$

$$v_k(\boldsymbol{y}) = \xi^{(2)}(y_2) + \int_{y_2^{(0)}}^{y_2} w_{k-1}^{(2)}(y_1, z)\mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Пусть $\Omega^{(\lambda)} \subset \mathbb{R}^2$, $\lambda = 1, 2, \ldots,$ – подобласти в $\mathbb{R}^2$ такие, что $\bigcup_{\lambda=1}^{\infty} \Omega^{(\lambda)} = \mathbb{R}^2$, $\Omega^{(\lambda)} \subset \Omega^{(\tilde{\lambda})}$, $\lambda < \tilde{\lambda}$, $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$ – компактное множество в $\mathbb{R}^2$. Докажем равномерную сходимость последовательностей $\{w_k^{(1)}, w_k^{(2)}, v_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$.

Путем вычитания предыдущего приближения из последующего получим соотношения

$$w_{k+1}^{(1)}-w_k^{(1)}=-\int\limits_{y_2^{(0)}}^{y_2}(\mathcal{L}^{(2)}(y_1,z,v_k(y_1,z),w_k^{(1)}(y_1,z),w_k^{(2)}(y_1,z))-$$

$$-\mathcal{L}^{(2)}(y_1,z,v_{k-1}(y_1,z),w_{k-1}^{(1)}(y_1,z),w_{k-1}^{(2)}(y_1,z)))\mathrm{d}z,$$

$$w_{k+1}^{(2)}-w_k^{(2)}=-\int\limits_{y_1^{(0)}}^{y_1}(\mathcal{L}^{(2)}(z,y_2,v_k(z,y_2),w_k^{(1)}(z,y_2),w_k^{(2)}(z,y_2))- \tag{17}$$

$$-\mathcal{L}^{(2)}(z,y_2,v_{k-1}(z,y_2),w_{k-1}^{(1)}(z,y_2),w_{k-1}^{(2)}(z,y_2)))\mathrm{d}z,$$

$$v_{k+1}-v_k=\int\limits_{y_2^{(0)}}^{y_2}(w_k^{(2)}-w_{k-1}^{(2)})(y_1,z)\mathrm{d}z,\quad k=1,2,\ldots.$$

Покажем, что разности $|w_{k+1}^{(1)}-w_k^{(1)}|,\ |w_{k+1}^{(2)}-w_k^{(2)}|,\ |v_{k+1}-v_k|$ удовлетворяют неравенствам

$$|w_{k+1}^{(1)}-w_k^{(1)}|,\ |w_{k+1}^{(2)}-w_k^{(2)}|,\ |v_{k+1}-v_k|\leqslant L^kB\frac{(y_1+y_2-y_1^{(0)}-y_2^{(0)})^k}{k!},\quad k=1,2,\ldots, \tag{18}$$

где B – некоторая постоянная. При $k=0$ неравенство (18) легко проверяется, так как

$$w_1^{(1)}-w_0^{(1)}=-\int\limits_{y_2^{(0)}}^{y_2}\mathcal{L}^{(2)}(y_1,z,\xi^{(2)}(y_1,z),\mathrm{d}\xi^{(2)}(y_1,z),\mathrm{d}\xi^{(1)}(y_1,z))\mathrm{d}z,$$

$$w_1^{(2)}-w_0^{(2)}=-\int\limits_{y_1^{(0)}}^{y_1}\mathcal{L}^{(2)}(z,y_2,\xi^{(2)}(z,y_2),\mathrm{d}\xi^{(2)}(z,y_2),\mathrm{d}\xi^{(1)}(z,y_2))\mathrm{d}z, \tag{19}$$

$$v_1-v_0=\int\limits_{y_2^{(0)}}^{y_2}\mathrm{d}\xi^{(1)}(z)\mathrm{d}z.$$

Оценка (18) сразу видна, если выбрать в (19) число B достаточно большим, которое зависит от функций $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, $\mathcal{L}^{(2)}$ и размера области $\Omega^{(\lambda)}$. Из (17) для $k=1,2,\ldots$ имеем

$$|w_{k+1}^{(1)}-w_k^{(1)}|\leqslant\int\limits_{y_2^{(0)}}^{y_2}L^{k-1}B\frac{(y_1+z-y_1^{(0)}-y_2^{(0)})^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{d}z\leqslant$$

$$\leqslant L^kB\frac{(y_1+z-y_1^{(0)}-y_2^{(0)})^k}{k!}\Bigg|_{y_2^{(0)}}^{y_2}\leqslant L^kB\frac{(y_1+y_2-y_1^{(0)}-y_2^{(0)})^k}{k!}.$$

Аналогично оцениваются разности $|w_{k+1}^{(2)}-w_k^{(2)}|$ и $|v_{k+1}-v_k|$. Заметим, что

$$w_k^{(1)}=w_0^{(1)}+\sum_{j=1}^k(w_j^{(1)}-w_{j-1}^{(1)}),\quad w_k^{(2)}=w_0^{(2)}+\sum_{j=1}^k(w_j^{(2)}-w_{j-1}^{(2)}),\quad v_k=v_0+\sum_{j=1}^k(v_j-v_{j-1}).$$

Из оценок (17) следует абсолютная и равномерная сходимость рядов

$$w_0^{(1)}+\sum_{k=1}^\infty(w_k^{(1)}-w_{k-1}^{(1)}),\quad w_0^{(2)}+\sum_{k=1}^\infty(w_k^{(2)}-w_{k-1}^{(2)}),\quad v_0+\sum_{k=1}^\infty(v_k-v_{k-1})$$

на компактном множестве $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$, члены которых по абсолютной величине меньше членов равномерно сходящегося ряда

$$B+B\sum_{k=0}^\infty L^k\frac{(y_1+y_2-y_1^{(0)}-y_2^{(0)})^k}{k!}=B(1+e^{L(y_1+y_2-y_1^{(0)}-y_2^{(0)})}).$$

Таким образом, последовательные приближения $\{w_k^{(1)},w_k^{(2)},v_k\}$ на $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$ равномерно стремятся к непрерывным функциям $w^{(1)},w^{(2)},v:\mathbb{R}^2\supset\overline{\Omega^{(\lambda)}}\ni\boldsymbol{y}\to w^{(1)}(\boldsymbol{y}),w^{(2)}(\boldsymbol{y}),v(\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}$ соответственно. Переходя к пределу в (16) [11] при $k\to\infty$, получим, что $w_k^{(1)},w_k^{(2)},v_k$ являются решением системы (15).

Докажем единственность решения. Предположим, что существуют два решения системы (15) $w^{(1)}, w^{(2)}, v$ и $W^{(1)}, W^{(2)}, V$, $\widetilde{w}^{(1)} = W^{(1)} - w^{(1)}$, $\widetilde{w}^{(2)} = W^{(2)} - w^{(2)}$, $\tilde{v} = V - v$. Тогда

$$\widetilde{w}^{(1)} = -\int_{y_2^{(0)}}^{y_2} (\mathcal{L}^{(2)}(y_1, z, V(y_1, z), W^{(1)}(y_1, z), W^{(2)}(y_1, z)) - \mathcal{L}^{(2)}(y_1, z, v(y_1, z), w^{(1)}(y_1, z), w^{(2)}(y_1, z)))\mathrm{d}z,$$

$$\widetilde{w}^{(2)} = -\int_{y_1^{(0)}}^{y_1} (\mathcal{L}^{(2)}(z, y_2, V(z, y_2), W^{(1)}(z, y_2), W^{(2)}(z, y_2)) - \qquad (20)$$

$$-\mathcal{L}^{(2)}(z, y_2, v(z, y_2), w^{(1)}(z, y_2), w^{(2)}(z, y_2)))\mathrm{d}z,$$

$$\tilde{v} = \int_{y_2^{(0)}}^{y_2} \widetilde{w}^{(2)}(y_1, z)\mathrm{d}z.$$

Функции $\widetilde{w}^{(1)}, \widetilde{w}^{(2)}, \tilde{v} \in C(\overline{\Omega^{(\lambda)}})$. Поэтому $|\widetilde{w}^{(1)}|$, $|\widetilde{w}^{(2)}|$, $|\tilde{v}| \leqslant D$, D – некоторая постоянная. Из (19) имеем

$$|\widetilde{w}^{(1)}(\boldsymbol{y})| \leqslant \int_{y_2^{(0)}}^{y_2} LD\mathrm{d}z \leqslant LD(y_1 - y_1^{(0)}) \leqslant LD\frac{y_1 + y_2 - y_1^{(0)} - y_2^{(0)}}{1!}.$$

Такие же оценки справедливы и для $\widetilde{w}^{(2)}$ и $\tilde{v}$. Применяя метод математической индукции, получим

$$|\widetilde{w}^{(1)}|,\ |\widetilde{w}^{(2)}|,\ |\tilde{v}| \leqslant L^k D\frac{(y_1 + y_2 - y_1^{(0)} - y_2^{(0)})^k}{k!}$$

для любого натурального k и любого $\boldsymbol{y} \in \overline{\Omega^{(\lambda)}}$. Отсюда следует, что $\widetilde{w}^{(1)} \equiv \widetilde{w}^{(2)} \equiv \tilde{v} \equiv 0$ в $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$, если перейти к пределу при $k \to \infty$.

Таким образом, мы доказали утверждение теоремы 3 для системы (15) в подобласти $\Omega^{(\lambda)}$. Поскольку система $\{\Omega^{(\lambda)}\}_{\lambda=1}^{\infty}$ является покрытием плоскости $\mathbb{R}^2$, то отсюда получаем доказываемое утверждение теоремы 3 для системы (15). Достаточность условий согласования (11) следует из интегрального представления системы (15). Из предыдущего доказательства следует, что функции v, $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ из класса непрерывных функций на всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Поскольку эти функции являются решениями систем (15) и эквивалентной ей и эти системы интегральных уравнений Вольтерры второго рода, то отсюда очевидно следует, что $w^{(j)} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $j = 1, 2$, а $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Теорема 3 доказана.

3. Постановка задачи П-2. На плоскости $\mathbb{R}^2$ независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ рассмотрим область Q, которая находится между характеристикой $\gamma^{(1)}$ и линией $\gamma^{(2)}$, $x_1 > x_1^{(0)}$, как показано на рис. 3.

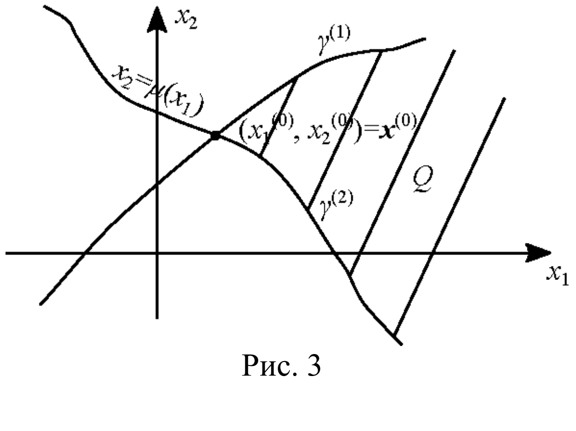

Рис. 3

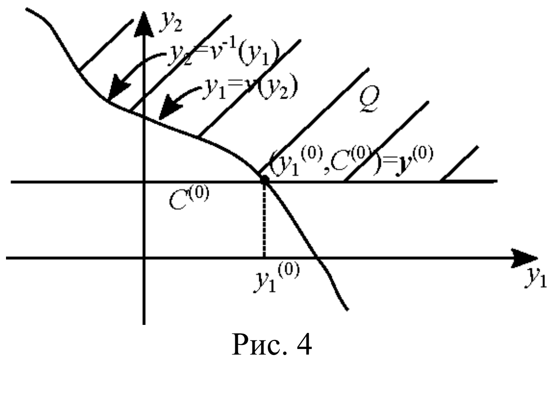

Рис. 4

Задача П-2 состоит в том, чтобы найти решение $u: Q \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ уравнения (1) в области Q, удовлетворяющее условиям

$$u(\boldsymbol{x})|_{\gamma^{(1)}} = \psi^{(1)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \gamma^{(1)}, \quad x_1 > x_1^{(0)}, \tag{21}$$

$$u(\boldsymbol{x})|_{\gamma^{(2)}} = \psi^{(2)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \gamma^{(2)}, \quad x_1 > x_1^{(0)}. \tag{22}$$

4. Интегральное уравнение для задачи П-2. После замены переменных (7) условия (21) и (22) преобразуются следующим образом (см. рис. 4):

$$v(y_1, y_2 = C^{(0)}) = \xi^{(1)}(y_1), \quad y_1 > y_1^{(0)}, \tag{23}$$

$$v(y_1 = \nu(y_2), y_2) = \xi^{(2)}(y_2), \quad y_2 > C^{(0)}. \tag{24}$$

Теорема 4. *Пусть функции* a, b, c, $\mathcal{L}^{(1)}$, f *из класса* $C^1(\mathbb{R}^2)$, $\psi^{(j)}$, $j = 1, 2$, *– из класса* $C^2(\mathbb{R})$. *Если* u *является классическим решением задачи* (1), (21), (22), *то* $v(\boldsymbol{y}) = u(\boldsymbol{x})$ *является классическим решением задачи* (8), (23), (24). *И наоборот, классическое решение задачи* (8), (23), (24) *является классическим решением* $u(\boldsymbol{x}) = v(\boldsymbol{y})$ *задачи* (1), (21), (22).

Доказывается теорема 4 аналогично теореме 1.

Так как u – классическое решение задачи (1), (21), (22), то

$$\psi^{(1)}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \psi^{(2)}(\boldsymbol{x}^{(0)}). \tag{25}$$

Следовательно, и для решения задачи (8), (23), (24) имеем условие согласования

$$\xi^{(1)}(y_1^{(0)}) = \xi^{(2)}(C^{(0)}). \tag{26}$$

Условия согласования (25) (условие (26)) являются не только необходимым, но и достаточным условием существования классического решения задачи (1), (21), (22) (задачи (8), (23), (24)). Достаточность этих условий будет доказана при исследовании классического решения задачи (8), (23), (24).

Таким образом, рассматриваем классическое решение задачи (8), (23), (24).

Вводим дополнительные обозначения и функции следующим образом:

$$\partial_{y_1} v(\boldsymbol{y}) = w^{(1)}(\boldsymbol{y}), \quad \partial_{y_2} v(\boldsymbol{y}) = w^{(2)}(\boldsymbol{y}).$$

Теперь уравнение (8) в новых обозначениях запишется в виде

$$\partial_{y_2} w^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)}(\boldsymbol{y}, v, w^{(1)}, w^{(2)}) = g(\boldsymbol{y}), \tag{27}$$

или

$$\partial_{y_1} w^{(2)} + \mathcal{L}^{(2)}(\boldsymbol{y}, v, w^{(1)}, w^{(2)}) = g(\boldsymbol{y}). \tag{28}$$

Запишем уравнения (27), (28) в интегральном виде через функции $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$, используя условия (23), (24). В результате получим систему интегральных уравнений второго рода

$$w^{(1)}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}\xi^{(2)}(y_1) + \int_{C^{(0)}}^{y_2} (g(y_1, z) - \mathcal{L}^{(2)}(y_1, z, v(y_1, z), w^{(1)}(y_1, z), w^{(2)}(y_1, z)))\mathrm{d}z,$$

$$w^{(2)}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}\xi^{(1)}(y_2) + \int_{\nu^{-1}(y_1)}^{y_1} (g(z, y_2) - \mathcal{L}^{(2)}(z, y_2, v(z, y_2), w^{(1)}(z, y_2), w^{(2)}(z, y_2)))\mathrm{d}z, \tag{29}$$

$$v(\boldsymbol{y}) = \xi^{(2)}(y_2) + \int_{C^{(0)}}^{y_2} w^{(2)}(y_1, z)\mathrm{d}z.$$

Вместо последнего уравнения в системе (29) можно рассматривать уравнение

$$v(\boldsymbol{y}) = \xi^{(1)}(y_1) + \int_{\nu^{-1}(y_1)}^{y_1} w^{(1)}(z, y_2)\mathrm{d}z.$$

Теорема 5. *Задача* (8), (23), (24) *и система уравнений* (29) *эквивалентны, если* $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $w^{(1)}, w^{(2)}$, a, b, c, $\mathcal{L}^{(1)}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\psi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$.

Теорема 6. *Если* $a, b, c, \mathcal{L}^{(1)}, f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\psi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R})$, $j=1,2$, *то единственное решение* $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $w^{(1)}, w^{(2)} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ *системы уравнений* (29) *существует, а функция* v *является решением задачи* (8), (23), (24), *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования* (26).

Доказательство. Применим метод последовательных приближений. За нулевое приближение системы (29) возьмем $w_0^{(1)} = \mathrm{d}\xi^{(2)}$, $w_0^{(2)} = \mathrm{d}\xi^{(1)}$, $v_0 = \xi^{(2)}$. Следующие приближения вычисляются по формуле

$$w_k^{(1)}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}\xi^{(2)}(y_1) + \int\limits_{C^{(0)}}^{y_2} (g(y_1,z) - \mathcal{L}^{(2)}(y_1,z,v_{k-1}(y_1,z), w_{k-1}^{(1)}(y_1,z), w_{k-1}^{(2)}(y_1,z)))\mathrm{d}z,$$

$$w_k^{(2)}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}\xi^{(1)}(y_2) + \int\limits_{\nu^{-1}(y_1)}^{y_1} (g(z,y_2) - \mathcal{L}^{(2)}(z,y_2,v_{k-1}(z,y_2), w_{k-1}^{(1)}(z,y_2), w_{k-1}^{(2)}(z,y_2)))\mathrm{d}z, \tag{30}$$

$$v_k(\boldsymbol{y}) = \xi^{(2)}(y_2) + \int\limits_{C^{(0)}}^{y_2} w_{k-1}^{(2)}(y_1,z)\mathrm{d}z, \quad k=1,2,\ldots.$$

Пусть $\Omega^{(\lambda)} \subset \mathbb{R}^2$, $\lambda = 1,2,\ldots$, – подобласти в $\mathbb{R}^2$ такие, что $\bigcup\limits_{\lambda=1}^{\infty} \Omega^{(\lambda)} = \mathbb{R}^2$, $\Omega^{(\lambda)} \subset \Omega^{(\tilde\lambda)}$, $\lambda < \tilde\lambda$, $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$ – компактное множество в $\mathbb{R}^2$. Докажем равномерную сходимость последовательностей $\{w_k^{(1)}, w_k^{(2)}, v_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$.

Путем вычитания предыдущего приближения из последующего получим соотношения

$$\begin{gathered} w_{k+1}^{(1)} - w_k^{(1)} = -\int\limits_{C^{(0)}}^{y_2} (\mathcal{L}^{(2)}(y_1,z,v_k(y_1,z), w_k^{(1)}(y_1,z), w_k^{(2)}(y_1,z)) - \\ -\mathcal{L}^{(2)}(y_1,z,v_{k-1}(y_1,z), w_{k-1}^{(1)}(y_1,z), w_{k-1}^{(2)}(y_1,z)))\mathrm{d}z, \\ w_{k+1}^{(2)} - w_k^{(2)} = -\int\limits_{\nu^{-1}(y_1)}^{y_1} (\mathcal{L}^{(2)}(z,y_2,v_k(z,y_2), w_k^{(1)}(z,y_2), w_k^{(2)}(z,y_2)) - \\ -\mathcal{L}^{(2)}(z,y_2,v_{k-1}(z,y_2), w_{k-1}^{(1)}(z,y_2), w_{k-1}^{(2)}(z,y_2)))\mathrm{d}z, \\ v_{k+1} - v_k = \int\limits_{C^{(0)}}^{y_2} (w_k^{(2)} - w_{k-1}^{(2)})(y_1,z)\mathrm{d}z, \quad k=1,2,\ldots. \end{gathered} \tag{31}$$

Покажем, что разности $|w_{k+1}^{(1)} - w_k^{(1)}|$, $|w_{k+1}^{(2)} - w_k^{(2)}|$, $|v_{k+1} - v_k|$ удовлетворяют неравенствам

$$|w_{k+1}^{(1)} - w_k^{(1)}|,\ |w_{k+1}^{(2)} - w_k^{(2)}|,\ |v_{k+1} - v_k| \leqslant L^k B \frac{(y_1 + y_2 - C^{(0)} - \nu^{-1}(y_1))^k}{k!}, \quad k=1,2,\ldots, \tag{32}$$

где B – некоторая постоянная. При $k=0$ неравенство (32) легко проверяется, так как

$$\begin{gathered} w_1^{(1)} - w_0^{(1)} = -\int\limits_{C^{(0)}}^{y_2} \mathcal{L}^{(2)}(y_1,z,\xi^{(2)}(y_1,z), \mathrm{d}\xi^{(2)}(y_1,z), \mathrm{d}\xi^{(1)}(y_1,z))\mathrm{d}z, \\ w_1^{(2)} - w_0^{(2)} = -\int\limits_{\nu^{-1}(y_1)}^{y_1} \mathcal{L}^{(2)}(z,y_2,\xi^{(2)}(z,y_2), \mathrm{d}\xi^{(2)}(z,y_2), \mathrm{d}\xi^{(1)}(z,y_2))\mathrm{d}z, \\ v_1 - v_0 = \int\limits_{C^{(0)}}^{y_2} \mathrm{d}\xi^{(1)}(z)\mathrm{d}z. \end{gathered} \tag{33}$$

Оценка (32) сразу видна, если выбрать в (33) число B достаточно большим, которое зависит от функций $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, $\mathcal{L}^{(2)}$ и размера области $\Omega^{(\lambda)}$. Из (31) для $k=1,2,\ldots$ имеем

$$|w_{k+1}^{(1)}-w_k^{(1)}|\leqslant\int\limits_{C^{(0)}}^{y_2}L^{k-1}B\frac{(y_1+z-C^{(0)}-\nu^{-1}(y_1))^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{d}z\leqslant L^kB\frac{(y_1+z-C^{(0)}-\nu^{-1}(y_1))^k}{k!}\Big|_{C^{(0)}}^{y_2}\leqslant$$
$$\leqslant L^kB\frac{(y_1+y_2-C^{(0)}-\nu^{-1}(y_1))^k}{k!}.$$

Аналогично оцениваются разности $|w_{k+1}^{(2)}-w_k^{(2)}|$ и $|v_{k+1}-v_k|$. Заметим, что

$$w_k^{(1)}=w_0^{(1)}+\sum_{j=1}^{k}(w_j^{(1)}-w_{j-1}^{(1)}),\quad w_k^{(2)}=w_0^{(2)}+\sum_{j=1}^{k}(w_j^{(2)}-w_{j-1}^{(2)}),\quad v_k=v_0+\sum_{j=1}^{k}(v_j-v_{j-1}).$$

Из оценок (32) следует абсолютная и равномерная сходимость рядов

$$w_0^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}(w_k^{(1)}-w_{k-1}^{(1)}),\quad w_0^{(2)}+\sum_{k=1}^{\infty}(w_k^{(2)}-w_{k-1}^{(2)}),\quad v_0+\sum_{k=1}^{\infty}(v_k-v_{k-1})$$

на компактном множестве $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$, члены которых по абсолютной величине меньше членов равномерно сходящегося ряда

$$B+B\sum_{k=0}^{\infty}L^k\frac{(y_1+y_2-C^{(0)}-\nu^{-1}(y_1))^k}{k!}=B(1+e^{L(y_1+y_2-C^{(0)}-\nu^{-1}(y_1))}).$$

Таким образом, последовательные приближения $\{w_k^{(1)},w_k^{(2)},v_k\}$ на $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$ равномерно стремятся к непрерывным функциям $w^{(1)},w^{(2)},v:\mathbb{R}^2\supset\overline{\Omega^{(\lambda)}}\ni\boldsymbol{y}\to w^{(1)}(\boldsymbol{y}),w^{(2)}(\boldsymbol{y}),v(\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}$ соответственно. Переходя к пределу в (30) [11] при $k\to\infty$, получим, что $w_k^{(1)},w_k^{(2)},v_k$ являются решением системы (29).

Докажем единственность решения. Предположим, что существуют два решения системы (29) $w^{(1)},w^{(2)},v$ и $W^{(1)},W^{(2)},V$, $\widetilde{w}^{(1)}=W^{(1)}-w^{(1)}$, $\widetilde{w}^{(2)}=W^{(2)}-w^{(2)}$, $\tilde{v}=V-v$. Тогда

$$\widetilde{w}^{(1)}=-\int\limits_{C^{(0)}}^{y_2}(\mathcal{L}^{(2)}(y_1,z,V(y_1,z),W^{(1)}(y_1,z),W^{(2)}(y_1,z))-\mathcal{L}^{(2)}(y_1,z,v(y_1,z),w^{(1)}(y_1,z),w^{(2)}(y_1,z)))\mathrm{d}z,$$

$$\widetilde{w}^{(2)}=-\int\limits_{\nu^{-1}(y_1)}^{y_1}(\mathcal{L}^{(2)}(z,y_2,V(z,y_2),W^{(1)}(z,y_2),W^{(2)}(z,y_2))-\qquad(34)$$
$$-\mathcal{L}^{(2)}(z,y_2,v(z,y_2),w^{(1)}(z,y_2),w^{(2)}(z,y_2)))\mathrm{d}z,$$
$$\tilde{v}=\int\limits_{C^{(0)}}^{y_2}\widetilde{w}^{(2)}(y_1,z)\mathrm{d}z.$$

Функции $\widetilde{w}^{(1)},\widetilde{w}^{(2)},\tilde{v}\in C(\overline{\Omega^{(\lambda)}})$. Поэтому $|\widetilde{w}^{(1)}|,|\widetilde{w}^{(2)}|,|\tilde{v}|\leqslant D$, D – некоторая постоянная. Из (33) имеем

$$|\widetilde{w}^{(1)}(\boldsymbol{y})|\leqslant\int\limits_{C^{(0)}}^{y_2}LD\mathrm{d}z\leqslant LD(y_1-\nu^{-1}(y_1))\leqslant LD\frac{y_1+y_2-\nu^{-1}(y_1)-C^{(0)}}{1!}.$$

Такие же оценки справедливы и для $\widetilde{w}^{(2)}$ и $\tilde{v}$. Применяя метод математической индукции, получим

$$|\widetilde{w}^{(1)}|,\ |\widetilde{w}^{(2)}|,\ |\tilde{v}|\leqslant L^kD\frac{(y_1+y_2-\nu^{-1}(y_1)-C^{(0)})^k}{k!}$$

для любого натурального k и любого $\boldsymbol{y}\in\overline{\Omega^{(\lambda)}}$. Отсюда следует, что $\widetilde{w}^{(1)}\equiv\widetilde{w}^{(2)}\equiv\tilde{v}\equiv0$ в $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$, если перейти к пределу при $k\to\infty$.

Таким образом, мы доказали утверждение теоремы 6 для системы (29) в подобласти $\Omega^{(\lambda)}$. Поскольку система $\{\Omega^{(\lambda)}\}_{\lambda=1}^{\infty}$ является покрытием плоскости $\mathbb{R}^2$, то отсюда получаем доказываемое утверждение теоремы 6 для системы (29). Достаточность условий согласования (26) следует из интегрального представления системы (29). Из предыдущего доказательства следует, что функции v, $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ из класса непрерывных функций на всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Поскольку эти функции являются решениями систем (29) и эквивалентной ей и эти системы интегральных уравнений Вольтерры второго рода, то отсюда очевидно следует, что $w^{(j)} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $j = 1, 2$, а $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Теорема 6 доказана.

Аналогичным образом рассматриваются задачи для уравнения (1) в областях $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ (см. рис. 5 и 6 соответственно) и доказываются теоремы, аналогичные теоремам 1–3 и 4–6.

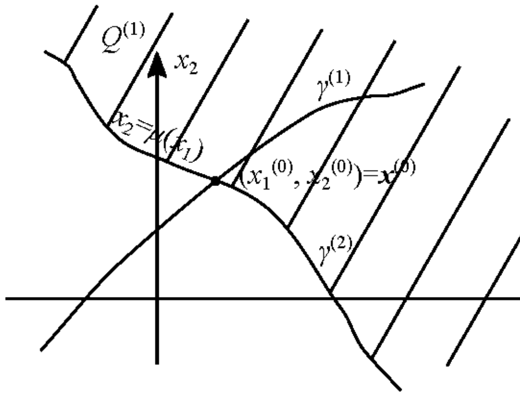

Рис. 5

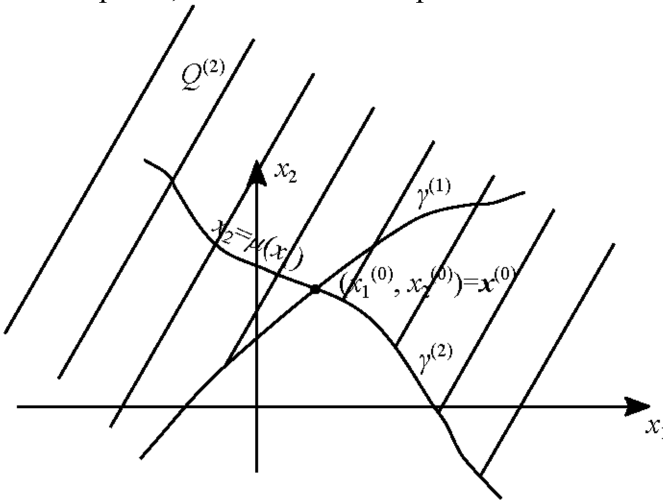

Рис. 6

Литература

1. *Корзюк В. И.* Уравнения математической физики. М.: Ленанд, 2021.

2. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.

3. *Корзюк В. И., Ковнацкая О. А.* Решения задач для волнового уравнения с условиями на характеристиках // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2021. Т. 57, № 2. С. 148–155.

4. *Корзюк В. И., Ковнацкая О. А., Сериков В. П.* Задачи для одномерного волнового уравнения с условиями на характеристиках и нехарактеристических линиях // Тр. Ин-та математики. 2021. Т. 29, № 1–2. С. 94–100.

5. *Корзюк В. И., Ковнацкая О. А., Севастюк В. А.* Задача Гурса на плоскости для квазилинейного гиперболического уравнения // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2022. Т. 66, № 4. С. 391–396.

6. *Корзюк В. И., Столярчук И. И.* Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 1. С. 77–88.

7. *Миронов А. Н.* К методу Римана решения одной смешанной задачи // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2007. № 2. С. 27–32.

8. *Наумов О. Ю.* Задача для уравнения колебания струны с производными по нормали на нехарактеристических частях границы треугольника и специальным условием сопряжения на характеристике // Научные доклады ежегодной межвузовской 55 Научной конференции СамГПУ. Самара, 2001. С. 58–61.

9. *Koeber M.* Inclusion of solutions of initial value problems for quasilinear hyperbolic equations // Math. Res. 1995. Vol. 89. P. 132–137.

10. *Корзюк В. И., Козловская И. С.* Классические решения задач для гиперболических уравнений: курс лекций: в 10 ч. Минск: БГУ, 2017–2023. Ч. 1–4.

11. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Санкт-Петербург: Лань, 2023. Т. 1–3.

V. I. Korzyuk, O. A. Kovnatskaya

Picard problem on the plane for a quasilinear hyperbolic equation of the second order

Summary

Classical solutions of problems for a quasilinear hyperbolic equation of the second order in the case of two independent variables with given conditions for the desired function in combination both on characteristic lines and on non-characteristic lines are obtained in the paper. The problems are reduced to a system of equations with a completely continuous operator. Solutions are constructed using the method of successive approximations. In addition, for each problem considered, the uniqueness of the resulting classical solution is shown. Necessary and sufficient matching conditions of given functions are proved in the case of each of the problems considered in the paper, under which classical solutions exist in the presence of a certain smoothness of the given functions.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 1. С. 81–87

УДК 517.958

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ ПО УПРУГОМУ СТЕРЖНЮ С УПРУГИМ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ НА КОНЦЕ

В. И. Корзюк, Я. В. Рудько

Белорусский государственный университет
e-mail: korzyuk@bsu.by, janycz@yahoo.com
Поступила 06.04.2021

Настоящая работа посвящена построению и строгому обоснованию решения краевой задачи о продольном ударе по однородному упругому стержню постоянного поперечного сечения в случае, когда один из его концов жестко закреплен, а второй конец имеет на конце линейный упругий элемент и подвергся удару некоторым грузом.

1. Введение. В теории колебаний для дифференциальных уравнений возникают краевые задачи, связанные с теорией удара по стержням. Эти задачи имеют не только прикладной, но и чисто математический интерес [1, 2]. В опубликованных к настоящему времени работах (например, [3, 4]), которые посвящены исследованию разрешимости задач о продольном ударе по конечным стержням, предполагается, что концы стержня жестко закреплены или свободны. Что касается аналогичных задач для случая, когда концы стержня имеют упругое закрепление, опубликованных работ об ударе по стержням с построением решения в явном аналитическом виде и с полным и строгим математическим обоснованием решений, по-видимому, не имеется (по крайней мере, авторам статьи неизвестны).

Настоящая работа посвящена построению и строгому обоснованию решения краевой задачи о продольном ударе по однородному упругому стержню постоянного поперечного сечения в случае, когда один из его концов жестко закреплен, а второй конец имеет на конце линейный упругий элемент и подвергся удару некоторым грузом. Близкими к данной статье являются работы [3, 4].

2. Постановка задачи. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ однородный упругий стержень $0 \le x \le l$ постоянного поперечного сечения, конец которого $x = 0$ жестко закреплен, а конец $x = l$ имеет линейный упругий элемент на конце, подвергся удару некоторым грузом по концу $x = l,$ причем в дальнейшем груз остается в соприкосновении со стержнем. Тогда, пренебрегая весом стержня как силы и его возможными вертикальными отклонениями, для определения смещений $u(t,x)$ сечений стержня нужно найти решение уравнения

$$(\partial_t^2 - a^2\partial_x^2)u(t,x) = 0, \quad 0 < t < \infty, \quad 0 < x < l, \tag{1}$$

при начальных условиях

$$u(0,x) = 0, \quad 0 \le x \le l, \quad \partial_t u(0,x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < l, \\ v, & x = l, \end{cases} \tag{2}$$

и граничных условиях

$$u(t,0) = 0, \quad (h + k\partial_x + m\partial_t^2)u(t,l) = 0, \quad 0 \le t < \infty. \tag{3}$$

В задаче (1)–(3) $a^2 = E\rho^{-1}$ (для определенности, $a > 0$), E – модуль упругости стержня, ρ – плотность материала стержня, $h > 0,$ $k > 0,$ $m > 0$ – физические постоянные, характеризующие закрепление конца $x = l$ стержня и $v \in \mathbb{R}$ – физическая постоянная, характеризующая скорость ударившего груза.

Отметим, что значения производных в условиях (2) и (3) задачи (1)–(3) следует понимать не в смысле предельного перехода, а в смысле их значений в точках соответствующих отрезков.

3. Построение формального решения. Применив к задаче (1)–(3) метод контурного интеграла [5], ее формальное решение можно представить в виде

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\oint\limits_{\Gamma_n}\frac{amv\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{px}{a}\right)\exp(pt)}{\Delta(p)}dp, \tag{4}$$

где $\Delta(p)=kp\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{pl}{a}\right)+a\left(h+mp^2\right)\mathrm{sh}\left(\dfrac{pl}{a}\right)$, Γ_n $(n\in\mathbb{N})$ – последовательность расширяющихся замкнутых контуров в комплексной p-плоскости, которые будут описаны позже.

Исследуем корни уравнения $\Delta(p)=0$, записав его в виде

$$\frac{\alpha\omega}{\omega^2-\beta}=\mathrm{tg}(\omega), \tag{5}$$

или

$$\left[\begin{array}{l}\alpha\omega\,\mathrm{ctg}(\omega)=\omega^2-\beta,\\ \qquad\omega=0,\end{array}\right. \tag{6}$$

где $\alpha=\dfrac{kl}{a^2m}$, $\beta=\dfrac{hl^2}{a^2m}$, $p=\dfrac{ai\omega}{l}$.

Следуя [6], можно показать, что уравнение (5) имеет только действительные корни, причем отрицательные равны положительным по абсолютной величине. Качественную их картину можно увидеть, если построить графики функций $y_1(x)=\alpha x\,\mathrm{ctg}(x)$ и $y_2(x)=x^2-\beta$ (рисунок).

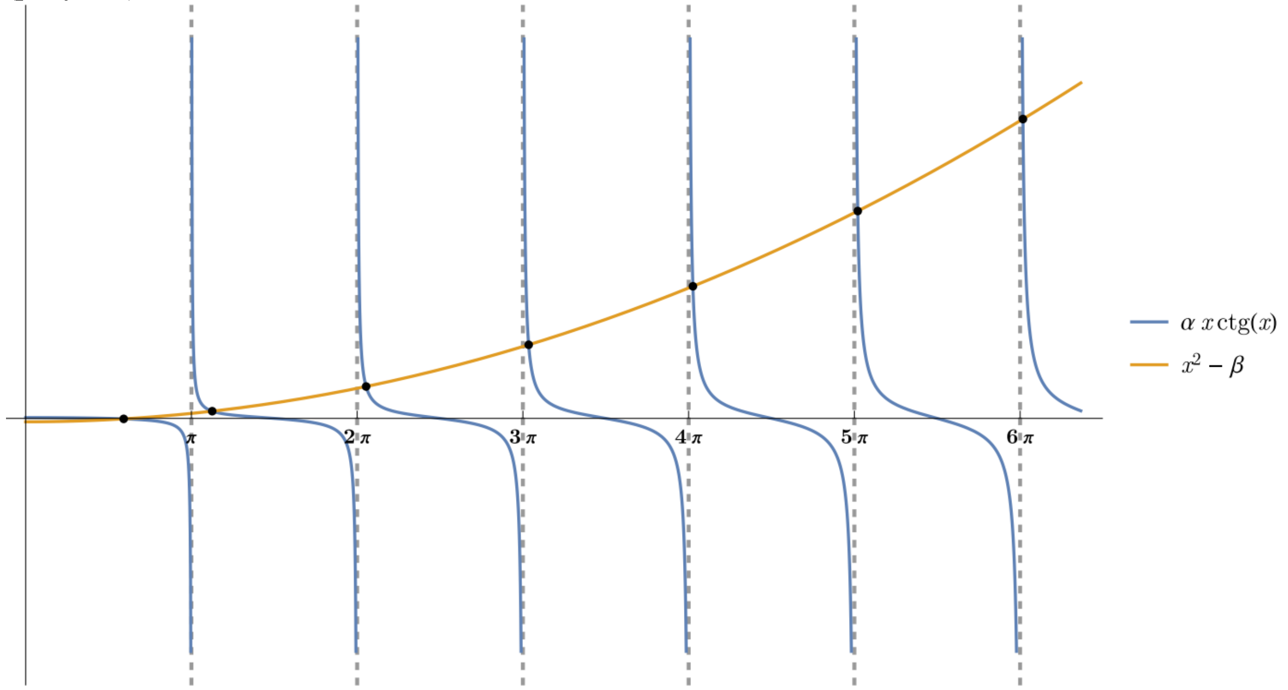

Рис. Графики функций $y_1(x)=\alpha x\,\mathrm{ctg}(x)$ и $y_2(x)=x^2-\beta$ при $\alpha=1$, $\beta=4$

Пусть ω_n $(n=1,2,3,\dots)$ – положительные корни уравнения (5), занумерованные в порядке возрастания. Из графиков (см. рисунок) видно, что для достаточно больших значений n имеет место равенство

$$\omega_n=(n-1)\pi+\varepsilon_n, \tag{7}$$

где $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$. Подставив (7) в (5), получим, что $\dfrac{\alpha((n-1)\pi+\varepsilon_n)}{((n-1)\pi+\varepsilon_n)^2-\beta}=\mathrm{tg}(\varepsilon_n)$. Отсюда следует, что при достаточно больших n

$$\varepsilon_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha((n-1)\pi+\varepsilon_n)}{((n-1)\pi+\varepsilon_n)^2-\beta}\right) = \frac{\alpha}{\pi(n-1)} - \frac{\alpha\varepsilon_n}{\pi^2(n-1)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \tag{8}$$

Полагая $\varepsilon_n = \dfrac{A}{n-1} + \dfrac{B}{(n-1)^2} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, подставим последнюю величину в левую и правую части равенства (8). Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях величины $\dfrac{1}{n-1}$ получим, что $A = \dfrac{\alpha}{\pi} \neq 0$, $B = 0$, и, следовательно, равенство (7) можно записать в виде

$$\omega_n = \pi(n-1) + \frac{\alpha}{\pi(n-1)} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \tag{9}$$

Таким образом, корнями уравнения $\Delta(p) = 0$ являются числа

$$p_n = \frac{a i\omega_n}{l},\ p_{-n} = -\frac{a i\omega_n}{l} \ \text{ и } \ p_0 = 0 \quad (n > 0). \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует, что корни уравнения $\Delta(p) = 0$ лежат внутри полосы $-h \le \mathfrak{Re}(p) \le h$ ($0 < h < \infty$). Возьмем в качестве последовательности контуров Γ_n в формуле (4) контуры в виде прямоугольников с вершинами в точках $h + i\pi n$, $-h + i\pi n$, $-h - i\pi n$, $h - i\pi n$.

Вычислим на основании известной теоремы о вычетах интеграл в (4), получим, что

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname*{Res}_{p=p_n} \frac{amv\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{px}{a}\right)\exp(pt)}{kp\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{pl}{a}\right) + a\left(h + mp^2\right)\mathrm{sh}\left(\dfrac{pl}{a}\right)} = \tag{11}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2almv \sin\left(\dfrac{at\omega_n}{l}\right)\sin\left(\dfrac{x\omega_n}{l}\right)}{(a^2m(\omega_n)^2 - l(k+hl))\cos(\omega_n) + (kl + 2a^2m)\omega_n \sin(\omega_n)}.$$

Функция (11) представляет собой формальное решение задачи (1)–(3) в виде обобщенного тригонометрического ряда.

4. Обоснование решения и его свойства. В силу разрыва во втором из начальных условий (2) задача (1)–(3) не имеет классического решения, поэтому речь будет идти об обобщенном решении.

Определение. *Функция u является обобщенным решением задачи* (1)–(3), *если она непрерывна в* $\overline{Q} = [0,\infty)\times[0,l]$, *имеет в* $\overline{Q}$ *почти всюду непрерывные производные первого порядка, а производные второго порядка представляются в области* $Q = (0,\infty)\times(0,l)$ *обобщенными тригонометрическими рядами, суммируемыми почти всюду методом Чезаро первого порядка (класс таких функций обозначим через* $\mathcal{W}$*) и удовлетворяет почти всюду в* Q *уравнению* (1) *и всюду начальным условиям* (2) *и граничным условиям* (3).

Покажем, что задача (1)–(3) имеет обобщенное в смысле определения и исследуем его свойства.

Приступим к исследованию сходимости рядов для $u(t,x)$, $\partial_t u(t,x)$, $\partial_x u(t,x)$, $\partial_t^2 u(t,x)$, $\partial_t\partial_x u(t,x)$ и $\partial_x^2 u(t,x)$.

Подставив в $\sin\left(\dfrac{x\omega_n}{l}\right)$ и $\cos\left(\dfrac{x\omega_n}{l}\right)$ вместо ω_n их значения (9), получим для достаточно больших значений n следующие асимптотические представления для указанных выше величин

$$\sin\left(\frac{x\omega_n}{l}\right)=\sin\left(\frac{\pi(n-1)x}{l}\right)+\frac{\alpha x}{\pi(n-1)l}\cos\left(\frac{\pi(n-1)x}{l}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad (12)$$

$$\cos\left(\frac{x\omega_n}{l}\right)=\cos\left(\frac{\pi(n-1)x}{l}\right)-\frac{\alpha x}{\pi(n-1)l}\sin\left(\frac{\pi(n-1)x}{l}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right). \qquad (13)$$

Аналогично можно получить асимптотические представления

$$\sin\left(\frac{at\omega_n}{l}\right)=\sin\left(\frac{\pi(n-1)at}{l}\right)+\frac{\alpha at}{\pi(n-1)l}\cos\left(\frac{\pi(n-1)at}{l}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad (14)$$

$$\cos\left(\frac{at\omega_n}{l}\right)=\cos\left(\frac{\pi(n-1)at}{l}\right)-\frac{\alpha at}{\pi(n-1)l}\sin\left(\frac{\pi(n-1)at}{l}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad (15)$$

и асимптотическое представление

$$\frac{2almv}{(a^2m(\omega_n)^2-l(k+hl))\cos(\omega_n)+(kl+2a^2m)\omega_n\sin(\omega_n)}=\frac{2(-1)^{(n-1)}lv}{a(n-1)^2\pi^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right). \qquad (16)$$

Взяв n-й член ряда (11) в правой части равенств, подставим вместо входящих туда величин их асимптотические представления (12), (14) и (16) и, тогда получим, что он в $\overline{Q}$ имеет порядок малости $\frac{1}{n^2}$. Следовательно, ряд для u, состоящий из непрерывных функций в $\overline{Q}$, равномерно сходится в $\overline{Q}$, и u является непрерывной функцией на том множестве. Поэтому ряд, стоящий справа в (11), можно почленно дифференцировать сколько угодно раз по t и x в смысле обобщенных функций [7], и суммы полученных после дифференцирования рядов будут слабыми обобщенными производными функции u в $\overline{Q}$. Продифференцировав левую и правую части равенства (11), частные производные функции u до второго порядка включительно запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a^2mv\omega_n\cos\left(\frac{at\omega_n}{l}\right)\sin\left(\frac{x\omega_n}{l}\right)}{(a^2m(\omega_n)^2-l(k+hl))\cos(\omega_n)+(kl+2a^2m)\omega_n\sin(\omega_n)}, \qquad (17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2amv\omega_n\sin\left(\frac{at\omega_n}{l}\right)\cos\left(\frac{x\omega_n}{l}\right)}{(a^2m(\omega_n)^2-l(k+hl))\cos(\omega_n)+(kl+2a^2m)\omega_n\sin(\omega_n)}, \qquad (18)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2a^3mvl^{-1}(\omega_n)^2\sin\left(\frac{at\omega_n}{l}\right)\sin\left(\frac{x\omega_n}{l}\right)}{(a^2m(\omega_n)^2-l(k+hl))\cos(\omega_n)+(kl+2a^2m)\omega_n\sin(\omega_n)}, \qquad (19)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2amvl^{-1}(\omega_n)^2\sin\left(\frac{at\omega_n}{l}\right)\sin\left(\frac{x\omega_n}{l}\right)}{(a^2m(\omega_n)^2-l(k+hl))\cos(\omega_n)+(kl+2a^2m)\omega_n\sin(\omega_n)}, \qquad (20)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a^2mvl^{-1}(\omega_n)^2\cos\left(\frac{at\omega_n}{l}\right)\cos\left(\frac{x\omega_n}{l}\right)}{(a^2m(\omega_n)^2-l(k+hl))\cos(\omega_n)+(kl+2a^2m)\omega_n\sin(\omega_n)}. \qquad (21)$$

Подставим в правые части равенств (17)–(21) вместо входящих туда под знаком суммы величин их асимптотические представления (12)–(16), тогда после ряда преобразований получим, что

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\phi_t(t,x)+\frac{2v}{\pi}S^{(1)}(t,x), \qquad (22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)=\phi_x(t,x)+\frac{2v}{a\pi}S^{(2)}(t,x), \qquad (23)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)=\phi_{tt}(t,x)-\frac{2av}{l}S^{(*)}(t,x)-\frac{2a^2tv\alpha}{\pi l^2}S^{(1)}(t,x)-\frac{2avx\alpha}{\pi l^2}S^{(2)}(t,x), \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)=\phi_{xx}(t,x)-\frac{2v}{al}S^{(*)}(t,x)-\frac{2tv\alpha}{\pi l^2}S^{(1)}(t,x)-\frac{2vx\alpha}{a\pi l^2}S^{(2)}(t,x), \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}(t,x)=\phi_{tx}(t,x)+\frac{2v}{l}S^{(**)}(t,x)-\frac{2atv\alpha}{\pi l^2}S^{(2)}(t,x)-\frac{2vx\alpha}{\pi l^2}S^{(1)}(t,x), \tag{26}$$

где ϕ_t, ϕ_x, ϕ_{tt}, ϕ_{xx}, ϕ_{tx} – некоторые непрерывные в $\overline{Q}$ функции,

$$S^{(1)}(t,x)=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}\cos\left(\frac{at\pi(n-1)}{l}\right)\sin\left(\frac{x\pi(n-1)}{l}\right), \tag{27}$$

$$S^{(2)}(t,x)=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}\sin\left(\frac{at\pi(n-1)}{l}\right)\cos\left(\frac{x\pi(n-1)}{l}\right), \tag{28}$$

$$S^{(*)}(t,x)=-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{at\pi(n-1)}{l}\right)\sin\left(\frac{x\pi(n-1)}{l}\right), \tag{29}$$

$$S^{(**)}(t,x)=-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cos\left(\frac{at\pi(n-1)}{l}\right)\cos\left(\frac{x\pi(n-1)}{l}\right). \tag{30}$$

Известно [3, 4], что суммы рядов (27) и (28) терпят конечные разрывы на лежащих в $\overline{Q}$ отрезках, которые мы обозначим через $\mathcal{M}$, прямых линий $x+at=(2m+1)l$ и $x-at=-(2m+1)l$ ($m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$), причем значения этих сумм на отрезках $\mathcal{M}$ равны соответственно полусуммам предельных значений, которые принимают величины $S^{(1)}(t,x)$ и $S^{(2)}(t,x)$ при стремлении сверху и снизу к точкам отрезков $\mathcal{M}$ по путям, не касательным к отрезкам $\mathcal{M}$, а ряды (29) и (30) суммируются в $\overline{Q}$ вне отрезков $\mathcal{M}$ к 0 и $-1/2$ соответственно методом Чезаро первого порядка. Следует отметить, что прямые $x+at=(2m+1)l$ и $x-at=-(2m+1)l$ ($m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$) являются характеристиками уравнения (1).

Для дальнейшего удобно ввести обозначения: пусть функция v терпит конечные разрывы на лежащих в некоторой области дугах некоторых кривых линий, тогда через $v|^{+}$ и $v|^{-}$ будем обозначать соответственно предельные значения, которые принимает функция при стремлении сверху и снизу к точкам указанных выше дуг по дугам, не касательным к этим путям.

Из указанных выше свойств сумм рядов (27)–(30) и равенств (22)–(26) получаем, что а) частные производные $\partial_t u$ и $\partial_x u$ терпят на отрезках $\mathcal{M}$ конечные разрывы, которые соответственно равны $(\partial_t u|^{+}+\partial_t u|^{-})/2$ и $(\partial_x u|^{+}+\partial_x u|^{-})/2$; б) ряды, представляющие $\partial_t^2 u$, $\partial_t\partial_x u$ и $\partial_x^2 u$, суммируются в $\overline{Q}$ вне отрезков $\mathcal{M}$ к непрерывным функциям методом Чезаро первого порядка.

Непосредственной подстановкой ряда (11) в уравнение (1) с учетом свойств б) можно убедиться, что уравнение (1) удовлетворяется в $\overline{Q}$ вне отрезков $\mathcal{M}$, т. е. удовлетворяется почти всюду. Аналогично, учитывая свойства а), можно проверить удовлетворение всюду первого из начальных условий (2) и граничных условий (3), причем, как следует из (29) и (24) ряд для частной производной $\partial_t^2 u$ на полупрямой $x=l$, $t\geq 0$, сходится в обычном смысле и его сумма на этой прямой испытывает разрывы первого рода. Выполнение второго из начальных условий (2) проверяется с помощью равенства [8]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2v\omega_n\sin(\omega_n x/l)}{(2+\alpha)\omega_n\sin(\omega_n)+(\omega_n^2-\alpha-\beta)\cos(\omega_n)}=\begin{cases}0, & 0\leq x<l,\\ v, & x=l.\end{cases} \tag{31}$$

Из полученных выше результатов следует, что имеет место теорема.

Теорема. *Задача* (1)–(3) *имеет обобщенное в смысле определения решение* u, *представимое в виде* (11), *непрерывное в* $\overline{Q}$ *и обладающее указанными выше свойствами а) и б).*

Вычислим величину $w_0 = E\lim_{t\to 0}\lim_{x\to l}\partial_x u(t,x)$ (напряжение, возникающее в сечении $x = l$ в момент удара). Так как $\partial_x u$ при $t = 0$ обращается в нуль, что видно из (18), то из (23) и (28) следует, что

$$w_0 = E\lim_{t\to 0}\lim_{x\to l}\frac{2v}{a\pi}S^{(2)}(t,x). \tag{32}$$

Из свойств суммы $S^{(2)}$ ряда (28) следует [3, 4], что во внутренних точках отрезка $[(t=0, x=l),\ (t=2l/a, x=l)]$ $S^{(2)}(t,x) = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{at}{l}-1\right)$, поэтому из (32) получаем

$$w_0 = \frac{2vE}{a\pi}\lim_{t\to 0}\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{at}{l}\right) = v\sqrt{\rho E}.$$

5. Единственность решения. Будем говорить, что две функции, разрывные на некотором подмножестве V замкнутого множества $\overline{D}$, имеют на множестве V одинаковые разрывы (конечные или бесконечные или конечные и бесконечные одновременно), если их разность в $\overline{D}$ является непрерывной функцией. Докажем, что в классе $\mathcal{W}$ задача (1)–(3) не может иметь двух решений $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, обладающих тем свойством, что частные производные до второго порядка включительно от этих функций имеют одинаковые разрывы.

Предположим, что задача (1)–(3) имеет два решения $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, обладающие указанными выше свойствами. Пусть $u = u^{(2)} - u^{(1)}$. Тогда производные $\partial_t u$, $\partial_x u$, $\partial_t^2 u$, $\partial_t\partial_x u$ и $\partial_x^2 u$ обращаются в нуль на лежащих в области в $\overline{Q}$ отрезках прямых линий $x + at = (2m+1)l$ и $x - at = -(2m+1)l$ ($m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$), т. е. функция u будет из класса $C^2(\overline{Q})$. Кроме того, функция u будет решением задачи (1), (3) с добавлением однородных начальных условий

$$u(0,x) = \partial_t u(0,x) = 0, \quad 0 \le x \le l. \tag{33}$$

Функции u, определяемой как решение задачи (1), (3), (33), сопоставим функцию «энергии» E

$$E(t) = \frac{a^2 m}{2k}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,l)\right)^2 + \frac{a^2 h}{2k}\big(u(t,l)\big)^2 + \frac{1}{2}\int_0^l\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2\right]dx. \tag{34}$$

Продифференцируем равенство (34) и запишем результат в виде

$$E'(t) = \frac{a^2 m}{k}\frac{\partial u}{\partial t}(t,l)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,l) + \frac{a^2 h}{k}u(t,l)\frac{\partial u}{\partial t}(t,l) + \tag{35}$$
$$+\int_0^l\left[\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + a^2\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}(t,x)\right]dx.$$

Интегрируя по частям правую часть равенства (35), получаем

$$E'(t) = \frac{a^2}{k}\frac{\partial u}{\partial t}(t,l)\left(m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,l) + hu(t,l) + \frac{\partial u}{\partial x}(t,l)\right) - a^2\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)\frac{\partial u}{\partial t}(t,0) +$$
$$+\int_0^l\left[\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\right)\right]dx.$$

Теперь, пользуясь (1) и (3) ($\partial_t u(t,0) = 0$ следует из $u(t,0) = 0$), получаем что $E'(t) = 0$. Значит $E(t) = \mathrm{const}$. Из начального условия $u(0,x) = 0$ вычисляем $\partial_x u(0,x) = 0$. В таком случае имеет место равенство $E(0) = 0$. А значит, $E \equiv 0$. Отсюда следует, что $\partial_t u = \partial_x u = 0$ в $\overline{Q}$, т. е. $u \equiv \mathrm{const}$ в $\overline{Q}$. Так как $u \in C(\overline{Q})$, то из $u \equiv \mathrm{const}$ и (33) следует, что $u \equiv 0$ в $\overline{Q}$. Из последнего результата и равенства $u = u^{(2)} - u^{(1)}$ следует $u^{(1)} \equiv u^{(2)}$ в $\overline{Q}$.

6. Заключение. В статье было построено методом контурного интеграла обобщенное непрерывное решение в виде обобщенного тригонометрического ряда смешанной задачи для одномерного однородного волнового уравнения в полуполосе, моделирующей колебания упругого стержня, который имеет один жестко закрепленный конец и упруго закрепленный второй конец и подвергся удару по упруго закрепленному концу. Также было строго обосновано существование и единственность такого решения.

Литература

1. *Лазарян В. А.* О динамических усилиях в упряжных приборах однородных поездов при сопротивлениях относительным перемещениям экипажей // Тр. Днепропетр. ин-та инженеров ж.-д. транспорта. 1950. Вып. 20. С. 3–32.

2. *Тверитин А. Н.* Математическое рассмотрение простейшей краевой задачи, связанной с теорией продольного удара по упруговязкому стержню с опертыми концами // Тр. Днепропетр. ин-та инженеров ж.-д. транспорта. 1953. Вып. 23. С. 24–60.

3. *Гайдук С. И.* О некоторых задачах, связанных с теорией продольного удара по стержням // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 26, № 5. С. 865–880.

4. *Гайдук С. И.* Математическое рассмотрение одной задачи о продольном ударе по релаксирующему стержню // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 26, № 4. С. 668–685.

5. *Расулов М. Л.* Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964. – 464 с.

6. *Тверитин А. Н.* Исследование трансцендентного уравнения $\mu \operatorname{ctg} \mu = \alpha\mu^2 - \gamma$ // Тр. Днепропетр. ин-та инженеров ж.-д. транспорта. 1958. Вып. 26. С. 349–367.

7. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. – 320 с.

8. *Тверитин А. Н.* Рассмотрение рядов, связанных с уравнением $\mu \operatorname{ctg} \mu = \alpha\mu^2 - \gamma$ // Тр. Днепропетр. ин-та инженеров ж.-д. транспорта. 1958. Вып. 26: Подвижной состав и энергетическое хозяйство железных дорог. С. 368–411.

V. I. Korzyuk, J. V. Rudzko

A mathematical investigation of one problem of the longitudinal impact on an elastic rod with an elastic attachment at the end

Summary

The present work is devoted to the construction and the rigorous justification of the solution of a boundary value problem of the longitudinal impact on a homogeneous elastic rod of a constant cross-section in the case when one of its ends is rigidly fixed, and the other end has a linear elastic element at the end and was subjected to the impact by some load.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 1. С. 88–100

УДК 512.542

О РАЗРЕШИМОСТИ И ФАКТОРИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ π-РАЗРЕШИМЫХ НЕПРИВОДИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП ПРИМАРНОЙ СТЕПЕНИ. ЧАСТЬ II

А. А. Ядченко

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: yadchenko_56@mail.ru
Поступила 29.11.2022

Работа является второй из серии статей, где для множества π, состоящего из нечетных простых чисел, исследуются конечные π-разрешимые неприводимые комплексные линейные группы степени $2|H|+1$, у которых холловы π-подгруппы H являются TI-подгруппами и не являются нормальными в группах. Цель серии – доказать разрешимость и определить условия факторизации таких групп. Продолжено доказательство теоремы. Установлены дальнейшие свойства минимального контрпримера к теореме.

1. Введение. Исследуются конечные π-разрешимые неприводимые комплексные линейные группы степени $n=2|H|+1$, у которых холлова π-подгруппа H является TI-подгруппой.

В первой части работы [1] были доказаны некоторые предварительные результаты, а также получены некоторые свойства минимального контрпримера Γ к теореме (*), которая является основой доказательства главной теоремы. В данной ее части будет продолжено изучение свойств минимального контрпримера к теореме (*).

Условие 1. Пусть π – множество нечетных простых чисел и G – конечная не π-замкнутая π-разрешимая группа с π-холловой TI-подгруппой H, имеющая точный неприводимый характер χ степени n.

Теорема. *Пусть группа G удовлетворяет условию* 1 *и* $n=2|H|+1>7$. *Тогда n – степень простого числа q, группа G разрешима и, если при $|\pi|=1$ характер χ примитивный, то $G=N_G(H)O_q(G)$.*

2. Некоторые определения, обозначения и предварительные результаты. N – множество натуральных чисел; Z_+ – множество целых неотрицательных чисел; если ψ – характер некоторой подгруппы $X\subseteq G$, то $\mathrm{Irr}(\psi)$ обозначает множество всех неприводимых компонент характера ψ; $\pi=\pi(H)$; $\pi'=\pi(X)\setminus\pi$; $X_{\pi'}$ – холлова π'-подгруппа группы X. Если $X\lhd G$ и φ – неприводимый характер подгруппы X, то условие, что φ – g-инвариантен для некоторого элемента $g\in G\setminus X$, запишем для краткости в виде $I_G(\varphi)\neq X$. Все остальные обозначения и определения обычны и их можно найти, например, в [2] или [3]. Всюду под характером группы будем понимать комплексный характер, а под группой – конечную группу.

Пусть $\Gamma=AB$ – группа с подгруппами A и B, где $B\lhd\Gamma$, $(|A|,|B|)=1$ и $|A|$ нечетен (A – *группа копростых автоморфизмов группы* B). Тогда она удовлетворяет условию теоремы 13.1 [3]. Согласно этой теореме существует взаимно-однозначное соответствие $\pi(B,A):\mathrm{Irr}_A(B)\to\mathrm{Irr}(C_B(A))$ между множеством всех A-инвариантных неприводимых характеров группы B и множеством всех неприводимых характеров подгруппы $C_B(A)$, которое обладает рядом свойств, зависящих, в частности, от свойств подгруппы A. Пусть $\chi\in\mathrm{Irr}_A(B)$. Тогда, по лемме 13.3 [3], существует такой единственный неприводимый характер $\hat{\chi}$ группы Γ, что $\hat{\chi}_B = \chi$ и $A \subseteq \ker(\det \hat{\chi})$. Он называется *каноническим продолжением характера* χ *на группу* Γ. В дальнейшем под $\hat{\chi}$ будем понимать именно такой характер.

Условие (*). Скажем, что для Γ, A, B, C, χ и n выполнено условие (*), если $\Gamma = BA$, где B – нормальная в Γ подгруппа, $(|B|,|A|)=1$, A – группа нечетного порядка, большего 3, которая не является нормальной в группе Γ, $C_B(a) = C_B(A) = C$ для каждого элемента $a \in A^{\#}$, и B имеет точный неприводимый комплексный характер χ степени n, который является a-инвариантным хотя бы для одного элемента $a \in A^{\#}$.

Теорема (*). *Пусть для* Γ, A, B, C, χ *и* $n = 2|A|+1$ *выполнено условие* (*). *Тогда группа* Γ *разрешима,* n *является степенью простого числа* q, *подгруппа* $C_{2'}$ *абелева и, если подгруппа* C *не абелева, то в обозначениях леммы* 2.7 [1] *характер* $\chi_C = \beta + |A|\beta_1$, *где* $\beta(1) = |A|+1$ *и* $\beta_1(1) = 1$ *либо* $\beta(1) = 1$ *и* $\beta_1(1) = 2$. *Также, если* $|\pi| > 1$ *и при* $|\pi| = 1$ *характер* $\hat{\chi}$ *примитивный, то* $G = O_q(G)C$.

Продолжим нумерацию формулировок лемм, начатую в предыдущей части работы [1]. В ней, напомним, мы, в частности, показали, что неприводимый характер $\hat{\chi}$ точный и что $\hat{\chi}(1) = q^{\alpha}$ для некоторого нечетного простого числа q и $\alpha \in N$.

Лемма 3.3. *Пусть* $q \in \pi(n)$, B_q – A*-инвариантная силовская* q*-подгруппа группы* B. *Тогда* $[B_q, A] \not\subseteq C$.

Доказательство. Предположим, что $[B_q, A] \subseteq C$. Поскольку по лемме 2.2 [1] $B_q = [B_q, A]C_{B_q}(A)$, то $B_q \subseteq C$. По упражнению 13.2 [2]

$$\frac{\beta(1)|B:C|}{\chi(1)}$$

– целое число, где β из леммы 2.6 [1] Поскольку $B_q \subseteq C$, то q не делит $|B:C|$. Так как $\chi(1)$ – степень q, то $\chi(1)$ делит $\beta(1)$. Поскольку $\beta(1) \le \chi(1)$, то $\beta(1) = \chi(1)$. Из леммы 2.6 [1] следует, что $k = 0$, $\varepsilon = 1$ и $\hat{\chi}_A = \beta(1)1_A$, т. е. $A \subseteq \ker \hat{\chi}$. Получили противоречие с леммой 3.1 [2]. Значит, $[B_q, A] \not\subseteq C$.

Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Если характер* $\hat{\chi}$ *не является примитивным, то* $\hat{\chi} = \mu^{\Gamma}$ *для линейного характера* μ *такой собственной подгруппы* $X \subseteq \Gamma$, *что* $A \subseteq X$, $A \not\triangleleft X$ *и* $|G:X| = \hat{\chi}(1) = q^{\alpha}$. *При этом* $\hat{\chi}_X = \eta + \theta$, *где* $\eta \ne 0$ *и* θ – *такие компоненты характера* $\hat{\chi}_X$, *что и в лемме* 3.2 [1] *и для которых и для подгруппы* $X_{\pi'}$ *выполняются утверждения* $(1_i)-(1_{vi})$ *леммы* 3.2 [1].

Доказательство. Допустим, что характер $\hat{\chi}$ не является примитивным. Тогда для некоторого неприводимого характера μ собственной подгруппы X группы Γ выполняется утверждение $\hat{\chi} = \mu^{\Gamma}$. Так как

$$\hat{\chi}(1) = |\Gamma : X|\mu(1) = q^{\alpha},$$

то числа $|\Gamma : X|$ и $\mu(1)$ – также являются степенями простого числа q, и мы можем считать, что $A \subseteq X$. Также мы видим, что $B = B_q X$.

Допустим, что $A \triangleleft X$. Тогда $X_{\pi'} \subseteq C$, т. е. $B = B_q C$ и, значит, $|B:C|$ – степень простого числа q. По лемме 2.9 [1] $B = O_q(B)C$. Так как $\chi \in \mathrm{Irr}_A(B)$ имеет степень $2|A|+1$, то нам остается только проанализировать утверждения леммы 2.7 [1] и выбрать для χ_C только те, которые могут выполняться. Это утверждения (1)–(5) и (12). Если это не утверждения (1) и (2), то $C' \subseteq \ker\chi_C = 1,$ ибо все неприводимые компоненты характера χ_C линейные. Стало быть, подгруппа C абелева. Утверждения (1) и (2) сформулированы в теореме (*). Мы замечаем, что теорема (*) верна. Но это противоречит выбору группы Γ.

Поэтому $A \ntriangleleft X$.

Допустим вначале, что $\mu(1) \neq 1.$ Поскольку $\hat{\chi}(1) = 2|A|+1,$ то мы замечаем, что $|\Gamma : X| \not\equiv 1(\bmod |A|).$ Тогда $|B : X_{\pi'}| \not\equiv 1(\bmod |A|)$ и из леммы 2.12 [1] следует, что $B = X_{\pi'}C.$ Поэтому для $a \in A$ получаем, что

$$\hat{\chi}(a) = \sum_{x \in T} \mu^0(xax^{-1}) = |T|\mu(a).$$

Здесь $\mu^0(b) = \mu(b),$ если $b \in X$ и $\mu^0(b) = 0,$ если $b \notin X$ и T – множество представителей всех смежных классов группы Γ по подгруппе X, взятых по одному из каждого класса и $T \subseteq C.$ Поэтому для всех $x \in T$ и для всех $a \in A$ выполняется $\mu^0(xax^{-1}) = \mu(a).$

С другой стороны, по лемме 2.6 [1]

$$\hat{\chi}(a) = k\rho_A(a) + \beta(1)1_A(a) = \beta(1).$$

Значит, $|T|\mu(a) = \beta(1).$ Отсюда следует, что $|T| = |\Gamma : X| = q^{\alpha_2},$ $\alpha_2 < \alpha,$ делит $\beta(1).$ Однако, как следует из значений $\beta(1)$ в формулировке леммы 2.7 [1], это невозможно. В самом деле. Пусть выполняется ее утверждение (1). Тогда $\beta(1) = |A|+1.$ Поскольку

$$\hat{\chi}(1) = 2|A|+1 = 2(|A|+1) - 1 = q^{\alpha},$$

то видим, что q не делит $|A|+1.$ Таким же образом мы убеждаемся в том, что q не делит $\beta(1)$ в каждом из утверждений леммы 2.7 [1] за исключением заключения (15). Однако и оно не может выполняться, ибо в противном случае $A \subseteq \ker\hat{\chi},$ как следует из леммы 2.6 [1]. Это противоречит лемме 3.1 [1]. Остается, что $\mu(1) = 1.$ Тогда $|\Gamma : X| = q^{\alpha}.$

Положим, что $X = \Gamma_1$ и применим лемму 3.2 [1] в ее обозначениях. Понятно, что $\mu \in \mathrm{Irr}(\eta) \subseteq \mathrm{Irr}(\hat{\chi}_X).$

Лемма доказана.

Лемма 3.5. (1) *Если подгруппа C не абелева, то в обозначениях леммы* 2.7 [1] *характер $\chi_C = \beta + |A|\beta_1,$ где $\beta(1) = |A|+1$ и $\beta_1(1) = 1$ либо $\beta(1) = 1$ и $\beta_1(1) = 2.$*

(2) *При этом для каждой не абелевой подгруппы $C_0 = C_{B_1}(A),$ A-инвариантной подгруппы $B_1 \subseteq B$ и A-инвариантного неприводимого характера $\chi_1 = \chi_{B_1}$ справедливо равенство $(\chi_1)_{C_0} = \beta' + |A|\beta_1'$ с неприводимыми компонентами $\beta' = \beta_{C_0}$ и $\beta_1' = (\beta_1)_{C_0}.$*

Доказательство. Допустим, что подгруппа C не является абелевой. Покажем, что характер χ_C имеет одно из только что указанных в утверждении (1) свойств.

Поскольку $\chi(1) = 2|A|+1,$ то для характера χ_C может выполняться только одно из утверждений (1)–(5), (12) или (15) леммы 2.7 [1]. Допустим, что все неприводимые компоненты ξ характера χ_C линейные. Тогда

$$C' \subseteq \cap_{\xi \in Irr(\chi_C)} \ker\xi = \ker\chi_C = 1.$$

Это значит, что подгруппа C абелева, что не так по предположению. Поэтому из указанных утверждений леммы 2.7 [1] могут выполняться только те, в которых присутствует нелинейная неприводимая компонента $\xi.$ Это утверждения (1), (2) или (15).

Если выполняется утверждение (1) или (2), то

$$\chi_C = \beta + |A|\beta_1$$

с $\beta(1) = |A|+1$ и $\beta_1(1) = 1$ – утверждение (1) или $\beta(1) = 1$ и $\beta_1(1) = 2$ – утверждение (2) леммы 2.7 [1].

Согласно случаю (15) леммы 2.7 [1] $\chi_C = \beta$. Тогда в лемме 2.6 [1] $\chi(1) = \beta(1)$ и $k = 0$. Стало быть, $A \subseteq \ker \hat{\chi}$, что противоречит лемме 3.1 [1]. Поэтому этот случай также невозможен.

Утверждение (1) доказано.

Докажем утверждение (2).

Пусть B_1 – A-инвариантная подгруппа из B, $C_0 = C_{B_1}(A)$ – не абелева подгруппа и $\chi_1 = \chi_{B_1} \in \mathrm{Irr}_A(B_1)$.

Если $A \lhd AB_1$, то $A \subseteq C_\Gamma(B_1)$. По упражнению 2.15 [2] $A \subseteq Z(\Gamma)$, что не так.

Поэтому $A \ntriangleleft AB_1$ к характеру $(\chi_1)_{C_0}$ мы можем применить лемму 2.7 [1]. Легко видеть, что выполняется одно из утверждений (1) или (2), т. е.

$$(\chi_1)_{C_0} = \beta' + |A|\beta_1',$$

где $\beta'(1) = |A|+1$ и $\beta_1'(1) = 1$ или $\beta'(1) = 1$ и $\beta_1'(1) = 2$. Поскольку

$$C_0 = C_{B_1}(A) = C \cap B_1 \subseteq C,$$

то

$$(\chi_1)_{C_0} = \chi_{C_0} = \beta_{C_0} + |A|(\beta_1)_{C_0} = \beta' + |A|\beta_1'.$$

Пусть вначале для характера $(\chi_1)_{C_0}$ выполняется утверждение (1) леммы 2.7 [1], т. е. $\beta'(1) = |A|+1$ и $\beta_1'(1) = 1$. Покажем, что и для характера χ_C также выполняется утверждение (1) этой леммы. Так как $\beta_1(1) \leqslant 2 < |A|+1$, то мы видим, что характер β' не может быть неприводимой компонентой характера $(\beta_1)_{C_0}$. Значит, $\beta' = \beta_{C_0}$, $\beta(1) = |A|+1$ и $\beta_1' = (\beta_1)_{C_0}$, $\beta(1) = 1$.

Пусть теперь для характера $(\chi_1)_{C_0}$ выполняется утверждение (2) леммы 2.7 [1], т. е. $\beta'(1) = 1$ и $\beta_1'(1) = 2$. Покажем, что для характера χ_C не может выполняться утверждение (1) этой леммы. Пусть это не так, и на самом деле в нем $\beta(1) = |A|+1$ и $\beta_1(1) = 1$. Тогда, очевидно, $(\beta_{C_0}, \beta_1')_{C_0} \neq 0$ и $((\beta_1)_{C_0}, \beta_1')_{C_0} = 0$. Следовательно,

$$(\chi_{C_0}, \beta_1')_{C_0} = ((\chi_C)_{C_0}, \beta_1')_{C_0} =$$

$$= ((\beta_{C_0} + |A|(\beta_1)_{C_0}), \beta_1')_{C_0} = (\beta_{C_0}, \beta_1')_{C_0} \leqslant \beta(1)/\beta_1'(1) = (|A|+1)/2.$$

Отсюда и из чуть выше выделенного равенства получаем, что

$$|A| = ((\chi_1)_{C_0}, \beta_1')_{C_o} < (\chi_{C_0}, \beta_1')_{C_0} \leqslant (|A|+1)/2.$$

Противоречие. Мы видим, что и в шаге 2 выполняется утверждение (2) леммы 2.7 [1]. Итак, $\beta_{C_0} = \beta'$ и $(\beta_1)_{C_0} = \beta_1'$.

Лемма доказана.

Из утверждения (1) леммы 3.5 вытекает, что для доказательства теоремы (*) нам достаточно установить, что $B = O_q(B)C$ и подгруппа C разрешима.

В леммах 3.6–3.11 мы предположим, что $B = O_q(B)C$ и продолжим изучать свойства минимального контрпримера Γ к теореме (*).

Лемма 3.6. *Предположим, что* $B = O_q(B)C$. *Тогда выполняется каждое из следующих утверждений:*

(1) *характер* $\varphi = \hat{\chi}_{O_q(B)}$ *неприводим и* $\hat{\chi}_{O_q(B)A} = \hat{\varphi}$;

(2) *каждая подгруппа нечетного порядка из* C *абелева.*

Доказательство. Пусть $B = O_q(B)C$. Тогда $O_q(B)A \lhd \Gamma$.

В самом деле. Поскольку $\Gamma = O_q(B)(C\times A)$, то $\gamma = g(c\times a) = (ga)c$ для каждого элемента $\gamma\in\Gamma$ и для некоторых элементов $g\in O_q(B)$, $c\in C$ и $a\in A$, то

$$(O_q(B)A)^\gamma = ((O_q(B)A)^{ga})^c = (O_q(B)A)^c = (O_q(B))^c A^c = O_q(B)A.$$

Поэтому к характеру $\hat{\chi}$ и подгруппе $O_q(B)A$ применима теорема Клиффорда, согласно которой

$$\hat{\chi}(1) = q^\alpha = (|\Gamma : I| = |T|)e\varphi'(1),$$

где $\varphi'\in \mathrm{Irr}(\hat{\chi}_{O_q(B)A})$, $I = I_\Gamma(\varphi')$ – группа инерции характера φ' в группе Γ, e – натуральное число, делящее $\hat{\chi}(1)$ и T – множество представителей всех смежных классов группы Γ по подгруппе I, взятых по одному из каждого класса. Мы видим, что $|T|$ – также степень простого числа q.

Допустим, что $|T|\neq 1$. Тогда $(\varphi')^t(1) < |A|-1$ и по лемме 2.10 [1]

$$A^t\ker(\varphi')^t/\ker(\varphi')^t \lhd O_q(B)A/\ker(\varphi')^t$$

для всех $t\in T$, т. е. $A^t\ker(\varphi')^t \lhd O_q(B)A$ для всех $t\in T$. Поскольку из условия леммы вытекает, что $T\subseteq C$, то $A^t = A$ и, значит, $A\ker(\varphi')^t \lhd O_q(B)A$ для всех $t\in T$. Тогда

$$A = \cap_{t\in T} A\ker(\varphi')^t = A(\cap_{t\in T}\ker(\varphi')^t) \lhd O_q(B)A,$$

ибо

$$(\cap_{t\in T}\ker(\varphi')^t) = \ker\hat{\chi}_{O_q(B)A} = 1.$$

Отсюда следует, что $A\lhd\Gamma$. Это противоречит условию теоремы.

Стало быть, $|T| = 1$. Поэтому $\hat{\chi}_{O_q(B)A} = e\varphi'$. Если $e\neq 1$, то $\varphi'(1) < |A|-1$ и мы с применением леммы 2.10 [1] также получаем, что $A\lhd O_q(B)A$, ибо $\ker\varphi' = 1$. Значит, $A\lhd\Gamma$. Противоречие. Поэтому мы заключаем, что $e = 1$ и, значит,

$$\hat{\chi}_{O_q(B)A} = \varphi'$$

– неприводимый характер группы $O_q(B)A$, а

$$\varphi = (\varphi')_{O_q(B)} \in Irr_A(O_q(B))$$

– A-инвариантный неприводимый характер подгруппы $O_q(B)$. Понятно, что $\hat{\chi}_A = (\varphi')_A$. Поэтому $\varphi' = \hat{\varphi}$, в силу единственности характера $\hat{\varphi}$. Значит,

$$\hat{\chi}_{O_q(B)A} = \hat{\varphi}.$$

Утверждение (1) установлено.

Докажем утверждение (2). Пусть C_0 – подгруппа нечетного порядка из C.

Если $O_q(B)C_0 = B$, то группа B имеет нечетный порядок. Поскольку все неприводимые характеры подгруппы C в этом случае имеют нечетную степень, то для характера χ_C не могут выполняться утверждения (1) и (2) леммы 2.7 [1]. Следовательно, он содержит только линейные неприводимые компоненты. Стало быть, $C'\subseteq\ker\chi_C = 1$. В этом случае подгруппа C и, значит, подгруппа C_0 абелева.

Пусть теперь $B_1 = O_q(B)C_0 \neq B$. Из утверждения (1) доказываемой леммы вытекает, что характер $\chi_1 = \chi_{B_1}$ неприводим. Поскольку подгруппа B_1 имеет нечетный порядок, то все неприводимые характеры подгруппы $C_{B_1}(A)$ имеют нечетную степень. Отсюда и из утверждения (2) леммы 3.5 следует, что подгруппа $C_{B_1}(A)$ абелева. Поэтому и ее подгруппа C_0 абелева.

Лемма доказана.

Пусть подгруппа $B_1 \subseteq B$ – такая A-инвариантная подгруппа, что $B_1 \neq B$, характер $\chi_1 = \chi_{B_1}$ неприводим, A-инвариантен и $A \not\lhd \Gamma_1 = AB_1$. Нетрудно установить, что для Γ_1, A, B_1, $C_{B_1}(A)$, χ_1 и n выполняется условие (*). Так как $\Gamma_1 \neq \Gamma$, то из индукции вытекает, что $B_1 = O_q(B_1)C_{B_1}(A)$ и подгруппа $C_{B_1}(A)$ разрешима. В дальнейшем мы это будем учитывать.

В частности, если $O_q(B) \subseteq B_1$, то из леммы 3.6 вытекает, что характер $\chi_1 = \chi_{B_1}$ неприводим и A-инвариантен, а из леммы 3.3 вытекает, что $A \not\lhd \Gamma_1$.

Лемма 3.7. *Если* $B = O_q(B)C$, *то характер* $\hat{\chi}$ *примитивный.*

Доказательство. Заметим, что, если подгруппа C разрешима, то она содержит холлову $2'$-подгруппу, которая по лемме 3.6 абелева. К тому же $1 \neq Z(O_q)(B) \subseteq Z(\Gamma)$. И мы замечаем, что теорема (*) верна. Но это противоречит выбору группы Γ. Поэтому мы предполагаем, что подгруппа C не является разрешимой.

Допустим, что характер $\hat{\chi}$ импримитивный. По лемме 3.4 $\hat{\chi} = \mu^{\Gamma}$ для линейного характера μ собственной подгруппы $X \subseteq \Gamma$. Мы видим, что

$$\hat{\chi}(1) = 2|A|+1 = |\Gamma : X|\mu(1) = |\Gamma : X| = q^{\alpha}.$$

По закону взаимности Фробениуса для характеров

$$(\hat{\chi}, \mu^{\Gamma})_{\Gamma} = (\hat{\chi}_X, \mu)_X = 1,$$

т. е. характер $\hat{\chi}_X$ содержит неприводимую компоненту μ. Значит, он не является неприводимым. Так как характер $\hat{\chi}_{O_q(B)} = \varphi$ неприводим по утверждению (1) леммы 3.6, то мы видим, что $O_q(B) \not\subseteq X$.

Предположим, что $\Gamma_1 = O_q(B)X \neq \Gamma$. По упражнению 5.1 [3]

$$(\mu^{\Gamma_1})^{\Gamma} = \mu^{\Gamma} = \hat{\chi}.$$

Поэтому характер μ^{Γ_1} неприводим, ибо характер $\hat{\chi}$ неприводим, и мы видим, что

$$\varphi = \hat{\chi}_{O_q(B)} \in \mathrm{Irr}\left((\mu^{\Gamma_1})_{O_q(B)}\right).$$

Следовательно,

$$\varphi(1) = |\Gamma : X| \leqslant \mu^{\Gamma_1}(1) = |\Gamma_1 : X| < |\Gamma : X| = \hat{\chi}(1).$$

Противоречие, ибо $\varphi(1) = \hat{\chi}(1)$ по утверждению (1) леммы 3.6.

Значит, $\Gamma_1 = O_q(B)X = \Gamma$. Отсюда и из выделенной ранее формулы вытекает, что

$$|\Gamma : X| = |O_q(B)X : X| = |O_q(B) : O_q(B) \cap X| = q^{\alpha}.$$

Предположим, что $\Phi(O_q(B)) \not\subseteq (O_q(B) \cap X)$. Так как

$$\Phi(O_q(B))(O_q(B) \cap X) \neq O_q(B)$$

по теореме 5.1.1 (i) [3], то

$$X \subset X_1 = \Phi(O_q(B))(O_q(B) \cap X)X = \Phi(O_q(B))X \neq \Gamma.$$

Следовательно, характер μ^{X_1} неприводим степени, как нетрудно видеть,

$$|X_1 : X| = |\Gamma : X| / |\Gamma : X_1| = (2|A|+1) / |\Gamma : X_1| < |A| - 1.$$

Из лемм 2.3 и 2.10 [1] следует, что

$$A \ker \mu^{X_1} / \ker \mu^{X_1} \lhd X_1 / \ker \mu^{X_1}.$$

Поэтому по лемме 2.3 [1]

$$(X_1)_{\pi'} = (\ker\mu^{X_1})C_{(X_1)_{\pi'}}(A).$$

Легко также видеть, что $|B:(X_1)_{\pi'}|$ не делится на такую степень $f>1$ простого числа q, что $f \equiv 1(\bmod |A|)$. Тогда по лемме 2.12 [1] $B=(X_1)_{\pi'}C$. Следовательно,

$$B = (\ker\mu^{X_1})C_B(A).$$

Так как по лемме 2.11 [2] $\ker\mu^{X_1} \subseteq X$, то

$$B = XC_B(A).$$

Отсюда и из определения 5.1 [2] вытекает, что

$$\hat{\chi}(a) = \mu^{\Gamma}(a) = \sum_{t\in T}\mu(a^t) = |T|\,\mu(a)$$

для $a\in A$, ибо множество T – представителей всех смежных классов, взятых по одному из каждого класса, состоит из элементов C. Так как

$$|T| = |\Gamma : X| = q^{\alpha} = \hat{\chi}(1),$$

то $\hat{\chi}(a)=\hat{\chi}(1)\mu(a)$. Следовательно, $a\in Z(\hat{\chi})=Z(\Gamma)$, ввиду точности неприводимого характера $\hat{\chi}$. Это противоречит условию (*).

Мы делаем вывод, что $\Phi(O_q(B)) \subseteq (O_q(B)\cap X)$, т. е. $O_q(B)\cap X \lhd O_q(B)$. Также мы можем утверждать, что между группами X и Γ не существует подгруппы $X_1 \supset X$, т. е. подгруппа X является максимальной в Γ. И так как $O_q(B)\cap X \lhd X$, то

$$O_q(B)\cap X \lhd O_q(B)X = \Gamma.$$

Рассмотрим характер $\sigma=(1_X)^{\Gamma}$. По теореме 5.18 [2] $(\sigma,1_{\Gamma})_{\Gamma}=1$. Поэтому $\xi(1)\le 2|A|$ для каждого характера $\xi\in \mathrm{Irr}(\sigma)$, $\xi\ne 1_{\Gamma}$. Причем по упражнению 5.16 [2] $\ker\xi=\ker\sigma$. Понятно, что

$$O_q(B)\cap X \subseteq \ker\sigma \subseteq X.$$

Предположим, что

$$A\ker\xi/\ker\xi \lhd \Gamma/\ker\xi$$

для некоторой неприводимой компоненты ξ характера σ. Стало быть, $A\ker\xi\lhd\Gamma$. Так как $A\ker\xi\subseteq X$, то

$$(\hat{\chi}_{A\ker\xi},\mu_{A\ker\xi})_{A\ker\xi}\ne 0.$$

Из теоремы Клиффорда вытекает, что все неприводимые компоненты характера $\hat{\chi}_{A\ker\xi}$ линейные. Следовательно, подгруппа $(A\ker\xi)'$ абелева. Поэтому $A\lhd A\ker\xi$ и $A\lhd\Gamma$, что не так.

Стало быть,

$$A\ker\xi/\ker\xi \ntriangleleft \Gamma/\ker\xi$$

для каждого $\xi\ne 1_{\Gamma}$. Отсюда и из леммы 2.10 [1] вытекает, что

$$\xi(1)\in\{|A|-1;|A|;|A|+1;2(|A|-1);2|A|-1\}$$

или $\xi(1)=2|A|$. Причем, каждое значение $\xi(1)$ является степенью простого числа, если $\xi(1)\ne 2|A|$ и если, может быть, $\xi(1)\ne|A|$.

Допустим, что существует характер ξ_1 с $\xi_1(1)=|A|-1$. Так как в сумме степени всех неприводимых компонент характера σ равны $2|A|$ и $|A|>3$ по условию, то должна существовать компонента ξ_2 с $\xi_2(1)=|A|+1$. Поскольку значения $|A|-1$ и $|A|+1$ – степени 2, то мы получим, что $|A|=3$, что не так.

Допустим, что существует характер ξ_1 с $\xi_1(1)=|A|$. Тогда существует компонента ξ_2 с $\xi_2(1)=|A|$. Тогда мы замечаем, что все неприводимые компоненты характера $\sigma_{\Gamma_{\pi'}}$ линейные. Значит, $(\Gamma_{\pi'})'\subseteq\ker\sigma$. Следовательно, $(\Gamma_{\pi'})'\subseteq X$. Тогда мы, применяя теорему Клиффорда и рассматривая характер $\hat{\chi}_{(\Gamma_{\pi'})'}$, убеждаемся в том, что подгруппа $(\Gamma_{\pi'})'$ абелева. Стало быть, подгруппа $B = \Gamma_{\pi'}$ разрешима. Тогда разрешима и подгруппа C, что по предположению не так.

Также мы убеждаемся в том, что $\xi(1) \neq 2(|A|-1)$ и $\xi(1) \neq 2|A|-1$.

Осталось предположить, что $\xi(1) = 2|A|$. Легко видеть, что все неприводимые компоненты ϱ характера ξ_B имеют степень 2. При этом они все сопряжены элементами $a \in A$. Поэтому они все либо импримитивные, либо все примитивные.

Допустим, что характер ϱ импримитивный. Тогда он индуцируется линейным характером собственной подгруппы B^* индекса 2 в B. Так как $B_2 \subseteq C$, ибо $B = O_q(B)C$, то B^* – A-инвариантна. Значит, $AB^* \lhd \Gamma$ и ее индекс равен $2 \neq q$. Стало быть, характер $\hat{\chi}_{AB^*}$ неприводим. Нетрудно убедиться в том, что подгруппа AB^* удовлетворяет условию леммы и теоремы. Так $|AB^*| < |\Gamma|$, то по индукции подгруппа $C_{B^*}(A)$ разрешима. Значит, разрешима и подгруппа C, что не так по предположению.

Допустим теперь, что характер ϱ примитивный. Следовательно, примитивным является и точный неприводимый характер $\overline{\varrho}$ в смысле леммы 2.22 [2] степени 2 фактор группы $\overline{\Gamma} = \Gamma / \ker \varrho$. Так как

$$\Phi(O_q(B)) \subseteq O_q(B) \cap X \subseteq \ker \varrho,$$

то фактор группа

$$\overline{O_q(B)} = O_q(B) \ker \varrho / \ker \varrho \cong O_q(B) / O_q(B) \cap \ker \varrho$$

абелева. Так как она нормальна в $\overline{\Gamma}$, то по следствию 6.13 [2] $\overline{O_q(B)} \subseteq Z(\overline{\Gamma})$. Так как $B = O_q(B)C$, то

$$\overline{C} = C \ker \varrho / \ker \varrho \lhd \overline{B} = B / \ker \varrho.$$

Отсюда вытекает, что $C \ker \varrho \lhd B$. Поскольку $C \ker \varrho \subseteq X$, то $\mu_{C\ker\varrho} \in \mathrm{Irr}(\chi_{C\ker\varrho})$. Так как $\mu(1) = 1$, то, как и ранее, из точности характера χ и теоремы Клиффорда вытекает, что подгруппа $C \ker \varrho$ абелева. Значит, и подгруппа C абелева. Это вновь противоречит нашему предположению о том, что подгруппа C не разрешима.

Наше предположение о том, что характер $\hat{\chi}$ импримитивный неверно. Стало быть, он примитивный.

Лемма доказана.

Из вышесказанного следует, что любая подгруппа $C_0 \subseteq C$, для которой $\Gamma_1 = O_q(B)C_0 \neq \Gamma$ является разрешимой.

Лемма 3.8. *Если* $B = O_q(B)C$, *то выполняются следующие утверждения:*

(1) *подгруппа* $B = O_q(B)C'$, C' *не разрешима и* $O_q(B) \cap C' = 1$;

(2) $C = (1 \neq Z(O_q(B)) = Z(\Gamma)) \times C'$;

(3) *фактор группа* $F(\Gamma)/Z(\Gamma)$ *элементарна абелева порядка* $\hat{\chi}(1)^2$;

(4) $\chi_{C'} = \beta_{C'} + |A|(\beta_1)_{C'}$, *где* $\beta_{C'}$ *– точный неприводимый характер подгруппы* C' *степени* $|A|+1$ *и* $(\beta_1)_{C'} = 1_{C'}$ *либо* $\beta_{C'} = 1_{C'}$ *и* $(\beta_1)_{C'}$ *– точный неприводимый характер степени* 2 *подгруппы* C'.

Доказательство. (1). Предположим, что $B \neq B_1 = O_q(B)C'$. Тогда подгруппа $C_0 = C'$ разрешима, что влечет разрешимость группы C. Это противоречит нашему предположению. Поэтому $B = O_q(B)C'$ и C''' не разрешима. Ниже покажем, что $O_q(B) \cap C' = 1$.

Так как по лемме 3.6 характер $\hat{\chi}_{O_q(B)}$ неприводим и $\hat{\chi}$ точен, то

$$1 \neq Z(O_q(B)) \subseteq Z(\Gamma).$$

Следовательно,

$$Z(O_q(B)) \subseteq C_{O_q(B)}(A) = C \cap O_q(B) \lhd C.$$

Далее, по лемме 3.7 характер $\hat{\chi}$ примитивный. Поскольку $O_q(B) \subseteq F(\Gamma)$ и $O_q(B) \not\subseteq C,$ ибо $B = O_q(B)C'$ и $A \not\lhd \Gamma,$ то мы замечаем, что $Z(\Gamma) \neq F(\Gamma).$ Так как $\hat{\chi}(1) = q^{\alpha},$ то по теореме Д. А. Супруненко (теорема 4.4 [4]) фактор группа $F(\Gamma)/Z(\Gamma)$ является единственной максимальной нормальной абелевой подгруппой фактор группы $\Gamma/Z(\Gamma).$ Она же элементарна абелева порядка $q^{2\alpha}$ – утверждение (3).

Поэтому $\Phi(F(\Gamma)) \subseteq Z(\Gamma).$ Можно доказать, что $Z(\Gamma) = Z(O_q(B))$ и $F(\Gamma) = O_q(B).$ Тогда $\Phi(O_q(B)) \subseteq Z(O_q(B)).$ Отсюда и из последнего выделенного выражения вытекает, что $C_{O_q(B)}(A) \lhd \Gamma.$

Рассматривая точный характер

$$\chi_{C_{O_q(B)}(A)} = \beta_{C_{O_q(B)}(A)} + |A|(\beta_1)_{C_{O_q(B)}(A)}$$

с применением теоремы Клиффорда к обоим слагаемым, которые имеют q'-степень, мы убеждаемся в том, что все его неприводимые компоненты линейные. Стало быть, подгруппа $C_{O_q(B)}(A)$ абелева. И так как характер $\hat{\chi}$ точный и примитивный, то подгруппа $C_{O_q(B)}(A) \subseteq Z(\Gamma).$ Поэтому $C_{O_q(B)}(A) = Z(\Gamma)$ и

$$C = \left(1 \neq C_{O_q(B)}(A) = Z(O_q(B)) = Z(\Gamma)\right) \times C'$$

– утверждение (2). Отсюда и из чуть выше выделенного выражения следует, что $O_q(B) \cap C' = 1$ – утверждение (1).

Поскольку $\beta_{C'} = 1_{C'}$ и $(\beta_1)_{C'} = 1_{C'}$ для линейных характеров β и β_1 подгруппы $C,$ то утверждение (4) вытекает из леммы 3.5 и утверждения (2) доказываемой леммы.

Лемма доказана.

Лемма 3.9. *Пусть* $B = O_q(B)C,$ $C_0 \subseteq C'$ – *такая подгруппа, что* $(|O_q(B)|, |C_0|) = 1$ *и* $c \in C$ – *элемент простого порядка* $o(c).$

(1) *Если* $\beta(1) = |A| + 1,$ *то* $\beta(1) = \alpha_{\beta} + \beta_{\beta}(o(c) - 1),$ *где* $\alpha_{\beta} = (\beta_{<c>}, 1_{<c>})_{<c>}$ *и* $\beta_{\beta} = (\beta_{<c>}, \mu')_{<c>}$ *для одного из неглавных линейных характеров* μ' *подгруппы* $<c>$.

(2) *Если* $\beta(1) \neq |A| + 1,$ *то* $\pi(C_0) \subseteq \{2;3\}.$

Доказательство. Поскольку $\hat{\chi}_{O_q(B)} = \varphi$ – неприводимый характер, то $\varphi \in \mathrm{Irr}_{AC_0}(O_q(B)).$

По лемме 13.3 [2] существует такой неприводимый характер $\hat{\hat{\chi}}$ группы $\Gamma,$ что по следствию 13.4 [2] характер $\hat{\hat{\chi}}_{AC_0}$ является рациональнозначным. По следствию 6.17 [2] $\hat{\hat{\chi}} = \hat{\chi}\lambda'$ для некоторого неприводимого характера λ' фактор группы $\Gamma/O_q(B).$ Так как $\hat{\hat{\chi}}(1) = \hat{\chi}(1),$ то $\lambda'(1) = 1.$ Также, с учетом леммы 2.22 [2] мы можем считать, что λ' – такой неприводимый характер группы $\Gamma,$ что $O_q(B) \subseteq \ker \lambda'.$ Поэтому

$$(\hat{\chi}\lambda')_{C_0} = \hat{\chi}_{C_0}\lambda'_{C_0} = \chi_{C_0}\lambda'_{C_0} = (\beta_{C_0} + |A|(\beta_1)_{C_0})\lambda'_{C_0}.$$

Пусть вначале $\beta(1)=|A|+1$. Так как $C_0 \subseteq C'$, то из леммы 3.8 вытекает, что $(\beta_1)_{C_0}=1_{C_0}$. Тогда

$$(\hat{\chi}\lambda')_{C_0}(c)=(\beta_{C_0}+|A|1_{C_0})(c)\lambda'_{C_0}(c)$$

для каждого элемента $c\in C_0$ простого порядка $o(c)$. Поскольку $C_0\subseteq C'\subseteq \ker\lambda'$ и $O_q(B)\subseteq \ker\lambda'$, то $O_q(B)C_0\subseteq \ker\lambda'$. Поэтому последнее выделенное равенство примет вид

$$(\hat{\chi}\lambda')_{C_0}(c)=(\hat{\chi}_{C_0}1_{C_0})(c)=\chi_{C_0}(c)=(\beta_{C_0}+|A|1_{C_0})(c)1_{C_0}(c).$$

Так как характер $(\hat{\chi}\lambda')_{AC_0}$ рациональнозначный, то число $(\hat{\chi}\lambda')(c)$ также рациональное и, значит, целое для каждого элемента $c\in C_0$. Отсюда и из последнего выделенного равенства вытекает, что значение

$$(\beta_{C_0}+|A|1_{C_0})(c)1_{C_0}(c)$$

является целым числом. Поскольку целым числом является $|A|1_{C_0}(c)1_{C_0}(c)=|A|$, то таковым является и

$$\beta_{C_0}(c)=\beta_{C_0}(c)1_{C_0}(c)=\beta_{C_0}(c).$$

По лемме 2 [5]

$$\beta_{C_0}(c)=\alpha_\beta-\beta_\beta$$

и

$$\beta(1)=\alpha_\beta+\beta_\beta(o(c)-1)=\beta_{C_0}(c)+\beta_\beta o(c),$$

где $\alpha_\beta=(\beta_{<c>},1_{<c>})_{<c>}$ и $\beta_\beta=(\beta_{<c>},\mu')_{<c>}$, $\mu'\neq 1_{<c>}$.

Пусть теперь $\beta(1)=1$ и $\beta_1(1)=2$. Тогда мы получим, что

$$\chi_{C_0}=1_{C_0}+|A|(\beta_1)_{C_0}$$

– целое число.

Как и ранее мы получим, что $(\beta_1)(c)$ является целым числом. Стало быть,

$$\beta_1(1)=\alpha_{\beta_1}+\beta_{\beta_1}(o(c)-1).$$

Отсюда и того, что $\beta_1(1)=2$ следует, что

$$2\geq \alpha_{\beta_1}+\beta_{\beta_1}(o(c)-1).$$

Если $\alpha_{\beta_1}=0$, то $\beta_{\beta_1}(o(c)-1)\leq 2$. Очевидно, $o(c)-1\leq 2$. Стало быть, $o(c)\leq 3$.

Если же $\alpha_{\beta_1}\neq 0$, то $\beta_{\beta_1}(o(c)-1)\leq 1$. Тоже видим, что $o(c)\leq 2$.

Следовательно, $|C_0|$ не имеет простых делителей больших, чем 3.

Стало быть, $\pi(C_0)\subseteq\{2;3\}$.

Лемма доказана.

Лемма 3.10. *Если $B=O_q(B)C$, то подгруппа C' разрешима.*

Доказательство. По лемме 3.8

$$C=(Z(O_q(B))=Z(\Gamma))\times C';\ B=O_q(B)C';\ O_q(B)\cap C'=1.$$

Пусть $q_1\in\pi(C')$, $C^{(q_1)}=C_{C'}(C_{q_1})$ и $N^{(q_1)}=N_{C'}(C_{q_1})$ – подгруппа, содержащаяся в

$$(N^{(q_1)})^*=N_{AC'}(C_{q_1})=AN^{(q_1)}.$$

Ввиду неразрешимости подгруппы C' найдется такое простое число $q\neq q_1\in\pi(C)=\pi(C')$.

Пусть для некоторого из таких чисел $\Gamma=(N^{(q_1)})^*O_q(B)$. Так как группа $(N^{(q_1)})^*$ содержит холлову $(q_1)'$-подгруппу $((N^{(q_1)})^*)_{(q_1)'}$ и $((N^{(q_1)})^*)_{(q_1)'}O_q(B)\neq\Gamma$, то по ранее сказанному подгруппа $((N^{(q_1)})^*)_{(q_1)'}$ разрешима. Тогда разрешима и подгруппа $(N^{(q_1)})^*$. Это, в свою очередь, влечет разрешимость группы Γ. Отсюда вытекает, что подгруппа C' также разрешима, что не так.

Поэтому для всех простых чисел $q \neq q_1 \in \pi(C')$ выполняется, что

$$\Gamma_1 = (N^{(q_1)})^* O_q(B) \neq \Gamma.$$

Следовательно, по ранее сказанному подгруппа $C_0 = (C_{\Gamma_1})_{\pi'}(A)$ абелева либо не абелева, но разрешима, и характер χ_{C_0} по лемме 3.5 содержит не линейную неприводимую компоненту.

Предположим, что подгруппа C_0 абелева. Тогда подгруппа $N^{(q_1)} \subseteq C_0$ также абелева и по лемме Бернсайда подгруппа C' содержит нормальное $(q_1)'$-дополнение D. Тогда $\Gamma_1^{(')} = ADO_q(B) \neq \Gamma$. Вновь получим, что подгруппа $(C_{\Gamma_1^{(')}})_{\pi'}(A)$ разрешима. Стало быть, подгруппа D и, следовательно, подгруппа C' также разрешимы, что не так.

Мы делаем вывод, что подгруппы C_0 и $N^{(q_1)}$ не абелевы, но разрешимы и характер $\chi_{N^{(q_1)}}$ разветвляется по лемме 3.5 и содержит не линейную неприводимую компоненту $\beta_{N^{(q_1)}}$ степени $|A|+1$ или $(\beta_1)_{N^{(q_1)}}$ степени 1.

Поскольку подгруппа $N^{(q_1)}$ разрешима, то она содержит холлову $2'$-подгруппу S, которая абелева по утверждению (2) леммы 3.6. Положив, что $q_1 \neq 2$ мы получим, что $C_{q_1} \subseteq S \subseteq C^{(q_1)}$ и

$$|N^{(q_1)} : C^{(q_1)}| = 2^{\alpha_1}$$

для некоторого натурального числа α_1. Рассматривая теперь подгруппу $C_0 = C^{(q_1)}$, мы по лемме 3.5 также получаем, что она абелева или не абелева, но разрешима и $\beta_{C^{(q_1)}}(1) = |A|+1$ или $(\beta_1)_{C^{(q_1)}}(1) = 2$.

Пусть вначале подгруппа $C^{(q_1)}$ абелева. Так как $C^{(q_1)} \triangleleft N^{(q_1)}$, то $|A|+1$ делит 2^{α_1} по теореме 6.15 [2]. Поэтому $\beta_{N^{(q_1)}}(1) = |A|+1 = 2^{\alpha_2}$ для некоторого натурального числа $\alpha_2 \leq \alpha_1$. Следовательно,

$$\hat{\chi}(1) = 2|A|+1 = 2(|A|+1)-1 = 2^{\alpha_2+1}-1 = q^{\alpha}.$$

Отсюда мы видим, что $\alpha = 1$ и, значит, $\hat{\chi}(1) = q$. Отсюда и из утверждения (3) леммы 3.8 вытекает, что $|F(\Gamma) : Z(\Gamma)| = q^2$.

Нетрудно видеть, что фактор группа $\Gamma / F(\Gamma)$ изоморфна некоторой подгруппе $Aut(F(\Gamma)/Z(\Gamma))$. Но

$$|Aut(F(\Gamma)/Z(\Gamma))| = (q^2-1)\cdot(q^2-q) = q\cdot(q-1)^2\cdot(q+1)$$

и так как $q-1 = 2|A|$ и $q+1 = 2^{\alpha_2+1}$, то

$$|Aut(F(\Gamma)/Z(\Gamma))| = q\cdot 4\cdot |A|^2 \cdot 2^{\alpha_2+1} = 2^{\alpha_2+3}\cdot q\cdot |A|^2 .$$

Поэтому $|\Gamma / F(\Gamma)|$ делит $2^{\alpha_2+3}\cdot q\cdot |A|^2$. Следовательно, $|B/F(\Gamma)|$ делит $2^{\alpha_2+3}\cdot q$. Мы заключаем, что фактор группа $B/F(\Gamma)$ бипримарна и, значит, разрешима. Так как подгруппа $F(\Gamma)$ разрешима, то подгруппа B и, значит, подгруппа C' также разрешимы.

Допустим теперь, что подгруппа $C^{(q_1)}$ не абелева. По лемме 3.5 $\beta_{C^{(q_1)}}(1) = |A|+1$, а из леммы 3.8 легко следует, что характер $\beta_{C^{(q_1)}}$ неприводим и точен. Так как $C_{q_1} \subseteq Z(C^{(q_1)})$, то $C_{q_1} \subseteq Z(\beta_{C_{q_1}})$. Но по лемме 3.5 $Z(\beta_{C^{(q_1)}}) \subseteq Z(\beta_{N^{(q_1)}})$ и

$$Z(\beta_{N^{(q_1)}}) \subseteq C' \subseteq Z(\beta_1)_{N^{(q_1)}},$$

ибо $\beta_1(1) = 1$ в рассматриваемом случае. Поэтому по лемме 5 [6] $C_{q_1} \subseteq Z(N^{(q_1)})$. К подгруппе C' мы можем вновь применить лемму Бернсайда. Как и ранее получим противоречие с тем, что подгруппа C'' не разрешима.

Нам осталось рассмотреть случай, когда $\beta_{C^{(q_1)}}(1) = 1$ и $(\beta_1)_{C^{(q_1)}}(1) = 2$. Из леммы 3.9 вытекает, что, если $q \neq q_1 \in \pi(C')$, то $q_1 = 2$ или $q_1 = 3$. Поскольку по предположению подгруппа C'' не разрешима, то мы полагаем, что $q \in \pi(C'')$.

По лемме 3.8 $\beta_{C'} = 1_{C'}$, а неприводимый характер $(\beta_1)_{C'}$ точный. И так как подгруппа C' не разрешима, то можно доказать, что характер $(\beta_1)_{C'}$ импримитивный. По теореме 14.23 [2] $|C' : Z(C'')| = 60$, т. е. $C'/Z(C') \cong PSL(2;5)$. Отсюда и чуть выше сказанного вытекает, что $q = 5$ и $(C')_{q=5} \neq 1$. Следовательно, $2|A|+1 = 5^{\alpha}$. Отсюда мы получаем, что

$$2|A| = 5^{\alpha} - 1 = (4 = 5-1)t, \quad t \in N,$$

если α – нечетное натуральное число и

$$2|A| = 5^{\alpha} - 1 = (5^{\alpha/2} - 1)(5^{\alpha/2} + 1),$$

если α – четное натуральное число. В обоих случаях мы видим, что левая часть не делится на 4, а правая часть делится на 4. И этот последний рассмотренный случай привел нас к противоречию.

Лемма доказана.

Лемма 3.11. *Если* $B = O_q(B)C$, *то подгруппа* C *разрешима и содержит абелеву холлову подгруппу* $S \neq 1$ *нечетного порядка.*

Доказательство. Так как подгруппа C' разрешима по лемме 3.10, то разрешима и подгруппа C. Следовательно она содержит холлову подгруппу S нечетного порядка, которая абелева по лемме 3.6. Так как характер $\varphi = \hat{\chi}_{O_q(B)}$ неприводим по лемме 3.6 и точен, то

$$1 \neq Z(O_q(B)) \subseteq Z(\Gamma) \subseteq S.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.12. $|B : C|$ *делится на такое простое число* s, *что* $s \neq q \in \pi(n)$.

Доказательство. Предположим, что $|B : C|$ – степень q. Тогда по лемме 2.9 [1] $B = O_q(B)C$.

Применим теперь леммы 3.5 и 3.11. Доказываемая теорема верна. Но это противоречит выбору группы Γ.

Лемма доказана.

Литература

1. *Ядченко А. А.* О разрешимости и факторизации некоторых π-разрешимых неприводимых линейных групп примарной степени. Часть I // Тр. Ин-та математики. 2022. Т. 30, № 1–2. С. 84–98.

2. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Harper and Row, 1968.

3. *Isaacs I. M.* Character theory of finite groups. New York: Academic Press, 1976.

4. *Dixon J.* The structure of linear groups. L.: Butler and Tanner Ltd., 1971.

5. *Ядченко А. А., Романовский А. В.* К проблеме Айзекса о конечных p-разрешимых линейных группах // Матем. заметки. 2001. Т. 69, Вып. 1. С. 144–152.

6. *Ядченко А. А.* О π-разрешимых неприводимых линейных группах с холловой TI-подгруппой нечетного порядка I // Тр. Ин-та математики. 2008. Т. 16, № 2. С. 118–130.

A. A. Yadchenko

On the solvability and factorization of some π-solvable irreducible linear groups of primary degree. Part II

Summary

The article is the second in a series of papers where for a set π of odd primes π-solvable finite irreducible complex linear groups of degree $2|H|+1$ whose Hall π-subgroups are TI-subgroups and are not normal in groups. The goal of this series is to prove the solvability and determine the factorization of such groups. The proof of the theorem is continued. Further properties of the minimal counterexample to the theorem are established.

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 1. С. 101–111

UDC 519.712.6+512.64

NON-EXISTENCE OF A SHORT ALGORITHM FOR MULTIPLICATION OF 3×3 MATRICES WHOSE GROUP IS $S_4 \times S_3$, II

V. P. Burichenko

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
e-mail: vpburich@gmail.com
Submitted 01.04.2022

Доказано, что не существует алгоритма для умножения 3×3 матриц мультипликативной длины 23, инвариантного относительно некоторой группы, изоморфной $S_4 \times S_3$. Доказательство использует описание орбит этой группы на разложимых тензорах в тензорном кубе $(M_3(\mathbb{C}))^{\otimes 3}$, полученное ранее.

1. Introduction. The present work is concerned with the problem of fast matrix multiplication, namely studying of algorithms with a nontrivial symmetry group. We show that there exists no algorithm for multiplication of 3×3 matrices of length $\leqslant 23$ that is invariant under a certain group G isomorphic to $S_4 \times S_3$. This paper is an immediate sequel of paper [1]. The more detailed discussion, motivation, and further references can be found in [1]. Here we restrict ourselves with stating Theorem 1 of [1] (whose proof is the main aim of the present work), as well as the main result of [1], namely the classification of orbits on the decomposable tensors.

For convenience of the reader who is not very experienced in algorithms we now state the result we are going to prove in purely group- and representation-theoretic terms. Let

$$M = M_3(\mathbb{C}) = \langle e_{ij} \mid 1 \le i, j \le 3 \rangle_{\mathbb{C}}$$

be the space of complex 3×3 matrices. Consider the tensor

$$\mathcal{T} = \sum_{1\le i,j,k\le 3} e_{ij} \otimes e_{jk} \otimes e_{ki} \in M \otimes M \otimes M.$$

Let $A \le GL(3,\mathbb{C})$ be the group of all monomial 3×3 matrices whose nonzero elements are ± 1 and the determinant is $\det = 1$. It is easy to see that $A \cong S_4$, and A is irreducible. This group A acts on $M^{\otimes 3}$ "componentwise", that is, $a \in A$ acts by a transformation

$$T(a) : x \otimes y \otimes z \mapsto axa^{-1} \otimes aya^{-1} \otimes aza^{-1}.$$

It may be shown that this action of A preserves $\mathcal{T}$.

Next, consider the following transformations:

$$\rho(x \otimes y \otimes z) = y^t \otimes x^t \otimes z^t, \qquad \sigma(x \otimes y \otimes z) = z \otimes x \otimes y$$

(where t means transpose). It is easy to see that both ρ and σ preserve $\mathcal{T}$, and $B := \langle \rho, \sigma \rangle \cong S_3$. Finally, it is not hard to show that A and B commute elementwise (for the details of these (and even more general) calculations the reader can consult [2] or [3]). Thus, the group $G = A \times B \cong S_4 \times S_3$ acts on $M^{\otimes 3}$ and preserves $\mathcal{T}$.

The tensors of $M^{\otimes 3}$ of the form $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ will be called *elementary*, or *decomposable*. A *decomposition* of length l for $\mathcal{T}$ is an (unordered) set of l elementary tensors

$$\mathcal{P} = \{ t_i = x_i \otimes y_i \otimes z_i \mid i = 1, \ldots, l \}$$

such that $t_1 + \ldots + t_l = \mathcal{T}$.

Obviously, any element of G takes a length l decomposition to a length l decomposition. In particular, we can consider a notion of a G-invariant decomposition. Now we can state the main result of the present paper.

Theorem 1. *Let $\mathcal{T}$ and $G = A\times B$ be as described above. Then there exists no G-invariant decomposition of $\mathcal{T}$ of length ≤ 23.*

To prove this theorem it is necessary, first of all, to describe all orbits of length ≤ 23 for the group G on the decomposable tensors in $M^{\otimes 3}$. This is done in [1] (in fact, it is sufficient to consider orbits of length ≤ 18, because $|G|$ is not divisible by $19\leq d\leq 23$).

Below in the paper $\mathrm{St}_G(w)$ is the stabilizer of a tensor w with respect to the action of G; ζ is the primitive cubic root of 1, and $i=\sqrt{-1}$ (we use the same symbol i for indices, but hope that this will not lead to a confusion even in the formulae like $e_{ij}-ie_{ki}$). Also,

$$\delta = e_{11}+e_{22}+e_{33},\quad \varkappa=\sum_{i\neq j} e_{ij} = e_{12}+e_{21}+e_{13}+e_{31}+e_{23}+e_{32},$$

$$\eta = e_{11}+\zeta e_{22}+\bar{\zeta} e_{33},\qquad \bar{\eta}=e_{11}+\bar{\zeta}e_{22}+\zeta e_{33},$$

$$\tau = e_{12}+e_{23}+e_{31}-e_{21}-e_{32}-e_{13}.$$

In [1] the following was proved.

Proposition 2. *Any orbit of length ≤ 18 of G on decomposable tensors in $M^{\otimes 3}$ has a representative of the form $w_i(a,b,\ldots)$, $1\leq i\leq 44$, where w_i are the tensors listed in the following table.*

i	l_i	$w_i(a,b,\ldots)$
1	12	$(a(e_{11}+e_{22})+b(e_{12}+e_{21})+ce_{33}+d(e_{13}+e_{23}+e_{31}+e_{32}))^{\otimes 3}$
2	12	$(ae_{11}+be_{22}+ce_{33}+d(e_{12}+e_{21}))^{\otimes 3}$
3	6	$(a(e_{11}+e_{22})+be_{33}+c(e_{12}+e_{21}))^{\otimes 3}$
4	6	$(ae_{11}+be_{22}+ce_{33})^{\otimes 3}$
5	3	$(a(e_{11}+e_{22})+be_{33})^{\otimes 3}$
6	2	$a\eta^{\otimes 3}$
7	1	$a\delta^{\otimes 3}$
8	16	$(a\eta+b(e_{12}+\zeta e_{23}+\bar{\zeta}e_{31})+c(e_{21}+\zeta e_{32}+\bar{\zeta}e_{13}))^{\otimes 3}$
9	4	$(a\delta+b\varkappa)^{\otimes 3}$
10	8	$(a\eta+b(e_{12}+e_{21}+\zeta(e_{23}+e_{32})+\bar{\zeta}(e_{31}+e_{13})))^{\otimes 3}$
11	8	$(a\delta+b(e_{12}+e_{23}+e_{31})+c(e_{21}+e_{32}+e_{13}))^{\otimes 3}$
12	6	$(a(e_{11}+e_{22})+b(e_{12}-e_{21})+ce_{33})^{\otimes 3}$
13	12	$(a(e_{11}+e_{22})+b(e_{12}+e_{21})+ce_{33}+d(e_{13}+e_{23}-e_{31}-e_{32}))^{\otimes 3}$
14	12	$(a(e_{11}+e_{22})+be_{12}+ce_{21}+de_{33})^{\otimes 3}$
15	12	$(ae_{11}+be_{22}+c(e_{12}-e_{21})+de_{33})^{\otimes 3}$
16	18	$(a(e_{11}+e_{22})+be_{33})\otimes(c(e_{11}+e_{22})+de_{33})\otimes(f(e_{11}+e_{22})+ge_{33})$
17	18	$a(e_{11}-e_{22})\otimes(e_{12}+e_{21})\otimes(e_{12}-e_{21})$
18	9	$(e_{11}-e_{22})^{\otimes 2}\otimes(a(e_{11}+e_{22})+be_{33})$
19	9	$(e_{12}+e_{21})^{\otimes 2}\otimes(a(e_{11}+e_{22})+be_{33})$
20	9	$(e_{12}-e_{21})^{\otimes 2}\otimes(a(e_{11}+e_{22})+be_{33})$
21	9	$(a(e_{11}+e_{22})+be_{33})^{\otimes 2}\otimes(c(e_{11}+e_{22})+de_{33})$
22	18	$(a(e_{11}+e_{22})+b(e_{12}+e_{21})+ce_{33})^{\otimes 2}\otimes(d(e_{11}+e_{22})+f(e_{12}+e_{21})+ge_{33})$
23	18	$(a(e_{11}-e_{22})+b(e_{12}-e_{21}))\otimes(a(e_{11}-e_{22})-b(e_{12}-e_{21}))\otimes(c(e_{11}+e_{22})+d(e_{12}+e_{21})+fe_{33})$

24	18	$(a(e_{13}+e_{23})+b(e_{31}+e_{32}))\otimes(b(e_{13}+e_{23})+a(e_{31}+e_{32}))\otimes(c(e_{11}+e_{22})+d(e_{12}+e_{21})+fe_{33})$
25	18	$(ae_{11}+be_{22}+ce_{33})^{\otimes 2}\otimes(de_{11}+fe_{22}+ge_{33})$
26	18	$(ae_{12}+be_{21})\otimes(be_{12}+ae_{21})\otimes(ce_{11}+de_{22}+fe_{33})$
27	18	$(a(e_{11}+e_{22})+b(e_{12}-e_{21})+ce_{33})\otimes(a(e_{11}+e_{22})-b(e_{12}-e_{21})+ce_{33})\otimes(d(e_{11}+e_{22})+fe_{33})$
28	18	$(a(e_{11}-e_{22})+b(e_{12}+e_{21}))^{\otimes 2}\otimes(c(e_{11}+e_{22})+de_{33})$
29	18	$(a(e_{13}+ie_{23})+b(e_{31}+ie_{32}))\otimes(b(e_{13}+ie_{23})+a(e_{31}+ie_{32}))\otimes(c(e_{11}-e_{22})+d(e_{12}+e_{21}))$
30	18	$(a(e_{11}+e_{22})+b(e_{12}+e_{21})+ce_{33})\otimes(a(e_{11}+e_{22})-b(e_{12}+e_{21})+ce_{33})\otimes(d(e_{11}+e_{22})+fe_{33})$
31	18	$(a(e_{11}-e_{22})+b(e_{12}-e_{21}))^{\otimes 2}\otimes(c(e_{11}+e_{22})+de_{33})$
32	18	$(a(e_{13}+e_{23})+b(e_{31}+e_{32}))\otimes(b(e_{13}-e_{23})+a(e_{31}-e_{32}))\otimes(c(e_{11}-e_{22})+d(e_{12}-e_{21}))$
33	18	$(ae_{11}+be_{22}+ce_{33})\otimes(be_{11}+ae_{22}+ce_{33})\otimes(d(e_{11}+e_{22})+fe_{33})$
34	18	$(ae_{12}+be_{21})^{\otimes 2}\otimes(c(e_{11}+e_{22})+de_{33})$
35	18	$(ae_{13}+be_{31})\otimes(be_{23}+ae_{32})\otimes(ce_{12}+de_{21})$
36	18	$(a(e_{11}+e_{22})+b(e_{12}-e_{21})+ce_{33})^{\otimes 2}\otimes(d(e_{11}+e_{22})+f(e_{12}-e_{21})+ge_{33})$
37	18	$(a(e_{11}-e_{22})+b(e_{12}+e_{21}))\otimes(a(e_{11}-e_{22})-b(e_{12}+e_{21}))\otimes(c(e_{11}+e_{22})+d(e_{12}-e_{21})+fe_{33})$
38	18	$(a(e_{13}+ie_{23})+b(e_{31}+ie_{32}))\otimes(b(e_{13}-ie_{23})+a(e_{31}-ie_{32}))\otimes(c(e_{11}+e_{22})+d(e_{12}-e_{21})+fe_{33})$
39	6	$a\eta\otimes\overline{\eta}\otimes\delta$
40	12	$(a\delta+b\varkappa)^{\otimes 2}\otimes(c\delta+d\varkappa)$
41	12	$\tau^{\otimes 2}\otimes(a\delta+b\varkappa)$
42	12	$(ae_{11}+be_{22}+ce_{33})\otimes(ce_{11}+ae_{22}+be_{33})\otimes(be_{11}+ce_{22}+ae_{33})$
43	6	$(ae_{11}+b(e_{22}+e_{33}))\otimes(ae_{22}+b(e_{11}+e_{33}))\otimes(ae_{33}+b(e_{11}+e_{22}))$
44	6	$(ae_{23}+be_{32})\otimes(be_{13}+ae_{31})\otimes(ae_{12}+be_{21})$

This proposition is Theorem 4 of [1], slightly shortened. Here l_i is the length of the orbit. The number i (the number of the row) will be referred to as the *type* of the tensor $w_i(a,b,\ldots)$ (and of its orbit).

It should be noted the following.

1) In general, the parameters $a,b,\ldots$ for the tensor $w_i(a,b,\ldots)$, which is a representative of a given orbit, are not uniquely defined. Particularly, in most part of cases we have $w_i(a,b,\ldots)=w_i(\zeta^l a,\zeta^l b,\ldots)$, where $l=0,1,2$. Moreover, there are other situations, where the orbits of two tensors $w_i(a,b,\ldots)$ and $w_i(a',b',\ldots)$ coincide, but $(a,b,\ldots)\neq(a',b',\ldots)$ (see [1] for details).

2) For some "degenerate" $a,b,\ldots$ the length of the orbit of $w_i(a,b,\ldots)$ can be less than l_i (in fact, this length is the proper divisor of l_i). In such a case there exists a type $j\neq i$ an some parameters $a',b',\ldots$ such that $w_i(a,b,\ldots)=w_j(a',b',\ldots)$, and $(a',b',\ldots)$ is nondegenerate for type j.

For instance, let $i=4$, $w_4(a,b,c)=(ae_{11}+be_{22}+ce_{33})^{\otimes 3}$. Then the orbit of $w_4(a,b,c)$ has 6 points when a, b, and c are pairwise distinct. If there are exactly 2 distinct among them, then the orbit has length 3 and is generated by a tensor of the form $w_5(a',b')$. Say, if $a\neq b=c$, then $Gw_4(a,b,c)=Gw_5(a,b)$ (and when $a=b=c$, we have $w_4(a,a,a)=a^3\delta^{\otimes 3}=w_7(a^3)$).

Below s_i is the number of the parameters $a,b,\ldots$ in the tensor $w_i(a,b,\ldots)$. Also, for each type i let $H_i\leq G$ be the "typical" stabilizer of $w_i(a,b,\ldots)$, that is, the stabilizer for nondegenerate $(a,b,\ldots)$. Say, for $i=4$ the stabilizer H_4 is a certain subgroup isomorphic to $Z_2^2\times S_3$, specifically the subgroup of all elements of the form (c,b), where $b \in B$, and $c = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in A$, where $\varepsilon_i = \pm 1$, $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1$. Clearly, the index $|G : H_i|$ is equal to l_i.

2. Reduction to polynomial systems. The aim of this section is to show that the proof of Theorem 1 can be reduced to solution of several systems of polynomial equations (or, to be more precise, to the proof that these systems have no solutions).

If $\tilde{V} = V_1 \otimes \ldots \otimes V_l$ is the tensor product of several spaces and $w \in \tilde{V}$ is an arbitrary tensor, then finding all representations of w as a sum of $\le r$ decomposable tensors reduces, as one can easily see, to the solution of a certain system of polynomial equations (which are known as (generalized) *Brent equations*, after the work [4]). Specifically, let $d_i = \dim V_i$, $\{v_{ij} \mid 1 \le j \le d_i\}$ be the bases of V_i, and $w_{k_1 \ldots k_l}$ be the coordinates of w in the natural tensor basis, i. e.,

$$w = \sum_{1 \le k_i \le d_i} w_{k_1 \ldots k_l} v_{1,k_1} \otimes \ldots \otimes v_{l,k_l}.$$

Then, clearly, finding all decompositions of w of length $\le r$ is equivalent to solving the system of $d_1 \ldots d_l$ equations

$$\sum_{j=1}^{r} x_{1,k_1}^{(j)} \ldots x_{l,k_l}^{(j)} = w_{k_1 \ldots k_l}, \qquad 1 \le k_i \le d_i$$

in $r(d_1 + \ldots + d_l)$ unknowns $x_{i,k_i}^{(j)}$, $1 \le j \le r$, $1 \le k_i \le d_i$.

The latter statement has a "group-invariant" version. Namely, if X is a finite group of linear transformations of $\tilde{V}$, preserving representation of $\tilde{V}$ as a tensor product (but possibly permuting the factors V_i), and w is an X-invariant tensor, then finding all X-invariant decompositions of w, whose length is $\le r$, can be reduced to the solution of some set of polynomial systems. It is not difficult to prove this statement in the general situation, but in the present paper we restrict ourselves with the particular case of $\tilde{V} = M^{\otimes 3}$, $X = G = A \times B$, $w = \mathcal{T}$, and $r = 23$.

Let $\mathcal{P} = \{t_i = x_i \otimes y_i \otimes z_i \mid 1 \le i \le l\}$ be a G-invariant decomposition of length l for $\mathcal{T}$. We have a partition of $\mathcal{P}$ into G-orbits: $\mathcal{P} = \mathcal{O}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{O}_q$. The *type* of $\mathcal{P}$ is the multiset $\{n_1, \ldots, n_q\}$, where n_i is the type of $\mathcal{O}_i$. Clearly, we can assume that n_i are ordered: $n_1 \le \ldots \le n_q$. It is also clear that the length of a decomposition of type $\{n_1, \ldots, n_q\}$ is equal to $\sum_{i=1}^{q} l_{n_i}$.

To describe all G-invariant decompositions of length ≤ 23 it is sufficient to describe all G-invariant decompositions of a given type $\{n_1, \ldots, n_q\}$, for every type such that $\sum_{i=1}^{q} l_{n_i} \le 23$. Obviously, there exist finitely many such types. So, to show that the description of all G-invariant decompositions of length ≤ 23 reduces to the solution of some finitely many polynomial systems, it is sufficient to show that the description of all G-invariant decompositions of a given type $\{n_1, \ldots, n_q\}$ reduces to solution of several (in fact, one!) polynomial systems.

Take some representatives h_{ij}, $1 \le j \le l_i$, for cosets G / H_i. Then any orbit of type i is, clearly, $\{h_{ij} w_i(a_1, \ldots, a_{s_i}) \mid j = 1, \ldots, l_i\}$ for some $a_1, \ldots, a_{s_i} \in \mathbb{C}$. So a decomposition of type $\{n_1, \ldots, n_q\}$ is

$$\mathcal{P} = \{h_{n_i,j} w_{n_i}(a_{i,1}, \ldots, a_{i,u_i}) \mid 1 \le i \le q, 1 \le j \le l_{n_i}\},$$

where $u_i = s_{n_i}$, for some array $(a_{im} \in \mathbb{C} \mid 1 \le i \le q, 1 \le m \le u_i)$.

The condition that the sum of elements of $\mathcal{P}$ equals $\mathcal{T}$ now takes the following (rather clumsy) form:

$$\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{l_{n_i}} h_{n_i,j} w_{n_i}(a_{i,1},\dots,a_{i,u_i}) = \mathcal{T}. \tag{1}$$

The tensor $w_m(a_1,\dots,a_{s_m})$ depends polynomially on its parameters, by Proposition 2. So the left-hand side of the latter condition depends on the parameters a_{ij} polynomially also, and so equality (1) is equivalent to some system of polynomial equations in a_{ij}, as required.

There exists another condition, which is equivalent to (1), but looks simpler and does not involve subgroups or cosets. Note that since G is finite and the characteristics is 0, $N = M^{\otimes 3}$ decomposes as $N = N^G \oplus N_0$, where $N^G = \{x \in N \mid gx = x \forall\, g \in G\}$ is the subspace of invariants of G in N, and N_0 is the subspace of all elements whose averaging over G is 0:

$$N_0 = \left\{ x \in N \;\middle|\; \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gx = 0 \right\}.$$

By p we denote averaging operator, i. e., $p(x) = (1/|G|)\sum_{g\in G} gx.$ It is clear that p is nothing else but the projection onto N^G parallel to N_0 : $p = \mathrm{pr}_{N^G}$.

Let $H \le G$ be an arbitrary subgroup of index $l = |G:H|$, $g_1,\dots,g_l$ be the representatives of the cosets G/H, and let $w \in N$ be an H-invariant tensor (not decomposable, in general). Then the G-orbit of w is $Gw = \{g_i w \mid i = 1,\dots,l\}$. (Strictly speaking, if we consider $\{g_i w \mid i = 1,\dots,l\}$ as a multiset, then it is an integer multiple of an orbit, of multiplicity $|H_1 : H|$, where $H_1 = \mathrm{St}_G(w)$ is the stabilizer of w. But we neglect the possibility that $H_1 > H$, for simplicity). And it is clear that the sum of elements of an orbit is $\sum_{i=1}^{l} g_i w = lp(w)$. Hence the condition (1) can be restated as

$$\sum_{i=1}^{q} l_{n_i} p(w_{n_i}(a_{i,1},\dots,a_{i,u_i})) = \mathcal{T}. \tag{2}$$

Remark. Strictly speaking, the condition (1), or equivalently (2), should be augmented by the requirement that $(a_{i,1},\dots,a_{i,u_i})$ is a nondegenerate array of parameters for type n_i. But if this array of parameters is degenerate, then

$$\{h_{n_i,j} w_{n_i}(a_{i1},\dots,a_{i,u_i}) \mid 1 \le j \le l_{n_i}\}$$

is an integer multiple (of multiplicity >1) of an orbit of smaller length, and we obtain a G-invariant decomposition for $\mathcal{T}$ whose length is $< \sum_{i=1}^{q} l_{n_i}$. (It should be noticed here that always $zw_i(a,b,\dots) = w_i(z'a, z'b,\dots)$, for any $z \in \mathbb{C}$, where $z' = z$ for $i = 6,7,17,18,19,20,39,41$ and $z' = z^{1/3}$ for the other i.)

This way or that, but we see that the statement that studying of G-invariant decompositions of length ≤ 23 for $\mathcal{T}$ reduces to solution of several polynomial systems, is still true, despite of possibility of degenerate arrays of parameters.

3. The subspace of *G*-invariants.

In this section we consider the subspace $R = N^G$ and the projection onto R in more details.

Let F be the set of ordered triples of ordered pairs of elements of $\{1,2,3\}$:

$$F = \{((i_1, j_1),(i_2, j_2),(i_3, j_3)) \mid i_k, j_k \in \{1,2,3\}\}.$$

That is, F is precisely the set of "indices" for the standard basis of N :

$$N = \langle e_\alpha \mid \alpha \in F\rangle_{\mathbb{C}}, \qquad e_\alpha = e_{i_1 j_1} \otimes e_{i_2 j_2} \otimes e_{i_3 j_3}, \quad \alpha = ((i_1, j_1),(i_2, j_2),(i_3, j_3)).$$

Note that F is acted on by group $S_3 \times S_3$. The first S_3 acts on indices:

$$(g,1)\,((i_1, j_1),(i_2, j_2),(i_3, j_3)) = ((gi_1, gj_1),(gi_2, gj_2),(gi_3, gj_3)), \quad g \in S_3.$$

The second factor permutes the pairs, and transposes each pair, if the acting element is odd:

$$(1,(123))\,((i_1, j_1),(i_2, j_2),(i_3, j_3)) = ((i_3, j_3),(i_1, j_1),(i_2, j_2)),$$

$$(1,(12))\,((i_1, j_1),(i_2, j_2),(i_3, j_3)) = ((j_2, i_2),(j_1, i_1),(j_3, i_3)).$$

It is not difficult to check that with these definitions we obtain an action of $S_3 \times S_3$ indeed; the details are left to the reader.

Consider natural homomorphisms $A \to S_3$ and $B \to S_3$. Namely, to a matrix $a \in A$ corresponds the permutation of the lines $\langle e_1\rangle$, $\langle e_2\rangle$, $\langle e_3\rangle$ induced by a. And to an element $b \in B$ corresponds the permutation of factors in the tensor product $M \otimes M \otimes M$, associated to b. Now we can define a homomorphism $\varphi : G = A \times B \to S_3 \times S_3$, "by components". We denote $\varphi(g)$ also by $\bar{g}$.

It is convenient to consider a group slightly larger than G, namely $G_1 = A_1 \times B$, where A_1 is the group of all (that is, not necessary of determinant $+1$) monomial 3×3 matrices whose nonzero elements are ± 1. Obviously, $A_1 = A \times \langle -E\rangle_2$, where E is the identity matrix, whence $G_1 = G \times \langle -E\rangle_2$. However, the action of G_1 on N reduces to the action of G, because, clearly, $T(-E) = \mathrm{id}_N$. Also, let $C_1 = \{\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \mid \varepsilon_i = \pm 1\}$, and $C = C_1 \cap G$ be the subgroup of matrices satisfying $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1$. It is obvious that $C_1 = C \times \langle -E\rangle_2$.

The advantage of considering G_1 is that all permutation matrices are in A_1, and any element of A_1 is uniquely representable in the form $a = c\hat{\pi}$, where π is the permutation, corresponding to a, $\hat{\pi}$ is the corresponding permutation matrix, and $c \in C_1$.

It is easy to note that G_1 permutes the elements of the standard basis $\{e_\alpha\}$ up to sign, that is, the set $\{\pm e_\alpha \mid \alpha \in F\}$ is G_1-invariant. More precisely, the following fact is true.

Lemma 2. *For any* $\alpha \in F$ *and* $g \in G_1$ *holds* $ge_\alpha = \pm e_{\bar{g}\alpha}$.

Proof. This statement is easy, nevertheless we give a detailed proof. First of all, if the desired equality is true for two elements $g, h \in G_1$ and for all $\alpha \in F$, then it is true for gh also. Indeed,

$$(gh)e_\alpha = g(he_\alpha) = g(\pm e_{\bar{h}\alpha}) = \pm(ge_{\bar{h}\alpha}) = \pm(\pm e_{\bar{g}(\bar{h}\alpha)}) = \pm e_{(\bar{g}\bar{h})\alpha} = \pm e_{\overline{gh}\alpha}.$$

So we only need to prove the equality for some set of generators for G_1.

First consider σ and ρ, which generate B. We have

$$\sigma(e_\alpha) = \sigma(e_{i_1 j_1} \otimes e_{i_2 j_2} \otimes e_{i_3 j_3}) = e_{i_3 j_3} \otimes e_{i_1 j_1} \otimes e_{i_2 j_2} = e_\beta,$$

where $\beta = ((i_3, j_3),(i_1, j_1),(i_2, j_2)) = \bar{\sigma}\alpha$, as $\bar{\sigma} = (1,(123))$. Similarly

$$\rho(e_\alpha) = \rho(e_{i_1 j_1} \otimes e_{i_2 j_2} \otimes e_{i_3 j_3}) = e_{j_2 i_2} \otimes e_{j_1 i_1} \otimes e_{j_3 i_3} = e_\beta,$$

where $\beta = ((j_2, i_2),(j_1, i_1),(j_3, i_3)) = (1,(12))\alpha = \bar{\rho}\alpha$.

Next consider elements of A_1. Any of these elements is $c\hat{\pi}$, where $c \in C_1$ and $\hat{\pi}$ is a permutation matrix. An element of C_1 takes any e_α to $\pm e_\alpha$, and $\bar{c} = 1$ ($= \mathrm{id}_F$, to be precise). So $ce_\alpha = \pm e_{\bar{c}\alpha}$ is evident. Next, it is easy to show that for any matrix unity e_{ij} and any permutation $\pi \in S_3$ the equality $\hat{\pi} e_{ij} \hat{\pi}^{-1} = e_{\pi i, \pi j}$ is true. Hence for $\alpha = ((i_1, j_1),(i_2, j_2),(i_3, j_3))$ we have

$$\hat{\pi}(e_\alpha) = \hat{\pi} e_{i_1 j_1} \hat{\pi}^{-1} \otimes \hat{\pi} e_{i_2 j_2} \hat{\pi}^{-1} \otimes \hat{\pi} e_{i_3 j_3} \hat{\pi}^{-1} = e_{\pi i_1, \pi j_1} \otimes e_{\pi i_2, \pi j_2} \otimes e_{\pi i_3, \pi j_3} = e_\beta,$$

where $\beta = ((\pi i_1, \pi j_1),(\pi i_2, \pi j_2),(\pi i_3, \pi j_3)) = (\pi, 1)\,\alpha = \bar{\hat{\pi}}\alpha$. That is, $ge_\alpha = e_{\bar{g}\alpha}$ if $g = \hat{\pi}$. □

We shall call $\alpha = ((i_1, j_1),(i_2, j_2),(i_3, j_3))$ *even* if any $m = 1,2,3$ occurs evenly many times among $i_1, \ldots, j_3$. For instance, $((1,3),(1,3),(3,3))$ is even and $((1,3),(2,3),(3,1))$ is not. It is clear that the set of even elements of F is invariant under $S_3 \times S_3$.

In the following proposition, and in the sequel, we write "11,12,21" instead of $((1,1),(1,2),(2,1))$ etc., for brevity.

Proposition 4. *The group $S_3 \times S_3$ has 12 orbits $\mathcal{Q}_1,\ldots,\mathcal{Q}_{12}$ on the set of even elements of F. Their lengths and representatives are listed in the following table.*

i	$\alpha \in \mathcal{Q}_i$	$\lvert \mathcal{Q}_i \rvert$	i	$\alpha \in \mathcal{Q}_i$	$\lvert \mathcal{Q}_i \rvert$	i	$\alpha \in \mathcal{Q}_i$	$\lvert \mathcal{Q}_i \rvert$
1	11,11,11	3	5	11,21,12	18	9	12,23,31	6
2	11,11,22	18	6	11,22,33	6	10	12,23,13	18
3	11,12,21	18	7	11,23,23	18	11	12,32,13	18
4	11,12,12	36	8	11,23,32	18	12	12,31,23	6

Proof. These rather elementary considerations are left to the reader. ☐

Further we need the following simple lemma.

Lemma 5. *If X is a linear group acting on a space V, $Y \le X$ is a subgroup and $v \in V$ is an element such that $\sum_{y\in Y} yv = 0,$ then $\sum_{x\in X} xv = 0.$*

Proof. Let $g_1,\ldots,g_n$ be the representatives of cosets X/Y. Then

$$\sum_{x\in X} xv = \sum_{i=1}^{n}\sum_{y\in Y} g_i yv = \sum_{i=1}^{n} g_i(\sum_{y\in Y} yv) = \sum_{i=1}^{n} g_i(0) = 0.$$ ☐

Proposition 6. 1) *$ce_\alpha = e_\alpha$ for all $c \in C_1$ (or, equivalently, for all $c \in C$) if and only if α is even.*

2) *If α is even, then $ge_\alpha = e_{\bar{g}\alpha}$ for any $g \in G$ (or for any $g \in G_1$). In other words, G permutes e_α, where α is even, always with the plus sign.*

3) *If α is not even, then $\sum_{g\in G} ge_\alpha = 0.$*

4) *For $1 \le i \le 12$ let $\gamma_i = \sum_{\alpha\in\mathcal{Q}_i} e_\alpha$. Then the elements γ_i constitute a basis of N^G.*

5) *For an element $w \in N$ its projection to N^G is equal to*

$$p(w) = \mathrm{pr}_{N^G}(w) = \sum_{i=1}^{12}(1/\lvert \mathcal{Q}_i \rvert) r_i(w)\gamma_i, \tag{3}$$

where $r_i(w)$ is the sum of coefficients in w at all e_α with $\alpha \in \mathcal{Q}_i$.

Proof. 1) This is easy. For instance, if $\alpha = i_1 j_1, i_2 j_2, i_3 j_3$ and $c = \mathrm{diag}(-1,1,1)$, then $ce_\alpha = (-1)^m e_\alpha$, if exactly m of $i_1, j_1, \ldots, j_3$ are equal to 1.

2) This easily follows from the arguments in the proof of Lemma 3, taking into account statement 1), because σ, ρ, and $\hat{\pi}$ permute the tensors e_α (all of them, including those with α not even) always with plus sign.

3) If α is not even, then by 1) there exists $c \in C$ such that $ce_\alpha = -e_\alpha$, and we can apply Lemma 5 to the group $X = G$, subgroup $Y = \{1, c\}$, and the space element $v = e_\alpha$.

4) As the characteristics equals 0 and $\{e_\alpha \mid \alpha \in F\}$ is a basis of N, the elements $\sum_{g\in G} ge_\alpha$ span N^G. If α is not even, then the latter element equals 0. If α is even, this element is a scalar multiple of γ_i, where i is such that $\alpha \in \mathcal{Q}_i$. Therefore the elements γ_i span N^G. The independence of these elements is obvious.

5) If α is not even, then G-average of e_α, that is $p(e_\alpha)$, is 0. If α is even, then $p(e_\alpha) = x\gamma_i$, where i is such that $\alpha \in \mathcal{Q}_i$. The coefficient x can be found using the condition that the sums of all coefficients, at all e_β, $\beta \in F$, for e_α and $p(e_\alpha)$ must be the same, whence $1 = x\lvert \mathcal{Q}_i \rvert$, $x = 1/\lvert \mathcal{Q}_i \rvert$. Thus, $p(e_\alpha) = (1/\lvert \mathcal{Q}_i \rvert)\gamma_i$. Hence the formula (3) easily follows. ☐

Using the last statement of the proposition, we can easily calculate for each tensor of the form $w_i(a,b,\ldots)$ its orbit sum, i. e., the sum of all its G-conjugates.

Example. Calculate the orbit sum for

$$w_{27}(1,2,3,4,5)=((e_{11}+e_{22})+2(e_{12}-e_{21})+3e_{33})\otimes((e_{11}+e_{22})-$$
$$-2(e_{12}-e_{21})+3e_{33})\otimes(4(e_{11}+e_{22})+5e_{33}).$$

Make the table containing all even α such that w involves e_α, with the corresponding coefficient v_α and the number $1\le i\le 12$ such that $\alpha\in\mathcal{Q}_i$.

α	i	v_α	α	i	v_α	α	i	v_α
11,11,11	1	4	11,11,22	2	4	11,11,33	2	5
11,22,11	2	4	11,22,22	2	4	11,22,33	6	5
22,11,11	2	4	22,11,22	2	4	22,11,33	6	5
22,22,11	2	4	22,22,22	1	4	22,22,33	2	5
11,33,11	2	12	11,33,22	6	12	11,33,33	2	15
22,33,11	6	12	22,33,22	2	12	22,33,33	2	15
33,11,11	2	12	33,11,22	6	12	33,11,33	2	15
33,22,11	6	12	33,22,22	2	12	33,22,33	2	15
33,33,11	2	36	33,33,22	2	36	33,33,33	1	45
12,12,11	4	–16	12,12,22	4	–16	12,12,33	7	–20
12,21,11	3	16	12,21,22	5	16	12,21,33	8	20
21,12,11	5	16	21,12,22	3	16	21,12,33	8	20
21,21,11	4	–16	21,21,22	4	–16	21,21,33	7	–20

Using this table we can find the coefficients of the orbit sum in the basis $\{\gamma_i\}$. As an example, find the coefficient at γ_1. The coefficients in w at $e_{11,11,11}=e_{11}\otimes e_{11}\otimes e_{11}$, $e_{22,22,22}$, and $e_{33,33,33}$ are 4, 4, and 45, respectively. The coefficient in $p(w)$ at γ_1 is $r_1(w)/|\mathcal{Q}_1|=(4+4+45)/3=53/3$, according to Proposition 6.5). The orbit of w has length 18, whence the orbit sum is $18p(w)$, and the coefficient at γ_1 in this sum is $53\cdot 6=318$. Similarly one can calculate the other coefficients (which is recommended to the reader as an exercise) and find the complete orbit sum, which is equal to

$$318\gamma_1+214\gamma_2+32\gamma_3-32\gamma_4+32\gamma_5+174\gamma_6-40\gamma_7+40\gamma_8$$

(note that $\gamma_9,\ldots,\gamma_{12}$ are not involved in this sum).

Thus, we see that the calculation turns out to be rather long. However, to prove Theorem 1 we shall not need the orbit sums for all tensors $w_i(a,b,\ldots)$ for arbitrary $a,b,\ldots$! Knowing the coefficients at *some* γ_i in *some* sums will be sufficient.

4. The proof of Theorem 1. Now we can start proving Theorem 1. Assume on the contrary that a G-invariant decomposition of length ≤ 23 for $\mathcal{T}$ does exist, and among all such decompositions take the one of the smallest length.

Proposition 7. 1) *A minimal G-invariant decomposition for $\mathcal{T}$ does not contain an orbit of any of the types* 16, 18, 21, 25, 33, *or* 42.

2) *There exists a minimal decomposition not containing orbits of type* 4, 39, *or* 43.

Proof. 1) Consider three tensors $w'=w_7(1)=\delta^{\otimes 3}$, $w''=w_6(1)=\eta^{\otimes 3}$, and $w'''=w_5(0,1)=e_{33}^{\otimes 3}$. Their orbits are $\mathcal{O}'=\{\delta^{\otimes 3}\}$, $\mathcal{O}''=\{\eta^{\otimes 3},\overline{\eta}^{\otimes 3}\}$, and $\mathcal{O}'''=\{e_{11}^{\otimes 3},e_{22}^{\otimes 3},e_{33}^{\otimes 3}\}$, respectively, and the orbit sums are $\sigma'=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_6$, $\sigma''=2\gamma_1-\gamma_2+2\gamma_6$, and $\sigma'''=\gamma_1$. So any linear combination of γ_1, γ_2, and γ_6 is a linear combination of σ', σ'', and σ''' and can be therefore expressed as a sum of some G-invariant set of decomposable tensors of ≤ 6 elements.

Note that for any $i \in \{16,18,21,25,33,42\}$ the tensor $w_i(a,b,\dots)$ involves summands of the forms $e_{jj} \otimes e_{kk} \otimes e_{ll}$ only, so its orbit sum is a linear combination of γ_1, γ_2, and γ_6. Therefore, this orbit sum is the sum of a G-invariant set of decomposable tensors of ≤ 6 elements. But this orbit contains > 6 tensors. Thus it can be replaced by a *smaller* G-invariant set of decomposable tensors with the same sum. This contradicts the assumption that the decomposition under consideration is of minimal possible length.

2) The argument is similar. An orbit of each of the types 4, 39, or 43 can be replaced by a union of orbits of types 5, 6, and 7 having the same sum. Since the length of an orbit of type 4, 39, or 43 is 6, the overall length of the decomposition does not increase after such a replacement. □

Lemma 8. *The orbit sum for the tensor* $w_9(a,b) = (a\delta + b\varkappa)^{\otimes 3}$ *is* $4b^3(\gamma_9+\gamma_{10}+\gamma_{11}+\gamma_{12})+D$, *where* $D \in \langle \gamma_1,\dots,\gamma_8 \rangle$.

Proof. We have $N = N_1 \oplus N_2$, where N_1 is the span of all e_α such that $\alpha \in \mathcal{Q}_i$, $i = 9,10,11,12$, i. e., of all $e_{i_1j_1} \otimes e_{i_2j_2} \otimes e_{i_3j_3}$ such that $\{\{i_1,j_1\},\{i_2,j_2\},\{i_3,j_3\}\} = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$, and N_2 is the span of remaining e_α. It is clear that both N_1 and N_2 are G-invariant. For a tensor $t \in N$ let t_1 and t_2 be its N_1- and N_2-components.

It is more or less obvious that $[(a\delta + b\varkappa)^{\otimes 3}]_1 = [(b\varkappa)^{\otimes 3}]_1 = b^3[\varkappa^{\otimes 3}]_1$. Next, it is clear that $[\varkappa^{\otimes 3}]_1$ is the sum of all e_α such that $\alpha \in \mathcal{Q}_i$, $i = 9,10,11,12$, and the latter sum is, clearly, nothing else but $\gamma_9+\gamma_{10}+\gamma_{11}+\gamma_{12}$. Thus, $[w_9(a,b)]_1 = b^3(\gamma_9+\gamma_{10}+\gamma_{11}+\gamma_{12})$. So the orbit sum for $w_9(a,b)$ is

$$4p(w_9(a,b)) = 4p((w_9(a,b))_1 + (w_9(a,b))_2) = D + 4p((w_9(a,b))_1) =$$
$$= D + 4p(b^3(\gamma_9+\gamma_{10}+\gamma_{11}+\gamma_{12})) = 4b^3(\gamma_9+\gamma_{10}+\gamma_{11}+\gamma_{12}) + D,$$

where $D = 4p((w_9(a,b))_2)$. Finally, it is clear that $p(x) \in \langle \gamma_1,\dots,\gamma_8 \rangle$ for any $x \in N_2$. □

Proposition 9. *A* G*-invariant decomposition of length* ≤ 23 *can not contain an orbit of any of the types* $17,22,23,26,27,28,30,31,36,37$.

Proof. Let $I = \{17,22,23,26,27,28,30,31,36,37\}$ be the set of types listed in the hypothesis. Assume on the contrary that a decomposition containing an orbit $\mathcal{O}$ of a type $i \in I$ does exist. Since an orbit of any type $i \in I$ is of length 18, the rest of the decomposition contains ≤ 5 tensors, and so can only contain orbits of types 5, 6, 7, or 9.

We can immediately see from the table of orbits that the tensor $w_i(a,b,\dots)$ with $i \in I$ does not involve summands proportional to e_α, $\alpha \in \mathcal{Q}_j$, $j = 9,10,11,12$. Therefore its orbit sum does not involve such summands also, and so is in $\langle \gamma_1,\dots,\gamma_8 \rangle$. The same is true for $i = 5,6,7$. But $\mathcal{T} = \gamma_1+\gamma_3+\gamma_9$. So the decomposition necessary contains an orbit of type 9, that is, the orbit of the tensor $w_9(a,b) = (a\delta + b\varkappa)^{\otimes 3}$ with $b \ne 0$. By Lemma 8 the orbit sum of the latter tensor is $4b^3(\gamma_9+\gamma_{10}+\gamma_{11}+\gamma_{12})+D$, where $D \in \langle \gamma_1,\dots,\gamma_8 \rangle$. So the sum of all the tensors of the decomposition involves γ_9, γ_{10}, γ_{11}, and γ_{12} with the same coefficients – but this is not the case for $\mathcal{T}$. □

Our next aim is to eliminate the remaining orbits of length 18.

Lemma 10. *Let* $w = w_l(a,b,\dots)$ *be a decomposable tensor of type* $l = 24,29,32,38$, *and* s *be its orbit sum. Then the coefficients in* s *at* γ_m, *where* $m = 9,\dots,12$, *are listed in the following table:*

	24	29	32	38
γ_9	$6a^2d$	$6ia^2d$	$6a^2d$	$6ia^2d$
γ_{10}	$2a^2d+4abd$	$2ia^2d+4iabd$	$2a^2d+4abd$	$-2ia^2d+4iabd$
γ_{11}	$2b^2d+4abd$	$2ib^2d+4iabd$	$2b^2d-4abd$	$2ib^2d-4iabd$
γ_{12}	$6b^2d$	$6ib^2d$	$-6b^2d$	$-6ib^2d$

Proof. A direct computation similar to the Example in the end of Section 3. $\square$

Proposition 11. *A G-invariant decomposition for $\mathcal{T}$ of length ≤ 23 can not contain an orbit of any of types* $l = 24, 29, 32, 38$.

Proof. Assume on the contrary that such a decomposition does exist. Then $\mathcal{T} = s_l + s'$, where s_l is the orbit sum for $w_l(a,b,\ldots)$, containing 18 summands, and s' is the sum of the remaining summands. Obviously, s' contains ≤ 5 summands (tensors). So one of the following cases holds: (a) s' contains an orbit of length 4 (and therefore of type 9), and may be an orbit of type 7, that is, a multiple of $\delta^{\otimes 3}$, or (b) s' only contains orbits of types 5, 6, or 7. We take these two cases to a contradiction separately.

(a) In this case s' is the sum of two summands, namely the orbit sum for $w_9(a,b) = (a\delta + b\varkappa)^{\otimes 3}$ and another summand $c\delta^{\otimes 3}$. Note that w_l and therefore s_l does not involve any summands proportional to $e_{ii,jj,kk}$. On the other hand, in $(a\delta + b\varkappa)^{\otimes 3}$ such summands are the same as in $(a\delta)^{\otimes 3}$, with the same coefficients. Therefore the sum of all summands of this form in $\mathcal{T} = s_l + s'$ is the same as in $(c + 4a^3)\delta^{\otimes 3}$. But this contradicts to the fact that $\mathcal{T}$ involves $e_{11,11,11}$ but not $e_{11,11,22}$.

(b) In this case, obviously, s' does not involve γ_m with $m = 9,\ldots,12$. Since $\mathcal{T}$ involves γ_9, but not γ_{10}, γ_{11}, or γ_{12}, we conclude that s_l also involves γ_9, but not $\gamma_{10,11,12}$. By Lemma 10 the condition that $\mathcal{T}$ involves γ_9 implies $a^2 d \ne 0$, and the condition that $\mathcal{T}$ does not involve γ_{12} implies $b^2 d = 0$. Then $a, d \ne 0$ and $b = 0$, whence the coefficient in $\mathcal{T}$ at γ_{10} is not equal to 0, a contradiction. $\square$

Proposition 12. *A G-invariant decomposition for $\mathcal{T}$ of length ≤ 23 does not contain an orbit of type* 35.

Proof. In the same way like in the previous proposition we have two cases (a) and (b). In the case (a) the contradiction can be obtained by the same argument. As to (b) case, note that neither the orbit sum for $w_{35}(a,b,\ldots)$ nor s' can involve a summand proportional to $e_{11,12,21}$. But $\mathcal{T}$ involves such a summand. $\square$

Lemma 13. *For any tensor $w = u \otimes u \otimes v$ the sum $s = \sum_{g \in G} gw$ involves γ_3 and γ_5 with the same coefficients.*

Proof. Let $\pi_{12} : x \otimes y \otimes z \mapsto y \otimes x \otimes z$ be the usual (i. e., without transposing of matrices) transposition of the first two factors in the tensor cube $M \otimes M \otimes M$. Obviously, $\pi_{12} w = w$. Clearly, π_{12} commutes with any element $a \in A$. It is also easy to see that π_{12} commutes with $\rho \in B$, and the conjugation by π_{12} inverts σ. So π_{12} normalizes G, $\pi_{12} G \pi_{12} = G$, $\pi_{12} G = G \pi_{12}$. Now we have

$$\pi_{12} s = \pi_{12}\Big(\sum_{g \in G} gw\Big) = \sum_{g \in G} (\pi_{12} g) w = \sum_{g \in G} (g \pi_{12}) w = \sum_{g \in G} g(\pi_{12} w) = \sum_{g \in G} gw = s.$$

Further, observe that π_{12} preserves the set of all tensors e_α and leaves the set of all e_α with α even invariant. Since π_{12} normalizes G, it preserves the partition of the set $\{e_\alpha\}$ with even α into G-orbits, and therefore permutes $\{\gamma_i \mid i = 1,\ldots,12\}$.

It is clear that π_{12} permutes $e_{12,21,11}$ with $e_{21,12,11}$. So it permutes the orbit sum for $e_{12,21,11}$, which is equal to γ_3, with the orbit sum for $e_{21,12,11}$ which is equal to γ_5.

If $s = a\gamma_3 + b\gamma_5 + z$, where $z \in L := \langle \gamma_i \mid i \ne 3,5 \rangle$, then $s = \pi_{12} s = a\gamma_5 + b\gamma_3 + z'$, where $z' \in L$ also. So $a = b$. $\square$

Now we can finish the proof of Theorem 1. Assume on the contrary that there exists a G-invariant decomposition $\mathcal{P}$ for $\mathcal{T}$ of length ≤ 23. By Proposition 7.2) we can assume that $\mathcal{P}$ contains no orbits of type 4, 39, or 43. Next, $\mathcal{P}$ contains no orbits of types $16,18,21,25,33,42$ by Proposition 7.1); no orbits of types $17,22,23,26,27,28,30,31,36$, or 37 by Proposition 9; no orbits of types $24,29,32,38$ by Proposition 11; and no orbits of type 35 by Proposition 12. The remaining types are the following: $1,\dots,15$, except for 4; and $19,20,34,40,41,44$. For each of these types, except for 44, the tensor $w_i(a,b)$ is of the form $u^{\otimes 2}\otimes v$, and therefore its orbit sum involves γ_3 and γ_5 with the same coefficients. Also, for type 44 the orbit sum does not involve neither γ_3 nor γ_5, because w_{44} does not involve e_α such that $\alpha\in\mathcal{Q}_3$ or $\alpha\in\mathcal{Q}_5$. Therefore, $\mathcal{T}$ must involve γ_3 and γ_5 with the same coefficients, a contradiction.

The proof of Theorem 1 is complete. □

References

1. *Burichenko V. P.* Non-existence of a short algorithm for multiplication of 3×3 matrices with group $S_4\times S_3$ // Тр. Ин-та математики [Proceedings of the Institute of mathematics]. 2022. Т. 30, № 1–2. С. 99–116.

2. *Burichenko V. P.* Symmetries of matrix multiplication algorithms. I // arXiv preprint, arXiv: 1508.01110, 2015. arXiv.org

3. *Burichenko V. P.* The isotropy group of the matrix multiplication tensor // Тр. Ин-та математики [Proceedings of the Institute of mathematics]. 2016. Т. 24, № 2. С. 106–118.

4. *Brent R. P.* Algorithms for matrix multiplication // Technical report 70-157, Stanford university, Computer Science Department, 1970. Available at: http://maths-people.anu.edu.au/brent/pub/pub002.html.

V. P. Burichenko

Non-existence of a short algorithm for multiplication of 3 × 3 matrices whose group is $S_4\times S_3$, II

Summary

It is proved that there is no algorithm for multiplication of 3×3 matrices of multiplicative length ≤ 23 that is invariant under a certain group isomorphic to $S_4\times S_3$. The proof uses description of the orbits of this group on decomposable tensors in the tensor cube $(M_3(\mathbb{C}))^{\otimes 3}$ which was obtained earlier.

Адрес редколлегии: 220072, г. Минск, ул. Сурганова, 11, к. 45.
Телефон (017) 379-17-84, e-mail: tbusel@gmail.com

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Статья представляется в редакцию в двух экземплярах на русском или английском языках и является оригиналом для печати.

2. В статье должен быть указан соответствующий ей индекс по Универсальной десятичной классификации (УДК), полное название учреждения (вуза), где выполнена работа, адрес электронной почты. В нее следует включить аннотацию (на русском языке), резюме (на английском языке) с указанием фамилии и инициалов автора (авторов) и названия статьи (на английском языке). Ее необходимо подписать всем авторам, указать также почтовый адрес, номер телефона (служебный и домашний).

3. Авторы вместе с окончательным вариантом (после рецензирования) представляют TeX-файл со статьей, подготовленной в LaTeX (новых команд не вводить) с опцией 12pt в стандартном стиле article (\textwidth 162 mm, \textheight 240 mm), при этом объем статьи не должен превышать 12 страниц и ее разметка не требуется. Не допускается использование в TeX-файлах «нестандартных» TeX-команд (т. е. команд, не входящих в стандартную поставку LaTeX), а также переопределение стандартных команд.

Рисунки должны быть вставлены в текст статьи.

В указанный выше объем входят текст, summary, список литературы, таблицы и рисунки.

4. Занумерованные формулы выключаются в отдельную строку, номер формулы ставится у правого края страницы. Нумеровать следует лишь те формулы, на которые имеются ссылки. Формулировки утверждений (типа теорем, лемм и следствий) должны быть набраны курсивом, определения, замечания – обычным шрифтом.

5. Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте и оформляется следующим образом:

для книг: фамилия и инициалы автора. Полное название книги. Место издания, год. Номер тома, выпуска;

для журнальных статей: фамилия и инициалы автора. Название статьи. Название журнала. Год, номер тома, выпуска. Страницы от–до.

Ссылки в тексте обозначаются порядковым номером в квадратных скобках. При ссылке на книгу указываются страницы, например, [4, с. 10–25]. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Образец оформления статьи в LaTeX можно взять по адресу:

http://im.bas-net.by/lib/Proceedings_IMNASB/proc-of-im.zip