

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ

Государственное научное учреждение
«Институт математики Национальной
академии наук Беларуси»

Журнал основан в 1998 г.
До 2024 г. выходил под названием
«Труды Института математики».

PROCEEDINGS OF THE INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE NAS OF BELARUS

State Scientific Institute
«The Institute of Mathematics
of the National Academy of Sciences
of Belarus»

The journal was founded in 1998.
Before 2024, the name of the journal was
«Proceedings of the Institute of Mathematics».

ТОМ 32, № 1
Минск, 2024

ОТ РЕДАКЦИИ

В журнале «Труды Института математики НАН Беларуси» публикуются оригинальные статьи фундаментальной и прикладной математики. Обзорные статьи публикуются по решению редакционной коллегии. Журнал входит в «Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований», утвержденный Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь.

До 2024 г. журнал издавался под названием «Труды Института математики».

Основные разделы журнала:

Алгебра и теория чисел

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Вычислительная математика

Дискретная математика и математическая кибернетика

Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Математическое моделирование и численные методы

Математические методы защиты информации

Краткие сообщения

Адрес редакции: Address:

ул. Сурганова, 11, к. 45 11, Surganov Str., room 45,
220072, г. Минск, Беларусь Minsk, Belarus, 220072

Тел. +375-17-379-17-84 Phone: +375-17-379-17-84

e-mail: tbusel@im.bas-net.by

EDITOR'S NOTE

The journal "Proceedings of the Institute of Mathematics of the NAS of Belarus" publishes original articles in fundamental and applied mathematics. Publication of review articles requires approval of the editorial board. The journal is approved by the Higher Attestation Commission of the Republic of Belarus for publishing results of dissertation research, and is included in the official list of such publications.

Before 2024, the name of the journal was "Proceedings of the Institute of Mathematics" (Trudy Instituta Matematiki).

Main sections of the journal:

Algebra and number theory

Real, complex and functional analysis

Computational Mathematics

Discrete mathematics and mathematical cybernetics

Differential equations, dynamic systems and optimal control

Mathematical modeling and numerical methods

Mathematical methods for information security

Brief Communications

Главный редактор

Янчевский В. И. – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь

Редакционная коллегия

- Гороховик В. В.** – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь (*заместитель главного редактора*)
Сафонов В. Г. – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь (*заместитель главного редактора*)
Бусел Т. С. – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь (*ответственный секретарь*)
- Антоневич А. Б.** – Белорусский государственный университет, Беларусь
Асташкин С. В. – Самарский национальный исследовательский университет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия
- Асташова И. В.** – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия
Барабанов Е. А. – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь
Бахтин В. И. – Белорусский государственный университет, Беларусь
Берник В. И. – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь
Вабищевич П. М. – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия
Васильев Д. В. – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь
Галанин М. П. – Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН, Россия
- Гладков А. Л.** – Белорусский государственный университет, Беларусь
Го Веньбинь – Хайнаньский университет, Школа математики и статистики, Китай
Громач В. И. – Белорусский государственный университет, Беларусь
Добровольский Н. М. – Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого, Россия
- Егоров А. Д.** – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь
Зайцев В. А. – Институт математики, информационных технологий и физики Удмуртского государственного университета, Россия
- Изобов Н. А.** – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь
Ильин А. В. – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия
Кигурадзе И. Т. – Математический институт имени А. Размадзе, Тбилисский государственный университет имени И. Джавахишвили, Грузия
- Ковалев М. Я.** – Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Беларусь
Корзюк В. И. – Белорусский государственный университет, Институт математики НАН Беларуси, Беларусь
- Костюкова О. И.** – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь
Лебедев А. В. – Белорусский государственный университет, Беларусь
Леваков А. А. – Белорусский государственный университет, Беларусь
Лыков К. В. – Белорусский государственный университет, Институт математики НАН Беларуси, Беларусь
- Матус П. П.** – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь
Махнев А. А. – Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, Россия
Ни Мин Кан – Восточно-китайский педагогический университет, Институт математических наук, Китай
- Осиновская А. А.** – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь
Попова С. Н. – Удмуртский государственный университет, Россия
Ровба Е. А. – Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Беларусь
Сарванов В. И. – Институт математики НАН Беларуси, Беларусь
Сергеев И. Н. – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия
Скиба А. Н. – Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Беларусь
Старовойтов А. П. – Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Беларусь
Фомичев В. В. – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия

Editor-in-Chief

Yanchevskii V. I. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Editorial Board

Gorokhovich V. V. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)

Safonov V. G. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)

Busel T. S. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus (*Executive secretary*)

Antonevich A. B. – Belarusian State University, Belarus

Astashkin S. V. – Samara National Research University, Lomonosov Moscow State University, Russia

Astashova I. V. – Lomonosov Moscow State University, Russia

Bakhtin V. I. – Belarusian State University, Belarus

Barabanov E. A. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Bernik V. I. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Dobrovol'skii N. M. – Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Russia

Egorov A. D. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Fomichev V. V. – Lomonosov Moscow State University, Russia

Galanin M. P. – Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Russia

Gladkov A. L. – Belarusian State University, Belarus

Gromak V. I. – Belarusian State University, Belarus

Guo Wenbin – Hainan University, The School of Mathematics and Statistics, China

Il'in A. V. – Lomonosov Moscow State University, Russia

Izobov N. A. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Kiguradze I. T. – Andrea Razmadze Mathematical Institute of Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Georgia

Korzyuk V. I. – Belarusian State University, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Kostyukova O. I. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Kovalev M. Ya. – United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Lebedev A. V. – Belarusian State University, Belarus

Levakov A. A. – Belarusian State University, Belarus

Lykov K. V. – Belarusian State University, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Makhnev A. A. – N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Russia

Matus P. P. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Ni Min Kan – East China Normal University, School of Mathematical Sciences, China

Osinovskaya A. A. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Popova S. N. – Udmurt State University, Russia

Rovba E. A. – Yanka Kupala State University of Grodno, Belarus

Sarvanov V. I. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Sergeev I. N. – Lomonosov Moscow State University, Russia

Skiba A. N. – Francisk Skorina Gomel State University, Belarus

Starovoitov A. P. – Francisk Skorina Gomel State University, Belarus

Vabishchevich P. N. – Lomonosov Moscow State University, Russia

Vasilyev D. V. – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Belarus

Zaitsev V. A. – Institute of Mathematics, Information Technologies and Physics of Udmurt State University, Russia

СОДЕРЖАНИЕ

Коллектив сотрудников Института математики НАН Беларуси. Валентин Викентьевич
Гороховик. К 75-летию со дня рождения 7

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Калоша Н. И., Пантелеева Ж. И. Обобщение леммы Гельфонда о малых значениях целочис-
ленных полиномов на многомерный случай 10
Лю А.-М., Ван С., Сафонов В. Г., Скиба А. Н. Решеточные характеристики разрешимых и
сверхразрешимых конечных групп 17
Мурашко В. И. О классах конечных групп, определяемых системами обобщенно субнормальных
подгрупп 25
Сафонова И. Н. О n -кратной σ -локальности непустой τ -замкнутой формации конечных групп 31

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Поцейко П. Г., Ровба Е. А. Об аппроксимациях интеграла Римана–Лиувилля на отрезке
рациональными интегральными операторами Фурье–Чебышёва 38

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

Чень М., Махнев А. А., Климин В. С. О дистанционно регулярных графах диаметра 3 и
степени 44 57

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Деменчук А. К. Зависимость между компонентами сильно нерегулярного квазипериодического
решения линейной однородной алгебраической системы 64
Карпук М. В., Худякова П. А. Полное описание непрерывных на прямой решений линейного
функционального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами 74

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Авлас А. Н. Численный расчет эффективного коэффициента теплопроводности дисперсно-
наполненных композиционных материалов 86
Ерофеев В. Т., Громыко Г. Ф., Заяц Г. М. Численное решение задачи экранирования
импульсных электромагнитных полей намагниченными экранами из пермаллоя 97
Матус П. П., Туен В. Т. К. Трехслойные компактные разностные схемы для параболического
уравнения 110

PROCEEDINGS
OF THE INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE NAS OF BELARUS
Minsk. 2024. Vol. 32. N 1

CONTENTS

Staff of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus. Valentin Vikentievich Gorokhovik. To the 75th birthday 7

ALGEBRA AND NUMBER THEORY

Kalosha N. I., Panteleeva Zh. I. Generalization of Gelfond's lemma on small values of integer polynomials to the multidimensional case 10
Liu A.-M., Wang S., Safonov V. G., Skiba A. N. Lattice characterizations of soluble and supersoluble finite groups 17
Murashka V. I. On the classes of finite groups defined by the systems of generalized subnormal subgroups 25
Safonova I. N. On n -multiply σ -locality of a non-empty τ -cloused formation of finite groups 31

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

Patseika P. G., Rouba Y. A. On approximations of Riemann–Liouville integral on a segment by rational Fourier–Chebyshev integral operators 38

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

Chen M., Makhnev A. A., Klimin V. S. On distance regular graphs with diameter 3 and degree 44 57

DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMIC SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

Demenchuk A. K. Relationship between components of a strongly irregular quasiperiodic solutions of the linear homogeneous algebraic system 64
Karpuk M. V., Khudziakova P. A. A complete description of continuous on the real line solutions of the linear functional equation of the second order with constant coefficients 74

MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL METHODS

Aulas A. N. Numerical calculation of the effective thermal conductivity coefficient of particle-filled composite materials 86
Erofeenko V. T., Gromyko G. F., Zayats G. M. Numerical solution of the problem of shielding of pulsed electromagnetic fields by magnetized permalloy screens 97
Matus P. P., Tuyen V. T. K. Three-layer of compact difference schemes for the parabolic equation 110

ВАЛЕНТИН ВИКЕНТЬЕВИЧ ГОРОХОВИК. К 75-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

Коллектив сотрудников Института математики НАН Беларуси

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: math@im.bas-net.by
Поступила 29.03.2024



29 марта 2024 года исполнилось 75 лет доктору физико-математических наук, профессору, члену-корреспонденту НАН Беларуси Валентину Викентьевичу Гороховику – известному ученому в области нелинейного анализа и математической теории оптимизации.

Валентин Викентьевич родился в 1949 г. в д. Хорошее Логойского района Минской области. С серебряной медалью окончил Задорьевскую среднюю школу. Осенью 1965 г. был зачислен на первый курс математического факультета Белорусского государственного университета, который с отличием окончил в 1970 г. Трудовая деятельность Валентина Викентьевича неразрывно связана с Институтом математики НАН Беларуси. Еще обучаясь в университете, он был принят на работу в институт. Именно в Институте математики он состоялся как ученый, пройдя путь от стажера-исследователя до заведующего отделом. С 1996 по 2022 г. В. В. Гороховик возглавлял отдел нелинейного анализа (с 2004 г. отдел нелинейного и стохастического анализа).

В настоящее время Валентин Викентьевич – главный научный сотрудник отдела нелинейного и стохастического анализа.

В июне 1973 г. Валентин Викентьевич защитил кандидатскую диссертацию на тему «Некоторые вопросы векторной оптимизации и дифференциальных игр» под руководством Фаины Михайловны Кирилловой, а в ноябре 1988 г. в Институте математики и механики Уральского отделения АН СССР – диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук на тему «Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации». В июле 1991 г. ВАК СССР присвоил В. В. Гороховику ученое звание профессора, а в 2000 г. он был избран членом-корреспондентом Национальной академии наук Беларуси.

Основные научные интересы Валентина Викентьевича связаны с такими актуальными разделами современного анализа, как выпуклый, негладкий и многозначный анализ и их приложение к экстремальным задачам. Существенный вклад внес В. В. Гороховик в разработку математических основ теории векторной оптимизации – направления, связанного с теоретическим обоснованием оптимального выбора по нескольким показателям качества. Его монография «Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации», изданная в 1990 г. в издательстве «Наука и техника», – одна из первых в мире, в которой были систематически разработаны основные положения теории многокритериального выбора.

В выпуклом анализе Валентин Викентьевич всесторонне изучил геометрическое строение полупространств (выпуклых подмножеств векторного пространства, дополнения к которым также выпуклы). Это позволило ему осуществить полную классификацию полупространств по типу и рангу и ввести двойственные полупространствам объекты – новые классы ступенчато-линейных и ступенчато-аффинных функций, распространив тем самым классическую двойственность между линейными функциями и гиперподпространствами и двойственность между аффинными функциями и гиперплоскостями до двойственности между полупространствами и ступенчато-аффинными функциями. На основе этих результатов он развил общую теорию отделимости выпуклых множеств

ступенчато-аффинными функциями, которая обобщает один из основных принципов линейного анализа – классическую теорию отделимости выпуклых множеств гиперплоскостями. В качестве приложений этой теории Валентин Викентьевич предложил и разработал новый подход к исследованию выпуклых задач оптимизации, базирующийся не на классических схемах выпуклого анализа, а на отделимости выпуклых множеств полупространствами и соответствующими им ступенчато-аффинными функциями. Используя этот подход, он получил критерии оптимальности решений в нерегулярных выпуклых задачах оптимизации, включая нерегулярные задачи векторной оптимизации и нерегулярные классические задачи выпуклого программирования. В теории упорядоченных векторных пространств Валентин Викентьевич применил ступенчато-аффинные функции для аналитического представления отношений предпорядка, согласованных с алгебраическими операциями.

Целый цикл работ Валентина Викентьевича посвящен исследованиям многозначных отображений. Существенное место в этом цикле занимают исследования аффинных многозначных отображений. Им установлено, что каждому аффинному многозначному отображению однозначно соответствует сопряженное отображение, которое является однозначным разностно-сублинейным отображением и которое – в некотором смысле «линейная часть» аффинных многозначных отображений.

Другим важным результатом, характеризующим аффинные многозначные отображения, действующие в конечномерных векторных пространствах, является доказательство Валентином Викентьевичем того, что каждое аффинное многозначное отображение полностью определяется своими однозначными аффинными селекторами, совокупность которых образует выпуклый компакт. Он установил необходимое и достаточное условие, при выполнении которого выпуклый компакт однозначных аффинных отображений состоит из аффинных селекторов некоторого аффинного многозначного отображения и полностью определяет его. Валентин Викентьевич ввел понятия крайних и выступающих селекторов многозначных отображений и доказал, что в конечномерных пространствах каждое аффинное многозначное отображение есть выпуклая оболочка (соответственно, замкнутая выпуклая оболочка) крайних (соответственно, выступающих) аффинных селекторов. Эти утверждения распространяют на аффинные многозначные отображения такие важные классические теоремы выпуклого анализа, как теорема Минковского (Крейна–Мильмана) и теорема Страшевича.

Используя аффинные многозначные отображения в качестве локальных аппроксимаций, Валентин Викентьевич ввел для многозначных отображений понятие дифференцируемости, распространяющее на многозначные отображения основное классическое понятие дифференцируемости однозначных отображений – дифференцируемость в смысле Фреше. В. В. Гороховиком был получен ряд характеристик введенного понятия дифференцируемости многозначных отображений в терминах дифференцируемости их опорных функций.

Существенный вклад внес Валентин Викентьевич и в развитие негладкого анализа, т. е. в анализ недифференцируемых в классическом смысле функций и отображений, а также множеств, граница которых не является гладким многообразием. К этому циклу следует отнести также его исследования по описанию глобальных характеристик кусочно-аффинных и положительно однородных функций и отображений, а также кусочно-полиэдральных и эпиплещивых множеств. Естественным развитием этих исследований являются разработанные им теории полиэдрального и аппроксимативного квазидифференцирования функций и отображений, основанные на использовании кусочно-линейных и разностно-сублинейных локальных аппроксимаций.

Разработанные методы анализа негладких функций и множеств Валентин Викентьевич успешно применял к исследованию различных классов задач оптимизации, включая задачи векторной оптимизации, минимаксные задачи, задачи с ограничениями различных видов, задачи оптимального управления, при этом основные усилия были направлены на разработку необходимых, а также достаточных условий оптимальности первого, второго и более высокого порядков. Важные результаты получены и по вопросам устойчивости решений задач векторной оптимизации, связанные, по существу, с исследованием топологических свойств специальных многозначных отображений.

Валентин Викентьевич продолжает вести активные научные исследования. В последние годы им опубликован ряд работ, посвященных абстрактной выпуклости функций – новому научному

направлению в выпуклом и негладком анализе, имеющему важное как теоретическое, так и прикладное значение.

Значительные усилия Валентина Викентьевича были направлены также и на прикладные исследования. Под его руководством выполнены важные прикладные проекты по договорам с рядом ведущих предприятий и организаций республики, в частности, с УП «Завод полупроводниковых приборов» объединения «Интеграл», объединением «Белорусская железная дорога» и др.

Валентин Викентьевич – участник многих международных симпозиумов и конференций, на которых он неоднократно выступал с пленарными докладами. Он – автор более 180 научных работ, в том числе уже упоминавшейся монографии «Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации».

Валентин Викентьевич принимает активное участие в аттестации научных кадров. Более тридцати пяти лет он является членом, а в последние двадцать лет председателем совета по защите докторских диссертаций. С момента создания ВАК Республики Беларусь в течение одиннадцати лет являлся членом экспертного совета ВАК по математике.

Валентин Викентьевич успешно сочетает научные исследования с педагогической деятельностью, под его руководством защищено 4 кандидатские диссертации. Более тридцати лет он работал по совместительству на механико-математическом факультете Белорусского государственного университета. При создании новых специальностей на факультете участвовал в разработке ряда учебных программ и курсов лекций, кроме того, подготовил и издал книги «Конечномерные задачи оптимизации» и «Математические основы теории потребления», которые рекомендованы Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебных пособий для студентов математических специальностей. В качестве председателя неоднократно возглавлял работу государственных экзаменационных комиссий в Белорусском государственном университете и Гродненском государственном университете имени Янки Купалы.

Валентину Викентьевичу присущи большое трудолюбие, высокий профессионализм, внимательное и доброжелательное отношение к людям. Он награжден нагрудным знаком «Юбилейная медаль «В честь 80-летия НАН Беларуси», памятным знаком «У гонар заснавання НАН Беларусі», нагрудным знаком отличия имени В. М. Игнатовского Национальной академии наук Беларуси, нагрудным знаком «100 год БДУ», почетными грамотами Министерства образования, ВАК и НАН Беларуси.

Сердечно поздравляем Валентина Викентьевича с 75-летием, желаем ему крепкого здоровья, новых творческих достижений, счастья и благополучия.



АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ
ALGEBRA AND NUMBER THEORY



УДК 511.42

ОБОБЩЕНИЕ ЛЕММЫ ГЕЛЬФОНДА О МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ
ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОЛИНОМОВ НА МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Н. И. Калоша, Ж. И. Пантелеева

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
e-mail: kalosha@im.bas-net.by, janna-85@list.ru

Поступила: 05.02.2024

Исправлена: 11.06.2024

Принята: 18.06.2024

Ключевые слова: диофантовы приближения, многочлен с целыми коэффициентами, алгебраические числа, теорема Дирихле, приводимые полиномы.

Аннотация. В работе установлена связь между значениями двух целочисленных полиномов без общих корней на непересекающихся интервалах фиксированной длины с основными характеристиками полиномов – степенью и высотой. Доказанную теорему можно рассматривать как двумерное обобщение леммы Гельфонда из теории трансцендентных чисел. Теорема может быть использована при оценке сверху размерности Хаусдорфа множества векторов, которые по координатам, с заданным порядком, приближаются сопряженными алгебраическими числами.

GENERALIZATION OF GELFOND'S LEMMA ON SMALL VALUES OF INTEGER
POLYNOMIALS TO THE MULTIDIMENSIONAL CASE

N. I. Kalosha, Zh. I. Panteleeva

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
e-mail: kalosha@im.bas-net.by, janna-85@list.ru

Received: 05.02.2024

Revised: 11.06.2024

Accepted: 18.06.2024

Keywords: diophantine approximation, integral polynomial, algebraic numbers, Dirichlet's theorem, reducible polynomials.

Abstract. The paper establishes a relationship between the values of two integer polynomials without common roots on disjoint intervals of fixed length with the main characteristics of the polynomials – degree and height. The proved theorem can be considered as a two-dimensional generalization of Gelfond's lemma from the theory of transcendental numbers. The theorem can be used to estimate from above the Hausdorff dimension of a set of vectors that are approximated by conjugate algebraic numbers in a given order.

Введение. Дирихле [1] заметил, что действительные числа α можно приближать рациональными p/q с точностью, значительно большей, чем $1/q$. Он доказал, что для любого α и любого натурального числа Q всегда можно найти целые числа p и q , $1 \leq q \leq Q$, такие что

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq q^{-1} Q^{-1}. \quad (1)$$

Перепишем неравенство (1) в виде

$$|q\alpha - p| \leq Q^{-1} \quad (2)$$

и обобщим его с многочленов $qx - p$ первой степени на многочлены произвольной степени с целочисленными коэффициентами

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0. \quad (3)$$

В (3) через n будем обозначать степень многочлена $\deg P = n$, а через $H = H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$ его высоту. Легко доказать, используя известный принцип ящиков Дирихле, что при x и $Q \in \mathbb{N}$ всегда можно найти многочлен $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P = n$, $H(P) \leq Q$ такой, что при подходящей величине $c_1 = c_1(n)$ верно неравенство

$$|P(x)| \leq c_1 Q^{-n}. \quad (4)$$

Через $c_1 = c_1(n)$, $c_2, \dots$ будем обозначать положительные величины, зависящие от n и не зависящие от H и Q , $\ll$ – символ Виноградова, означающий, что если $K \ll L$, то $K < cL$ и c – положительная величина, не зависящая от K и L .

Неравенства (2), (4) обобщались в различных направлениях в теории диофантовых приближений и теории трансцендентных чисел.

В двадцатых годах прошлого века советский математик А. Я. Хинчин применил к теореме Дирихле теорию меры.

Пусть $\Psi(x)$ – положительная монотонно убывающая функция положительного аргумента x , $\mu_1 A$ – мера Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ – интервал. Обозначим через $\mathcal{L}_1(\Psi)$ – множество действительных $x \in I$, для которых неравенство

$$|qx - p| \leq \Psi(q) \quad (5)$$

имеет бесконечное множество решений в многочленах первой степени с целочисленными коэффициентами.

Теорема Хинчина [2]. *Справедливы равенства*

$$\mu_1 \mathcal{L}_1(\Psi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q) < \infty, \\ \mu_1 I, & \text{если } \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q) = \infty. \end{cases}$$

Обобщим неравенство (5) на многочлены произвольной степени

$$|P(x)| \leq H^{n-1} \Psi(H) \quad (6)$$

и обозначим через $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество $x \in I$, для которых неравенство (6) имеет бесконечное число решений в $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Для $\Psi_1(x) = x^{-w}$ и $w > n$ немецкий математик К. Малер в 1932 г. доказал [3], что при $w > 4n$ справедливо $\mu_1 \mathcal{L}_n(\Psi_1(x)) = 0$. Этот факт он использовал при построении классификации действительных и комплексных чисел. Гипотеза Малера состояла в том, что $\mu_1 \mathcal{L}_n(\Psi_1(x)) = 0$ уже при $w > n$. После ряда попыток доказательства гипотезы Малера (неравенства $w > 2n$, $w > \frac{3}{2}n$, $w > \frac{4}{3}n$) ее окончательное решение получил в 1964 г. белорусский математик В. Г. Спринджук [4–6]. Но как быть в случае произвольной функции $\Psi(x)$?

Ответ на этот вопрос был получен в работах В. И. Берника [7] и В. В. Бересневича [8].

Теорема Берника–Бересневича. *Для многочленов произвольной степени $n \geq 1$*

$$\mu_1 \mathcal{L}_n(\Psi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty, \\ \mu_1 I, & \text{если } \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty. \end{cases} \quad (7)$$

Приведенные выше результаты находят применения в математической физике [9; 10] и при проектировании антенных устройств [11].

Если показатель степени $w > n$ функции $\Psi_1(x) = x^{-w}$ растет, то первое утверждение в (7) не изменяется, множество решений неравенства (6) уменьшается. В таких случаях применяют понятие размерности Хаусдорфа [12]. Для неравенства вида (6) при $\Psi(H) = H^{-w-n+1}$, $w > n$, оказывается

$$\dim \mathcal{L}_n(w) = \frac{n+1}{w+1}. \quad (8)$$

Равенство (8) было получено не сразу, а в виде оценок сверху и снизу. Оценка снизу $\dim \mathcal{L}_n(w) \geq (n+1)/(w+1)$ была получена А. Бейкером и В. Шмидтом [13], а соответствующая оценка сверху –

В. И. Берником [14]. Наиболее сложным моментом доказательства в [14] являлось следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$ не имеют общих корней на отрезке I длины $\mu_1 I = Q^{-\eta}$, $\eta > 0$, и удовлетворяют следующим условиям:

$$\deg P_i \leq n, \quad H(P_i) \leq Q, \quad \max_{x \in I} (|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau}, \quad \tau > 0, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Тогда при любом $\delta > 0$ и $Q > Q_0(\delta)$ выполняется неравенство

$$\tau + 1 + 2 \max(\tau + 1 - \eta, 0) < 2n + \delta. \quad (10)$$

Если вместо интервала I взять трансцендентную точку ξ , то неравенство (10) можно записать в виде

$$\tau + 1 < 2n + \delta. \quad (11)$$

Неравенство (11) называется леммой А. Гельфонда [15]. В приложениях леммы Гельфонда и леммы 1 строятся полиномы $P_1(x), P_2(x)$, для которых неравенства (10) и (11) противоречивы. В лемме 1 возьмем $\eta = \frac{n}{2}$. Тогда неравенство (11) противоречиво при $\tau > 2n - 1$, а неравенство (10) – при более слабом ограничении $\tau > n - 1$. Наименьшая длина интервала I , при которой достигается противоречие, выбирается в зависимости от взаимного расположения корней полиномов $P_1(x), P_2(x)$, которое в свою очередь связано с величинами производных $P_i^{(j)}(x)$, $i = 1, 2, 1 \leq j \leq n$. Лемма 1 обобщена в работах [16; 17]. В данной работе мы доказываем аналог леммы 1 в форме, удобной для совместных приближений. В работах [5; 6] В. Г. Спринджук сформулировал гипотезу о плоской мере μ_2 множества $\mathcal{L}_n(v_1, v_2)$ точек $(x, y) \in I_1 \times I_2$, в которых система неравенств

$$\max(|P(x)|) < H^{-v_1}, \quad \max(|P(y)|) < H^{-v_2} \quad (12)$$

имеет бесконечное число решений в полиномах $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

Гипотеза Спринджук. При $v_1 \geq -1, v_2 \geq -1$ и $v_1 + v_2 > n - 1$ верно равенство $\mu_2 \mathcal{L}_n(v_1, v_2) = 0$.

Гипотеза Спринджук решена в 1980 г. В. И. Берником [18]. К настоящему времени получены многочисленные обобщения этого результата [19–22].

Более того, для совместных приближений уже получен полный аналог теоремы Хинчина как в случае сходимости, так и в случае расходимости [23].

Основная часть. Введем классификацию многочленов и их корней, восходящую к работам Спринджук [5]. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и $\beta_1, \dots, \beta_n$ – некоторые упорядочения комплексных корней многочлена $P_1(x)$. Возьмем достаточно малое число $\varepsilon_1 > 0$ и $T = \lceil \varepsilon_1^{-1} \rceil + 1$. Положим

$$\begin{aligned} |\alpha_1(P_1) - \alpha_i(P_1)| &= H^{-\rho_i(P_1)}, \quad i = 2, \dots, m_1, \quad \frac{l_i - 1}{T} \leq \rho_i(P_1) < \frac{l_i}{T}, \\ |\beta_1(P_1) - \beta_j(P_1)| &= H^{-\theta_j(P_1)}, \quad j = 2, \dots, m_2, \quad \frac{k_j - 1}{T} \leq \theta_j(P_1) < \frac{k_j}{T}, \\ p_j &= T^{-1} \sum_{i=j+1}^{m_1} l_i, \quad q_j = T^{-1} \sum_{i=j+1}^{m_2} k_i. \end{aligned}$$

Нетрудно доказать, что количество значений векторов $\bar{v} = (l_2, \dots, l_{m_1}, k_2, \dots, k_{m_2})$ конечно и зависит только от n и ε_1 и не зависит от H и Q . Для этого как и в [5] используем дискриминанты полиномов $P_1(t)$ и $P_2(t)$.

Введем класс многочленов $\mathcal{P}_n(Q, \bar{v}, H)$ – целочисленные многочлены ограниченной высоты $\frac{Q}{2} \leq H \leq Q$, $Q \in \mathbb{N}$ и одним и тем же вектором $\bar{v}$.

Основной результат статьи состоит в следующем.

Теорема. Пусть $P_1(t), P_2(t)$ имеют степень n , их высоты не превосходят Q , они не имеют общих корней в $\mathbb{C}$, и для достаточно малого ε_1 лежат в одном и том же классе $\mathcal{P}_n(Q, \bar{v}, H)$. Пусть в $I = I_1 \cup I_2$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $\mu I_1 = Q^{-\eta_1}$, $\mu I_2 = Q^{-\eta_2}$, $\eta_i \geq 0$, выполняются неравенства

$$\max_{x \in I_1} (|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau_1}, \quad \tau_1 \geq 0,$$

$$\max_{x \in I_2} (|P_1(\omega)|, |P_2(\omega)|) < Q^{-\tau_2}, \quad \tau_2 \geq 0.$$

Тогда при любом $\delta > 0$ и $Q > Q_0(\delta)$ справедливо неравенство

$$\tau_1 + \tau_2 + 2 + 2 \sum_{k_1=1}^n \max(\tau_1 + 1 - k_1 \eta_1, 0) + 2 \sum_{k_2=1}^n \max(\tau_2 + 1 - k_2 \eta_2, 0) < 2n + \delta.$$

Теорема полезна при нахождении размерности Хаусдорфа множества действительных векторов $\bar{u} = (x, y)$, для которых неравенство (12) имеет бесконечное число решений в полиномах $P(t)$, а также исследования неравенства (12) в комплексных числах (x, y) . Комплексный случай в задаче (12) до сих пор не рассмотрен, и мы надеемся, что обобщение теоремы на поле комплексных чисел окажется полезным при доказательстве теорем в метрической теории диофантовых приближений в $\mathbb{C}^2$.

Вначале приведем лемму, использующуюся при доказательстве теоремы.

Лемма 2 [18]. Пусть α_1 – ближайший корень к x многочлена $P(x)$, т. е.

$$\min_{1 \leq j \leq n} |x - \alpha_j| = |x - \alpha_1|.$$

Тогда

$$|x - \alpha_1| \leq 2^n \frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_1)|},$$

$$|x - \alpha_1| \leq \min_{2 \leq j \leq n} \left(2^n \frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_1)|} |\alpha_1 - \alpha_2| \dots |\alpha_1 - \alpha_j| \right)^{1/j}.$$

Доказательство. Разобьем корни многочлена $P_1(x)$ на две группы:

$\alpha_i(P_1) \in I_1$, $1 \leq i \leq m_1$, и $\beta_j(P_1) \in I_2$, $1 \leq j \leq m_2$, $m_1 + m_2 \leq n$.

Упорядочим корни следующим образом:

$$|\alpha_1(P_1) - \alpha_2(P_1)| \leq |\alpha_1(P_1) - \alpha_3(P_1)| \leq \dots \leq |\alpha_1(P_1) - \alpha_{m_1}(P_1)|,$$

$$|\beta_1(P_1) - \beta_2(P_1)| \leq |\beta_1(P_1) - \beta_3(P_1)| \leq \dots \leq |\beta_1(P_1) - \beta_{m_2}(P_1)|.$$

Пусть $\alpha_1(P_1)$ – ближайший к x корень $P_1(x)$ на I_1 , а $\beta_1(P_1)$ – ближайший к x корень $P_1(x)$ на I_2 .

Тогда используя первые неравенства леммы 2 получим:

$$Q^{-\eta_1} \leq |x - \alpha_1(P_1)| \ll Q^{-\tau_1 - 1 + p_1 + c_2 \varepsilon_1}, \quad Q^{-\eta_2} \leq |x - \beta_1(P_1)| \ll Q^{-\tau_2 - 1 + q_1 + c_3 \varepsilon_1}.$$

Из третьего неравенства леммы 2 имеем:

$$Q^{-\eta_1 j} \leq |x - \alpha_1(P_1)|^j \ll Q^{-\tau_1 - 1 + p_j + c_4 \varepsilon_1}, \quad Q^{-\eta_2 j} \leq |x - \beta_1(P_1)|^j \ll Q^{-\tau_2 - 1 + q_j + c_5 \varepsilon_1}.$$

Аналогичные неравенства справедливы и для второго многочлена:

$$Q^{-\eta_2} \leq |x - \alpha_1(P_2)| \ll Q^{-\tau_1 - 1 + p_1 + c_6 \varepsilon_1}, \quad Q^{-\eta_2} \leq |x - \beta_1(P_2)| \ll Q^{-\tau_1 - 1 + q_1 + c_7 \varepsilon_1},$$

$$Q^{-\eta_1 j} \leq |x - \alpha_1(P_2)|^j \ll Q^{-\tau_1 - 1 + p_j + c_8 \varepsilon_1}, \quad Q^{-\eta_2 j} \leq |x - \beta_1(P_2)|^j \ll Q^{-\tau_2 - 1 + q_j + c_9 \varepsilon_1}.$$

Рассмотрим результат $R(P_1, P_2)$ многочленов $P_1(t)$ и $P_2(t)$. Так как они не имеют общих корней, то результат не равен нулю, тогда

$$\begin{aligned} 1 &\leq |R(P_1, P_2)| \ll |a_n(P_1)|^{\deg P_2} |a_n(P_2)|^{\deg P_1} \times \\ &\times \prod_{1 \leq i, j \leq m_1} |\alpha_i(P_1) - \alpha_j(P_2)| \prod_{1 \leq i, j \leq m_2} |\beta_i(P_1) - \beta_j(P_2)| \times \\ &\times \prod_{\substack{1 \leq i \leq m_1, \\ 1 \leq j \leq m_2}} |\alpha_i(P_1) - \beta_j(P_2)| \prod_{\substack{1 \leq i \leq m_2, \\ 1 \leq j \leq m_1}} |\beta_i(P_1) - \alpha_j(P_2)| \ll \\ &\ll Q^{2n} \prod_{1 \leq i, j \leq m_1} |\alpha_i(P_1) - \alpha_j(P_2)| \prod_{1 \leq i, j \leq m_2} |\beta_i(P_1) - \beta_j(P_2)| \times \\ &\times \prod_{\substack{1 \leq i \leq m_1, \\ 1 \leq j \leq m_2}} |\alpha_i(P_1) - \beta_j(P_2)| \prod_{\substack{1 \leq i \leq m_2, \\ 1 \leq j \leq m_1}} |\beta_i(P_1) - \alpha_j(P_2)|. \end{aligned}$$

Оценим модули разностей

$$|\alpha_1(P_1) - \alpha_1(P_2)| \leq |x - \alpha_1(P_1)| + |x - \alpha_1(P_2)| \ll Q^{-\tau_1-1+p_1+c_{10}\varepsilon_1},$$

$$|\beta_1(P_1) - \beta_1(P_2)| \leq |x - \beta_1(P_1)| + |x - \beta_1(P_2)| \ll Q^{-\tau_2-1+q_1+c_{11}\varepsilon_1},$$

$$\prod_{j=2}^{m_1} |\alpha_1(P_1) - \alpha_j(P_2)| \leq \prod_{j=2}^{m_1} (|\alpha_1(P_1) - \alpha_1(P_2)| + |\alpha_1(P_2) - \alpha_j(P_2)|) \ll Q^{-p_1+c_{12}\varepsilon_1},$$

$$\prod_{j=2}^{m_2} |\beta_1(P_1) - \beta_j(P_2)| \leq \prod_{j=2}^{m_2} (|\beta_1(P_1) - \beta_1(P_2)| + |\beta_1(P_2) - \beta_j(P_2)|) \ll Q^{-q_1+c_{13}\varepsilon_1}.$$

Аналогично получим

$$\prod_{j=2}^{m_1} |\alpha_j(P_2) - \alpha_j(P_1)| \ll Q^{-p_1+c_{14}\varepsilon_1}, \quad \prod_{j=2}^{m_2} |\beta_1(P_2) - \beta_j(P_1)|_p \ll Q^{-q_1+c_{15}\varepsilon_1},$$

$$\prod_{j=2}^{m_1} |\alpha_j(P_1) - \alpha_j(P_2)| \leq \prod_{j=2}^{m_1} (|\alpha_1(P_1) - \alpha_j(P_1)| +$$

$$+ |\alpha_1(P_1) - \alpha_1(P_2)| + |\alpha_1(P_2) - \alpha_j(P_2)|) \ll Q^{-p_1+c_{16}\varepsilon_1}.$$

Для оставшихся произведений имеем оценки:

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{i,j>2, \\ i \neq j}}^{m_1} |\alpha_i(P_1) - \alpha_j(P_2)| &\leq \prod_{\substack{i,j>2, \\ i \neq j}}^{m_1} (|\alpha_1(P_1) - \alpha_i(P_1)| + |\alpha_1(P_1) - \alpha_1(P_2)| + |\alpha_1(P_2) - \alpha_j(P_2)|) \ll \\ &\ll Q^{-2 \sum_{i=2}^{m_1} p_i + c_{17}\varepsilon_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{i,j>2, \\ i \neq j}}^{m_2} |\beta_i(P_1) - \beta_j(P_2)| &\leq \prod_{\substack{i,j>2, \\ i \neq j}}^{m_2} (|\beta_1(P_1) - \beta_i(P_1)| + |\beta_1(P_1) - \beta_1(P_2)| + |\beta_1(P_2) - \beta_j(P_2)|) \ll \\ &\ll Q^{-2 \sum_{i=1}^{m_2} q_i + c_{18}\varepsilon_1}. \end{aligned}$$

Оценим расстояния между корнями из интервалов I_1 и I_2 :

$$\prod_{\substack{1 \leq i \leq m_1, \\ 1 \leq j \leq m_2}} |\alpha_i(P_1) - \beta_j(P_2)| \ll c_{19}, \quad \prod_{\substack{1 \leq i \leq m_2, \\ 1 \leq j \leq m_1}} |\beta_i(P_1) - \alpha_j(P_2)| \ll c_{20}.$$

Тогда выполняется следующая оценка результата $R(P_1, P_2)$ многочленов $P_1(t)$ и $P_2(t)$:

$$\begin{aligned} 1 \leq |R(P_1, P_2)| &\ll Q^{2n-\tau_1-1+p_1-\tau_2-1+q_1-p_1-q_1-p_1-q_1-2 \sum_{i=2}^{m_1} p_i-2 \sum_{i=2}^{m_2} q_i+c_{21}\varepsilon_1} \ll \\ &\ll Q^{2n-\tau_1-\tau_2-2-2 \sum_{i=1}^{m_1} \max(p_i, 0)-2 \sum_{i=1}^{m_2} \max(q_i, 0)+c_{22}\varepsilon_1}. \end{aligned}$$

Получим

$$\tau_1 + \tau_2 + 2 + 2 \sum_{i=1}^{m_1} \max(p_i, 0) + 2 \sum_{i=1}^{m_2} \max(q_i, 0) < 2n + \delta_1.$$

Так как

$$p_j > \tau_1 + 1 - \eta_1 \cdot j - c_{23}\varepsilon_1, \quad q_j > \tau_2 - \eta_2 \cdot j - c_{24}\varepsilon_1,$$

то

$$\tau_1 + \tau_2 + 2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \max(\tau_1 + 1 - \eta_1 \cdot k_1, 0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \max(\tau_2 - \eta_2 \cdot k_2, 0) < 2n + \delta. \quad \square$$

Литература

1. *Dirichlet L. G. P.* Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen // Werke I. 1842. P. 633–638.
2. *Khinchine A.* Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen // *Mathematische Annalen*. 1924. Vol. 92. P. 115–125.
3. *Mahler K.* Über das Maß der Menge aller S-Zahlen // *Math. Ann.* 1932. Vol. 106. P. 131–139.
4. *Спринджук В. Г.* О гипотезе Малера // *ДАН СССР*. 1964. Т. 154, № 4. С. 783–786.
5. *Спринджук В. Г.* Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел // *Изв. АН СССР, сер. мат.* 1965. Т. 29, № 2. С. 379–436.
6. *Спринджук В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск: Наука и техника, 1967. – 181 с.
7. *Bernik V. I.* The exact order of approximating zero by values of integral polynomials // *Acta Arith.* 1989. Vol. 53, N 1. P. 17–28.
8. *Beresnevich V. V.* On approximation of real numbers by real algebraic numbers // *Acta Arith.* 1999. Vol. 50, N 2. P. 97–112.
9. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наукова думка, 1984. 264 с.
10. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // *Успехи математических наук*. 1963. Т. 18, № 6(114). С. 91–192.
11. *Beresnevich V., Velani S.* Number theory meets wireless communications: an introduction for dummies like us // *Beresnevich V., Burr A., Nazer B., Velani S. Number Theory Meets Wireless Communications*. Springer, 2020. p. 1–67
12. *Hausdorff F.* Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen // *Mathematische Annalen*. 1916. Vol. 77, N 3. P. 430–437.
13. *Baker A., Schmidt W. M.* Diophantine approximation and Hausdorff dimension // *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1970. N 21. P. 1–11.
14. *Берник В. И.* Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений // *Acta Arith.* 1983. Т. 42, № 3. С. 219–253.
15. *Гельфонд А. О.* Трансцендентные и алгебраические числа. М.: Гостехиздат, 1952. 224 с.
16. *Берник В. И., Калоша Н. И.* Приближение нуля значениями целочисленных полиномов в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ // *Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук*. 2004. № 1. С. 121–123.
17. *Берник В. И., Васильев Д. В., Калоша Н. И., Пантелеева Ж. И.* Метрическая теория диофантовых приближений и асимптотические оценки для количества многочленов с заданными дискриминантами, делящимися на большую степень простого числа // *Докл. Нац. акад. наук Беларусі*. 2023. Т. 67, № 4. С. 271–278.
18. *Берник В. И.* Метрическая теорема о совместном приближении нуля значениями целочисленных многочленов // *Изв. АН СССР, сер. физ.-мат.* 1980. Т. 44, № 1. С. 24–45.
19. *Budarina N., Bernik V. I., Dickinson D.* A divergent Khinchine Theorem in the real, complex and p -adic fields // *Lithuanian Mathematical Journal*. 2008. Vol. 48, N 2. P. 1–16.
20. *Budarina N., Dickinson D.* Diophantine approximation on non degenerate curves with non monotonic error function // *Bulletin London Math. Soc.* 2009. Vol. 41, N 1. P. 137–146.
21. *Budarina N., Bernik V. I., Dickinson D.* Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p -adic fields // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 2010. Vol. 149, N 2. P. 193–216.
22. *Budarina N., Dickinson D.* Simultaneous Diophantine Approximation in two metrics and the distance between conjugate algebraic numbers in $\mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ // *Indagationes Mathematicae*. 2012. Vol. 23. P. 32–41.
23. *Beresnevich V., Bernik V., Budarina N.* Systems of small linear forms and diophantine approximation on manifolds // *arXiv preprint arXiv:1707.00371*. 2017.

References

1. *Dirichlet L. G. P.* Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen. *Werke I*, 1842, pp. 633–638.
2. *Khinchine A.* Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen. *Mathematische Annalen*, 1924, vol. 92, pp. 115–125.
3. *Mahler K.* Über das Maß der Menge aller S-Zahlen. *Math. Ann.*, 1932, vol. 106, pp. 131–139.
4. *Sprindžuk V. G.* On a Conjecture of Mahler. *Soviet Math.*, 1964, vol. 1, pp. 183–187.
5. *Sprindžuk V. G.* A Proof of Mahler's Conjecture on the Measure of the Set of S-numbers. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1965, vol. 29, pp. 379–436 (in Russian).

6. Sprindžuk V. G. *Mahler's Problem in Metric Number Theory*. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1969, 204 p.
7. Bernik V. I. On the Exact Order of Approximating Zero by Values of Integral Polynomials. *Acta Arith.*, 1989, vol. 53, no. 1, pp. 17–28 (in Russian).
8. Beresnevich V. V. On Approximation of Real Numbers by Real Algebraic Numbers. *Acta Arith.*, 1999, vol. 50, no. 2, pp. 97–112.
9. Ptashnik B. I. *Ill-posed Boundary-value Problems for Partial Differential Equations*. Kyiv, Naukova Dumka, 1984, 264 p. (in Russian).
10. Arnold, V. I. Small Denominators and Problems of Stability of Motion in Classical and Celestial Mechanics. *Russian Mathematical Surveys*, 1963, vol. 18, issue 6, pp. 85–191.
11. Beresnevich V., Velani S. Number Theory Meets Wireless Communications: An Introduction for Dummies Like Us. *Beresnevich, V., Burr, A., Nazer, B., Velani, S. Number Theory Meets Wireless Communications*. Springer, 2020, pp. 1–67. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-61303-7>
12. Hausdorff F. Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen. *Mathematische Annalen*, 1916, vol. 77, no. 3, pp. 430–437.
13. Baker A., Schmidt W. M. Diophantine Approximation and Hausdorff dimension. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1970, no. 21, pp. 1–11.
14. Bernik V. I. Use of Hausdorff Dimension in the Theory of Diophantine Approximations. *Acta Arith.*, 1983, vol. 42, no. 3, pp. 219–253 (in Russian).
15. Gelfond A. O. *Transcendental and Algebraic Numbers*. New York, Dover Publications Inc., 1960, 190 p.
16. Bernik V. I., Kalosha N. I. Approximation of zero by values of integer polynomials in the space $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2004, no. 1, pp. 121–123 (in Russian).
17. Bernik V. I., Vasilyev D. V., Kalosha N. I., Panteleeva Zh. I. Metric Theory of Diophantine Approximation and Asymptotic Estimates for the Number of Polynomials with Given Discriminants Divisible by a Large Power of a Prime Number. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2023, vol. 67, no. 4, pp. 271–278 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-4-271-278>
18. Bernik V. I. A Metric Theorem on the Simultaneous Approximation of a Zero by the Values Of Integral Polynomials. *Mathematics of the USSR–Izvestiya*, 1981, vol. 16, no. 1, pp. 21–40.
19. Budarina N., Bernik V. I., Dickinson D. A Divergent Khintchine Theorem in the Real, Complex and p -adic Fields. *Lithuanian Mathematical Journal*, 2008, vol. 48, no. 2, pp. 1–16. <https://doi.org/10.1007/s10986-008-9005-9>
20. Budarina N., Dickinson D. Diophantine Approximation on Non-Degenerate Curves with Non-Monotonic Error Function. *Bulletin London Math. Soc.*, 2009, vol. 41, no. 1, pp. 137–146. <https://doi.org/10.1112/blms/bdn116>
21. Budarina N., Bernik V. I., Dickinson D. Simultaneous Diophantine Approximation in the Real, Complex and p -adic Fields. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 2010, vol. 149, no. 2, pp. 193–216. <https://doi.org/10.1017/S0305004110000162>
22. Budarina N., Dickinson D. Simultaneous Diophantine Approximation in Two Metrics and the Distance between Conjugate Algebraic Numbers in $\mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$. *Indagationes Mathematicae*, 2012, vol. 23, pp. 32–41. <https://doi.org/10.1016/j.indag.2011.09.012>
23. Beresnevich V., Bernik V., Budarina N. *Systems of Small Linear Forms and Diophantine Approximation on Manifolds*. 2017. [Electronic resource]. Available at: <https://arxiv.org/abs/1707.00371> (accessed 16.07.2024).

УДК 512.542

LATTICE CHARACTERIZATIONS OF SOLUBLE AND SUPERSOLUBLE FINITE GROUPS

A.-M. Liu¹, S. Wang^{1,2}, V. G. Safonov³, A. N. Skiba^{3,4}

¹*School of Mathematics and Statistics, Hainan University, Haikou, Hainan, P. R. China*

²*School of Mathematics, Tianjin University, Tianjin, P. R. China*

³*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

⁴*Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus*

*e-mail: amliu@hainanu.edu.cn, tjuwangsz@163.com,
vgsafonov@im.bas-net.by, alexander.skiba49@gmail.com*

Received: 18.03.2024

Revised: 11.06.2024

Accepted: 18.06.2024

Keywords: finite group, subgroup lattice, subnormal subgroup, N - $\mathcal{L}$ -subgroup, N -subnormal subgroup.

Abstract. Let G be a finite group and $\mathcal{L}_{sn}(G)$ be the lattice of all subnormal subgroups of G . Let A and N be subgroups of G and $1, G \in \mathcal{L}$ be a sublattice of $\mathcal{L}_{sn}(G)$, that is, $A \cap B, \langle A, B \rangle \in \mathcal{L}$ for all $A, B \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{sn}(G)$. Then: $A^{\mathcal{L}}$ is the $\mathcal{L}$ -closure of A in G , that is, the intersection of all subgroups in $\mathcal{L}$ containing A and $A_{\mathcal{L}}$ is the $\mathcal{L}$ -core of A in G , that is, the subgroup of A generated by all subgroups of A belonging $\mathcal{L}$. We say that A is an N - $\mathcal{L}$ -subgroup of G if either $A \in \mathcal{L}$ or $A_{\mathcal{L}} < A < A^{\mathcal{L}}$ and N avoids every composition factor H/K of G between $A_{\mathcal{L}}$ and $A^{\mathcal{L}}$, that is, $N \cap H = N \cap K$. Using this concept, we give new characterizations of soluble and supersoluble finite groups. Some known results are extended.

РЕШЕТОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ РАЗРЕШИМЫХ И СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

A.-M. Лю¹, С. Ван^{1,2}, В. Г. Сафонов³, А. Н. Скиба^{3,4}

¹*Школа математики и статистики, Хайнаньский университет, Хайкоу, Хайнань, КНР*

²*Факультет математики, Тяньцзиньский университет, Тяньцзинь, КНР*

³*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*

⁴*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь*

*e-mail: amliu@hainanu.edu.cn, tjuwangsz@163.com,
vgsafonov@im.bas-net.by, alexander.skiba49@gmail.com*

Поступила: 18.03.2024

Исправлена: 11.06.2024

Принята: 18.06.2024

Ключевые слова: конечная группа, решетка подгрупп, субнормальная подгруппа, N - $\mathcal{L}$ -подгруппа, N -субнормальная подгруппа.

Аннотация. Пусть G – конечная группа, $\mathcal{L}_{sn}(G)$ – решетка всех субнормальных подгрупп G . Пусть A и N – подгруппы группы G и $1, G \in \mathcal{L}$ – подрешетка $\mathcal{L}_{sn}(G)$, т. е. $A \cap B, \langle A, B \rangle \in \mathcal{L}$ для всех $A, B \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{sn}(G)$. Тогда через $A^{\mathcal{L}}$ обозначим $\mathcal{L}$ -замыканием подгруппы A в G , т. е. пересечение всех подгрупп из $\mathcal{L}$, содержащих A , и через $A_{\mathcal{L}}$ – $\mathcal{L}$ -ядро подгруппы A в G , т. е. подгруппу A , порожденную всеми подгруппами из A , принадлежащими $\mathcal{L}$. Мы говорим, что A является N - $\mathcal{L}$ -подгруппой группы G , если либо $A \in \mathcal{L}$, либо $A_{\mathcal{L}} < A < A^{\mathcal{L}}$ и N изолирует любой композиционный фактор H/K группы G между $A_{\mathcal{L}}$ и $A^{\mathcal{L}}$, т. е. $N \cap H = N \cap K$. Используя эти понятия, мы даем новые характеристики разрешимых и сверхразрешимых конечных групп. Обобщены некоторые известные результаты.

1. Introduction. Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group; $\mathcal{L}(G)$ is the lattice of all subgroups of G ; $\mathcal{L}_{sn}(G)$ is the lattice of all subnormal subgroups of G and $1, G \in \mathcal{L}$ is a sublattice of $\mathcal{L}_{sn}(G)$, that is, $A \cap B, \langle A, B \rangle \in \mathcal{L}$ for all $A, B \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{sn}(G)$.

Recall that a subgroup A of G covers (respectively avoids) a chief (a composition) factor H/K of G if $AH = AK$ (if, respectively, $A \cap H = A \cap K$). These concepts go back to the classic work of P. Hall [1],

where it was proven that every system normalizer of a soluble group G covers all central chief factors and avoids all eccentric chief factors of G .

A subgroup which either covers or avoids every chief factor of a group G is called a *CAP-subgroup* of G [2, p. 37]. It is not difficult to show that every subgroup of a supersoluble group and every maximal subgroup of a soluble group are *CAP*-subgroups. Moreover, Ezquerro proved [3] that if every maximal subgroup of every Sylow subgroup of the Fitting subgroup $F(G)$ of the soluble group G is a *CAP*-subgroup of G , then G is supersoluble. This work gave impetus to a large number of publications (see, in particular, the recent papers [4–8]) related to the study of groups, in which some subgroups are *CAP*-subgroups or generalized *CAP*-subgroups.

In this paper, we consider a new, going back to [9], approach to applying the idea of avoiding for proving new characterizations of solubility and supersolubility.

Definition 1.1. Let A be a subgroup of G . Then: $A^{\mathcal{L}}$ is the $\mathcal{L}$ -closure of A in G , that is, the intersection of all subgroups in $\mathcal{L}$ containing A and $A_{\mathcal{L}}$ is the $\mathcal{L}$ -core of A in G , that is, the subgroup of A generated by all subgroups of A belonging to $\mathcal{L}$.

Example 1.2. (i) A^G is the normal closure of A in G and A_G is the core of A in G .

(ii) A^{snG} is the subnormal closure of A in G and A_{snG} is the subnormal core of A in G .

(iii) A subgroup A of G is said to be *Sylow permutable* or *S-permutable* [10; 11] in G if A permutes with every Sylow subgroup P of G , that is, $AP = PA$. The *S*-permutable subgroups of G form a sublattice of the lattice of all subnormal subgroups of G (Kegel [12]) and this important result allows us to associate with each subgroup A of G two *S*-permutable subgroups of G : the *S*-core A_{sG} of A in G [13], that is, the subgroup of A generated by all *S*-permutable subgroups of G contained in A and the *S*-permutable closure A^{sG} of A in G [14], that is, the intersection of all *S*-permutable subgroups of G containing A .

Definition 1.3. Let A and N be subgroups of G and suppose that $1, G \in \mathcal{L}$ is a sublattice of $\mathcal{L}_{sn}(G)$. Then we say that A is an *N*- $\mathcal{L}$ -subgroup of G if either $A \in \mathcal{L}$ or $A_{\mathcal{L}} < A < A^{\mathcal{L}}$ and N avoids every composition factor of G between $A_{\mathcal{L}}$ and $A^{\mathcal{L}}$.

In particular, we say that:

(i) A is *N*-normal in G if either A is normal in G or $A_G < A < A^G$ and N avoids every composition factor of G between A_G and A^G ;

(ii) A is *N*-subnormal in G if either A is subnormal in G or $A_{snG} < A < A^{snG}$ and N avoids every composition factor of G between A_{snG} and A^{snG} ;

(iii) A is *N*-*S*-permutable in G if either A is *S*-permutable in G or $A_{sG} < A < A^{sG}$ and N avoids every composition factor of G between A_{sG} and A^{sG} .

Recall that G is a *PST*-group if the *S*-permutability is a transitive relation in G , that is, if K is an *S*-permutable subgroup of H and H is an *S*-permutable subgroup of G , then K is *S*-permutable in G .

The description of soluble *PST*-groups was first obtained by Agrawal [15]: *Let $D = G^{\mathfrak{N}}$ be the nilpotent residual of a soluble group G . Then G is a *PST*-group if and only if D is an abelian Hall subgroup of G of odd order and every element of G induces a power automorphism in D .*

In the further publications (see, for example, Chapter 2 in [8]), authors have found out and described many other interesting characterizations of soluble *PST*-groups. In particular, it was proved [16] that a soluble group G is a *PST*-group if and only if every chief factor of G between A^G and A_G is central in G for every subgroup A of G such that A^G/A_G is nilpotent; a soluble group G is a *PST*-group if and only if for every maximal subgroup V of every Sylow subgroup of G there is a *PST*-subgroup T of G such that $G = VT$ [17].

In fact, in the recent paper [18] the following result in this line researches was proved.

Theorem 1.4 (Z. Wang, A.-M. Liu, V. G. Safonov, A. N. Skiba [18]). *Let $N = G^{\mathfrak{N}}$ be the nilpotent residual of a soluble group G . Then G is a *PST*-group if and only if every subnormal subgroup of G is *N*-*S*-permutable in G .*

Theorem 1.4 was the main motivation for introducing our general constructions. And the results discussed in the article indicate their usefulness and promise for further applications.

2. Three meet-sublattices of $\mathcal{L}(G)$. Let $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(G)$ and suppose that for some $M \in \mathcal{L}$ we have that $A \leq M$ for all $A \in \mathcal{L}$. Then we say, following [19, p. 7], that a $\mathcal{L}$ is a *meet-sublattice* of $\mathcal{L}(G)$ if

$A \cap B \in \mathcal{L}$ for any two subgroups $A, B \in \mathcal{L}$. We prove that the sets of all N -normal, N -subnormal and N - S -permutable subgroups form meet-sublattices of $\mathcal{L}(G)$.

But first, we prove the following general fact.

Theorem 2.1. *Let $N \leq G$. Then the set of all N - $\mathcal{L}$ -subgroups of G forms a meet-sublattice of $\mathcal{L}(G)$, that is, $A \cap B$ is an N - $\mathcal{L}$ -subgroup of G for any two N - $\mathcal{L}$ -subgroups A and B of G .*

Proof. First note that if $K < H$ be subnormal subgroups of G , then a subgroup A of G avoids every composition factor of G between K and H if and only if A avoids the pair (H, K) , that is, $A \cap H = A \cap K$. Therefore A is an N - $\mathcal{L}$ -subgroup of G if and only if N avoids the pair $(A^{\mathcal{L}}, A_{\mathcal{L}})$. Therefore we have $N \cap A^{\mathcal{L}} = N \cap A_{\mathcal{L}}$ and $N \cap B^{\mathcal{L}} = N \cap B_{\mathcal{L}}$. It follows that

$$N \cap A^{\mathcal{L}} \cap B^{\mathcal{L}} = N \cap A_{\mathcal{L}} \cap B_{\mathcal{L}}.$$

On the other hand, we have $(A \cap B)_{\mathcal{L}} = A_{\mathcal{L}} \cap B_{\mathcal{L}}$ and $(A \cap B)^{\mathcal{L}} \leq A^{\mathcal{L}} \cap B^{\mathcal{L}}$. Therefore

$$N \cap (A \cap B)^{\mathcal{L}} \leq N \cap A^{\mathcal{L}} \cap B^{\mathcal{L}} = N \cap A_{\mathcal{L}} \cap B_{\mathcal{L}} = N \cap (A \cap B)_{\mathcal{L}} \leq N \cap (A \cap B)^{\mathcal{L}},$$

so

$$N \cap (A \cap B)^{\mathcal{L}} = N \cap (A \cap B)_{\mathcal{L}}.$$

Hence $A \cap B$ is an N - $\mathcal{L}$ -subgroup of G . □

Since G is an N -normal, N -subnormal and N - S -permutable subgroup of G for every $N \leq G$, we get from Theorem 2.1 the following facts.

Corollary 2.2. *Let $N \leq G$. Then the set of all N -normal subgroups of G forms a meet-sublattice of $\mathcal{L}(G)$.*

Corollary 2.3. *Let $N \leq G$. Then the set of all N -subnormal subgroups of G forms a meet-sublattice of $\mathcal{L}(G)$.*

Corollary 2.4. *Let $N \leq G$. Then the set of all N - S -permutable subgroups of G forms a meet-sublattice of $\mathcal{L}(G)$.*

Now we give new characterization of subnormality.

Theorem 2.5. *A subgroup A of G is subnormal in G if and only if A is N -subnormal in G for some normal subgroup N of G such that G/N is nilpotent.*

Proof. Let G/N be nilpotent and A be a N -subnormal subgroup of G . We show that A is subnormal in G . Since N avoids every composition factor of G between A_{snG} and A^{snG} , we have

$$N \cap A^{snG} = N \cap A_{snG}$$

and so

$$A^{snG}N/N \simeq A^{snG}/(A^{snG} \cap N) = A^{snG}/(A_{snG} \cap N),$$

where

$$A_{snG} \cap N \leq A \leq A^{snG}$$

and $A^{snG}/(A_{snG} \cap N)$ is nilpotent. It follows that $A/(A_{snG} \cap N)$ is subnormal in $A^{snG}/(A_{snG} \cap N)$ and hence A is subnormal in A^{snG} , where A^{snG} is subnormal in G since by the classical Wielandt's theorem the set of all subnormal subgroups forms a sublattice of the lattice of all subgroups of the group. Therefore A is subnormal in G .

Now assume that A is subnormal in G , then $A_{snG} = A = A^{snG}$ and so

$$G \cap A_{snG} = A = G \cap A^{snG},$$

that is, A is G -subnormal in G , where G/G is nilpotent. □

3. Characterizations of solubility and supersolubility. The next lemma is a corollary of Lemma 2.8 of [13] and Lemma 2.5 of [14].

Lemma 3.1. *Let $R \leq A \leq E \leq G$ and $R \trianglelefteq G$. Then the following statements are true.*

- (1) $A_{sG} \leq E_{sE}$.
- (2) $(A/R)_{s(G/R)} = A_{sG}/R$.
- (3) $A^{sE} \leq A^{sG}$.
- (4) $(A/R)^{s(G/R)} = A^{sG}/R$.

In our proofs we will also use the following lemmas.

Lemma 3.2. *Let A and N be subgroups of G and for a minimal normal subgroup R of G we have either $R \leq N$ or $R \leq A$. If A is N -S-permutable (respectively, N -subnormal, N -normal) in G , then AR/R is NR/R -S-permutable (respectively, NR/R -subnormal, NR/R -normal) in G/R .*

Proof. First we prove that if A is N -S-permutable in G , then AR/R is (NR/R) -S-permutable in G/R . Assume that $R \leq N$. Then

$$\begin{aligned} (NR/R) \cap (AR/R)^{s(G/R)} &= (N/R) \cap (A^{sG}R/R) = (N \cap A^{sG}R)/R = \\ &= R(N \cap A^{sG})/R \leq R(N \cap A_{sG})/R. \end{aligned}$$

On the other hand,

$$R(N \cap A_{sG})/R \leq (N \cap (AR)_{sG})/R = (N/R) \cap (AR)_{sG}/R = (NR/R) \cap (AR/R)_{s(G/R)}.$$

Therefore $(NR/R) \cap (AR/R)^{s(G/R)} \leq (NR/R) \cap (AR/R)_{s(G/R)}$ and hence

$$(NR/R) \cap (AR/R)^{s(G/R)} = (NR/R) \cap (AR/R)_{s(G/R)},$$

so NR/R avoids every composition factor of G/R between $(AR/R)_{s(G/R)}$ and $(AR/R)_{s(G/R)}$.

Now assume that $R \leq A$. Then

$$\begin{aligned} (NR/R) \cap (AR/R)^{s(G/R)} &= (NR/R) \cap (A^{sG}/R) = (NR \cap A^{sG})/R = \\ &= R(N \cap A^{sG})/R \leq R(N \cap A_{sG})/R \leq (NR/R) \cap (A_{sG}/R) = (NR/R) \cap (A/R)_{s(G/R)}. \end{aligned}$$

Hence NR/R avoids every composition factor of G/R between $(AR/R)_{s(G/R)}$ and $(AR/R)_{s(G/R)}$. Therefore AR/R is (NR/R) -S-permutable in G/R .

Similarly, it can be proved that if A is N -subnormal (respectively, N -normal) in G , then AR/R is NR/R -subnormal (respectively, NR/R -normal) in G/R . $\square$

Lemma 3.3 (See Lemma 2.8 in [20]). *If $G = R \rtimes M$, where M is a soluble maximal subgroup of G , then G is soluble.*

Theorem 3.4. *A group G is a soluble if and only if the following two conditions hold:*

- (i) G has a normal subgroup N with soluble quotient G/N , and
- (ii) in each maximal chain $M_2 < M_1 < M_0 = G$ of G of length 2 at least one of the subgroups M_2 or M_1 is N -subnormal in G .

Proof. It is enough to show that if in each maximal chain $M_2 < M_1 < M_0 = G$ of G of length 2 at least one of the subgroups M_2 or M_1 is N -subnormal in G , then G is soluble. Assume that this is false and let G be a counterexample of minimal order.

(1) G/R is soluble for every minimal normal subgroup R of G . Hence R is the unique minimal normal subgroup of G , R is a non-abelian group and $R \leq N$.

Let

$$M_2/R < M_1/R < M_0/R = G/R$$

be any maximal chain of G/R of length 2. Then $M_2 < M_1 < M_0 = G$ is a maximal chain of G of length 2 and so there is i such that M_i is N -subnormal in G . Then M_i/R is NR/R -subnormal in G/R by Lemma 3.2, where

$$(G/R)/(NR/R) \simeq G/NR \simeq (G/N)/(NR/R)$$

is soluble. Hence the hypothesis holds for G/R . Therefore the Claim (1) holds by the choice of G .

Let R_p be a Sylow p -subgroup of R , where p is the largest prime dividing $|R|$. The Frattini argument implies that there is a maximal subgroup M of G such that

$$R_p \leq G_p \leq N_G(R_p) \leq M$$

for some Sylow p -subgroup G_p of G and $G = RM$.

(2) M is not N -subnormal in G and $M_{snG} = 1$.

Assume that M is N -subnormal in G , then M is R -subnormal in G and $M^{snG} = G$ by Claim (1), that is,

$$R \cap G = R \cap M^{snG} = R \cap M_{snG} = R \cap M_G = R \cap 1 = 1,$$

a contradiction. Hence M is not N -subnormal in G .

Finally, since M_{snG} is subnormal in G , we have

$$(M_{snG})^G = (M_{snG})^{RM} = (M_{snG})^M \leq M_G = 1$$

by [2, Ch. A, 14.3]. Hence $M_{snG} = 1$.

(3) $R < G$.

Assume that $R = G$ is a simple non-abelian group. Then $G = N$, so every N -subnormal subgroup of G is subnormal in G . Moreover, G has no a non-identity proper subnormal subgroup.

Let G_q be a Sylow q -subgroup of G , where q is the smallest prime dividing $|G|$. Then, in view of [21, IV, 2.8], $|G_q| > q$ since G is not soluble. We show that G has a maximal chain $M_2 < M_1 < M_0 = G$ of length 2. Indeed, if $G_q < L$ for some maximal subgroup L of G , it is clear. On the other hand, if $G_q = L$ is a maximal subgroup of G , then $|G_q| > q^2$ by [21, IV, 7.4] and so for any maximal subgroup W of L we have $1 < W < G_q = L < G$.

There is $i > 0$ such that M_i is N -subnormal in G by hypothesis, so M_i is G -subnormal in G and so subnormal in G . However, $1 < M_i < G$, a contradiction. Hence we have (3).

(4) $D := R \cap M$ is not nilpotent.

Assume that D is nilpotent. Then R_p is normal in M . Hence $Z(J(R_p))$ is normal in M . Since $M_G = 1$, it follows that $N_G(Z(J(R_p))) = M$ and so $N_R(Z(J(R_p))) = D$ is nilpotent. This implies that R is p -nilpotent by Glauberman-Thompson's theorem on the normal p -complements. But then R is a p -group, a contradiction. Hence we have (4).

(5) $D \not\leq \Phi(M)$. Hence for some maximal subgroup T of M we have $M = DT$ (This follows from Claim (4)).

(6) $T \cap D = 1$, so D is a minimal normal subgroup of M and $M = D \rtimes T$.

Let $A = T \cap D$. It is clear that $A < R$. Assume that $A \neq 1$. In view of Claims (1) and (2), T is R -subnormal in G , that is,

$$1 < A \leq R \cap T^{snG} = R \cap T_{snG} \leq R \cap M_{snG} = R \cap 1 = 1,$$

a contradiction. Hence $T \cap D = 1$, so $M = D \rtimes T$, where T is a maximal subgroup of M . Therefore D is a minimal normal subgroup of M .

The final contradiction. From Claims (1) and (6) it follows that

$$DT/D \simeq T/(D \cap T) = T/1 \simeq T$$

is soluble. Therefore M is soluble by Lemma 3.3. It follows that $|M : T| = |D| = q^n$ for some prime q . Hence D is nilpotent, contrary to Claim (4). $\square$

In the preprint [22], the following fact was proved.

Theorem 3.5. *The following conditions are equivalent:*

- (i) G is soluble (respectively, supersoluble).
- (ii) Every maximal subgroup of the generalized Fitting subgroup $F^*(G)$ of G is N -normal in G for some normal subgroup N of G with soluble (respectively, supersoluble) quotient G/N .
- (iii) Every maximal subgroup of every Sylow subgroup of G is N -subnormal (respectively, N - S -permutable) in G for some normal subgroup N of G with soluble (respectively, supersoluble) quotient G/N .
- (iv) Every second maximal subgroup of G is N -subnormal (respectively, N - S -permutable) in G for some normal subgroup N of G with soluble (respectively, supersoluble) quotient G/N .
- (v) All cyclic subgroups of G of prime order or order 4 are N -subnormal (respectively, N - S -permutable) in G for some normal subgroup N of G with soluble (respectively, supersoluble) quotient G/N .

Corollary 3.6 (Agrawal [23], [24, Ch. 1, Theorem 6.5]). *If every second maximal subgroup of G is S -permutable in G , then G is supersoluble.*

Corollary 3.7 (Srinivasan [25]). *If every maximal subgroup of every Sylow subgroup of G is normal in G , then G is supersoluble.*

Corollary 3.8 (Buckley [26]). *If $|G|$ is odd and every subgroup of G of prime order is normal in G , then G is supersoluble.*

4. A generalization of the Schenkman's result on subnormal subgroups. Now we prove the following generalization of the classical Schenkman's result on subnormal subgroups.

Theorem 4.1. *Let $\mathfrak{F}$ be a hereditary saturated formation containing all nilpotent groups and $G/N \in \mathfrak{F}$. Let S be an N -subnormal subgroup of G , and suppose that $Z_{\mathfrak{F}}(E) = 1$ for every subgroup E of G such that $S \leq E$. Then*

$$C_G(S^{\mathfrak{F}}) \leq S^{\mathfrak{F}}.$$

Lemma 4.2 (See Theorem B in [27]). *Let $\mathfrak{F}$ be a saturated hereditary formation containing all nilpotent groups. If $Z_{\mathfrak{F}}(G) = 1$, then*

$$C_G(G^{\mathfrak{F}}) \leq G^{\mathfrak{F}}.$$

Lemma 4.3. *Let $\mathfrak{F}$ be a saturated hereditary formation containing all nilpotent groups. Then*

$$C_G(G^{\mathfrak{F}}) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)G^{\mathfrak{F}}.$$

Proof. Let $Z = Z_{\mathfrak{F}}(G)$. Then $Z_{\mathfrak{F}}(G/Z) = 1$, so

$$C_{G/Z}((G/Z)^{\mathfrak{F}}) = C_{G/Z}(G^{\mathfrak{F}}Z/Z) = C_G(G^{\mathfrak{F}}Z/Z) = C_G(G^{\mathfrak{F}}/(G^{\mathfrak{F}} \cap Z)),$$

where by induction we have

$$C_{G/Z}((G/Z)^{\mathfrak{F}}) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G/Z)(G/Z)^{\mathfrak{F}} = (G/Z)^{\mathfrak{F}}.$$

Hence

$$C_G(G^{\mathfrak{F}}) \leq C_G(G^{\mathfrak{F}}/(G^{\mathfrak{F}} \cap Z)) \leq ZG^{\mathfrak{F}}. \quad \square$$

The following lemma is a corollary of Lemmas 2.4 and 2.5 in [14] and Lemma 14.2 in [2, Ch. A].

Lemma 4.4. *If $A \leq E \leq G$, then $A_{sG} \leq A_{sE} \leq A \leq A^{sE} \leq A^{sG}$ and $A_{snG} \leq A_{snE} \leq A \leq A^{snE} \leq A^{snG}$.*

On the base of Lemma 4.4 we prove the following useful fact.

Lemma 4.5. *Let $A \leq E$ and N be subgroups of G . If A is N - S -permutable (respectively, N -subnormal, N -normal) in G , then A is $(N \cap E)$ - S -permutable (respectively, $(N \cap E)$ -subnormal, $(N \cap E)$ -normal) in E .*

Proof. First we prove that if A is N - S -permutable in G , then A is $(N \cap E)$ - S -permutable in E .

We have $A_{sG} \leq A_{sE} \leq A \leq A^{sE} \leq A^{sG}$ by Lemma 4.4 and so from $A^{sG} \cap N = A_{sG} \cap N$ it follows that $N \cap E \cap A^{sG} \leq N \cap E \cap A_{sG}$, where $N \cap E \cap A^{sE} \leq N \cap E \cap A^{sG}$ and

$$N \cap E \cap A_{sG} \leq N \cap E \cap A_{sE}.$$

Hence

$$N \cap E \cap A^{sE} \leq N \cap E \cap A_{sE} \leq N \cap E \cap A^{sE},$$

so

$$N \cap E \cap A^{sE} = N \cap E \cap A_{sE}.$$

Therefore $N \cap E$ avoids every composition factor between A_{sE} and A^{sE} . Hence A is $(N \cap E)$ - S -permutable in E .

Similarly, it can be proved that if A is N -subnormal (respectively, N -normal) in G , then A is $(N \cap E)$ -subnormal (respectively, $(N \cap E)$ -normal) in E . $\square$

Proof of Theorem 4.1. Assume that this theorem is false and let G be a counterexample with $|G| + |S|$ minimal. Then $S < G$ by Lemma 4.2. Note also that by hypothesis, $Z_{\mathfrak{F}}(S) = 1$.

Let $D = S^{\mathfrak{F}}$ and $C = C_G(D)$. Then $C \not\leq D$.

(1) $C \cap S \leq Z_{\mathfrak{F}}(S)D = D \leq G^{\mathfrak{F}}$.

Since $\mathfrak{F}$ is hereditary and

$$S/(S \cap G^{\mathfrak{F}}) \simeq SG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \leq G/G^{\mathfrak{F}},$$

we have $D \leq G^{\mathfrak{F}}$. Finally, from Lemma 4.2 we get that

$$C \cap S = C_S(D) \leq Z_{\mathfrak{F}}(S)D = D.$$

(2) $C_E(D) \leq D$ for every proper subgroup E of G containing S . Hence $G = SC$.

The subgroup S is $(N \cap E)$ -subnormal in E by Lemma 4.5, where $E/(N \cap E) \simeq NE/N \in \mathfrak{F}$ since the formation $\mathfrak{F}$ is hereditary by hypothesis. Therefore the hypothesis holds for $(E, S, N \cap E)$, so we have $C_E(D) \leq D$ by the choice of G .

Now note that $S \leq N_G(C)$ since $S \leq N_G(D)$, so SC is a subgroup of G and hence $SC = G$ since otherwise $C = C_{SC}(D) \leq D$.

(3) $D \trianglelefteq G$ (Since D is characteristic in S , this directly follows from Claim (2)).

(4) S is a maximal subgroup of G and $G/D = (CD/D) \rtimes (S/D)$, so CD/D is a chief factor of G .

Let $S \leq V$, where V is a maximal subgroup of G . Then $C_V(D) \leq D$ by Claim (2), so

$$V = V \cap SC = S(V \cap C) = SC_V(D) = SD \leq S$$

and hence $S = V$. Finally, from Claim (2) and (3) it follows also that $G/D = (CD/D)(S/D)$, where CD/D is a normal subgroup of G/D , so

$$G/D = (CD/D)(S/D) = (CD/D) \rtimes (S/D)$$

since $CD \cap S = D(C \cap S) = D$ by Claim (1).

(5) CD/D and CS_G/S_G are G -isomorphic.

First note that $C \cap D = C \cap S_G$ since $C \cap D \leq C \cap S_G$ by Claim (3) and $C \cap S_G \leq C \cap D$ by Claim (1). Therefore we have the G -isomorphisms

$$CD/D \simeq C/(C \cap D) = C/(C \cap S_G) \simeq S_G C/S_G.$$

(6) $D = G^{\mathfrak{F}}$.

In view of Claim (1), it is enough to show that $G/D \in \mathfrak{F}$.

If S is normal in G , then the maximality of S implies that CD/D is a group of prime order, so $CD/D \in \mathfrak{F}$ since $\mathfrak{F}$ contains every nilpotent group by hypothesis and hence

$$G/D = (CD/D) \times (S/D) \in \mathfrak{F}.$$

Now assume that S is not normal in G , then $S^{snG} = G$. Hence

$$N = N \cap S^{snG} = N \cap S_{snG} \leq S_G \leq S,$$

so $G/S_G \in \mathfrak{F}$.

Therefore the chief factor $S_G C/S_G$ is $\mathfrak{F}$ -central in G and so, in view of Claim (5), the chief factor DC/D is $\mathfrak{F}$ -central in G/D . But also we have

$$(G/D)/(DC/D) \simeq S/D \in \mathfrak{F},$$

so $G/D \in \mathfrak{F}$. Hence we have (6).

The final contradiction. From Claim (5) it follows that $D = G^{\mathfrak{F}}$. Hence

$$C \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)G^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}} = D$$

by Lemma 4.3, contrary to our assumption on (G, S) . □

Note that if for a subgroup S of G we have $C_G(S) = 1$, then $Z_{\mathfrak{N}}(E) = Z_{\infty}(E) = 1$ for every subgroup E of G such that $S \leq E$, where $\mathfrak{N}$ is the classes of all nilpotent groups. Therefore, Schenkman's original theorem is a direct consequence of Theorem 4.1.

Corollary 4.6 (Schenkman [28]). *Let S be a subnormal subgroup of G , and suppose that $C_G(S) = 1$. Then $C_G(S^{\mathfrak{N}}) \leq S^{\mathfrak{N}}$.*

The study was supported by the National Natural Science Foundation of China (N. 12101165, 12171126), NNSFC-BRFFR (N. 12311530761), Ministry of Education of the Republic of Belarus (N. 20211778), and the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (N. F24KI-021).

References

1. Hall P. On the system normalizers of a soluble group. *Proc. London Math. Soc.*, 1938, vol. 43, pp. 507–528.
2. Doerk K., Hawkes T. *Finite Soluble Groups*. Berlin; New York, Walter de Gruyter, 1992.

3. Ezquerro L. M. A contribution to the theory of finite supersolvable groups. *Rend. Sem. Math. Univ. Padova*, 1993, vol. 89, pp. 161–170.
4. Tang X., Guo W. On partial CAP^* -subgroups of finite groups. *J. Algebra and Its Application*, 2017, vol. 16, no. 1, art. 1750009.
5. Guo W., Skiba A. N., Yang N. A generalized CAP -subgroup of a finite group. *Science China. Mathematics*, 2015, vol. 58, no. 10, pp. 1–12.
6. Qian G., Zeng Yu. On partial CAP -subgroups of finite groups. *J. Algebra*, 2020, vol. 546, pp. 553–565.
7. Li X., Lei D. The semi p -cover-avoidance properties of p -sylowizers in finite groups. *Comm. Algebra*, 2021, vol. 49, no. 11, pp. 4588–4599.
8. Wang Y., Miao L., Liu W. On some second maximal subgroups of non-solvable groups. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 2023, vol. 52, no. 2, pp. 367–373.
9. Skiba A. N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets. *J. Algebra*, 2020, vol. 550, pp. 69–85.
10. Ballester-Bolinchés A., Beidleman J. C., Heineken H. Groups in which Sylow subgroups and subnormal subgroups permute // *Special issue in honor of Reinhold Baer (1902–1979)*. *Illinois J. Math.*, 2003, vol. 47, no. 1–2, pp. 63–69.
11. Ballester-Bolinchés A., Esteban-Romero R., Asaad M. *Products of Finite Groups*. Berlin; New York, Walter de Gruyter, 2010.
12. Kegel O. H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen. *Math. Z.*, 1962, vol. 78, pp. 205–221.
13. Skiba A. N. On weakly s -permutable subgroups of finite groups. *J. Algebra*, 2007, vol. 315, pp. 192–209.
14. Guo W., Skiba A. N. Finite groups with given s -embedded and n -embedded subgroups. *J. Algebra*, 2009, vol. 321, pp. 2843–2860.
15. Agrawal R. K. Finite groups whose subnormal subgroups permute with all Sylow subgroups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1975, vol. 47, pp. 77–83.
16. Chi Z., Skiba A. N. On a lattice characterisation of finite soluble PST -group. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 2020, vol. 101, no. 2, pp. 247–254.
17. Guo J., Guo W., Safonova I. N., Skiba A. N. G -covering subgroup systems for the classes of finite soluble PST -groups. *Comm. Algebra*, 2021, vol. 49, no. 9, pp. 3872–3880.
18. Wang Z., Liu A.-M., Safonov V. G., Skiba A. N. A characterization of soluble PST -groups // *Bull. Austral. Math. Soc.*, published online, 2024, pp. 1–8. <https://doi.org/10.1017/S0004972724000157>
19. Schmidt R. *Subgroup lattices of groups*. Berlin; New York, Walter de Gruyter, 1994.
20. Guo X., Shum K. P. Cover-avoidance properties and the structure of finite groups. *J. Pure and Applied Algebra*, 2003, vol. 181, pp. 297–308.
21. Huppert B. *Endliche Gruppen I*. Berlin; Heidelberg; New York, Springer-Verlag, 1967.
22. Safonov V. G., Skiba A. N. Finite groups with systems of generalized normal subgroups, Preprint (2024).
23. Agrawal R. K. Generalized center and hypercenter of a finite group. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1976, vol. 58, no. 1, pp. 13–21.
24. Weinstein M. *Between Nilpotent and Solvable*. Polygonal Publishing House, 1982.
25. Srinivasan S. Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups. *Israel J. Math.*, 1980, vol. 35, pp. 210–214.
26. Buckley J. Finite groups whose minimal subgroups are normal. *Math. Z.*, 1970, vol. 15, pp. 15–17.
27. Aivazidis S., Safonova I. N., Skiba A. N. Subnormality and residuals for saturated formations: A generalization of Schenkman’s theorem. *J. Group Theory*, 2021, vol. 24, no. 4, pp. 807–818.
28. Schenkman E. On the tower theorem for finite groups. *Pac. J. Math.*, 1955, vol. 5, pp. 995–998.

УДК 512.542

О КЛАССАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ СИСТЕМАМИ ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

В. И. Мурашко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
e-mail: mvimath@yandex.ru

Поступила: 18.03.2024

Исправлена: 05.04.2024

Принята: 18.06.2024

Ключевые слова: конечная группа, $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа, насыщенная формация, формация Фиттинга.

Аннотация. В работе построены локальные экраны классов групп, определяемых системами обобщенно субнормальных подгрупп в случае, когда эти классы локальны. Найдены условия, при которых класс групп, определяемый системой обобщенно субнормальных подгрупп, является формацией Фиттинга.

ON THE CLASSES OF FINITE GROUPS DEFINED BY THE SYSTEMS OF GENERALIZED SUBNORMAL SUBGROUPS

V. I. Murashka

Francisk Skoryna Gomel State University, Gomel, Belarus
e-mail: mvimath@yandex.ru

Received: 18.03.2024

Revised: 05.04.2024

Accepted: 18.06.2024

Keywords: finite group, $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroup, saturated formation, Fitting formation.

Abstract. The canonical local definitions of the classes of groups defined by the systems of generalized subnormal subgroups in the case when these classes are local are constructed in the paper. Conditions are found under which a class of groups defined by a system of generalized subnormal subgroups is a Fitting formation.

Введение. Рассматриваются только конечные группы. Хорошо известно, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда все ее силовские (или циклические примарные, или максимальные) подгруппы субнормальны. Напомним [1], что подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$ -субнормальной, если $H = G$ или найдется цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $1 \leq i \leq n$. Известную теорему Хупперта можно переформулировать следующим образом: группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы $\mathbb{P}$ -субнормальны. Однако $\mathbb{P}$ -субнормальность всех силовских [1] или циклических примарных [2] подгрупп не приводит к сверхразрешимости группы. Тем не менее, оба этих случая приводят к классам групп, близким по свойствам к сверхразрешимым. Одним из важнейших обобщений понятия субнормальной подгруппы является понятие $\mathfrak{F}$ -субнормальной подгруппы, разработанное Т. О. Хоуксом [3] и Л. А. Шеметковым [4, с. 90].

Определение 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$ -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G$ такая, что $H_i/\text{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для $i = 1, \dots, n$. Обозначается $H\mathfrak{F}$ -sn G .

Отметим, что в случае, когда $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, слово «максимальная» может быть опущено в предыдущем определении. Если G – разрешимая группа, то подгруппа является субнормальной (соотв. $\mathbb{P}$ -субнормальной) тогда и только тогда, когда она $\mathfrak{N}$ -субнормальна ($\mathfrak{U}$ -субнормальна, см. [1, лемма 1.4]). Теория $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп изложена в монографиях [5; 6].

В настоящее время активно изучаются классы и структура групп, определяемые системами обобщенно субнормальных подгрупп [1; 2; 7–14]. В работе [14] автором было предложено в качестве такой системы рассматривать все подгруппы из данного насыщенного гомоморфа. Ряд ситуаций из указанных работ является частным случаем данного подхода.

Определение 2 [14, определение 1.2]. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп и $\mathfrak{H}$ – насыщенный гомоморф. Через $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$ будем обозначать класс групп, у которых все $\mathfrak{H}$ -подгруппы $\mathfrak{F}$ -субнормальны.

Данный подход тесно связан с методом экстремальных классов, появившимся в работах Р. Картера, Б. Фишера и Т. Хюкса [15] для разрешимых групп, и распространенного на неразрешимые группы в работах В. Н. Семенчука [16] и А. Ф. Васильева [17]. Напомним [4, определение 25.1], что класс групп $\mathfrak{X}$ называется экстремальным, если он является насыщенным гомоморфом и из $G/N \in \mathfrak{X}$, где N – единственная минимальная нормальная подгруппа G , следует, что $G \in \mathfrak{X}$. Напомним также [4, определение 25.2], что через $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ обозначается класс групп, у которых все $\mathfrak{X}$ -подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$. В работах [15–17] исследовался локальный экран (при его наличии) класса $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$, где $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация и $\mathfrak{X}$ – экстремальный класс групп.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{H}$ – насыщенный гомоморф и $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация. Тогда $\mathfrak{F} \subseteq f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}^{\mathfrak{H}}$. Причем, если $\mathfrak{H}$ – экстремальный класс групп, то $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}^{\mathfrak{H}}$.

В [14] было установлено, что если $\mathfrak{H}$ – насыщенный гомоморф и $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, то класс $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$ является наследственной насыщенной формацией. По теореме Гашюца–Любизедер–Шмида он является и локальной формацией. Важной характеристикой локальной формации, кодирующей информацию о структуре групп из этой формации, является ее (максимальный внутренний) локальный экран. Ниже мы его и вычисляем.

Теорема 4. Пусть $\mathfrak{H}$ – насыщенный гомоморф и F – максимальный внутренний локальный экран наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$. Тогда T – максимальный внутренний локальный экран формации $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$, где $T(p) = f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F}) \cap F(p)^{\mathfrak{H}}$ для любого $p \in \mathbb{P}$.

В работе [12] изучался класс $w_{\pi}\mathfrak{F}$ групп с $\mathfrak{F}$ -субнормальными силовскими π -подгруппами и единичной группой для наследственной формации $\mathfrak{F}$. Заметим, что в этом случае не только силовские π -подгруппы, но и все примарные π -подгруппы будут $\mathfrak{F}$ -субнормальными. С другой стороны, $\mathfrak{F}$ -субнормальность всех примарных π -подгрупп влечет и $\mathfrak{F}$ -субнормальность всех силовских π -подгрупп. Итак, $w_{\pi}\mathfrak{F} = f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{H}$ – класс всех примарных π -групп. Тогда из теоремы 4 напрямую вытекает

Следствие 4.1 [12, теорема 3.6]. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, h – ее максимальный внутренний локальный экран, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и

$$h_{\pi}^*(p) = (G \mid 1 \mathfrak{F}\text{-sn } G, Q \mathfrak{F}\text{-sn } G \text{ и } Q \in h(p) \text{ для любой } Q \in \text{Syl}_q(G) \text{ и } q \in \pi \cap \pi(G)).$$

Тогда $w_{\pi}\mathfrak{F} = LF(f)$, где f – максимальный внутренний локальный экран формации $w_{\pi}\mathfrak{F}$ такой, что

$$f(p) = \begin{cases} h_{\pi}^*(p), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{F}), \\ \emptyset, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

В работе [13] изучался класс $v_{\pi}\mathfrak{F}$ групп с $\mathfrak{F}$ -субнормальными циклическими примарными π -подгруппами (здесь мы считаем 1 циклической примарной группой) для наследственной формации $\mathfrak{F}$. Заметим, что $v_{\pi}\mathfrak{F} = f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{H}$ – класс всех циклических примарных π -групп. Тогда из теоремы 4 напрямую вытекает

Следствие 4.2 [13, теорема D]. Пусть $\mathfrak{F} = LF(F)$ – наследственная локальная формация и F – ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда $v_{\pi}\mathfrak{F} = LF(H)$ – локальная формация, где H – ее максимальный внутренний локальный экран и $H(p) = (G \mid \text{все циклические примарные } \pi\text{-подгруппы } G \text{ принадлежат } F(p) \text{ и } \mathfrak{F}\text{-субнормальны в } G) \text{ для любого } p \in \mathbb{P}$.

В работе [18, теорема 2.6] были описаны все наследственные насыщенные формации Фиттинга разрешимых групп $\mathfrak{F} = w\mathfrak{F}$. Естественным является вопрос: когда класс $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$ является формацией Фиттинга? Используя теорему 4, мы даем ответ на этот вопрос для наследственных насыщенных формаций разрешимых групп $\mathfrak{F}$ и насыщенных гомоморфов $\mathfrak{H}$, состоящих из примарных групп.

Теорема 5. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация разрешимых групп и $\mathfrak{H}$ – насыщенный гомоморф, состоящий из примарных групп. Тогда и только тогда, $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$ является формацией Фиттинга, когда $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{\pi(F(p))} \subseteq F(p)$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$, где F – максимальный внутренний локальный экран $\mathfrak{F}$.

Следствие 5.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация разрешимых групп и F – максимальный внутренний локальный экран. Тогда и только тогда $v\mathfrak{F}$ – формация Фиттинга, когда $F(p)$ содержит все абелевы $\pi(F(p))$ -группы для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$.

Следствие 5.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация разрешимых групп и F – максимальный внутренний локальный экран. Тогда и только тогда $w\mathfrak{F}$ – формация Фиттинга, когда $F(p)$ содержит все нильпотентные $\pi(F(p))$ -группы для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$.

Предварительные результаты. Используются стандартные обозначения и терминология, которые можно найти в [4; 5]. Напомним некоторые понятия и обозначения, существенные в данной работе. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G ; $\pi(\mathfrak{F})$ – множество всех простых делителей порядков групп из класса $\mathfrak{F}$; группа G называется π -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$; Z_p – циклическая группа простого порядка p ; если H – подгруппа G , то через $\text{Core}_G(H)$ обозначается наибольшая нормальная подгруппа G , содержащаяся в H ; $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G ; $O_\pi(G)$ – наибольшая нормальная π -подгруппа G для $\pi \subseteq \mathbb{P}$; $\text{Soc}(G)$ – цокль G , т. е. произведение всех минимальных нормальных подгрупп G ; $A \text{ wr } B$ – регулярное сплетение групп A и B ; $G = N \rtimes M$ – полупрямое произведение подгрупп M и N ($N \trianglelefteq G$ и $N \cap M = 1$); $\mathfrak{G}_\pi$ ($\mathfrak{N}_\pi$) – класс всех (нильпотентных) π -групп, где $\pi \subseteq \mathbb{P}$.

Класс групп $\mathfrak{H}$ называется *гомоморфом*, если каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{H}$ принадлежит $\mathfrak{H}$. Гомоморф $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если из $H/A \in \mathfrak{F}$, $H/B \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $H/A \cap B \in \mathfrak{F}$. Класс групп $\mathfrak{H}$ называется *насыщенным*, если из $G/N \in \mathfrak{H}$ и $N \leq \Phi(G)$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{H}$. Класс групп $\mathfrak{X}$ называется (соотв. *нормально*) *наследственным*, если $\mathfrak{X}$ вместе с каждой группой содержит всякую ее (соотв. нормальную) подгруппу. *Классом Фиттинга* называется нормально наследственный класс групп $\mathfrak{X}$, содержащий группы, представленные в виде произведения нормальных $\mathfrak{X}$ -подгрупп.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G , т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G , для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{K}$ – формации. Если $\mathfrak{K} = \emptyset$, то положим $\mathfrak{F}\mathfrak{K} = \emptyset$. Если $\mathfrak{K} \neq \emptyset$, то обозначим через $\mathfrak{F}\mathfrak{K}$ класс всех тех групп G , для которых $G^{\mathfrak{K}} \in \mathfrak{F}$. Известно [2, с. 11], что класс $\mathfrak{F}\mathfrak{K}$ является формацией.

Всякая функция $f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации}\}$ называется *локальным экраном*. Формация $\mathfrak{F}$ называется *локальной*, если существует локальный экран f такой, что $\mathfrak{F}$ совпадает с классом групп G таких, что $G/C_G(H/K) \in f(p)$ для любого главного фактора H/K группы G и $p \in \pi(H/K)$. Обозначается $\mathfrak{F} = LF(f)$. Всякая локальная формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный экран F такой, что $F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N}_p F(p) = F(p)$, называемый *максимальным внутренним локальным экраном*.

При доказательствах нам потребуется следующий ряд лемм.

Лемма 6 [14, теорема 3.2, следствие 3.2]. Пусть $\mathfrak{H}$ – насыщенный гомоморф и $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация. Тогда $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$ – наследственная насыщенная формация такая, что всякая $\mathfrak{H}$ -подгруппа $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$ -группы принадлежит $\mathfrak{F}$.

Лемма 7 [4, теорема 4.7]. Пусть F – максимальный внутренний локальный экран локальной формации $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $F(p)$ – наследственная формация для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$, когда $\mathfrak{F}$ – наследственная формация.

Напомним [4, определение 7.5], что через $\tilde{F}(G)$ обозначается подгруппа группы G такая, что $\Phi(G) \subseteq \tilde{F}(G)$ и $\tilde{F}(G)/\Phi(G) = \text{Soc}(G/\Phi(G))$. Напомним также, что группа $G \notin \mathfrak{F}$ называется *минимальной не $\mathfrak{F}$ -группой*, если все ее собственные подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$.

Лемма 8 [16]. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная формация, G – минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа и $\Phi(G) = 1$.

- (1) G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $N = \tilde{F}(G)$.
- (2) Если N абелева, то $G = N \rtimes M$, где N – p -группа, для $p \in \mathbb{P}$, и $N = C_G(N) = O_{p',p}(G)$; кроме того, M является максимальной подгруппой в G .
- (3) Если N неабелева, то $C_G(N) = 1$.

Лемма 9 [5, лемма 3.1.3]. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, H и R – подгруппы группы G и $N \trianglelefteq G$.

- (1) Если $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$, то $HN/N \mathfrak{F}\text{-sn } G/N$.
- (2) Если $H/N \mathfrak{F}\text{-sn } G/N$, то $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$.
- (3) Если $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$, то $HN \mathfrak{F}\text{-sn } G$.
- (4) Если $H \mathfrak{F}\text{-sn } R$ и $R \mathfrak{F}\text{-sn } G$, то $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$.

Лемма 10 [5, лемма 3.1.3]. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, H и R – подгруппы группы G .

- (1) Если $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$, то $(H \cap R) \mathfrak{F}\text{-sn } R$.
- (2) Если $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$ и $R \mathfrak{F}\text{-sn } G$, то $(H \cap R) \mathfrak{F}\text{-sn } G$.

Лемма 11 [13, лемма 2.7]. Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация и группа $G = H\tilde{F}(G)$, где H – $\mathfrak{F}$ -субнормальная $\mathfrak{F}$ -подгруппа в G . Тогда $G \in \mathfrak{F}$.

Доказательства основных результатов.

Доказательство теоремы 3. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то всякая подгруппа $\mathfrak{F}$ -группы $\mathfrak{F}$ -субнормальна в ней. Значит, $\mathfrak{F} \subseteq f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$. Согласно лемме 6 верно включение $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}^{\mathfrak{F}}$. Предположим теперь, что $\mathfrak{H}$ – экстремальный класс групп, $\mathfrak{F}^{\mathfrak{F}} \setminus f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$ и G – группа минимального порядка из этого класса групп. Из того, что $\mathfrak{F}^{\mathfrak{F}}$ и $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$ – формации, и нашего предположения следует, что в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N . Из того, что $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$ – насыщенная формация по лемме 6, следует, что $\Phi(G) = 1$. Пусть H – $\mathfrak{H}$ -подгруппа группы G . Предположим, что $HN < G$. Тогда $HN/N \simeq H/(H \cap N) \in \mathfrak{H}$. Из $G/N \in f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$ следует, что $HN/N \mathfrak{F}$ -sn G/N . Значит, $HN \mathfrak{F}$ -sn G по (2) леммы 9. Из наследственности формации $\mathfrak{F}^{\mathfrak{F}}$ и наших предположений следует, что $HN \in f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$. Тогда $H \mathfrak{F}$ -sn HN . Итак, $H \mathfrak{F}$ -sn G по (4) леммы 9. Значит, если $HN < G$ для любой $\mathfrak{H}$ -подгруппы H группы G , то $G \in f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$. Следовательно, найдется $\mathfrak{H}$ -подгруппа H группы G такая, что $G = HN$. Тогда, из $G/N \simeq H/(H \cap N) \in \mathfrak{H}$ следует, что $G \in \mathfrak{H}$ по определению экстремального класса групп. Следовательно, $G \in \mathfrak{F} \subseteq f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$, противоречие. Итак, $\mathfrak{F}^{\mathfrak{F}} = f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$. $\square$

Доказательство теоремы 4. По лемме 6 класс $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$ является наследственной насыщенной формацией. Пусть $\mathfrak{K} = LF(T)$, где T – локальный экран такой, что $T(p) = f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}) \cap F(p)^{\mathfrak{F}}$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Из наследственности формаций $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$ и $F(p)^{\mathfrak{F}}$ следует, что $T(p)$ – наследственная формация для любого простого p . Согласно лемме 7 $\mathfrak{K}$ – наследственная формация. Так как $F(p) \subseteq T(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{K}$.

Предположим, что $\mathfrak{K} \setminus f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$. Выберем группу G наименьшего порядка из $\mathfrak{K} \setminus f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$. Так как обе формации $\mathfrak{K}$ и $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$ насыщены и наследственны, то $\Phi(G) = 1$ и G – минимальная не $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$ -группа. По (1) леммы 8 в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N .

Если N неабелева, то по (3) леммы 8 $C_G(N) = 1$. Из $G \in \mathfrak{K}$ следует, что $G/C_G(N) \simeq G \in T(p) \subseteq f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$. Противоречие.

Если N абелева, то по (2) леммы 8 $N = C_G(N)$ – элементарная абелева p -подгруппа и найдется максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = N \rtimes M$. Предположим, что $NH < G$ для любой $\mathfrak{H}$ -подгруппы H группы G . Из выбора G следует, что $H \mathfrak{F}$ -sn HN и $HN/N \mathfrak{F}$ -sn G/N . По лемме 9 $H \mathfrak{F}$ -sn G . Следовательно, $G \in f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$. Противоречие. Пусть $G = NH$ для некоторой $\mathfrak{H}$ -подгруппы H группы G . Значит, $M \simeq H/(H \cap N)$ – $\mathfrak{H}$ -подгруппа G . Так как $G/C_G(N) = G/N \simeq M \in T(p)$, то $M \in F(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, N – $\mathfrak{F}$ -центральный главный фактор G . Значит, $G \in \mathfrak{F} \subseteq f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{K} \subseteq f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$.

Предположим теперь, что $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}) \setminus \mathfrak{K} \neq \emptyset$. Выберем группу G наименьшего порядка из $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}) \setminus \mathfrak{K}$. Тогда $\Phi(G) = 1$ и G – минимальная не $\mathfrak{K}$ -группа. По (1) леммы 8 в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N и $N = \tilde{F}(G)$. Если $G \in \mathfrak{H}$, то $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 6. Из $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{K}$ получаем противоречие. Итак, $G \notin \mathfrak{H}$. Предположим, что в G найдется такая $\mathfrak{H}$ -подгруппа H , что $NH = G$. Заметим, что $H \in \mathfrak{F}$ по лемме 6. Тогда из $G \in f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$ и леммы 11 следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Будем считать, что $NH < G$ для любой $\mathfrak{H}$ -подгруппы H .

Предположим, что N – абелева подгруппа. Тогда по лемме 8 N – элементарная абелева p -подгруппа, $p \in \mathbb{P}$, $C_G(N) = N$ и найдется максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = N \rtimes M$. Заметим, что $M \notin \mathfrak{H}$ и $M \in f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$. Пусть H – $\mathfrak{H}$ -подгруппа M . Тогда $H \in \mathfrak{F}$ по лемме 6. Заметим, что $H \mathfrak{F}$ -sn HN по лемме 10. Тогда $HN \in \mathfrak{F}$ по лемме 11. Из $C_G(N) = N$ следует, что $O_{p'}(HN) = 1$. Тогда $H \simeq HN/O_{p'}(HN) \in F(p)$ по [19, IV, теорема 3.7]. Итак, $M \in T(p)$ по определению экрана T . В этом случае, $G \in \mathfrak{K}$ по определению локальной формации, противоречие.

Пусть N – неабелева минимальная нормальная подгруппа G . Тогда $C_G(N) = 1$. Пусть H – произвольная $\mathfrak{H}$ -подгруппа G . Так как $NH < G$, то $NH \in \mathfrak{K}$. Согласно [19, А, лемма 4.14] $N = N_1 \times \dots \times N_k$ – прямое произведение минимальных нормальных подгрупп N_i группы NH . Заметим, что $\cap_{i=1}^k C_{NH}(N_i) = C_{NH}(N) = 1$. Тогда $NH/C_{NH}(N_i) \in T(p)$ для любого $p \in \pi(N_i) = \pi(N)$. Так как $T(p)$ – формация, $NH/(\cap_{i=1}^k C_{NH}(N_i)) \simeq NH \in T(p)$ для любого $p \in \pi(N)$. Значит, $H \in F(p)$ для любого $p \in \pi(N)$ по определению экрана T . Итак, $G \in T(p)$ по определению экрана T . В этом случае, $G \in \mathfrak{K}$, противоречие.

Значит, $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{K}$. Таким образом, $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{K}$.

Докажем, что T – максимальный внутренний локальный экран $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$. Из определения экрана T следует, что он является внутренним экраном формации $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$. Покажем, что $\mathfrak{K}_p T(p) = T(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Если $F(p) = \emptyset$, то $T(p) = \emptyset$ и утверждение доказано. Предположим, что $F(p) \neq \emptyset$.

Пусть $G/N \in T(p)$ и N – p -группа. Тогда $G \in \mathfrak{N}_p T(p)$. Так как T – внутренний экран формации $f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$, то по [4, лемма 3.11] $\mathfrak{N}_p T(p) \subseteq f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$. Тогда $G \in f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$. Пусть H – $\mathfrak{S}$ -подгруппа группы G . Тогда $HN/N \simeq H/(H \cap N)$ – $\mathfrak{S}$ -подгруппа группы G/N . Значит, $H/(H \cap N) \in F(p)$ по определению экрана T . Тогда $H \in \mathfrak{N}_p F(p) = F(p)$. Значит, $G \in F(p)^{\mathfrak{S}}$. Итак, $G \in f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F}) \cap F(p)^{\mathfrak{S}} = T(p)$. Следовательно, T – максимальный внутренний локальный экран $f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$. $\square$

Доказательство теоремы 5. Предположим, что $f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$ – формация Фиттинга, но найдется $p \in \pi(\mathfrak{F})$ такое, что $\mathfrak{S}_p = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{G}_{\pi(F(p))} \not\subseteq F(p)$. Выберем группу G наименьшего порядка из $\mathfrak{S}_p \setminus F(p)$. Из $\pi(\mathfrak{S}_p) \subseteq \pi(F(p))$ следует, что G – q -группа для некоторого $q \in \pi(F(p))$. Так как $F(p)$ – наследственная формация по лемме 7, $Z_q \in F(p)$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда $N \in F(p)$. По нашему предположению, $G/N \in F(p)$. Пусть $H = N \text{ wr } (G/N)$ – регулярное сплетение и B – его база. Итак, $H = B(G/N)$ – произведение субнормальных подгрупп B и G/N . Пусть T – максимальный внутренний локальный экран формации $f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$. Тогда из $\mathfrak{F} \subseteq f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$ следует, что $F(p) \subseteq T(p)$. Заметим, что $B, G/N \in F(p) \subseteq T(p)$. Из того, что $f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$ – формация Фиттинга следует, что $T(p)$ – формация Фиттинга по [4, теоремы 4.7 и 4.10]. Итак, $H \in T(p)$. По [19, А, теорема 18.9] G изоморфна подгруппе H . Итак, по теореме 4, $G \in F(p)$, противоречие. Следовательно, если $f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$ – формация Фиттинга, то $\mathfrak{S}_p = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{G}_{\pi(F(p))} \subseteq F(p)$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{S}_p = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{G}_{\pi(F(p))} \subseteq F(p)$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $F(p)^{\mathfrak{S}} = \mathfrak{G}_{\pi(F(p)) \cup \pi(\mathfrak{S})'}$. Пусть T – максимальный внутренний локальный экран формации $f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$. Тогда $T(p) = F(p)^{\mathfrak{S}} \cap f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\pi(F(p)) \cup \pi(\mathfrak{S})'} \cap f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$.

Предположим, что в этом случае формация $f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$ не является формацией Фиттинга. Так как эта формация наследственна, то найдется группа $G = AB \notin f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$, где A, B – нормальные $f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$ -подгруппы G . Не теряя общности рассуждений, можно считать, что группа G – группа минимального порядка с такими свойствами. Из насыщенности формации $f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$ следует, что $\Phi(G) = 1$ и в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N и $N = C_G(N)$. Заметим, что $G/N = G/C_G(N) = (AC_G(N)/C_G(N))(BC_G(N)/C_G(N))$ – произведение нормальных $f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$ -подгрупп. Из $|G/C_G(N)| < |G|$ следует, что $G/C_G(N) \in f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$. Заметим, что $AC_G(N)/C_G(N) \simeq A/C_A(N) \in \mathfrak{N}_p T(p) = T(p)$ по [20, лемма 1]. Аналогично, $BC_G(N)/C_G(N) \in T(p)$. Итак, $G/C_G(N) \in f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{G}_{\pi(F(p)) \cup \pi(\mathfrak{S})'} = T(p)$. Следовательно, $N = f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$ -центральный главный фактор G . Значит, $G \in f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$, противоречие. $\square$

Благодарность. Автор выражает признательность рецензенту за внимательное прочтение работы и полезные замечания по улучшению ее качества.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования для докторантов, аспирантов, студентов (№ 20240567).

Литература

1. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.
2. Monakhov V. S., Kniahina V. N. Finite groups with $\mathbb{P}$ -subnormal subgroups // Ricerche mat. 2013. Vol. 62. P. 307–322.
3. Hawkes T. O. On formation subgroups of a finite soluble group // J. London Math. Soc. 1969. Vol. 4. P. 243–250.
4. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. – 272 с.
5. Каморников С. Ф., Селькин М. В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Беларуская навука, 2003. 254 с.
6. Ballester-Bollinches A., Ezquerro L. M. Classes of Finite Groups: vol. 584 of Math. Appl. Netherlands: Springer, 2006. 385 p.
7. Васильев А. Ф., Васильева Т. И. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами // Проблемы физики, математики и техники. 2011. Т. 4. С. 86–91.
8. Семенчук В. Н., Шевчук С. Н. Характеризация классов конечных групп с помощью обобщенно субнормальных силовских подгрупп // Матем. заметки. 2011. Т. 89, № 1. С. 104–108.
9. Васильева Т. И., Коранчук А. Г. Конечные группы с субнормальными корадикалами силовских нормализаторов // Сиб. матем. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 805–813.
10. Monakhov V. S., Sokhor I. L. On groups with formational subnormal Sylow subgroups // J. Group Theory. 2018. Vol. 21. P. 273–287.
11. Guo W., Skiba A. N. Finite groups whose n -maximal subgroups are σ -subnormal // Sci. China Math. 2019. Vol. 62, N 7. P. 1355–1372.

12. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Вегера А. С. Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 259–275.
13. Мурашко В. И. Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1353–1367.
14. Murashka V. I. Finite groups with given sets of F-subnormal subgroups // Asian-European J. Math. 2020. Vol. 13, N 1. Art. 2050073 (13 p.)
15. Carter R., Fischer B., Hawkes T. Extreme classes of finite soluble groups // J. Algebra. 1969. Vol. 9. P. 285–313.
16. Семенчук В. Н. Минимальные не- $\mathcal{F}$ -группы // Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 3. С. 348–382.
17. Васильев А. Ф. Одна задача теории формаций конечных групп // Матем. заметки. 1997. Т. 62, № 1. С. 52–58.
18. Балычев С. В., Вегера А. С. Разрешимые насыщенные формации со свойством $\mathcal{P}_2$ для конечных групп // Проблемы физики, математики и техники. 2020. Т. 42. С. 74–80.
19. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
20. Васильев А. Ф., Васильева Т. И. О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами // Изв. вузов. Математика. 1997. Т. 11. С. 10–14.

References

1. Vasil'ev A. F., Vasil'eva T. I., Tyutyaynov V. N. On the finite groups of supersoluble type. *Sib. Math. J.*, 2010, vol. 51, no. 6, pp. 1004–1012.
2. Monakhov V. S., Kniagina V. N. Finite groups with $\mathbb{P}$ -subnormal subgroups. *Ricerche mat.* 2013, vol. 62, pp. 307–322.
3. Hawkes T. O. On formation subgroups of a finite soluble group. *J. London Math. Soc.*, 1969, vol. 4, pp. 243–250.
4. Shemetkov L. A. *Formations of finite groups*. Moscow, Nauka, 1978. 272 p. (in Russian).
5. Kamornikov S. F., Selkin M. V. *Subgroups functors and classes of finite groups*. Minsk, Belaruskaya nauka, 2003. 254 p. (in Russian).
6. Ballester-Bollinches A., Ezquerro L. M. *Classes of Finite Groups*. Netherlands, Springer, vol. 584 of Math. Appl., 2006. 385 p.
7. Vasil'ev A. F., Vasilyeva T. I. On finite groups with generally subnormal Sylow subgroups. *Probl. Fiz. Mat. Tekh.*, 2011, no. 4(9), pp. 86–91 (in Russian).
8. Semenchuk V. N., Shevchuk, S. N. Characterization of classes of finite groups with the use of generalized subnormal Sylow subgroups. *Math. Notes*, 2011, vol. 89, no. 1, pp. 117–120.
9. Vasil'eva T. I., Koranchuk, A. G. Finite Groups with Subnormal Residuals of Sylow Normalizers. *Sib. Math. J.*, 2022, vol. 63, no. 4, pp. 670–676.
10. Monakhov V. S., Sokhor I. L. On groups with formational subnormal Sylow subgroups. *J. Group Theory*, 2018, vol. 21, pp. 273–287.
11. Guo W., Skiba A. N. Finite groups whose n -maximal subgroups are σ -subnormal. *Sci. China Math.*, 2019, vol. 62, no. 7, pp. 1355–1372.
12. Vasil'ev A. F., Vasil'eva T. I., Vegera A. S. Finite groups with generalized subnormal embedding of Sylow subgroups. *Sib. Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 2, pp. 200–212.
13. Murashka V. I. Classes of finite groups with generalized subnormal cyclic primary subgroups. *Sib. Math. J.*, 2014, vol. 55, no. 6, pp. 1105–1115.
14. Murashka V. I. Finite groups with given sets of $\mathcal{F}$ -subnormal subgroups. *Asian-European J. Math.*, 2020, vol. 13, no. 1, art. 2050073 (13 p.)
15. Carter R., Fischer B., Hawkes T. Extreme classes of finite soluble groups. *J. Algebra*, 1969, vol. 9, pp. 285–313.
16. Semenchuk V. N. Minimal non- $\mathcal{F}$ -groups. *Algebra Logika*, 1979, vol. 18, no. 3, pp. 348–382 (in Russian).
17. Vasil'ev A. F. A problem in the theory of formations of finite groups. *Math. Notes*, 1997, vol. 62, no. 1, pp. 44–49.
18. Balychev S. V., Vegera A. S. Soluble saturated formations with the $\mathcal{P}_2$ property for finite groups. *Probl. Fiz. Mat. Tekh.*, 2020, no. 1(42), pp. 74–80 (in Russian).
19. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups*. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
20. Vasil'ev A. F., Vasilyeva T. I. On finite groups whose principal factors are simple groups. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1997, vol. 41, no. 11, pp. 8–12.

УДК 512.542

О n -КРАТНОЙ σ -ЛОКАЛЬНОСТИ НЕПУСТОЙ τ -ЗАМКНУТОЙ ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

И. Н. Сафонова

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: in.safonova@mail.ru

Поступила: 21.02.2024

Исправлена: 14.06.2024

Принята: 18.06.2024

Ключевые слова: конечная группа, формации, подгрупповой функтор, σ -локальная формация, τ -замкнутая формация.

Аннотация. Все рассматриваемые группы конечны. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел, G – группа, $\sigma(G) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset\}$, $\mathfrak{F}$ – класс групп и $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G)$. Функцию f вида $f: \sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ называют формационной σ -функцией. Для любой формационной σ -функции f класс $LF_\sigma(f)$ определяют следующим образом: $LF_\sigma(f) = \{G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G/O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)\}$. Если для некоторой формационной σ -функции f имеем $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то класс $\mathfrak{F}$ называют σ -локальным, а σ -функцию f называют σ -локальным определением $\mathfrak{F}$. Каждую формацию считают 0-кратно σ -локальной. Для $n \geq 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют n -кратно σ -локальной, если либо $\mathfrak{F} = (1)$ – классом всех единичных групп, либо $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i)$ является $(n-1)$ -кратно σ -локальной для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$. Пусть $\tau(G)$ – такое множество подгрупп G , что $G \in \tau(G)$. Тогда τ называют подгрупповым функтором, если для любого эпиморфизма $\varphi: A \rightarrow B$ и любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеем $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$. Формацию $\mathfrak{F}$ называют τ -замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $G \in \mathfrak{F}$. В работе получены необходимые и достаточные условия n -кратной σ -локальности ($n \geq 1$) непустой τ -замкнутой формации.

ON n -MULTIPLY σ -LOCALITY OF A NON-EMPTY τ -CLOSED FORMATION OF FINITE GROUPS

I. N. Safonova

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: in.safonova@mail.ru

Received: 21.02.2024

Revised: 14.06.2024

Accepted: 18.06.2024

Keywords: finite group, formations, subgroup functor, σ -local formation, τ -closed formation.

Abstract. All groups under consideration are finite. Let $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ be some partition of the set of all primes, G be a group, $\sigma(G) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset\}$, $\mathfrak{F}$ be a class of groups, and $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G)$. A function f of the form $f: \sigma \rightarrow \{\text{formations of groups}\}$ is called a formation σ -function. For any formation σ -function f the class $LF_\sigma(f)$ is defined as follows: $LF_\sigma(f) = \{G \mid G = 1 \text{ or } G \neq 1 \text{ and } G/O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ for all } \sigma_i \in \sigma(G)\}$. If for some formation σ -function f we have $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, then the class $\mathfrak{F}$ is called σ -local and f is called a σ -local definition of $\mathfrak{F}$. Every formation is called 0-multiply σ -local. For $n \geq 1$, a formation $\mathfrak{F}$ is called n -multiply σ -local provided either $\mathfrak{F} = (1)$ is the class of all identity groups or $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, where $f(\sigma_i)$ is $(n-1)$ -multiply σ -local for all $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$. Let $\tau(G)$ be a set of subgroups of G such that $G \in \tau(G)$. Then τ is called a subgroup functor if for every epimorphism $\varphi: A \rightarrow B$ and any groups $H \in \tau(A)$ and $T \in \tau(B)$ we have $H^\varphi \in \tau(B)$ and $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$. A class of groups $\mathfrak{F}$ is called τ -closed if $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ for all $G \in \mathfrak{F}$. In this paper, necessary and sufficient conditions for n -multiply σ -locality ($n \geq 1$) of a non-empty τ -closed formation are obtained.

1. Введение. Все рассматриваемые группы конечны. Необходимые определения, обозначения и базовые результаты теории σ -локальных или, иначе, обобщенно локальных формаций, можно найти в работах [1–6]. Мы также используем терминологию и обозначения, принятые в [7].

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, G – группа, $\sigma(G) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset\}$, $\mathfrak{F}$ – класс групп и $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G)$.

Функцию f вида $f: \sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ называют формационной σ -функцией [2]. Для любой формационной σ -функции f класс $LF_\sigma(f)$ определяют следующим образом:

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G/O_{\sigma'_i, \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

Если для некоторой формационной σ -функции f имеем $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то класс $\mathfrak{F}$ называют σ -локальным, а σ -функцию f называют σ -локальным определением $\mathfrak{F}$.

Каждую формацию считают 0-кратно σ -локальной. Для $n > 0$ формацию $\mathfrak{F}$ называют n -кратно σ -локальной, если либо $\mathfrak{F} = (1)$ – классом всех единичных групп, либо $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i)$ является $(n-1)$ -кратно σ -локальной для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$.

Пусть $\tau(G)$ – такое множество подгрупп G , что $G \in \tau(G)$. Тогда τ называют подгрупповым функтором [7], если для любого эпиморфизма $\varphi: A \rightarrow B$ и любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$. Формацию $\mathfrak{F}$ называют τ -замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $G \in \mathfrak{F}$.

Совокупность всех τ -замкнутых n -кратно σ -локальных формаций обозначают через $I_{\sigma_n}^\tau$. Формации из $I_{\sigma_n}^\tau$ называют $I_{\sigma_n}^\tau$ -формациями.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторая совокупность групп. Тогда через $I_{\sigma_n}^\tau \text{ form } \mathfrak{X}$ обозначают пересечение всех $I_{\sigma_n}^\tau$ -формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, и называют τ -замкнутой n -кратно σ -локальной формацией, порожденной совокупностью групп $\mathfrak{X}$. В частности, через $\text{form } \mathfrak{X}$ ($\tau \text{form } \mathfrak{X}$) обозначают формацию (соответственно τ -замкнутую формацию), порожденную совокупностью групп $\mathfrak{X}$, т. е. пересечение всех формаций (τ -замкнутых формаций), содержащих $\mathfrak{X}$.

Для всякого $\sigma_i \in \sigma$ полагают $\mathfrak{X}(\sigma_i) = (G/O_{\sigma'_i, \sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$, если $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{X}(\sigma_i) = \emptyset$, если $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{X})$. Следуя [7, с. 31] для любого целого неотрицательного n определим класс групп

$$\mathfrak{X}_{\sigma_n}^\tau(\sigma_i) = \begin{cases} I_{\sigma_n}^\tau \text{ form } (\mathfrak{X}(\sigma_i)), & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X}); \\ \emptyset, & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

В частности, если $n = 0$, то

$$\mathfrak{X}^\tau(\sigma_i) = \begin{cases} \tau \text{form } (\mathfrak{X}(\sigma_i)), & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X}); \\ \emptyset, & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

Для любой группы G и непустой формации $\mathfrak{F}$ через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначают $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G , т. е. пересечение всех нормальных подгрупп N группы G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – формации, то $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ называется гашуцовым произведением формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$.

Данная статья продолжает цикл работ автора [8–12] по изучению свойств τ -замкнутых n -кратно σ -локальных формаций и их решеток, где τ – некоторый подгрупповой функтор в смысле А. Н. Скибы [7].

Первым результатом работы являются необходимые и достаточные условия n -кратной σ -локальности непустой τ -замкнутой формации, представленные в следующей теореме.

Теорема 1.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая τ -замкнутая формация. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ является n -кратно σ -локальной ($n \geq 1$), когда $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{\sigma_{n-1}}^\tau(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $\sigma_i \in \sigma$.

В частности, если $n = 1$ из теоремы 1.1 получаем

Следствие 1.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая τ -замкнутая формация. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ является σ -локальной, когда $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}^\tau(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $\sigma_i \in \sigma$.

Вторым результатом данной работы является следующая теорема, указывающая способ порождения τ -замкнутой n -кратно σ -локальной формации.

Теорема 1.3. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой набор групп, $n \geq 1$. Тогда

$$I_{\sigma_n}^\tau \text{ form } \mathfrak{X} = \text{form} \left(\bigcup_{\sigma_i \in \sigma} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{X}_{\sigma_{n-1}}^\tau(\sigma_i) \right).$$

Следствие 1.4. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой набор групп. Тогда

$$I_{\sigma}^\tau \text{ form } \mathfrak{X} = \text{form} \left(\bigcup_{\sigma_i \in \sigma} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{X}^\tau(\sigma_i) \right).$$

Напомним, что если f является формационной σ -функцией, то символ $\text{Supp}(f)$ обозначает носитель f , т. е. множество всех σ_i таких, что $f(\sigma_i) \neq \emptyset$.

Формационная σ -функция f называется: $I_{\sigma_n}^\tau$ -значной, если $f(\sigma_i)$ τ -замкнутая n -кратно σ -локальная формация для каждого $\sigma_i \in \text{Supp}(f)$; *внутренней*, если $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$ для всех i ; *полной*, если $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ для всех i . Если F – полная внутренняя формационная σ -функция и $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$, то F называется *каноническим σ -локальным определением $\mathfrak{F}$* .

Следующая теорема устанавливает связь порождающего множества τ -замкнутой n -кратно σ -локальной формации со значениями ее канонического σ -локального определения.

Теорема 1.5. Пусть $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$ – τ -замкнутая n -кратно σ -локальная формация ($n \geq 1$), где F – каноническое σ -локальное определение $\mathfrak{F}$. Тогда справедливо равенство

$$\mathfrak{F} = \text{form} \left(\bigcup_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})} F(\sigma_i) \right).$$

Мы докажем теоремы 1.1, 1.3 и 1.5 в разделе 3, а также дополнительно приведем некоторые следствия данных результатов.

2. Базовые определения, обозначения и вспомогательные результаты. Группу G называют [1]: σ -примарной, если G является σ_i -группой для некоторого i ; σ -нильпотентной, если группа G является прямым произведением σ -примарных групп; σ -разрешимой, если $G = 1$ или $G \neq 1$ и каждый главный фактор группы G является σ -примарным.

Класс всех σ -разрешимых групп обозначают через $\mathfrak{S}_\sigma$, $\mathfrak{N}_\sigma$ – класс всех σ -нильпотентных групп, через (1) обозначают класс всех единичных групп, $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – класс всех σ_i -групп и $\mathfrak{G}_{\sigma'_i}$ – класс всех σ'_i -групп. Символом $O_{\sigma'_i, \sigma_i}(G)$ обозначают $(\mathfrak{G}_{\sigma'_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i})$ -радикал группы G , т. е. наибольшую нормальную подгруппу группы G , принадлежащую классу $\mathfrak{G}_{\sigma'_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i}$.

Для доказательства основного результата работы нам понадобятся некоторые известные факты теории формаций.

Лемма 2.1 [6, лемма 2.1]. Пусть f и h – формационные σ -функции и $\Pi = \text{Supp}(f)$. Предположим, что $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f) = LF_\sigma(h)$.

- (1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$.
- (2) $\mathfrak{F} = \left(\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma'_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i) \right) \cap \mathfrak{G}_\Pi$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.
- (3) Если каждая группа из $\mathfrak{F}$ σ -разрешима, то $\mathfrak{F} = \left(\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{S}_{\sigma'_i} \mathfrak{S}_{\sigma_i} f(\sigma_i) \right) \cap \mathfrak{S}_\Pi$.
- (4) Если $\sigma_i \in \Pi$, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$.
- (5) $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$, где F – единственная формационная σ -функция такая, что $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $F(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Более того, $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$ для всех i .

Лемма 2.2 [12, теорема 2]. Пусть $\mathfrak{F}$ – n -кратно σ -локальная формация ($n \geq 1$) и F – каноническое σ -локальное определение $\mathfrak{F}$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ τ -замкнута тогда и только тогда, когда $F(\sigma_i)$ является τ -замкнутой формацией для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$.

Лемма 2.3 [13, лемма 3.4]. Пусть $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ и G – такая группа, что $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Тогда найдется такое $\sigma_i \in \sigma(G^{\mathfrak{F}})$, что $G/O_{\sigma'_i, \sigma_i}(G) \notin f(\sigma_i)$.

Лемма 2.4 [14, лемма 11]. Если $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ и $G/O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ для некоторого $\sigma_i \in \sigma(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Лемма 2.5 [9, теорема 1.1]. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой набор групп, $\mathfrak{F} = I_{\sigma_n}^\tau \text{form } \mathfrak{X} = LF_\sigma(f)$, где f – наименьшее $I_{\sigma_{n-1}}^\tau$ -значное σ -локальное определение $\mathfrak{F}$. Тогда верны следующие утверждения:

- (1) $\sigma(\mathfrak{X}) = \sigma(\mathfrak{F})$;
- (2) $f(\sigma_i) = \mathfrak{X}_{\sigma_{n-1}}^\tau(\sigma_i) = \mathfrak{F}_{\sigma_{n-1}}^\tau(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$ и $f(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{X})$;
- (3) если h – произвольное $I_{\sigma_{n-1}}^\tau$ -значное σ -локальное определение $\mathfrak{F}$, то для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$ имеем

$$f(\sigma_i) = I_{\sigma_{n-1}}^\tau \text{form} (A \mid A \in \mathfrak{F} \cap h(\sigma_i), O_{\sigma_i}(A) = 1).$$

Лемма 2.6 [15, лемма 11]. Пусть $\mathfrak{M}$ – непустая наследственная формация, $\mathfrak{F}$ – непустая τ -замкнутая формация. Тогда $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ является τ -замкнутой формацией.

Лемма 2.7 [7, следствие 1.2.24]. Для любого набора τ -замкнутых формаций $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ имеем $\tau \text{form} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{M}_i \right) = \text{form} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{M}_i \right)$.

3. Доказательство основных результатов. Доказательство теоремы 1.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – n -кратно σ -локальная формация и F – ее каноническое σ -локальное определение. Ввиду леммы 2.1 имеет место $\mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i) = F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $\sigma_i \in \sigma$. По условию теоремы формация $\mathfrak{F}$ является τ -замкнутой, поэтому $\mathfrak{F} \in I_{\sigma_n}^\tau$. Значит, в силу леммы 2.2 для любого $\sigma_i \in \sigma$ формация $F(\sigma_i)$ является τ -замкнутой

$(n-1)$ -кратно σ -локальной. Так как при этом $I_{\sigma_{n-1}}^{\tau} \text{form}(\mathfrak{F}(\sigma_i)) \subseteq F(\sigma_i)$, то справедливы включения

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} I_{\sigma_{n-1}}^{\tau} \text{form}(\mathfrak{F}(\sigma_i)) \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i) = F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Таким образом, $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $\sigma_i \in \sigma$.

Теперь предположим, что $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \sigma$. Пусть f – такая формационная σ -функция, что для всех $\sigma_i \in \sigma$ имеет место $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i)$. Покажем, что тогда $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(f)$. Предположим, что $\mathfrak{F} \not\subseteq LF_{\sigma}(f)$ и пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus LF_{\sigma}(f)$. Тогда группа G монолитична и ее монолит $R = G^{LF_{\sigma}(f)}$, поскольку $LF_{\sigma}(f)$ – формация. Пусть $\sigma_i \in \sigma(R)$. Допустим, что R не является σ -примарной группой. Тогда $O_{\sigma'_i, \sigma_i}(G) = 1$ и, значит, имеет место

$$G \simeq G/O_{\sigma'_i, \sigma_i}(G) \in \mathfrak{F}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i) = f(\sigma_i).$$

Следовательно, $G/O_{\sigma'_i, \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(R)$. Последнее противоречит лемме 2.3. Поэтому R – σ_i -группа. Тогда, ввиду монолитичности группы G , имеем $O_{\sigma'_i}(G) = 1$ и $O_{\sigma'_i, \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G)$. Заметим, что при этом $G/O_{\sigma_i}(G) \in LF_{\sigma}(f)$. Действительно, так как $G/R \in LF_{\sigma}(f)$ и $R \subseteq O_{\sigma_i}(G)$, то

$$G/O_{\sigma_i}(G) \simeq (G/R)/(O_{\sigma_i}(G)/R) \in LF_{\sigma}(f).$$

Следовательно, имеет место

$$G/O_{\sigma_i}(G) = G/O_{\sigma'_i, \sigma_i}(G) \in \mathfrak{F}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i) = f(\sigma_i) \cap LF_{\sigma}(f).$$

Но тогда $G \in LF_{\sigma}(f)$ ввиду леммы 2.4. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F} \subseteq LF_{\sigma}(f)$.

Теперь предположим, что $LF_{\sigma}(f) \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G – группа минимального порядка из $LF_{\sigma}(f) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G – монолитическая группа и ее монолит $R = G^{\mathfrak{F}}$. Пусть $\sigma_i \in \sigma(R)$. Если R не является σ -примарной группой, то $O_{\sigma'_i, \sigma_i}(G) = 1$. Поскольку $G \in LF_{\sigma}(f)$, то по лемме 2.5 имеем

$$G \simeq G/O_{\sigma'_i, \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Последнее противоречит выбору группы G . Значит, R – σ_i -группа и $O_{\sigma_i}(G) = O_{\sigma'_i, \sigma_i}(G)$. Поскольку $G \in LF_{\sigma}(f)$, то $G/O_{\sigma_i}(G) = G/O_{\sigma'_i, \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i)$. Следовательно,

$$G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} (\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i)) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Снова получили противоречие. Значит, $LF_{\sigma}(f) \subseteq \mathfrak{F}$ и $LF_{\sigma}(f) = \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Подгрупповой функтор τ называется [7, с. 17]: *тривиальным*, если для любой группы G имеем $\tau(G) = \{G\}$; *единичным*, если $\tau(G) = S(G)$ – совокупность всех подгрупп группы G для любой группы G .

Если $\tau = S$ – единичный подгрупповой функтор из теоремы 1.1 получаем

Следствие 3.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ является n -кратно σ -локальной ($n \geq 1$), когда $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{\sigma_{n-1}}^S(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $\sigma_i \in \sigma$.

Напомним, что если $\mathfrak{X}$ – непустой набор групп, $p \in \mathbb{P}$, то класс $\mathfrak{X}_n^{\tau}(p)$ определяется следующим образом [7, с. 31]:

$$\mathfrak{X}_n^{\tau}(p) = \begin{cases} I_n^{\tau} \text{form}(\mathfrak{X}(p)), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{X}); \\ \emptyset, & \text{если } p \notin \pi(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ из теоремы 1.1 получаем.

Следствие 3.2 [7, теорема 1.3.11]. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая τ -замкнутая формация. Тогда в том и только в том случае $\mathfrak{F}$ n -кратно локальна, где $n \geq 1$, когда для любого $p \in \mathbb{P}$ имеет место $\mathfrak{X}_p \mathfrak{F}_{n-1}^{\tau}(p) \subseteq \mathfrak{F}$.

Доказательство теоремы 1.3. Пусть $\mathfrak{F} = I_{\sigma_n}^{\tau} \text{form} \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{M} = \text{form}(\bigcup_{\sigma_i \in \sigma} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{X}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i))$. В силу леммы 2.5 для всякого $\sigma_i \in \sigma$ имеет место равенство $\mathfrak{F}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i) = \mathfrak{X}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i)$. Поскольку по теореме 1.1 для всех $\sigma_i \in \sigma$ имеем $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{X}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \sigma$. Значит, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Кроме того, если $H \in \mathfrak{X}$, то $H/O_{\sigma'_i, \sigma_i}(H) \in \mathfrak{X}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{X}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i)$. Поэтому, $H/O_{\sigma'_i}(H) \in \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{X}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{M}$. Поскольку $\mathfrak{M}$ – формация и $\bigcap_{\sigma_i \in \sigma(H)} O_{\sigma'_i}(H) = 1$, то имеем

$$H \simeq H / \left(\bigcap_{\sigma_i \in \sigma(H)} O_{\sigma'_i}(H) \right) \in \mathfrak{M}.$$

Следовательно, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$. Таким образом, имеют место включения $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$.

Для доказательства включения $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$ достаточно установить, что формация $\mathfrak{M}$ является τ -замкнутой n -кратно σ -локальной, поскольку $\mathfrak{F} = l_{\sigma_n}^{\tau} \text{form } \mathfrak{X}$.

Покажем вначале, что формация $\mathfrak{M}$ является τ -замкнутой. Действительно, поскольку для любого $\sigma_i \in \sigma$ формация $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ является наследственной и $\mathfrak{X}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i)$ – τ -замкнутая формация, то формация $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{X}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i)$ τ -замкнута по лемме 2.6. Значит, в силу леммы 2.7 формация $\mathfrak{M}$ также является τ -замкнутой.

Докажем теперь, что $\mathfrak{M}$ является n -кратно σ -локальной формацией. Ввиду теоремы 1.1 достаточно показать, что $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{M}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{M}$ для всех $\sigma_i \in \sigma$. Поскольку $\mathfrak{F} = l_{\sigma_n}^{\tau} \text{form } \mathfrak{X}$, имеем $\mathfrak{X}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i) = \mathfrak{F}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma$ по лемме 2.5. С другой стороны, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, поэтому имеет место включение $\mathfrak{M}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i)$. Следовательно, $\mathfrak{M}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{X}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i)$. Значит,

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{M}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{X}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{M}.$$

Таким образом, формация $\mathfrak{M}$ n -кратно σ -локальна. Теорема доказана.

В случае, когда $\tau = S$ – единичный подгрупповой функтор из теоремы 1.3 вытекает

Следствие 3.3. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой набор групп, $n \geq 1$. Тогда

$$l_{\sigma_n}^S \text{form } \mathfrak{X} = \text{form} \left(\bigcup_{\sigma_i \in \sigma} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{X}_{\sigma_{n-1}}^S(\sigma_i) \right).$$

Кроме того, в классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1$ из теоремы 1.3 получаем

Следствие 3.4 [7, теорема 1.3.15]. Для любого натурального n и всякой непустой совокупности групп $\mathfrak{X}$ справедливо равенство $l_n^{\tau} \text{form } \mathfrak{X} = \text{form} \left(\bigcup_{p \in \mathbb{P}} \mathfrak{X}_p \mathfrak{X}_{n-1}^{\tau}(p) \right)$.

Доказательство теоремы 1.5. Пусть $\mathfrak{F}$ – τ -замкнутая n -кратно σ -локальная формация ($n \geq 1$) и F – ее каноническое σ -локальное определение. По лемме 2.1 имеем $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$ и $F(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{F})$. Следовательно, в силу теоремы 1.3 имеем

$$\mathfrak{F} = \text{form} \left(\bigcup_{\sigma_i \in \sigma} F(\sigma_i) \right) = \text{form} \left(\bigcup_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})} F(\sigma_i) \right). \quad \square$$

Если $\tau = S$ – единичный подгрупповой функтор из теоремы 1.5 вытекает

Следствие 3.5. Пусть $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(F)$ – наследственная n -кратно σ -локальная формация ($n \geq 1$), где F – каноническое σ -локальное определение $\mathfrak{F}$. Тогда справедливо равенство

$$\mathfrak{F} = \text{form} \left(\bigcup_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})} F(\sigma_i) \right).$$

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1$ из теоремы 1.5 получаем

Следствие 3.6. Пусть $\mathfrak{F} = LF(F)$ – τ -замкнутая n -кратно локальная формация ($n \geq 1$), где F – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливо равенство

$$\mathfrak{F} = \text{form} \left(\bigcup_{p \in \pi(\mathfrak{F})} F(p) \right).$$

Теоремы 1.1 и 1.3 позволяют сформулировать следующий критерий n -кратной σ -локальности для непустой τ -замкнутой формации.

Теорема 3.7. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая τ -замкнутая формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) $\mathfrak{F}$ является τ -замкнутой n -кратно σ -локальной ($n \geq 1$);
- (2) $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$;
- (3) $\mathfrak{F} = \text{form} \left(\bigcup_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{\sigma_{n-1}}^{\tau}(\sigma_i) \right)$.

Теорема 3.7 имеет много следствий. В частности, если $\tau = S$ – единичный подгрупповой функтор из теоремы 3.7 получаем

Следствие 3.8. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) $\mathfrak{F}$ является наследственной n -кратно σ -локальной ($n \geq 1$);
- (2) $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{\sigma_{n-1}}^S(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$;
- (3) $\mathfrak{F} = \text{form} \left(\bigcup_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{\sigma_{n-1}}^S(\sigma_i) \right)$.

Если теперь τ – тривиальный подгрупповой функтор из теоремы 3.7 вытекает

Следствие 3.9 [13, теорема 3.1]. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $\mathfrak{F}$ является n -кратно σ -локальной ($n \geq 1$);
- (ii) $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{n-1}^{\sigma}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$;
- (iii) $\mathfrak{F} = \text{form}(\bigcup_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{n-1}^{\sigma}(\sigma_i))$.

Кроме того, если при этом $n = 1$ имеет место следующее

Следствие 3.10 [13, теорема 1.1]. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $\mathfrak{F}$ является σ -локальной;
- (ii) $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$;
- (iii) $\mathfrak{F} = \text{form}(\bigcup_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}(\sigma_i))$.

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1$ из теоремы 3.7 получаем.

Следствие 3.11. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая τ -замкнутая формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) $\mathfrak{F}$ является τ -замкнутой n -кратно локальной ($n \geq 1$);
- (2) $\mathfrak{N}_p \mathfrak{F}_{n-1}^{\tau}(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \pi(\mathfrak{F})$;
- (3) $\mathfrak{F} = \text{form}(\bigcup_{p \in \pi(\mathfrak{F})} \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}_{n-1}^{\tau}(p))$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (проект № 20211328).

Литература

1. Skiba A. N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. Vol. 436. P. 1–16.
2. Skiba A. N. On one generalization of the local formations // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 1(34). С. 79–82.
3. Чу Ч., Скиба А. Н. О Σ_i^{σ} -замкнутых классах конечных групп // Украинский матем. журн. 2018. Т. 70, № 12. С. 1707–1716.
4. Chi Z., Skiba A. N. A generalization of Kramer's theory // Acta Math. Hungar. 2019. Vol. 158, N 1. P. 87–99.
5. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. On one application of the theory of n -multiply σ -local formations of finite groups // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 2(35). С. 85–88.
6. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. On n -multiply σ -local formations of finite groups // Comm. Algebra. 2019. Vol. 47, N 3. P. 957–968.
7. Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997.
8. Safonova I. N. On τ -closed n -multiply σ -local formations of finite groups // Cornell University Library, arXiv: 2105.00430 [math.GR] 2 May 2021. 29 p.
9. Safonova I. N. Some properties of n -multiply σ -local formations of finite groups // Asian-European Journal of Mathematics. 2022. Vol. 15, N 7. Art. 2250138.
10. Safonova I. N. On properties of the lattice of all τ -closed n -multiply σ -local formations // Comm. Algebra. 2023. Vol. 51, N 10. P. 4454–4461.
11. Safonova I. N. On σ -inductive lattices of n -multiply σ -local formations of finite groups // J. Algebra and Its Applications. 2024. Vol. 23, N 1. Art. 2450017.
12. Safonova I. N. On the τ -closedness of n -multiply σ -local formation // Advances in Group Theory and Applications. 2024. Vol. 18. P. 123–136.
13. Safonova I. N. A criterion for σ -locality of a non-empty formation // Comm. Algebra. 2022. Vol. 50, N 6. P. 2366–2376.
14. Safonova I. N., Safonov V. G. On some properties of the lattice of totally σ -local formations of finite groups // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2020. № 3. С. 6–16.
15. Сафонов В. Г. Характеризация разрешимых однопорожденных totally насыщенными формациями конечных групп // Сибирский матем. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 185–191.

References

1. Skiba A. N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups. *J. Algebra*, 2015, vol. 436, pp. 1–16.
2. Skiba A. N. On one generalization of the local formations. *Probl. Phys. Math. Tech.*, 2018, 1(34), pp. 79–82.
3. Chi Z., Skiba A. N. On Σ_i^σ -closed classes of finite groups. *Ukrainian Math. J.*, 2019, vol. 70, no. 12, pp. 1966–1977.
4. Chi Z., Skiba A. N. A generalization of Kramer’s theory. *Acta Math. Hungar.*, 2019, vol. 158, no. 1, pp. 87–99.
5. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. On one application of the theory of n -multiply σ -local formations of finite groups. *Probl. Phys. Math. Tech.*, 2018, 2(35), pp. 85–88.
6. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. On n -multiply σ -local formations of finite groups. *Comm. Algebra*, 2019, vol. 47, no. 3, pp. 957–968.
7. Skiba A. N. *Algebra of formations*. Minsk, Belaruskaya Navuka, 1997 (in Russian).
8. Safonova I. N. *On τ -closed n -multiply σ -local formations of finite groups*. Cornell University Library. Available at: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.00430> (Accessed 2 May 2021).
9. Safonova I. N. Some properties of n -multiply σ -local formations of finite groups. *Asian-European Journal of Mathematics*, 2022, vol. 15, no. 7, art. 2250138.
10. Safonova I. N. On properties of the lattice of all τ -closed n -multiply σ -local formations. *Comm. Algebra*, 2023, vol. 51, no. 10, pp. 4454–4461.
11. Safonova I. N. On σ -inductive lattices of n -multiply σ -local formations of finite groups. *J. Algebra and Its Applications*, 2024, vol. 23, no. 1, art. 2450017.
12. Safonova I. N. On the τ -closedness of n -multiply σ -local formation. *Advances in Group Theory and Applications*, 2024, vol. 18, pp. 123–136.
13. Safonova I. N. A criterion for σ -locality of a non-empty formation. *Comm. Algebra*, 2022, vol. 50, no. 6, pp. 2366–2376.
14. Safonova I. N., Safonov V. G. On some properties of the lattice of totally σ -local formations of finite groups. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2020, no. 3, pp. 6–16.
15. Safonov V. G. Characterization of the soluble one-generated totally saturated formations of finite groups. *Sib. Math. J.*, 2007, vol. 48, no. 1, pp. 150–155.



ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL
ANALYSIS



УДК 517.5

ОБ АППРОКСИМАЦИЯХ ИНТЕГРАЛА РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ НА ОТРЕЗКЕ
РАЦИОНАЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ФУРЬЕ–ЧЕБЫШЁВА

П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
e-mail: pahamatby@gmail.com, rovba.ea@gmail.com

Поступила: 21.02.2024

Исправлена: 29.02.2024

Принята: 18.06.2024

Ключевые слова: интеграл Римана–Лиувилля, рациональный интегральный оператор Фурье–Чебышёва, функции со степенной особенностью, равномерные приближения, асимптотические оценки, метод Лапласа.

Аннотация. Исследуются аппроксимации интеграла Римана–Лиувилля на отрезке рациональными интегральными операторами Фурье–Чебышёва. Найдено интегральное представление приближений. Изучаются рациональные аппроксимации интеграла Римана–Лиувилля с плотностью $\varphi_\gamma(x) = (1-x)^\gamma$, $\gamma > 0$, устанавливаются оценки поточечных и равномерных приближений. В случае одного полюса в открытой комплексной плоскости у аппроксимирующей функции получено асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений и оптимальное значение параметра, при котором мажоранта имеет асимптотически наибольшую скорость убывания. В качестве следствия получены оценки приближений интеграла Римана–Лиувилля с плотностью, принадлежащей некоторым классам непрерывных функций на отрезке, частичными суммами полиномиального ряда Фурье–Чебышёва.

ON APPROXIMATIONS OF RIEMANN–LIOUVILLE INTEGRAL ON A SEGMENT BY
RATIONAL FOURIER–CHEBYSHEV INTEGRAL OPERATORS

P. G. Patseika, Y. A. Rouba

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus
e-mail: pahamatby@gmail.com, rovba.ea@gmail.com

Received: 21.02.2024

Revised: 29.02.2024

Accepted: 18.06.2024

Keywords: Riemann–Liouville integral, rational Fourier–Chebyshev integral operator, functions with power singularity, uniform approximations, asymptotic estimates, Laplace method.

Abstract. Approximations of Riemann–Liouville integral on a segment by rational integral operators Fourier–Chebyshev are investigated. An integral representation of the approximations is found. Rational approximations Riemann–Liouville integral with density $\varphi_\gamma(x) = (1-x)^\gamma$, $\gamma \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$, are studied, estimates of pointwise and uniform approximations are established. In the case of one pole in an open complex plane, an asymptotic expression is obtained for the approximating function majorants of uniform approximations and the optimal value of the parameter at which the majorant has the asymptotically highest rate of decrease. As a consequence, estimates of approximations of Riemann–Liouville integral with density belonging to some classes of continuous functions on the segment by partial sums of the polynomial Fourier–Chebyshev series are obtained.

Введение. Функции, представимые интегралом Римана–Лиувилля [1]

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} \varphi(t) dt, \quad x \in [-1, 1], x > t, r > 0, \quad (1)$$

где Γ – гамма-функция Эйлера, широко используются в теории как полиномиальной [2–9], так и рациональной аппроксимации [10–15]. С их помощью были найдены новые классы непрерывных функций, равномерная рациональная аппроксимация на которых является лучше соответствующих полиномиальных аналогов.

Полиномиальные ряды Фурье–Чебышёва достаточно хорошо изучены, обладают рядом замечательных свойств и нашли широкое применение в различных областях математики и физики [16–19]. Отметим работу [20], в которой найдены значения дробной производной в смысле Римана–Лиувилля методом разложения в ряд Фурье–Чебышёва и применения правила неопределенных квадратур.

В 1979 г. Е. А. Ровба [21] ввел интегральный оператор на отрезке $[-1, 1]$, ассоциированный с системой рациональных функций Чебышёва–Маркова, который является естественным обобщением частичных сумм полиномиального ряда Фурье–Чебышёва.

Пусть задано произвольное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$, где a_k либо являются действительными и $|a_k| < 1$, либо попарно комплексно сопряженными. На множестве суммируемых на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1-x^2)^{-1/2}$ функций $f(x)$ рассмотрим рациональный интегральный оператор Фурье–Чебышёва (см. [21]):

$$s_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v) \frac{\sin \lambda_n(v, u)}{\sin \frac{v-u}{2}} dv, \quad x = \cos u, \quad (2)$$

где

$$\lambda_n(v, u) = \int_u^v \left(\frac{1}{2} + \lambda_n(y) \right) dy,$$

$$\lambda_n(y) = \sum_{k=1}^n \frac{1 - |z_k|^2}{1 + 2|z_k| \cos(y - \arg z_k) + |z_k|^2}, \quad z_k = \frac{a_k}{1 + \sqrt{1 - a_k^2}}, \quad |z_k| < 1. \quad (3)$$

Оператор $s_n : f \rightarrow \mathbb{R}_n(A)$, где $\mathbb{R}_n(A)$ – множество рациональных функций вида

$$\frac{p_n(x)}{\prod_{k=1}^n (1 + a_k x)}, \quad p_n(x) \in \mathbb{P}_n,$$

$A = (a_1, \dots, a_n)$, и $s_n(1, x) \equiv 1$. Если $a_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, то величина $s_n(f, x)$ представляет собой частичную сумму полиномиального ряда Фурье–Чебышёва. Новый метод рациональной аппроксимации на отрезке нашел широкое применение в решении практических задач [22; 23].

Представляет интерес изучить аппроксимации интеграла Римана–Лиувилля (1) на отрезке $[-1, 1]$ рациональным интегральным оператором Фурье–Чебышёва (2). В работе устанавливается интегральное представление приближений и оценки равномерных приближений в случае, когда плотность интеграла Римана–Лиувилля принадлежит некоторым классам непрерывных функций на отрезке. В качестве следствия рассматриваются аппроксимации интеграла Римана–Лиувилля частичными суммами полиномиального ряда Фурье–Чебышёва.

1. Интегральное представление приближений. Введем обозначения

$$\varepsilon_n(f, x, A) = f(x) - s_n(f, x), \quad x \in [-1, 1], \quad (4)$$

$$\varepsilon_n(f, A) = \|f(x) - s_n(f, x)\|_{C[-1, 1]}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Положим параметры рационального интегрального оператора Фурье–Чебышёва (3) заданными следующим образом: $a_1 = a_2 = \dots a_p = 0$, $p = [r - 1]$, где символ $[\cdot]$ обозначает целую часть числа.

Следующая теорема устанавливает интегральное представление величины $\varepsilon_n(f, x, A)$.

Теорема 1. Для приближений интеграла Римана–Лиувилля на отрезке $[-1, 1]$ рациональным интегральным оператором Фурье–Чебышёва имеет место интегральное представление

$$\varepsilon_n(f, x, A) = \frac{-1}{2^{r-1}\pi\Gamma(r)} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\cos \tau) \sin \tau \int_0^1 \frac{(1-y)^{r-1} y^{p+1-r} (1-2y \cos 2\tau + y^2)^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{1-2y \cos(\tau-u) + y^2}} \times$$

$$\times \sqrt{\prod_{k=p+1}^n \frac{y^2 + 2|z_k|y \cos(\tau - \arg z_k) + |z_k|^2}{1 + 2|z_k|y \cos(\tau - \arg z_k) + |z_k|^2 y^2}} \sin \Omega_n(x, \tau, y) dy d\tau, \quad x = \cos u, \quad (5)$$

где

$$\Omega_n(x, \tau, y) = \arg \left(\frac{(\bar{z} - yz)^{r-1} \omega(yz)}{y - \xi \bar{z}} \frac{\omega(yz)}{\omega(\xi)} \right), \quad \omega(\xi) = \prod_{k=1}^n \frac{\xi + z_k}{1 + z_k \xi}, \quad \xi = e^{iu}, \quad z = e^{i\tau}, \quad r > 0. \quad (6)$$

Доказательство. Запишем рациональный интегральный оператор Фурье–Чебышёва в виде

$$s_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(\cos v) D_n(v, u) dv, \quad x = \cos u, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

где

$$D_n(v, u) = \frac{\zeta \frac{\omega(\zeta)}{\omega(\xi)} - \xi \frac{\omega(\xi)}{\omega(\zeta)}}{\zeta - \xi} + \frac{\zeta \xi \omega(\zeta) \omega(\xi) - \frac{1}{\omega(\zeta) \omega(\xi)}}{\zeta \xi - 1}, \quad \zeta = e^{iv}, \quad \xi = e^{iu}, \quad x = \cos u.$$

Известно (см., напр., [3]), что для интеграла Римана–Лиувилля (1) справедливо представление

$$f(x) = \frac{1}{2\Gamma(r)} \int_{-1}^{+1} (x-t)^{r-2} (|x-t| + (x-t)) \varphi(t) dt.$$

Подставим последнее интегральное представление в (7) и, воспользовавшись теоремой Фубини, поменяем порядок интегрирования. Тогда

$$s_n(f, x) = \frac{1}{4\pi\Gamma(r)} \int_{-1}^{+1} \varphi(t) I_n(x, t) dt, \quad (8)$$

где

$$I_n(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} (\cos v - \cos \tau)^{r-2} (|\cos v - \cos \tau| + (\cos v - \cos \tau)) D_n(v, u) dv, \quad t = \cos \tau, \quad x = \cos u.$$

Преобразуем интеграл $I_n(x, t)$. Нетрудно заметить, что

$$I_n(x, t) = \int_{-\tau}^{+\tau} (\cos v - \cos \tau)^{r-1} D_n(v, u) dv, \quad x = \cos u.$$

В интеграле выполним замену переменного по формуле $\zeta = e^{iv}$, положив при этом $z = e^{i\tau}$, $\xi = e^{iu}$, $x = \cos u$. Тогда

$$I_n(x, t) = \frac{1}{i} \int_{\Gamma} \left(\frac{(\zeta - z)(\bar{\zeta} z - 1)}{2\zeta z} \right)^{r-1} \left[\frac{\zeta \frac{\omega(\zeta)}{\omega(\xi)} - \xi \frac{\omega(\xi)}{\omega(\zeta)}}{\zeta - \xi} + \frac{\zeta \omega(\zeta) \omega(\xi) - \frac{1}{\xi \omega(\zeta) \omega(\xi)}}{\zeta - 1/\xi} \right] \frac{d\zeta}{\zeta},$$

где Γ – дуга единичной окружности от точки $\bar{z}$ до точки z , обходимая против часовой стрелки.

Далее применим метод вычисления интегралов, предложенный В. Н. Русаком [24]. Очевидно, что $I_n(x, t)$ при фиксированном значении параметра t представляет собой некоторую функцию параметра x с полюсами первого порядка в точках (см. (3)) $a_k = -(2z_k/(1+z_k^2))^{-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Поэтому достаточно исследовать интеграл $I_n(x, t, \rho)$, отличающийся от $I_n(x, t)$ тем, что $\xi = \rho e^{iu}$, $\rho \in (0, 1)$, и затем воспользоваться равенством

$$I_n(x, t) = \lim_{\rho \rightarrow 1} I_n(x, t, \rho). \quad (9)$$

Представим интеграл в $I_n(x, t, \rho)$ в виде суммы четырех интегралов

$$I_n(x, t, \rho) = \frac{1}{i} \left[\frac{1}{\omega(\xi)} I_n^{(1)} - \xi \omega(\xi) I_n^{(2)} + \omega(\xi) I_n^{(3)} - \frac{1}{\xi \omega(\xi)} I_n^{(4)} \right], \quad \xi = \rho e^{iu}, \quad x = \cos u, \quad (10)$$

где

$$I_n^{(1)} = \int_{\Gamma} \left(\frac{(\zeta - z)(\zeta z - 1)}{2\zeta z} \right)^{r-1} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - \bar{\zeta}} d\zeta, \quad I_n^{(2)} = \int_{\Gamma} \left(\frac{(\zeta - z)(\zeta z - 1)}{2\zeta z} \right)^{r-1} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - \bar{\zeta})\omega(\zeta)},$$

$$I_n^{(3)} = \left(\frac{(\zeta - z)(\zeta z - 1)}{2\zeta z} \right)^{r-1} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - 1/\bar{\zeta}} d\zeta, \quad I_n^{(4)} = \int_{\Gamma} \left(\frac{(\zeta - z)(\zeta z - 1)}{2\zeta z} \right)^{r-1} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - 1/\bar{\zeta})\omega(\zeta)}.$$

Отметим, что при нецелых значениях параметра r подынтегральные функции каждого из интегралов имеют точки ветвления $\zeta = 0$, $\zeta = z$ и $\zeta = \bar{z}$. Если же $r \in \mathbb{N}$, то подынтегральные функции являются рациональными по переменному интегрированию. Поскольку первый случай является более сложным и, по сути, включает в себя второй, то будем полагать, что $r \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$. Ясно, что окончательное интегральное представление в обоих случаях будет аналогичным. Исследуем каждый из четырех интегралов по отдельности. Так, для интеграла $I_n^{(1)}$ зафиксируем параметр z и рассмотрим область D (рис. 1), ограниченную контуром $C = \Gamma' \cup C_1^- \cup C_{\delta}^- \cup C_2$, где Γ' – часть дуги Γ , ограниченная точками ее пересечения с окружностями $|\zeta - z| = \delta_1$ и $|\zeta - \bar{z}| = \delta_2$, $C_1 = \{\zeta : \zeta = zu, u \in [\delta, 1]\}$, $C_2 = \{\zeta : \zeta = \bar{z}u, u \in [\delta, 1]\}$, $C_{\delta} = \{\zeta : \zeta = \delta e^{iv}, v \in [-\tau, \tau]\}$.

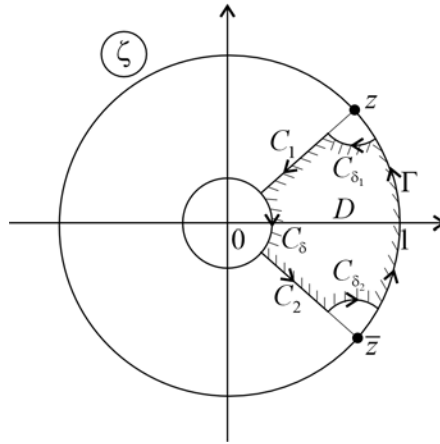


Рис. 1.

В указанной области подынтегральная функция первого интеграла

$$\psi_1(\zeta, z) = g_r(\zeta, z) \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - \bar{\zeta}}, \quad g_r(\zeta, z) = \left(\frac{(\zeta - z)(\zeta z - 1)}{2\zeta z} \right)^{r-1},$$

распадается на регулярные ветви, определяемые условием $g_r(1, z) = (2e^{i\pi k} \sin \tau / 2)^{2(r-1)}$, $k \in \mathbb{Z}$, $z = e^{i\tau}$. Выделив ту ветвь, для которой выполняется условие $g_r^*(1, z) = (2 \sin \tau / 2)^{2(r-1)}$, подынтегральная функция будет регулярна в рассматриваемой области. Применив основную теорему о вычетах, будем иметь

$$\left(\int_{\Gamma'} + \int_{C_{\delta_1}} + \int_{C_1^-} + \int_{C_{\delta}^-} + \int_{C_2} + \int_{C_{\delta_2}} \right) \psi_1(\zeta, z) d\zeta = d(\tau, u),$$

где

$$d(\tau, u) = \begin{cases} 2\pi i \omega(\xi) \left(\frac{(\xi - z)(\xi z - 1)}{2\xi z} \right)^{r-1}, & |u| \leq \tau, \\ 0, & |u| > \tau. \end{cases} \quad (11)$$

Рассмотрим интеграл по дуге C_{δ} . Выполнив замену переменного по формуле $\zeta = \delta e^{iv}$, получим

$$\int_{C_{\delta}^-} \psi_1(\zeta, z) d\zeta = \frac{i\delta^{p+2-r}}{2^{r-1}} \int_{\tau}^{-\tau} \left(\frac{(\delta e^{iv} - z)(z\delta e^{iv} - 1)}{z\delta e^{iv}} \right)^{r-1} \frac{\omega(\delta e^{iv})}{\delta e^{iv} - \bar{\zeta}} e^{iv} dv \xrightarrow{\delta \rightarrow 0}$$

$$\xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{i \sin(2-r)\tau}{\xi(2-r)} \left(\prod_{k=p+1}^n z_k \right) \frac{\delta^{p+2-r}}{2^{r-1}}.$$

Поскольку $p + 2 - r > 0$, то при $\delta \rightarrow 0$ исследуемый интеграл равномерно по δ стремится к нулю. Рассуждая аналогичным образом, заключаем, что интегралы по дугам C_{δ_1} и C_{δ_2} также стремятся к нулю при $\delta_1 \rightarrow 0$ и $\delta_2 \rightarrow 0$ соответственно. При этом получим

$$\int_0^{\bar{z}} \psi_1(\zeta, z) d\zeta + I_n^{(1)} + \int_z^0 \psi_1(\zeta, z) d\zeta = d(\tau, u),$$

где первый и третий интегралы берутся по соответствующим лучам комплексной плоскости. Выполнив в первом интеграле замену переменного по формуле $\zeta = \bar{z}y$, а в третьем $\zeta = zy$, придем к выражению

$$I_n^{(1)} = -\frac{1}{2^{r-1}} \int_0^1 (y-1)^{r-1} y^{p+1-r} \left[\frac{(z-\bar{z}y)^{r-1} \bar{z}\omega(y\bar{z})}{y\bar{z}-\xi} - \frac{(\bar{z}-yz)^{r-1} z\omega(yz)}{yz-\xi} \right] dy + d(\tau, u), \quad (12)$$

где

$$\omega(yz) = z^p \prod_{k=p+1}^n \frac{yz + z_k}{1 + z_k yz}, \quad z = e^{i\tau}.$$

Изучим интеграл $I_n^{(2)}$. Зафиксируем параметр z и рассмотрим область D (рис. 2), ограниченную контуром $C = \Gamma' \cup C_1 \cup C_R \cup C_2^-$, где Γ' – часть дуги Γ , ограниченная точками ее пересечения с окружностями $|\zeta - z| = \delta_1$ и $|\zeta - \bar{z}| = \delta_2$, $C_1 = \{\zeta : \zeta = zy, y \in [1 + \delta_1, R]\}$, $C_2 = \{\zeta : \zeta = \bar{z}y, y \in [1 + \delta_1, R]\}$, $C_R = \{\zeta : \zeta = Re^{iv}, v \in [-\tau, \tau]\}$.

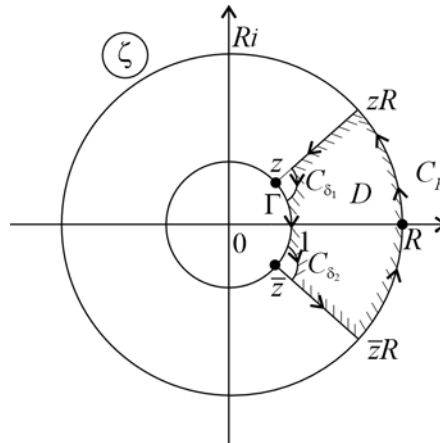


Рис. 2.

В указанной области подынтегральная функция второго интеграла

$$\psi_2(\zeta, z) = \frac{g_r(\zeta, z)}{\zeta(\zeta - \xi)\omega(\zeta)}, \quad g_r(\zeta, z) = \left(\frac{(\zeta - z)(\zeta z - 1)}{2\zeta z} \right)^{r-1}$$

распадается на регулярные ветви, определяемые условием $g_r(1, z) = (2e^{i\pi k} \sin \tau/2)^{2(r-1)}$, $k \in \mathbb{Z}$, $z = e^{i\tau}$. Выделив ту ветвь, для которой выполняется условие $g_r^*(1, z) = (2 \sin \tau/2)^{2(r-1)}$, подынтегральная функция регулярна в рассматриваемой области. Применив интегральную теорему Коши, получим

$$\left(\int_{\Gamma'} + \int_{C_{\delta_1}} + \int_{C_1} + \int_{C_R} + \int_{C_2^-} + \int_{C_{\delta_2}} \right) \psi_2(\zeta, z) d\zeta = 0. \quad (13)$$

Рассмотрим интеграл по дуге C_R . Выполнив замену переменного по формуле $\zeta = Re^{iv}$, будем иметь

$$\int_{C_R} \psi_2(\zeta, z) d\zeta = \frac{i}{2^{r-1} R^{p+2-r}} \int_{-\tau}^{\tau} \left(\frac{(e^{iv} - z/R)(e^{iv} z - 1/R)}{ze^{iv}} \right)^{r-1} \frac{dv}{(e^{iv} - \xi/R)\omega(Re^{iv})}.$$

Переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, находим, что

$$\int_{C_R} \Psi_2(\zeta, z) d\zeta \xrightarrow{R \rightarrow \infty} -\frac{2^{2-r} i \sin(2-r)\tau}{(2-r)R^{p+2-r}} \left(\prod_{k=p+1}^n z_k \right).$$

Учитывая, что $p+2-r > 0$, при $R \rightarrow \infty$ значение интеграла по дуге C_R стремится к нулю. Аналогичными рассуждениями убеждаемся, что интегралы по дугам C_{δ_1} и C_{δ_2} соответственно при $\delta_1 \rightarrow 0$ и $\delta_2 \rightarrow 0$ также обращаются в нуль. При этом из (13) получим

$$I_n^{(2)} = - \left(\int_z^\infty + \int_{\bar{z}}^\infty \right) \Psi_2(\zeta, z) d\zeta,$$

где интегрирование ведется по соответствующим лучам в комплексной плоскости. В первом из интегралов слева выполним замену переменного по формуле $\zeta = zu$, а во втором по формуле $\zeta = \bar{z}u$. Тогда

$$I_n^{(2)} = -\frac{1}{2^{r-1}} \int_1^{+\infty} (y-1)^{r-1} y^{-r-p} \left[\frac{(yz - \bar{z})^{r-1}}{(yz - \xi)\omega(yz)} - \frac{(y\bar{z} - z)^{r-1}}{(y\bar{z} - \xi)\omega(y\bar{z})} \right] dy.$$

Еще одной заменой по формуле $y \mapsto 1/y$ интеграл справа приводится к виду

$$I_n^{(2)} = -\frac{1}{2^{r-1}} \int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{p+1-r} \left[\frac{(z - y\bar{z})^{r-1} \omega(y\bar{z})}{z - y\xi} - \frac{(\bar{z} - yz)^{r-1} \omega(yz)}{\bar{z} - y\xi} \right] dy. \quad (14)$$

Рассуждая аналогичным образом в отношении оставшихся интегралов $I_n^{(3)}$ и $I_n^{(4)}$, заключаем, что

$$I_n^{(3)} = -\frac{1}{2^{r-1}} \int_0^1 (y-1)^{r-1} y^{p+1-r} \left[\frac{(z - \bar{z}y)^{r-1} \bar{z}\omega(y\bar{z})}{y\bar{z} - \xi} - \frac{(\bar{z} - yz)^{r-1} z\omega(yz)}{yz - \xi} \right] dy, \quad (15)$$

$$I_n^{(4)} = -\frac{1}{2^{r-1}} \int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{p+1-r} \left[\frac{(z - y\bar{z})^{r-1} \omega(y\bar{z})}{z - y\bar{\xi}} - \frac{(\bar{z} - yz)^{r-1} \omega(yz)}{\bar{z} - y\bar{\xi}} \right] dy - \xi d(\tau, u), \quad (16)$$

где $d(\tau, u)$ из (11).

Из представления (10) с учетом выражений (12), (14), (15) и (16) получим

$$\begin{aligned} I_n(x, t, \rho) = & \frac{-2^{2-r}}{i} \int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{p+1-r} \left[-\frac{(z - y\bar{z})^{r-1} \omega(y\bar{z})}{\xi z - y} \frac{\omega(y\bar{z})}{\omega(\xi)} - \frac{(\bar{z} - yz)^{r-1} \omega(yz)}{y - \xi\bar{z}} \frac{\omega(yz)}{\omega(\xi)} + \right. \\ & \left. + \frac{(z - y\bar{z})^{r-1} \omega(\xi)\omega(y\bar{z})}{y - \bar{\xi}z} + \frac{(\bar{z} - yz)^{r-1} \xi z \omega(\xi)\omega(yz)}{1 - z\bar{\xi}y} \right] dy + \frac{2}{i} d(\tau, u), \quad \xi = \rho e^{iu}, z = e^{it}. \end{aligned}$$

Выражение, находящееся в квадратных скобках подынтегрального выражения, при любом фиксированном $u \in (0, 1)$ непрерывно по переменному ξ , поэтому справедлив предельный переход (9). При этом из представления (8) будем иметь

$$\begin{aligned} s_n(f, x) = & \frac{-1}{2^r \pi \Gamma(r) i} \int_{-1}^{+1} \varphi(t) \int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{p+1-r} \left[-\frac{(z - y\bar{z})^{r-1} \omega(y\bar{z})}{\xi z - y} \frac{\omega(y\bar{z})}{\omega(\xi)} - \frac{(\bar{z} - yz)^{r-1} \omega(yz)}{y - \xi\bar{z}} \frac{\omega(yz)}{\omega(\xi)} + \right. \\ & \left. + \frac{(z - y\bar{z})^{r-1} \omega(\xi)\omega(y\bar{z})}{y - \bar{\xi}z} + \frac{(\bar{z} - yz)^{r-1} \xi z \omega(\xi)\omega(yz)}{1 - z\bar{\xi}y} \right] dy dt + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Отметив, что последнее слагаемое справа представляет собой интеграл Римана–Лиувилля, с учетом (4) придем к интегральному представлению приближений

$$\varepsilon_n(f, x, A) = \frac{1}{2^r \pi \Gamma(r) i} \int_{-1}^{+1} \varphi(t) \int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{p+1-r} \left[-\frac{(z - y\bar{z})^{r-1} \omega(y\bar{z})}{\xi z - y} \frac{\omega(y\bar{z})}{\omega(\xi)} - \frac{(\bar{z} - yz)^{r-1} \omega(yz)}{y - \xi\bar{z}} \frac{\omega(yz)}{\omega(\xi)} + \right.$$

$$+\frac{(z-y\bar{z})^{r-1}\omega(\xi)\omega(y\bar{z})}{y-\bar{\xi}z}+\frac{(\bar{z}-yz)^{r-1}\bar{\xi}z\omega(\xi)\omega(yz)}{1-z\xi y}\Big] dy dt, \quad \xi = e^{iu}, z = e^{it}, t = \cos \tau.$$

Во внешнем интеграле выполним замену переменного по формуле $t \mapsto \cos \tau$. Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(f, x, A) = & \frac{1}{2^r \pi \Gamma(r) i} \int_0^\pi \varphi(\cos \tau) \sin \tau \int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{p+1-r} \left[-\frac{(z-y\bar{z})^{r-1} \omega(y\bar{z})}{\bar{\xi}z-y} \frac{\omega(\xi)}{\omega(\xi)} - \right. \\ & \left. -\frac{(\bar{z}-yz)^{r-1} \omega(yz)}{y-\bar{\xi}z} \frac{\omega(\xi)}{\omega(\xi)} + \frac{(z-y\bar{z})^{r-1} \omega(\xi)\omega(y\bar{z})}{y-\bar{\xi}z} + \frac{(\bar{z}-yz)^{r-1} \bar{\xi}z\omega(\xi)\omega(yz)}{1-z\xi y} \right] dy d\tau, \end{aligned}$$

где $\xi = e^{iu}$, $x = \cos u$, $z = e^{it}$, $t = \cos \tau$. Представив внешний интеграл в виде суммы двух интегралов

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(f, x, A) = & \frac{1}{2^r \pi \Gamma(r) i} \left[\int_0^\pi \varphi(\cos \tau) \sin \tau \int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{p+1-r} \left[-\frac{(\bar{z}-yz)^{r-1} \omega(yz)}{y-\bar{\xi}z} \frac{\omega(\xi)}{\omega(\xi)} - \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(z-y\bar{z})^{r-1} \omega(\xi)\omega(y\bar{z})}{y-\bar{\xi}z} \right] dy d\tau + \right. \\ & \left. + \int_0^\pi \varphi(\cos \tau) \sin \tau \int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{p+1-r} \left[-\frac{(z-y\bar{z})^{r-1} \omega(y\bar{z})}{\bar{\xi}z-y} \frac{\omega(\xi)}{\omega(\xi)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(\bar{z}-yz)^{r-1} \bar{\xi}z\omega(\xi)\omega(yz)}{1-z\xi y} \right] dy d\tau \right], \end{aligned}$$

и затем выполнив во втором из них замену переменного по формуле $\tau \mapsto -\tau$, придем к выражению

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(f, x, A) = & \frac{-1}{2^r \pi \Gamma(r) i} \int_{-\pi}^\pi \varphi(\cos \tau) \sin \tau \int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{p+1-r} \times \\ & \times \left[\frac{(\bar{z}-yz)^{r-1} \omega(yz)}{y-\bar{\xi}z} \frac{\omega(\xi)}{\omega(\xi)} - \frac{(z-y\bar{z})^{r-1} \omega(\xi)\omega(y\bar{z})}{y-\bar{\xi}z} \right] dy d\tau, \quad \omega(\xi) = \xi^p \prod_{k=p+1}^n \frac{\xi + z_k}{1 + z_k \xi}. \end{aligned} \quad (17)$$

Заметив, что выражения в квадратных скобках являются взаимно комплексно-сопряженными, для того, чтобы прийти к (5) необходимо выполнить соответствующие преобразования. $\square$

В интегральном представлении (5) положим значение параметров $a_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. В этом случае $A = (0, 0, \dots, 0) = O$, и величина $\varepsilon_n(f, x, O) = \varepsilon_n^{(0)}(f, x)$ представляет собой приближения интеграла Римана–Лиувилля частичными суммами ряда Фурье–Чебышёва.

Следствие 1. *Имеет место интегральное представление*

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^{(0)}(f, x) = & \frac{-1}{2^{r-1} \pi \Gamma(r)} \int_{-\pi}^\pi \varphi(\cos \tau) \sin \tau \int_0^1 \frac{(1-y)^{r-1} y^{n+1-r} (1-2y \cos 2\tau + y^2)^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{1-2y \cos(\tau-u) + y^2}} \times \\ & \times \sin((n+1)(\tau-u) + \lambda_r(\tau, y, x)) dy d\tau, \quad x = \cos u, x \in [-1, 1], \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\lambda_r(\tau, y, x) = (r-1) \arg(\bar{z} - zy) - \arg\left(1 - \frac{z}{\bar{\xi}} y\right), \quad \xi = e^{iu}.$$

2. Полиномиальные аппроксимации на классах дифференцируемых функций. Пусть $W^{(r)}K[-1, 1]$, $r \geq 1$, есть класс функций $f(x)$, определенных на отрезке $[-1, 1]$ и имеющих на нем производную $f^{(r)}(x)$ порядка r , удовлетворяющую неравенству $|f^{(r)}(x)| \leq K$, K – константа. Рассмотрим верхнюю грань

$$\mathcal{E}_n(W^{(r)}K[-1, 1], x) = \sup_{f \in W^{(r)}K[-1, 1]} \|\varepsilon_n^{(0)}(f, x)\|, \quad x \in [-1, 1], \quad (19)$$

отклонений частичных сумм ряда Фурье–Чебышёва на классах $W^{(r)}K[-1, 1]$. Асимптотическое поведение величины $\mathcal{E}_n(W^{(r)}K[-1, 1], x)$ при $r = 1$ было исследовано С. М. Никольским [25],

при $r \geq 1$ Г. С. Селивановой [6]. Покажем, что указанные результаты можно получить используя интегральное представление (18).

Теорема 2. При любом $r > 1$ для величины (19) равномерно относительно всех $x \in [-1, 1]$ справедливо асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}_n(W^{(r)}K[-1, 1], x) = \frac{4K \ln n}{\pi^2 n^r} (\sqrt{1-x^2})^r + O\left(\frac{(\sqrt{1-x^2})^r}{n^r}\right) + O\left(\frac{|x|^r}{n^r}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Доказательство. Из интегрального представления (18) с учетом 2π -периодичности по переменному τ внешнего интеграла нетрудно получить, что

$$|\varepsilon_n^{(0)}(f, x)| \leq \frac{K}{2^{r-1}\pi\Gamma(r)} \int_0^{2\pi} |\sin(\tau+u)| J_n(x, \tau) d\tau, \quad x = \cos u, \quad x \in [0, 1],$$

где

$$J_n(x, \tau) = \int_0^1 \frac{(1-y)^{r-1} y^{n+1-r} (1-2y \cos 2(\tau+u) + y^2)^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{1-2y \cos \tau + y^2}} |\sin((n+1)\tau + \psi_r(\tau, y))| dy,$$

$$\psi_r(\tau, y) = (r-1) \arg(\bar{z}\xi - z\xi y) - \arg(1-zy).$$

Внешний интеграл представим суммой трех интегралов по промежуткам $[0, 1/n]$, $[1/n, 2\pi - 1/n]$ и $[2\pi - 1/n, 2\pi]$, так, что

$$|\varepsilon_n^{(0)}(f, x)| \leq \frac{K}{2^{r-1}\pi\Gamma(r)} (I_n^{(1)} + I_n^{(2)} + I_n^{(3)}), \quad (21)$$

где

$$I_n^{(1)} = \int_0^{\frac{1}{n}} |\sin(\tau+u)| J_n(x, \tau) d\tau, \quad I_n^{(2)} = \int_{\frac{1}{n}}^{2\pi - \frac{1}{n}} |\sin(\tau+u)| J_n(x, \tau) d\tau,$$

$$I_n^{(3)} = \int_{2\pi - \frac{1}{n}}^{2\pi} |\sin(\tau+u)| J_n(x, \tau) d\tau.$$

Исследуем каждый из трех интегралов по отдельности. Так, для интеграла $I_n^{(1)}$ справедлива оценка

$$|I_n^{(1)}| \leq \int_0^{\frac{1}{n}} |\sin(\tau+u)| \int_0^1 (1-y)^{r-2} y^{n+1-r} (1-2y \cos 2(\tau+u) + y^2)^{\frac{r-1}{2}} dy d\tau, \quad r > 1.$$

Для исследования асимптотического поведения при $n \rightarrow \infty$ внутреннего интеграла справа воспользуемся методом Лапласа [26; 27]. Зафиксируем величину $u, u \in [0, \pi]$, после чего последнее соотношение запишем в виде

$$|I_n^{(1)}| \leq \int_0^{\frac{1}{n}} |\sin(\tau+u)| \int_0^1 g_r(y, u) e^{(n+1-r)\ln y} dy,$$

$$g_r(y, u) = (1-y)^{r-2} (1-2y \cos 2(\tau+u) + y^2)^{\frac{r-1}{2}}.$$

Учитывая, что $\ln y = y - 1 + o(y-1)$, $y \rightarrow 1$, а также асимптотическое равенство

$$g_r(y, u) \sim (2 \sin(\tau+u))^{r-1} (1-y)^{r-2}, \quad y \rightarrow 1,$$

при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$ и $n \rightarrow \infty$ получим

$$|I_n^{(1)}| \leq 2^{r-1} (1+o(1)) \int_0^{\frac{1}{n}} |\sin(\tau+u)|^r \int_{1-\varepsilon}^1 (1-y)^{r-2} e^{(n+1-r)(y-1)} d\tau dy, \quad n \rightarrow \infty.$$

Выполнив в интеграле справа несложные преобразования, придем к оценке

$$|I_n^{(1)}| \leq \frac{2^{r-1}\Gamma(r-1)(|\sin u|^r + |\cos u|^r)}{n^r}(1+o(1)) \quad n \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Во внешнем интеграле выражения $I_n^{(3)}$ выполним замену переменного по формуле $2\pi - \tau \mapsto \tau$. Ввиду 2π -периодичности подынтегральной функции, нетрудно убедиться, что

$$|I_n^{(3)}| \leq \frac{2^{r-1}\Gamma(r-1)(|\sin u|^r + |\cos u|^r)}{n^r}(1+o(1)) \quad n \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Займемся выражением $I_n^{(2)}$. Применив метод Лапласа для исследования асимптотического поведения его внутреннего интеграла, получим

$$I_n^{(2)} = \frac{2^{r-1}\Gamma(r)}{n^r} A_n^{(r)}(1+o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (24)$$

где

$$A_n^{(r)} = \int_{\frac{1}{n}}^{2\pi - \frac{1}{n}} |\sin(\tau + u)|^r \left| \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau + \frac{r\pi}{2}\right)}{2 \sin \frac{\tau}{2}} \right| d\tau, \quad r > 1.$$

Поскольку

$$|\sin(\tau + u)|^r = |\sin u|^r |\cos \tau|^r + \theta |\cos u|^r |\sin \tau|^r, \quad \theta \in [-1, 1],$$

а также

$$|\cos \tau|^r = 1 + \theta_1 2^r \left| \sin \frac{\tau}{2} \right|^{2r}, \quad \theta_1 \in [-1, 1],$$

будем иметь

$$A_n^{(r)} = |\sin u|^r \left(I_n^{(4)} + \theta_1 2^r I_n^{(5)} \right) + \theta |\cos u|^r I_n^{(6)}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} I_n^{(4)} &= \int_{\frac{1}{n}}^{2\pi - \frac{1}{n}} \left| \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau + \frac{r\pi}{2}\right)}{2 \sin \frac{\tau}{2}} \right| d\tau, \\ I_n^{(5)} &= \int_{\frac{1}{n}}^{2\pi - \frac{1}{n}} \left| \sin \frac{\tau}{2} \right|^{2r} \left| \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau + \frac{r\pi}{2}\right)}{2 \sin \frac{\tau}{2}} \right| d\tau, \quad r > 1, \\ I_n^{(6)} &= \int_{\frac{1}{n}}^{2\pi - \frac{1}{n}} |\sin \tau|^r \left| \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau + \frac{r\pi}{2}\right)}{2 \sin \frac{\tau}{2}} \right| d\tau, \quad r > 1. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что $I_n^{(5)} = O(1)$ и $I_n^{(6)} = O(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Асимптотическое поведение интеграла $I_n^{(4)}$ по сути исследовалось В. Т. Пинкевичем [28]. Из результатов этой работы, заключаем, что

$$I_n^{(4)} = \frac{4}{\pi} \ln n + O(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

При этом из (25) придем к асимптотическому равенству

$$A_n^{(r)} = \frac{4}{\pi} |\sin u|^r \ln n + O(|\sin u|^r) + O(|\cos u|^r), \quad n \rightarrow \infty.$$

Из (24) и последнего асимптотического равенства получим

$$I_n^{(2)} = \frac{2^{r+1}\Gamma(r)}{\pi} \frac{|\sin u|^r \ln n}{n^r} + O\left(\frac{|\sin u|^r}{n^r}\right) + O\left(\frac{|\cos u|^r}{n^r}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Из соотношения (21) с учетом оценок (22), (23) и (26) получим

$$|\varepsilon_n^{(0)}(f, x)| \leq \frac{4K \ln n}{\pi^2 n^r} \left(\sqrt{1-x^2} \right)^r + O \left(\frac{\left(\sqrt{1-x^2} \right)^r}{n^r} \right) + O \left(\frac{|x|}{n} \right)^r, \quad n \rightarrow \infty. \quad (27)$$

С другой стороны, можно показать (см., напр., [6; 7]), что существует функция $f_n(x)$, для которой неравенство (27) с точностью до слагаемого порядка $O(1/n^r)$ обращается в асимптотическое равенство при $n \rightarrow \infty$. При этом приходим к (20). $\square$

3. Приближения интеграла Римана–Лиувилля с плотностью, имеющей степенную особенность. Изучим приближения (4), когда плотность $\varphi_\gamma(x) = (1-x)^\gamma$, $\gamma > 0$, т. е. в настоящем разделе изучаются аппроксимации функций вида

$$f_\gamma(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-1}^x (x-t)^{r-1} (1-t)^\gamma dt, \quad x \in [-1, 1], \quad r \geq 1, \quad \gamma > 0. \quad (28)$$

Пусть параметры рационального интегрального оператора Фурье–Чебышёва (2) выбраны следующим образом:

$$z_k \mapsto -\alpha_k, \quad \alpha_k \in [0, 1), \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0, \quad p = [\gamma + r].$$

Теорема 3. Для приближений интеграла Римана–Лиувилля с плотностью $\varphi_\gamma(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ рациональным интегральным оператором Фурье–Чебышёва справедливы:

1) интегральное представление

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(f_\gamma, x, A) &= \frac{2^{1-\gamma-r} \sin \pi \gamma}{\pi \Gamma(r)} \int_0^1 \int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{p+1-r} \times \\ &\times \frac{(1-t)^{2\gamma} (1-t^2) (1-t^2 y)^{r-1} t^{p-\gamma-r}}{\sqrt{1-2ty \cos u + t^2 y^2}} \cos \Omega_n(x, t, y) \omega(ty) dt dy, \quad x = \cos u, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\Omega_n(x, t, y) = \arg \frac{\xi \omega(\xi)}{1 - \xi ty}, \quad \omega(ty) = \prod_{k=1}^n \frac{ty - \alpha_k}{1 - \alpha_k ty}, \quad \xi = e^{iu};$$

2) поточечная оценка

$$\begin{aligned} |\varepsilon_n(f_\gamma, x, A)| &\leq \frac{2^{1-\gamma-r} |\sin \pi \gamma|}{\pi \Gamma(r)} \int_0^1 \int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{p+1-r} \times \\ &\times \frac{(1-t)^{2\gamma} (1-t^2) (1-t^2 y)^{r-1} t^{p-\gamma-r}}{\sqrt{1-2ty \cos u + t^2 y^2}} |\omega(ty)| dt dy; \end{aligned} \quad (30)$$

3) равномерная оценка

$$\varepsilon_n(f_\gamma, A) \leq \varepsilon_n^*(f_\gamma, A), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^*(f_\gamma, A) &= \frac{2^{1-\gamma-r} |\sin \pi \gamma|}{\pi \Gamma(r)} \int_0^1 \int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{p+1-r} \times \\ &\times \frac{(1-t)^{2\gamma} (1-t^2) (1-t^2 y)^{r-1} t^{p-\gamma-r}}{1-ty} |\omega(ty)| dt dy, \quad r \geq 1, \quad \gamma > 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Неравенство (31) является точным в том смысле, что если функция $\omega(\cdot)$ имеет полюсы только четной кратности, то неравенство (31) превращаются в равенство при $x = 1$.

Доказательство. В представлении приближений (17) подставим плотность $\varphi_\gamma(x)$ и, воспользовавшись теоремой Фубини, поменяем порядок интегрирования:

$$\varepsilon_n(f_\gamma, x, A) = \frac{-1}{2^r \pi \Gamma(r) i} \int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{1-r} J_n(y, x) dy, \quad (33)$$

где

$$J_n(y, x) = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos \tau)^\gamma \sin \tau \left[\frac{(\bar{z} - yz)^{r-1} z \omega(yz)}{z - \xi/y} \frac{\omega(yz)}{y\omega(\xi)} + \frac{(z - y\bar{z})^{r-1} \xi \omega(\xi) \omega(y\bar{z})}{z - \xi y} \right] d\tau,$$

$$\omega(\xi) = \xi^p \prod_{k=p+1}^n \frac{\xi - \alpha_k}{1 - \alpha_k \xi}, \quad z = e^{i\tau}, \quad \xi = e^{iu}, \quad x = \cos u.$$

Преобразуем интеграл $J_n(y, x)$. С этой целью перейдем к интегрированию по переменной z , $z = e^{i\tau}$:

$$J_n(y, x) = -\frac{(-1)^\gamma}{2^{\gamma+1}} \oint_{\Gamma} \frac{(1-z)^{2\gamma}(z^2-1)}{z^{\gamma+2}} \left[\frac{(\bar{z} - yz)^{r-1} z \omega(yz)}{z - \xi/y} \frac{\omega(yz)}{y\omega(\xi)} + \frac{(z - y\bar{z})^{r-1} \xi \omega(\xi) \omega(y\bar{z})}{z - \xi y} \right] dz,$$

где $\Gamma = \{z : z = e^{i\tau}, -\pi \leq \tau \leq \pi\}$. Отметим, что при нецелых значениях параметра γ и нецелых значениях параметра r подынтегральная функция имеет точки ветвления при $z = 0$, $z = 1$, $z = y$ и $z = 1/y$. Поскольку при $\gamma, r \in \mathbb{N}$ рассуждения являются, на наш взгляд, более простыми и, очевидно, интегральное представление не будет отличаться от общего случая, то будем полагать, что $\gamma \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ и $r \in (1, +\infty) \setminus \mathbb{N}$. Интеграл справа представим в виде суммы двух интегралов так, что

$$J_n(y, x) = \frac{(-1)^\gamma}{2^{\gamma+1}} \left[\frac{1}{y\omega(\xi)} J_n^{(1)} + \xi \omega(\xi) J_n^{(2)} \right], \quad \xi = e^{iu}, \quad x = \cos u, \quad (34)$$

где

$$J_n^{(1)} = \oint_{\Gamma} \frac{(1-z)^{2\gamma}(z^2-1)(1-yz^2)^{r-1} z^{p-\gamma-r}}{z - \xi/y} \prod_{k=p+1}^n \frac{yz - \alpha_k}{1 - \alpha_k yz} dz,$$

$$J_n^{(2)} = \oint_{\Gamma} \frac{(1-z)^{2\gamma}(z^2-1)(z^2-y)^{r-1}}{z^{\gamma+r+1+p}(z - \xi y)} \prod_{k=p+1}^n \frac{y - \alpha_k z}{z - \alpha_k y} dz.$$

Исследуем каждый из двух интегралов по отдельности. Так, подынтегральная функция интеграла $J_n^{(1)}$

$$\varphi_1(z, \xi) = g_\gamma(\xi) \frac{(z^2-1)(1-yz^2)^{r-1} z^p}{z - \xi/y} \omega(yz), \quad g_\gamma(z) = \frac{(1-z)^{2\gamma}}{z^{\gamma+r}},$$

в области D , ограниченной контуром

$$C = C_1 \cup \Gamma \cup C_2^- \cup C_\delta^-,$$

где $C_\delta = \{z : z = \delta e^{i\tau}, 0 \leq \tau \leq 2\pi\}$; C_1 и C_2 – соответственно верхний и нижний берега разреза по действительной оси от точки $z = \delta$ до точки $z = 1$ распадается на регулярные ветви, определяемые условием $g_\gamma(e^{i\pi/3}) = e^{i2\pi k\gamma}$, $k \in \mathbb{Z}$. Выбрав ту ветвь, для которой выполняется условие $g_\gamma^*(e^{i\pi/3}) = 1$, а также учитывая, что $|\xi/y| > 1$ и $1/y > 1$, применим интегральную теорему Коши

$$\int_{C_1} \varphi_1(t, \xi) dt + J_n^{(1)} + \int_{C_2^-} \varphi_1(e^{2i\pi} t, \xi) dt + \int_{C_\delta^-} \varphi_1(z, \xi) dz = 0.$$

Рассмотрим интеграл по контуру C_δ^- . Выполнив замену переменного интегрирования по формуле $z = \delta e^{i\tau}$, получим

$$\int_{C_\delta^-} \varphi_1(z) dz = i\delta^{p+1-\gamma-r} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \delta e^{i\tau})^{2\gamma} (\delta e^{2i\tau} - 1)(1 - y\delta^2 e^{2i\tau})^{r-1}}{e^{i\tau(r+\gamma)} (\delta e^{i\tau} - \xi/y)} \omega(y\delta e^{i\tau}) e^{i\tau} d\tau$$

ввиду выбора параметра p , интеграл по контуру C_δ^- при стягивании его в точку стремится к нулю. При этом приходим к равенству

$$J_n^{(1)} = (1 - e^{-2\pi i\gamma}) \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma}(1-t^2)(1-t^2 y)^{r-1} t^{p-\gamma-r}}{t - \xi/y} \omega(ty) dt, \quad y \in (0, 1), \quad \xi = e^{iu}. \quad (35)$$

Займемся преобразованием интеграла $J_n^{(2)}$. Рассмотрим область, ограниченную контуром Γ , контуром $C_R = \{z : z = R e^{i\tau}, -\pi \leq \tau \leq \pi\}$ достаточно большого радиуса R и верхним и нижним берегами

разреза по действительной оси от точки $z = 1$ до $z = R$. Внутри заданной области подынтегральная функция

$$\varphi_2(z, \xi) = g_\gamma(z) \frac{(z^2 - 1)(z^2 - y)^{r-1}}{(z - \xi y)z^{p+1}} \omega(y\bar{z}), \quad g_\gamma(z) = \frac{(1 - z)^{2\gamma}}{z^{\gamma+r}},$$

допускает выделение регулярных ветвей. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, выделим ее регулярную ветвь

$$\varphi_2(z, \xi) = g_\gamma^*(z) \frac{(z^2 - 1)(z^2 - y)^{r-1}}{(z - \xi y)z^{p+1}} \omega(y\bar{z}).$$

Применив интегральную теорему Коши к области, ограниченной указанным контуром, и учитывая, что при движении по верхнему берегу разреза аргумент подынтегральной функции не меняется, а при движении по нижнему берегу разреза получает приращение $-2\pi i$, получим

$$J_n^{(2)} = \int_1^R \varphi_2(t, \xi) dt + \int_{C_R} \varphi_2(z, \xi) dz + \int_R^1 \varphi_2(e^{-2\pi i} t, \xi) dt. \quad (36)$$

Исследуем интеграл по окружности C_R . Положим $z = R e^{i\tau}$. Тогда

$$\int_{C_R} \varphi_2(z, \xi) dz = \frac{i}{R^{p+1-\gamma-r}} \int_0^{2\pi} \frac{(\frac{1}{R} - e^{i\tau})^{2\gamma} (e^{2i\tau} - \frac{1}{R^2}) (e^{2i\tau} - \frac{y}{R^2})^{r-1} e^{-i(r+\gamma-p)\tau}}{e^{i\tau} - \frac{\xi y}{R}} \prod_{k=p+1}^n \frac{\frac{y}{R} - e^{i\tau} \alpha_k}{e^{i\tau} - \frac{y \alpha_k}{R}} d\tau.$$

Переходя в интеграле справа к пределу при $R \rightarrow \infty$, приходим к асимптотическому равенству

$$\int_{C_R} \varphi_2(z, \xi) dz \sim \frac{2i(-1)^n \sin \pi(\gamma + r)}{(p+1-\gamma-r)R^{p+1-\gamma-r}} \prod_{k=p+1}^n \alpha_k, \quad R \rightarrow \infty.$$

Поскольку $p+1-\gamma-r > 0$, то заключаем, что при $R \rightarrow \infty$ интеграл по окружности C_R стремится к нулю. При этом из (36) получим

$$J_n^{(2)} = (1 - e^{2\pi i \gamma}) \int_1^{+\infty} \frac{(1-t)^{2\gamma} (t^2 - 1)(t^2 - y)^{r-1}}{(t - \xi y)t^{p+1+\gamma+r}} \prod_{k=p+1}^n \frac{y - t \alpha_k}{t - y \alpha_k} dt.$$

Выполнив в интеграле замену переменного по формуле $t \mapsto 1/t$ окончательно будем иметь

$$J_n^{(2)} = (1 - e^{2\pi i \gamma}) \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} (1-t^2)(1-t^2 y)^{r-1} t^{p-\gamma-r}}{1 - \xi y t} \omega(ty) dt. \quad (37)$$

Из соотношения (34) с учетом интегральных представлений (35) и (37) получим

$$J_n(y, x) = -\frac{i \sin \pi \gamma}{2^\gamma} \int_0^1 (1-t)^{2\gamma} (1-t^2)(1-t^2 y)^{r-1} t^{p-\gamma-r} \left[\frac{\xi \omega(\xi)}{1 - \xi t y} + \frac{\overline{\xi \omega(\xi)}}{1 - \overline{\xi} t y} \right] \omega(ty) dt.$$

Выражения в квадратных скобках являются взаимно комплексно-сопряженными. Следовательно, их сумма представляет собой удвоенный косинус некоторого угла, умноженного на модуль этих выражений. Выполнив необходимые действия, из последнего интегрального представления находим, что

$$J_n(y, x) = -i 2^{1-\gamma} \sin \pi \gamma \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} (1-t^2)(1-t^2 y)^{r-1} t^{p-\gamma-r}}{\sqrt{1 - 2ty \cos u + t^2 y^2}} \cos \Omega_n(x, t, y) \omega(ty) dt,$$

где $x = \cos u$, величина $\Omega_n(x, t, y)$ определена в настоящей теореме.

Из представления (33) и последнего интегрального представления получим (29).

Из (29) легко следует оценка (30). Из оценки (30) тривиально следует соотношение (31). Покажем, что равномерная оценка (31) достигается на значении $x = 1$. Действительно, из интегрального представления (29) при $x = 1$, что соответствует значению параметра $u = 0$, получим $\Omega_n(1, t, y) = 0$, и

$$\varepsilon_n(f_\gamma, 1, A) = \frac{2^{1-\gamma-r} \sin \pi \gamma}{\pi \Gamma(r)} \int_0^1 \int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{p+1-r} \frac{(1-t)^{2\gamma} (1-t^2)(1-t^2 y)^{r-1} t^{p-\gamma-r}}{1 - ty} \omega(ty) dt dy.$$

Очевидно, что при четной кратности полюсов величина $\omega(ty) \geq 0$ и правая часть последнего интегрального представления совпадает с правой частью оценки (31).

Представление (29) было получено в предположении, что параметры r и γ не могут принимать натуральные значения. Однако из хода доказательства ясно, что оно справедливо и в случае $r, \gamma \in \mathbb{N}$ при $p = [\gamma + r]$. $\square$

Следствие 2. Для приближений интеграла типа Римана–Лиувилля с плотностью $\varphi_\gamma(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ частичными суммами ряда Фурье–Чебышёва порядка n , $n+1 > r + \gamma$, справедливы:

1) интегральное представление

$$\varepsilon_n^{(0)}(f_\gamma, x) = \frac{2^{1-\gamma-r} \sin \pi \gamma}{\pi \Gamma(r)} \int_0^1 \int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{n+1-r} \times \\ \times \frac{(1-t)^{2\gamma}(1-t^2)(1-t^2y)^{r-1} t^{n-\gamma-r}}{\sqrt{1-2ty \cos u + t^2 y^2}} \cos \Omega_n^{(0)}(x, t, y) dt dy, \quad x = \cos u,$$

где $\Omega_n(x, t, y) = (n+1)u - \arg(1 - \xi ty)$, $\xi = e^{iu}$;

2) поточечная оценка

$$|\varepsilon_n^{(0)}(f_\gamma, x)| \leq \frac{2^{1-\gamma-r} |\sin \pi \gamma|}{\pi \Gamma(r)} \int_0^1 \int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{n+1-r} \frac{(1-t)^{2\gamma}(1-t^2)(1-t^2y)^{r-1} t^{n-\gamma-r}}{\sqrt{1-2ty \cos u + t^2 y^2}} dt dy;$$

3) интегральное представление равномерных приближений

$$\varepsilon_n^{(0)}(f_\gamma) = \frac{2^{1-\gamma-r} |\sin \pi \gamma|}{\pi \Gamma(r)} \int_0^1 \int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{n+1-r} \frac{(1-t)^{2\gamma}(1-t^2)(1-t^2y)^{r-1} t^{n-\gamma-r}}{1-ty} dt dy,$$

где $r \geq 1, \gamma > 0$.

4. Случай одного полюса аппроксимирующей функции. Изучим асимптотическое поведение мажоранты равномерных приближений (32) при $n \rightarrow \infty$ в зависимости от выбора набора параметров аппроксимирующей функции α_k , $k = 1, 2, \dots, n$. С этой целью представим мажоранту в виде

$$\varepsilon_n^*(f_\gamma, A) = \frac{2^{1-\gamma-r} |\sin \pi \gamma|}{\pi \Gamma(r)} \int_0^1 (1-t)^{2\gamma}(1-t^2) t^{p-\gamma-r} G_n(t) dt, \quad r \geq 1, \gamma > 0, \quad (38)$$

где

$$G_n(t) = \int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{p+1-r} \frac{(1-t^2y)^{r-1}}{1-ty} |\omega(ty)| dy, \quad \omega(ty) = \prod_{k=p+1}^n \frac{ty - \alpha_k}{1 - \alpha_k ty}.$$

Выполнив в интеграле $G_n(t)$ замену переменного по формуле $ty \mapsto y$, будем иметь

$$G_n(t) = \frac{1}{t^{p+1}} \int_0^t \frac{(t-y)^{r-1} y^{p+1-r} (1-ty)^{r-1}}{1-y} |\omega(y)| dy, \quad t \in (0, 1).$$

В полученном интеграле снова выполним замену переменного по формуле $y = (1-u)/(1+u)$, $dy = -2du/(1+u)^2$. Тогда

$$G_n(t) = \frac{(1+t)^{2r-2}}{t^{p+1}} \int_\tau^1 \frac{(u^2 - \tau^2)^{r-1}}{(1-u^2)^{r-1} u(1+u)} \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^p |\chi(u)| du, \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$\tau = \frac{1-t}{1+t}, \quad \chi(u) = \prod_{k=1}^n \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}, \quad \beta_k = \frac{1 - \alpha_k}{1 + \alpha_k}.$$

Из представления (38) при этом получим

$$\varepsilon_n^*(f_\gamma, A) = \frac{2^{1-\gamma-r} |\sin \pi \gamma|}{\pi \Gamma(r)} \int_0^1 (1-t)^{2\gamma}(1-t^2) t^{-(1+\gamma+r)} (1+t)^{2r-2} \times$$

$$\times \int_{\tau}^1 \frac{(u^2 - \tau^2)^{r-1}}{(1 - u^2)^{r-1} u(1 + u)} \left(\frac{1 - u}{1 + u} \right)^p |\chi(u)| du d\tau.$$

Во внешнем интеграле перейдем к интегрированию по переменному τ . Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^*(f_\gamma, A) &= \frac{2^{2+\gamma+r} |\sin \pi \gamma|}{\pi \Gamma(r)} \int_0^1 \frac{\tau^{2\gamma+1}}{(1 - \tau^2)^{1+r+\gamma} (1 + \tau)^2} \times \\ &\times \int_{\tau}^1 \frac{(u^2 - \tau^2)^{r-1}}{(1 - u^2)^{r-1} u(1 + u)} \left(\frac{1 - u}{1 + u} \right)^p |\chi(u)| du d\tau, \quad r \geq 1, \gamma > 0, p = [r + \gamma]. \end{aligned} \quad (39)$$

Рассмотрим случай одного полюса. Пусть $n + p$ параметров аппроксимирующей рациональной функции (2) удовлетворяют условию

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0, \quad \alpha_{p+1} = \alpha_{p+2} = \dots = \alpha_{p+n} = \alpha \in [0, 1), \quad \beta = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}. \quad (40)$$

Отметим, что в рассматриваемом нами случае для каждого значения $n \in \mathbb{N}$ может выбираться соответствующий параметр β , т. е., вообще говоря, $\beta = \beta(n)$. При этом будем полагать, что выполняется следующее условие:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\beta = \infty.$$

Изучим асимптотическое поведение величины (39) при $n \rightarrow \infty$ в этом случае.

Теорема 4. Для мажоранты равномерных приближений функции (28) рациональным интегральным оператором Фурье–Чебышёва с параметрами, удовлетворяющими условиям (40), справедливо асимптотическое равенство

$$\varepsilon_{n+p,1}^*(f_\gamma, \alpha) = \frac{2^{1-r-\gamma} |\sin \pi \gamma| \Gamma(2\gamma + r) \beta^{2\gamma+2r}}{\pi n^{2\gamma+2r}} + O\left(\left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta}\right)^n\right), \quad p = [r + \gamma], n \rightarrow \infty. \quad (41)$$

Доказательство. Мажоранту равномерных приближений (39) представим в виде

$$\varepsilon_{n+p,1}^*(f_\gamma, \alpha) = \frac{2^{2+\gamma+r} |\sin \pi \gamma|}{\pi \Gamma(r)} \left[J_n^{(1)} + J_n^{(2)} \right], \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} J_n^{(1)} &= \int_0^\beta v_{r,\gamma}(\tau) \int_\tau^1 \mu_r(u, \tau) \left| \frac{\beta - u}{\beta + u} \right|^n du d\tau, \quad J_n^{(2)} = \int_\beta^1 v_{r,\gamma}(\tau) \int_\tau^1 \mu_r(u, \tau) \left(\frac{u - \beta}{\beta + u} \right)^n du d\tau, \\ v_{r,\gamma}(\tau) &= \frac{\tau^{2\gamma+1}}{(1 - \tau^2)^{1+r+\gamma} (1 + \tau)^2}, \quad \mu_r(u, \tau) = \frac{(u^2 - \tau^2)^{r-1}}{(1 - u^2)^{r-1} u(1 + u)} \left(\frac{1 - u}{1 + u} \right)^p. \end{aligned}$$

Исследуем каждый из двух интегралов по отдельности. Так, интеграл $J_n^{(1)}$ представим в виде

$$J_n^{(1)} = \int_0^\beta v_{r,\gamma}(\tau) K_n^{(1)}(\tau) d\tau, \quad (43)$$

где

$$K_n^{(1)}(\tau) = I_1 + I_2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (44)$$

$$I_1 = \int_\tau^\beta \mu_r(u, \tau) \left(\frac{\beta - u}{\beta + u} \right)^n du, \quad I_2 = \int_\beta^1 \mu_r(u, \tau) \left(\frac{u - \beta}{\beta + u} \right)^n du.$$

Для изучения асимптотического поведения интегралов I_1 и I_2 применим метод Лапласа [26; 27]. Интеграл I_1 представим в виде

$$I_1 = \int_\tau^\beta \mu_r(u, \tau) e^{nS(u)} du, \quad S(u) = \ln \frac{\beta - u}{\beta + u}.$$

Функция $S(u)$ убывает при $u \in (\tau, \beta)$, $\tau \in (0, \beta)$, и, значит, достигает своего максимального значения при $u = \tau$. Реализуя метод Лапласа, разложим функцию $S(u)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $u = \tau$:

$$S(u) = \ln \frac{\beta - \tau}{\beta + \tau} - \frac{2\beta}{\beta^2 - \tau^2}(u - \tau) + o(u - \tau).$$

Учитывая также, что

$$\mu_r(u, \tau) \sim \frac{(2\tau)^{r-1}}{(1 - \tau^2)^{r-1}\tau(1 + \tau)} \left(\frac{1 - \tau}{1 + \tau} \right)^p (u - \tau)^{r-1}, \quad u \rightarrow \tau,$$

при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$ и $n \rightarrow \infty$ получим

$$I_1 \sim \frac{(2\tau)^{r-1}}{(1 - \tau^2)^{r-1}\tau(1 + \tau)} \left(\frac{1 - \tau}{1 + \tau} \right)^p \left(\frac{\beta - \tau}{\beta + \tau} \right)^n \int_{\tau}^{\tau + \varepsilon} (u - \tau)^{r-1} e^{-\frac{2\beta n}{\beta^2 - \tau^2}(u - \tau)} du.$$

Применив соответствующие преобразования к интегралу справа, приходим к асимптотическому равенству

$$I_1 \sim \frac{\tau^{r-2}\Gamma(r)}{2(1 - \tau^2)^{r-1}(1 + \tau)} \left(\frac{1 - \tau}{1 + \tau} \right)^p \left(\frac{\beta - \tau}{\beta + \tau} \right)^n \left(\frac{\beta^2 - \tau^2}{2\beta n} \right)^r, \quad n \rightarrow \infty.$$

Исследуем интеграл I_2 . Представим его в виде

$$I_2 = \int_{\beta}^1 \mu_r(u, \tau) e^{nS(u)} du, \quad S(u) = \ln \frac{u - \beta}{u + \beta}.$$

Функция $S(u)$ возрастает при $u \in (\beta, 1)$ и, значит, достигает своего максимального значения при $u = 1$. Используя разложение в ряд Тейлора

$$S(u) = \ln \frac{1 - \beta}{1 + \beta} + \frac{2\beta}{1 - \beta^2}(u - 1) + o(u - 1)$$

и асимптотическое равенство

$$\mu_r(u, \tau) \sim \frac{(1 - \tau^2)^{r-1}}{2^{r+p}} (1 - u)^{p-r+1},$$

справедливые при $u \rightarrow 1$, для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и $n \rightarrow \infty$ получим

$$I_2 \sim \frac{(1 - \tau^2)^{r-1}}{2^{r+p}} \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^n \int_{1-\varepsilon}^1 (1 - u)^{p-r+1} e^{\frac{2\beta n}{1 - \beta^2}(u - 1)} du.$$

Отсюда после соответствующих преобразований интеграла справа придем к асимптотическому равенству

$$I_2 \sim \frac{(1 - \tau^2)^{r-1}}{2^{r+p}} \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^n \left(\frac{1 - \beta^2}{2\beta n} \right)^{2+p-r} \Gamma(2 + p - r), \quad n \rightarrow \infty.$$

Из представления (44) с учетом асимптотических выражений для интегралов I_1 и I_2 находим

$$\begin{aligned} K_n^{(1)}(\tau) &\sim \frac{\tau^{r-2}\Gamma(r)}{2(1 - \tau^2)^{r-1}(1 + \tau)} \left(\frac{1 - \tau}{1 + \tau} \right)^p \left(\frac{\beta - \tau}{\beta + \tau} \right)^n \left(\frac{\beta^2 - \tau^2}{2\beta n} \right)^r + \\ &+ \frac{(1 - \tau^2)^{r-1}}{2^{r+p}} \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^n \left(\frac{1 - \beta^2}{2\beta n} \right)^{2+p-r} \Gamma(2 + p - r), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Из последнего асимптотического равенства и интеграла (43) получим

$$\begin{aligned} J_n^{(1)} &\sim \frac{\Gamma(r)}{2(2\beta n)^r} \int_0^{\beta} \frac{\tau^{2\gamma+r-1}(\beta^2 - \tau^2)^r}{(1 - \tau^2)^{2r+\gamma}(1 + \tau)^3} \left(\frac{1 - \tau}{1 + \tau} \right)^p \left(\frac{\beta - \tau}{\beta + \tau} \right)^n d\tau + \\ &+ \frac{\Gamma(2 + p - r)}{2^{r+p}} \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^n \left(\frac{1 - \beta^2}{2\beta n} \right)^{2+p-r} \int_0^{\beta} \frac{\tau^{2\gamma+1} d\tau}{(1 - \tau^2)^{2+\gamma}(1 + \tau)^2}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Применив к первому интегралу справа еще один раз метод Лапласа, получим

$$J_n^{(1)} \sim \frac{\Gamma(r)\Gamma(2\gamma+r)\beta^{2\gamma+2r}}{2^{2\gamma+2r+1}n^{2\gamma+2r}} + \frac{\Gamma(2+p-r)}{2^{r+p}} \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n \left(\frac{1-\beta^2}{2\beta n}\right)^{2+p-r} \int_0^\beta \frac{\tau^{2\gamma+1} d\tau}{(1-\tau^2)^{2+\gamma}(1+\tau)^2}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (45)$$

Займемся выражением $J_n^{(2)}$ (см. (42)). Оценим его внутренний интеграл

$$I_3 = \int_\tau^1 \frac{(u^2 - \tau^2)^{r-1}}{(1-u^2)^{r-1}u(1+u)} \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p \left(\frac{u-\beta}{u+\beta}\right)^n du.$$

Нетрудно получить, что

$$I_3 \leq \frac{(1-\tau^2)^{r-1}}{\tau(1+\tau)^{r+p}} \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n \int_\tau^1 (1-u)^{p-r+1} du = \frac{(1-\tau^2)^{r-1}}{\tau(1+\tau)^{r+p}} \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n \frac{(1-\tau)^{2+p-r}}{2+p-r}.$$

Возвращаясь к представлению интеграла $J_n^{(2)}$, получим

$$J_n^{(2)} \leq \frac{1}{2+p-r} \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n \int_\beta^1 \frac{\tau^{2\gamma}(1-\tau)^{p-r-\gamma}}{(1+\tau)^{r+p+\gamma+4}} d\tau, \quad p = [r+\gamma].$$

Интеграл в правой части оценки существует при указанных значениях параметров и представляет собой некоторую функцию переменных r и γ , поэтому

$$J_n^{(2)} \leq d(r, \gamma) \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n, \quad n \rightarrow \infty, \quad (46)$$

где $d(r, \gamma)$ – некоторая величина, не зависящая от n , но зависящая от параметров, указанных в скобках.

Обратив внимание, что второе слагаемое в асимптотическом равенстве (45) имеет заведомо больший порядок малости в сравнении с правой частью в оценке (46), из представления (42) придем к соотношению (41). Доказательство теоремы 4 завершено. $\square$

Следствие 3. Для равномерных приближений интеграла Римана–Лиувилля с плотностью $\varphi_\gamma(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ частичными суммами ряда Фурье–Чебышёва порядка n , $n+1 > r+\gamma$, справедлива асимптотическая оценка

$$\epsilon_n^{(0)}(f_\gamma) \sim \frac{2^{1-r-\gamma} |\sin \pi \gamma| \Gamma(2\gamma+r)}{\pi n^{2\gamma+2r}}, \quad r \geq 1, \gamma > 0, n \rightarrow \infty.$$

Отметим, что в последнем следствии содержится именно асимптотическая оценка равномерных приближений, а не мажоранты.

5. Наилучшая мажоранта равномерных приближений. Представляет интерес минимизировать правую часть асимптотического равенства (41) посредством выбора оптимального для этой задачи параметра β . Другими словами, будем искать наилучшую мажоранту равномерных приближений функции $f_\gamma(x)$ рациональным интегральным оператором (2) с одним полюсом в открытой комплексной плоскости. Положим

$$\epsilon_{n+p,1}^*(f_\gamma) = \inf_\alpha \epsilon_{n+p,1}^*(f_\gamma, \alpha),$$

где $\epsilon_{n+p,1}^*(f_\gamma, \alpha)$ асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений, определенное в (41).

Теорема 5. В условиях теоремы 4 существует такое значение параметра α , что справедливо асимптотическое равенство

$$\epsilon_{n+p,1}^*(f_\gamma) = \frac{2^{1+r+\gamma} |\sin \pi \gamma| \Gamma(2\gamma+r)(\gamma+r)^{2\gamma+2r}}{\pi} \frac{(\ln n)^{2\gamma+2r}}{n^{4\gamma+4r}} (1+o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (47)$$

Доказательство. Обратимся к асимптотическому равенству (41). Очевидно, что при постоянных значениях параметра β порядок стремления к нулю правой части исследуемого асимптотиче-

ского равенства не отличается от полиномиального, указанного в следствии 3. Пусть $\beta = \beta(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Изучим поведение правой части равенства (41) в этом случае. Положим, что параметр β имеет вид

$$\beta = c \frac{\ln n}{n},$$

где c – некоторая величина, не зависящая от n . Ее значение будет определено позже. Тогда из асимптотического равенства (41) находим, что

$$\varepsilon_{n+p,1}^*(f_\gamma, \alpha) = \frac{2^{1-r-\gamma} |\sin \pi \gamma| \Gamma(2\gamma+r) c^{2\gamma+2r} (\ln n)^{2\gamma+2r}}{\pi n^{4\gamma+4r}} + O\left(\frac{1}{n^{2c}}\right), \quad p = [r+\gamma], \quad n \rightarrow \infty. \quad (48)$$

Оптимальное значение c^* определим из условия равенства степеней при n ,

$$4\gamma+4r = 2c, \quad c^* = 2\gamma+2r.$$

При этом из (48) следует, что

$$\varepsilon_{n+p,1}^*(f_\gamma, \alpha^*) = \frac{2^{1+r+\gamma} |\sin \pi \gamma| \Gamma(2\gamma+r) (\gamma+a)^{2\gamma+2r}}{\pi} \frac{(\ln n)^{2\gamma+2r}}{n^{4\gamma+4r}} (1+o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Для того, чтобы доказать, что выбранное значение параметра $\alpha = \alpha^*$, $\alpha^* = (1-\beta^*)/(1+\beta^*)$ является оптимальным в том смысле, что доставляет правой части выражения (41) асимптотически минимальное значение достаточно воспользоваться известными методами, описанными, например, в [22]. Следовательно,

$$\varepsilon_{n+p,1}^*(f_\gamma) = \varepsilon_{n+p,1}^*(f_\gamma, \alpha^*), \quad n \rightarrow \infty,$$

и приходим к (47). □

Заключение. В работе изучены аппроксимации функций, представимых интегралом Римана–Лиувилля на отрезке $[-1, 1]$ рациональными интегральными операторами типа Фурье–Чебышёва. Найдено интегральное представление приближений, зависящее от полюсов аппроксимирующей функции. В случае, когда плотность интеграла Римана–Лиувилля имеет на отрезке $[-1, 1]$ степенную особенность, получены оценки поточечных и равномерных приближений, точные в случае четного количества полюсов аппроксимирующей функции. В случае одного полюса в открытой комплексной плоскости у аппроксимирующей функции установлено асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений и оптимальное значение параметров, при которых это асимптотическое выражение имеет наибольшую скорость убывания.

В качестве следствия приведены асимптотические оценки равномерных приближений интеграла Римана–Лиувилля с плотностью, имеющей степенную особенность, частичными суммами полиномиального ряда Фурье–Чебышёва.

Из проведенных исследований можно предположить, что скорости наилучших равномерных рациональных приближений функций, представимых интегралом Римана–Лиувилля с плотностью, имеющей степенную особенность, оказываются в значительной степени выше соответствующих полиномиальных аналогов, поскольку этот результат справедлив уже в случае одного полюса в открытой комплексной плоскости у аппроксимирующей функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований «Конвергенция 2020», № 20162269.

Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
2. Никольский С. М. О наилучшем приближении функции, s -ая производная которой имеет разрывы первого рода // Докл. АН СССР. 1947. Т. 55, № 2. С. 99–102.
3. Тюленева А. А. Приближение интегралов Римана–Лиувилля алгебраическими полиномами на отрезке // Изв. Саратовского ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, № 3. С. 305–311.
4. Ганзбург И. М. О приближении функций с заданным модулем непрерывности суммами П. Л. Чебышёва // Докл. АН СССР. 1953. Т. 91, № 6. С. 1253–1256.
5. Бадков В. М. Приближение функций в равномерной метрике суммами Фурье по ортогональным полиномам // Тр. МИАН СССР. 1980. Т. 145. С. 20–62.

6. Селиванова С. Г. Асимптотические оценки приближений дифференцируемых непериодических функций суммами Чебышёва // Докл. АН СССР. 1955. Т. 105, № 4. С. 648–651.
7. Тиман А. Ф., Тучинский Л. И. Приближение дифференцируемых функций, заданных на конечном отрезке алгебраическими многочленами // Докл. АН СССР. 1956. Т. 111, № 4. С. 771–773.
8. Райцин Р. А. О наилучшем приближении одного класса дифференцируемых функций алгебраическими многочленами // Изв. вузов. Математика. 1976. № 1. С. 64–74.
9. Райцин Р. А. О рядах Фурье–Чебышёва одного класса функций // Изв. вузов. Математика. 1988. № 10. С. 79–81.
10. Ровба Е. А. Приближение функций, дифференцируемых в смысле Римана–Лиувилля, рациональными операторами // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 1996. Т. 40, № 6. С. 18–22.
11. Смотрицкий К. А. Аппроксимация рациональными операторами Валле–Пуссена на отрезке // Тр. Ин-та математики. 2001. Т. 9. С. 110–114.
12. Смотрицкий К. А. О приближении дифференцируемых в смысле Римана–Лиувилля функций // Весці Нац. акад. навук. Сер. фіз.-мат. навук. 2002. № 4. С. 42–47.
13. Рыбаченко И. В. Рациональная интерполяция функций с производной Римана–Лиувилля из L_p // Вестник БГУ. Сер. 1. 2006. № 2. С. 69–74.
14. Старовойтов А. П. Сравнение скоростей рациональных и полиномиальных аппроксимаций дифференцируемых функций // Математические заметки. 1988. Т. 44, № 4. С. 528–535.
15. Старовойтов А. П. Рациональные приближения дробных интегралов Римана–Лиувилля и Вейля // Математические заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 428–441.
16. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1983.
17. Васильев Н. И., Клоков Ю. А., Шкерстена А. Я. Применение полиномов Чебышёва в численном анализе. Рига: Зинатне, 1984.
18. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. 3-е изд., перераб. и доп. М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2005.
19. Марфицын С. В., Марфицын В. П. Применение полиномов Чебышёва 1-го рода для описания устойчивых состояний металла при постоянных и переменных нагрузках // Вестн. Курганского госун-та. Сер. техн. науки. 2016. Вып. 1, № 3. С. 96–98.
20. Miyakoda T. Direct discretization of the fractional-order differential by using Chebyshev series expansion // PAMM Proc. Appl. Math. Mech. 2007. Vol. 7. P. 2020011–2020012.
21. Ровба Е. А. Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации // Докл. НАН БССР. 1979. Т. 23, № 11. С. 968–971.
22. Patseika P. G., Rouba Y. A., Smatrytski K. A. On one rational integral operator of Fourier–Chebyshev type and approximation of Markov functions // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2020. Vol. 2. P. 6–27.
23. Поцейко П. Г., Ровба Е. А. Приближения на классах интегралов Пуассона рациональными интегральными операторами Фурье–Чебышёва // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62, № 2. С. 362–386.
24. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Минск: БГУ, 1979.
25. Никольский С. М. О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1946. Т. 10, № 4. С. 295–322.
26. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979.
27. Федорюк М. В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1987.
28. Пинкевич В. Т. О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4, № 6. С. 521–528.

References

1. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1987 (in Russian).
2. Nikol'skii S. M. On the best approximation of a function whose s -th derivative has discontinuities of the first kind. *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*, 1947, vol. 55, no. 2, pp. 99–102 (in Russian).
3. Tyleneva A. A. Approximation of the Riemann–Liouville integrals by algebraic polynomials on the segment. *Izv. Saratov University. Ser. Math. Fur. Inform.*, 2014, vol. 14, no. 3, pp. 305–311 (in Russian).
4. Ganzburg I. M. On the approximation of functions with a given modulus of continuity by P. L. Chebyshev sums. *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*, 1953, vol. 91, no. 6, pp. 1253–1256 (in Russian).
5. Badkov V. M. Approximation of functions in the uniform metric by Fourier sums over orthogonal polynomials. *Trudy MIAN SSSR*, 1980, vol. 145, pp. 20–62 (in Russian).

6. Selivanova S. G. Asymptotic estimates for approximations of differentiable non-periodic functions by Chebyshev sums. *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*, 1955, vol. 105, no. 4, pp. 648–651 (in Russian).
7. Timan A. F., Tuchinskii L. I. Approximation of differentiable functions defined on a finite interval by algebraic polynomials. *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*, 1956, vol. 111, no. 4, pp. 771–773 (in Russian).
8. Raitsin R. A. The best approximation of a certain class of differentiable functions by algebraic polynomials. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1976, vol. 20, no. 1, pp. 54–62.
9. Raitsin R. A. Fourier–Chebyshev series of a class of functions. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1988, vol. 32, no. 10, pp. 123–126.
10. Rovba E. A. Approximation of functions differentiable in the Riemann–Liouville sense by rational operators. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 1996, vol. 40, no. 6, pp. 18–22 (in Russian).
11. Smotritskii K. A. Approximation by rational operators of Valle Poussin on a segment. *Trudy Instituta matematiki*, 2001, vol. 9, pp. 136–139 (in Russian).
12. Smotritskii K. A. On the approximation of functions differentiable in the sense of Riemann–Liouville. *Vestsi NAN Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk*, 2002, no. 4, pp. 42–47 (in Russian).
13. Rybachenko I. V. Rational interpolation of functions with the Riemann–Liouville derivative from L_p . *Vestnik BGU. Ser. I*, 2006, no. 2, pp. 69–74 (in Russian).
14. Starovoitov A. P. Comparison of the rates of rational and polynomial approximations of differentiable functions. *Math. Notes*, 1988, vol. 44, no. 4, pp. 770–774.
15. Starovoitov A. P. Rational approximations of Riemann–Liouville and Weyl fractional integrals. *Math. Notes*, 2005, vol. 78, no. 3, pp. 391–402.
16. Pashkovskii S. *Computational applications of polynomials and Chebyshev series*. Moscow, Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit-ry, 1983 (in Russian).
17. Vasiliev N. I., Klovov Yu. A., Shkerstena A. Ya. *Application of Chebyshev polynomials in numerical analysis*. Riga, Zinatne Publ., 1984 (in Russian).
18. Suetin P. K. *Classical orthogonal polynomials*. 3rd ed., revised. and additional Moscow, FIZMATLIT Publ., 2005.
19. Marfitsyn S. V., Marfitsyn V. P. The use of Chebyshev’s polynomials of the first type for a description of the steady-state conditions of metal under constant and variable loading. *Vestnik Kurganskogo gosuniversiteta. Ser. tekhn. nauki*, 2016, iss. 1, no. 3, pp. 96–98 (in Russian).
20. Miyakoda T. Direct discretization of the fractional-order differential by using Chebyshev series expansion. *PAMM Proc. Appl. Math. Mech.*, 2007, vol. 7, pp. 2020011–2020012.
21. Rovba E. A. On one direct method in rational approximation. *Dokl. NAS BSSR*, 1979, vol. 23, no. 11, pp. 968–971 (in Russian).
22. Patseika P. G., Rouba Y. A., Smatrytski K. A. On one rational integral operator of Fourier–Chebyshev type and approximation of Markov functions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2020, vol. 2, pp. 6–27.
23. Potseiko P. G., Rovba Y. A. Approximations on classes of Poisson integrals by Fourier–Chebyshev rational integral operators. *Siberian Math. J.*, 2021, vol. 62, no. 2, pp. 292–312.
24. Rusak V. N. *Rational functions as an apparatus of approximation*. Minsk, Belorusskii gosudarstvennyi universitet im. V. I. Lenina, 1979. 179 p. (in Russian).
25. Nikolsky S. On the best approximation of functions satisfying Lipschitz’s conditions by polynomials. *Izvestia Akad. Nauk SSSR*, 1946, vol. 10, no. 4, pp. 295–322 (in Russian).
26. Evgrafov M. A. *Asymptotic estimates and entire functions*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p. (in Russian).
27. Fedoryuk M. V. *Asymptotics. Integrals and series*. Moscow, Nauka Publ., 1987. 544 p. (in Russian).
28. Pinkewitch W. Sur l’ordre du reste de la serie de Fourier des fonctions derivables au sens de Weyl. *Izvestia Akad. Nauk SSSR*, 1940, vol. 4, no. 6, pp. 521–528 (in Russian).



ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА
DISCRETE MATHEMATICS AND
MATHEMATICAL CYBERNETICS



УДК 519.17

О ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ ДИАМЕТРА 3 И СТЕПЕНИ 44

М. Чень¹, А. А. Махнев², В. С. Климин³

¹ Университет провинции Хайнань, г. Хэйкоу, Китай

² Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Россия

³ Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Россия

e-mail: mzchen@hainanu.edu.cn, makhnev@imm.uran.ru, m65v19@gmail.com

Поступила: 01.03.2024

Исправлена: 05.06.2024

Принята: 18.06.2024

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, сильно регулярный граф, тройные числа пересечений.

Аннотация. Дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3 имеет массив пересечений $\{r(c_2 + 1) + a_3, rc_2, a_3 + 1; 1, c_2, r(c_2 + 1)\}$ (М. С. Нирова). Для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и степени 44 имеется 7 допустимых массивов пересечений. Для каждого из них граф Γ_3 сильно регулярен. Для массива пересечений $\{44, 30, 5; 1, 3, 40\}$ имеем $a_3 = 4, c_2 = 3, r = 10$, Γ_2 имеет параметры (540, 440, 358, 360) и Γ_3 имеет параметры (540, 55, 10, 5). Граф не существует (Кулен–Пак). Для массива пересечений $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$ граф Γ_3 имеет параметры (375, 22, 5, 1). Граф не существует (окрестность вершины – объединение изолированных 6-клик). В работе доказано, что дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{44, 36, 5; 1, 9, 40\}$, $\{44, 36, 12; 1, 3, 33\}$ и $\{44, 42, 5; 1, 7, 40\}$ не существуют.

ON DISTANCE REGULAR GRAPHS WITH DIAMETER 3 AND DEGREE 44

M. Chen¹, A. A. Makhnev², V. S. Klimin³

¹ Universitet provintsii Khaynan', Kheykou, China

² N. N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch
of the Russian Academy of Sciences, Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia

³ Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia

e-mail: mzchen@hainanu.edu.cn, makhnev@imm.uran.ru, m65v19@gmail.com

Received: 01.03.2024

Revised: 05.06.2024

Accepted: 18.06.2024

Keywords: distance-regular graph, strongly regular graph, triple intersection numbers.

Abstract. Distance-regular graph Γ with strongly regular graphs Γ_2 and Γ_3 has intersection array $\{r(c_2 + 1) + a_3, rc_2, a_3 + 1; 1, c_2, r(c_2 + 1)\}$ (M. S. Nirova). For distance-regular graph with diameter 3 and degree 44 there are 7 fisible intersection arrays. For each of them the graph Γ_3 is strongly regular. For intersection array $\{44, 30, 5; 1, 3, 40\}$ we have $a_3 = 4, c_2 = 3$ and $r = 10$, Γ_2 has parameters (540, 440, 358, 360) and Γ_3 has parameters (540, 55, 10, 5). This graph does not exist (Koolen–Park). For intersection array $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$ the graph Γ_3 has parameters (375, 22, 5, 1). Graph Γ_3 does not exist (local subgraph is the union of isolated 6-cliques). In this paper it is proved that distance-regular graphs with intersection arrays $\{44, 36, 5; 1, 9, 40\}$, $\{44, 36, 12; 1, 3, 33\}$ and $\{44, 42, 5; 1, 7, 40\}$ do not exist.

Введение. Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b – вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ –

подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a . Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины a* и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a .

Граф Γ называется *регулярным графом степени k* , если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ . Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ)* , если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k , и каждое ребро из Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ)* , если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (через $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ (если $d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем (μ) - λ -подграфом.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$* , если значения $b_i = b_i(u, w)$ и $c_i = c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i . Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Числа пересечений графа p_{ij}^l и параметры Крейна q_{ij}^l определены в [1, с. 43 и 48 соответственно].

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра d . Для $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ граф Γ_i определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u, w смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u, w) = i$.

Имеется семь допустимых пересечений графов Γ степени 44 с сильно регулярным графом Γ_3 .

Для массива пересечений $\{44, 30, 5; 1, 3, 40\}$ имеем $a_3 = 4, c_2 = 3, r = 10$, Γ_2 имеет параметры (540, 440, 358, 360) и Γ_3 имеет параметры (540, 55, 10, 5). Граф не существует (Кулен–Пак [2]).

Для массива пересечений $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$ имеем $a_3 = 8, c_2 = 5, r = 6$, Γ_2 имеет параметры (375, 264, 188, 180) и Γ_3 имеет параметры (375, 66, 9, 12). Существование обоих сильно регулярных графов неизвестно.

Для массива пересечений $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$ имеем $a_3 = 4, c_2 = 3, r = 10$, Γ_2 имеет параметры (375, 308, 253, 252) и Γ_3 имеет параметры (375, 22, 5, 1). Граф не существует (окрестность вершины – объединение изолированных 6-клик).

Для массива пересечений $\{44, 36, 5; 1, 9, 40\}$ имеем $a_3 = 4, c_2 = 9, r = 4$, Γ_2 имеет параметры (243, 176, 130, 120) и Γ_3 имеет параметры (243, 22, 1, 2).

Для массива пересечений $\{44, 36, 12; 1, 3, 33\}$ (граф Шилла с $b = 4$) граф Γ_3 имеет параметры (765, 192, 48, 48).

Для массива пересечений $\{44, 40, 12; 1, 5, 33\}$ граф Γ_3 имеет параметры (525, 128, 28, 32).

Для массива пересечений $\{44, 42, 5; 1, 7, 40\}$ граф Γ_3 имеет параметры (342, 33, 4, 3).

В работе изучаются графы с массивами пересечений $\{44, 36, 5; 1, 9, 40\}$, $\{44, 36, 12; 1, 3, 33\}$ и $\{44, 42, 5; 1, 7, 40\}$.

Теорема 1. *Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{44, 36, 5; 1, 9, 40\}$ и $\{44, 36, 12; 1, 3, 33\}$ не существуют.*

Теорема 2. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44, 42, 5; 1, 7, 40\}$ не существует.*

Проблема существования дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$ и $\{44, 40, 12; 1, 5, 33\}$ остается открытой.

1. Тройные числа пересечений. В доказательстве теорем используются тройные числа пересечений [3].

Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра d . Если u_1, u_2, u_3 – вершины графа Γ , r_1, r_2, r_3 – неотрицательные целые числа, не большие d , то $\left\{ \begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right\}$ – множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$, $\left[\begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right] = \left| \left\{ \begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right\} \right|$. Числа $\left[\begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\left[\begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right]$ будем писать $[r_1 r_2 r_3]$.

Пусть u, v, w – вершины графа Γ , $W = d(u, v)$, $U = d(v, w)$, $V = d(u, w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x, u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jW} \delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h] = \delta_{iW} \delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU} \delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$, и сосчитав число вершин всех расстояний от третьей, получим

$$\sum_{l=1}^d [ljh] = p_{jh}^U - [0jh], \quad \sum_{l=1}^d [ilh] = p_{ih}^V - [i0h], \quad \sum_{l=1}^d [ijl] = p_{ij}^W - [ij0], \quad (+)$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i - j| > W$ или $i + j < W$ имеем $p_{ij}^W = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, \dots, d\}$.

Положим $S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^d Q_{ri} Q_{sj} Q_{th} \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$. Если параметр Крейна $q_{ij}^h = 0$, то $S_{ijh}(u, v, w) = 0$.

Зафиксируем вершины u, v, w дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и положим $\{ijh\} = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}$, $[ijh] = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}$, $[ijh]' = \begin{bmatrix} uvw \\ ihj \end{bmatrix}$, $[ijh]^* = \begin{bmatrix} uvw \\ jih \end{bmatrix}$ и $[ijh]^\sim = \begin{bmatrix} wvu \\ hji \end{bmatrix}$. В случаях $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$ или $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 3$ вычисление чисел $[ijh]' = \begin{bmatrix} uvw \\ ihj \end{bmatrix}$, $[ijh]^* = \begin{bmatrix} uvw \\ jih \end{bmatrix}$ и $[ijh]^\sim = \begin{bmatrix} wvu \\ hji \end{bmatrix}$ (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

2. {44, 36, 5; 1, 9, 40}. В этом параграфе Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44, 36, 5; 1, 9, 40\}$. Тогда Γ имеет $1 + 44 + 176 + 22 = 243$ вершин, спектр $44^1, 8^{66}, -1^{132}, -10^{44}$ и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 66 & 132 & 44 \\ 1 & 12 & -3 & -10 \\ 1 & -3/2 & -7 & -7/2 \\ 1 & -15 & 24 & -10 \end{pmatrix}.$$

Пусть H^* – проверочная 5×11 -матрица совершенного тернарного кода Голя со столбцами $x_1, \dots, x_{11}$ из 5-мерного пространства $V(5, 3)$ над F_3 . Тогда $V(5, 3)$ содержит нулевой вектор, 22 вектора $\pm x_1, \dots, \pm x_{11}$ и 220 векторов $\pm x_i \pm x_j$ для $i \neq j$. Граф Берлекэмпа–ван Линта–Зейделя [4] с параметрами $(243, 22, 1, 2)$ в качестве вершин имеет вектора пространства $V(5, 3)$ и два вектора смежны, если разность между ними это один из векторов $\pm x_1, \dots, \pm x_{11}$. Группа автоморфизмов этого графа – расширение E_{35} с помощью $Z_2 M_{11}$.

Для нашего графа Γ и вершины $u = 0$ имеем $\Gamma_3(u) = \{\pm x_1, \dots, \pm x_{11}\}$.

Лемма 1. Числа пересечений графа Γ равны:

- (1) $p_{11}^1 = 7, p_{12}^1 = 36, p_{22}^1 = 120, p_{23}^1 = 20, p_{33}^1 = 2;$
- (2) $p_{11}^2 = 9, p_{12}^2 = 30, p_{13}^2 = 5, p_{22}^2 = 130, p_{23}^2 = 15, p_{33}^2 = 2;$
- (3) $p_{12}^3 = 40, p_{13}^3 = 4, p_{22}^3 = 120, p_{23}^3 = 16, p_{33}^3 = 1.$

Доказательство. Прямые вычисления. □

Пусть u, v, w – вершины графа Γ , $\{rst\} = \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$ и $[rst] = \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$. Положим $\Sigma = \Gamma_3(u)$, $\Lambda = \Sigma_2$. Тогда Λ является регулярным графом степени 16 на 22 вершинах.

Лемма 2. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 3, d(v, w) = 1$. Тогда выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} [122] &= -r_{49} + 40, [123] = [132] = r_{49}, [133] = -r_{49} + 4; \\ [211] &= r_{50} + 4, [212] = [221] = -r_{50} + 36, [222] = r_{49} + r_{50} - r_{51} + 65, [223] = [232] = -r_{49} + \\ &+ r_{51} + 19, [233] = r_{49} - r_{51} - 3; \\ [311] &= -r_{50} + 3, [312] = [321] = r_{50}, [322] = -r_{50} + r_{51} + 15, [323] = [332] = -r_{51} + 1, [333] = \\ &= r_{51}, \end{aligned}$$

где $3 \leq r_{49} \leq 4, 0 \leq r_{50} \leq 3, 0 \leq r_{51} \leq 1, r_{51} + 3 \leq r_{49}$.

Доказательство. Упрощения формул (+). □

По лемме 2 имеем $12 \leq [322] = -r_{50} + r_{51} + 15 \leq 16$. Так как $\{v, w\} \cup \Lambda(v) \cup \Lambda(w)$ содержит 34 вершины, то $12 \leq [322]$.

Лемма 3. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 3$. Тогда выполняются следующие утверждения:

$$[122] = 36, [123] = [132] = 4;$$

$[121] = [221] = 36$, $[123] = [231] = 4$, $[221] = r_{60} + r_{61} + r_{64} + r_{65} - 16$, $[222] = 72$, $[223] = [232] = 12$;

$[312] = [321] = 4$, $[322] = 12$.

Доказательство. Упрощения формул (+). $\square$

По лемме 3 имеем $[322] = 12$.

Найдем число ребер d между $\Lambda(v)$ и $\Lambda_2(v)$. Так как $p_{13}^3 = 4$, $p_{23}^3 = 16$, $p_{33}^3 = 1$, то

$$60 = 4 \cdot 12 + 1 \cdot 12 \leq d \leq 4 \cdot 16 + 1 \cdot 12 = 76.$$

С другой стороны, $d = 16(15 - \lambda)$, $3, 75 \leq 15 - \lambda \leq 4, 75$, $10, 25 \leq \lambda \leq 11, 25$, где λ – среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$.

Лемма 4. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 3$, $d(v, w) = 2$. Тогда выполняются следующие утверждения:

$[122] = -r_{70} + 40$, $[123] = [132] = r_{70}$, $[133] = -r_{70} + 4$;

$[211] = r_{66} - r_{68} + 10$, $[212] = r_{67}$, $[213] = -r_{66} - r_{67} + r_{68} + 30$, $[221] = -r_{66} + 30$, $[222] = r_{66} - r_{69} + 90$, $[223] = r_{69}$, $[231] = r_{68}$, $[232] = -r_{66} - r_{67} + r_{69} + 30$, $[233] = r_{66} + r_{67} - r_{68} - r_{69} - 14$;

$[311] = -r_{66} + r_{68} - 1$, $[312] = -r_{67} + 30$, $[313] = r_{66} + r_{67} - r_{68} - 25$, $[321] = r_{66}$, $[322] = -r_{66} + r_{69} + r_{70}$, $[323] = -r_{69} - r_{70} + 15$, $[331] = -r_{68} + 5$, $[332] = r_{66} + r_{67} - r_{69} - r_{70} - 15$, $[333] = -r_{66} - r_{67} + r_{68} + r_{69} + r_{70} + 11$,

где $0 \leq r_{66} \leq 4$, $26 \leq r_{67} \leq 30$, $4 \leq r_{68} \leq 5$, $10 \leq r_{69} \leq 12$, $3 \leq r_{70} \leq 4$, $r_{69} + r_{70} \leq 15$, $r_{66} + 1 \leq r_{68}$.

Доказательство. Упрощения формул (+). $\square$

Заметим, что $[231] = r_{68} = [321]^* = r_{66}^*$.

По лемме 4 имеем $9 \leq [322] = -r_{66} + r_{69} + r_{70} \leq 15$. Так как $\{v, w\} \cup \Lambda(v) \cup \Lambda(w)$ содержит 32 вершины, то $10 \leq [322]$.

Пусть $d(u, v) = 3$.

Подсчитаем число f_1 пар вершин y, z на расстоянии 1 в графе Γ , где $y \in \left\{ \begin{smallmatrix} uv \\ 31 \end{smallmatrix} \right\}$ и $z \in \left\{ \begin{smallmatrix} uv \\ 32 \end{smallmatrix} \right\}$. С одной стороны, по лемме 2 имеем $[321] = r_{50}$, где $0 \leq r_{50} \leq 3$, поэтому $0 \leq f_1 \leq 4 \cdot 3 = 12$. С другой стороны, по лемме 4 имеем $[311] = -r_{66} + r_{68} - 1$, поэтому $0 \leq f_1 = \sum_i (-r_{66}^i + r_{68}^i) - 16 \leq 12$, $16 \leq \sum_i (-r_{66}^i + r_{68}^i) \leq 28$ и $1 \leq \sum_i (-r_{66}^i + r_{68}^i)/16 \leq 1, 75$.

Так как $[231] = r_{68} = [321]^* = r_{66}^*$, то $\sum_i (-r_{66}^i + r_{68}^i)/16 = 0$, противоречие.

3. {44, 36, 12; 1, 3, 33}. В этом параграфе Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44, 36, 12; 1, 3, 33\}$. Тогда Γ имеет $1 + 44 + 528 + 192 = 765$ вершин, спектр $44^1, 11^{170}, -1^{374}, -7^{220}$ и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 170 & 374 & 220 \\ 1 & \frac{85}{2} & -\frac{17}{2} & -35 \\ 1 & 0 & -\frac{17}{2} & \frac{15}{2} \\ 1 & -\frac{85}{8} & \frac{187}{8} & -\frac{55}{4} \end{pmatrix}.$$

Лемма 5. Числа пересечений графа Γ равны:

(1) $p_{11}^1 = 7$, $p_{12}^1 = 36$, $p_{22}^1 = 348$, $p_{23}^1 = 144$, $p_{33}^1 = 48$;

(2) $p_{11}^2 = 3$, $p_{12}^2 = 29$, $p_{13}^2 = 12$, $p_{22}^2 = 366$, $p_{23}^2 = 132$, $p_{33}^2 = 48$;

(3) $p_{12}^3 = 33$, $p_{13}^3 = 11$, $p_{22}^3 = 363$, $p_{23}^3 = 132$, $p_{33}^3 = 48$.

Доказательство. Прямые вычисления. $\square$

Пусть u, v, w – вершины графа Γ , $\{rst\} = \left\{ \begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix} \right\}$ и $[rst] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix} \right]$. Положим $\Sigma = \Gamma_3(u)$, $\Lambda = \Sigma_2$. Тогда Λ является регулярным графом степени 132 на 192 вершинах.

Лемма 6. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 3$, $d(v, w) = 1$. Тогда выполняются следующие равенства:

$[122] = -r_{82} - r_{83} - r_{84} + 274$, $[123] = [132] = r_{82} + r_{83} + r_{84} - 241$, $[133] = -r_{82} - r_{83} - r_{84} + 252$;

$[211] = -r_{84} + 7$, $[212] = [221] = r_{84} + 26$, $[222] = r_{82}$, $[223] = [232] = -r_{82} - r_{84} + 337$, $[233] = -r_{82} + r_{84} - 205$;

$[311] = r_{84}$, $[312] = [321] = -r_{84} + 10$, $[322] = r_{83} + r_{84} + 74$, $[323] = [332] = -r_{83} + 48$, $[333] = -r_{83}$,

где $198 \leq r_{82} \leq 252$, $0 \leq r_{83} \leq 47$, $0 \leq r_{84} \leq 7$, $205 \leq r_{82} + r_{84} \leq 252 - r_{83}$.

Доказательство. Упрощения формул (+). $\square$

По лемме 6 имеем $74 \leq [322] = r_{83} + r_{84} + 74 \leq 128$.

Лемма 7. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 3$. Тогда выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} [122] &= r_{107}, [123] = [132] = -r_{107} + 33, [133] = r_{107} - 22; \\ [212] &= r_{104} + r_{105} - r_{106} - r_{107} - 66, [213] = -r_{104} - r_{105} + r_{106} + r_{107} + 99, [221] = -r_{106} + 33, \\ [222] &= -r_{105} + r_{106} + 330, [223] = r_{105}, [231] = r_{106}, [232] = -r_{104} + r_{107} + 99, [233] = r_{104} - r_{106} - \\ &- r_{107} + 33; \\ [312] &= -r_{104} - r_{105} + r_{106} + r_{107} + 99, [313] = r_{104} + r_{105} - r_{106} - r_{107} - 88, [321] = r_{106}, [322] = \\ &= r_{105} - r_{106} - r_{107} + 33, [323] = -r_{105} + r_{107} + 99, [331] = -r_{106} + 11, [332] = r_{104}, [333] = -r_{104} + \\ &+ r_{106} + 36, \\ \text{где } 0 &\leq r_{104} \leq 47, 74 \leq r_{105} \leq 132, 0 \leq r_{106} \leq 11, 22 \leq r_{107} \leq 33, r_{104} - r_{106} \leq 36. \end{aligned}$$

Доказательство. Упрощения формул (+). $\square$

$$\text{Симметризация } [122] = r_{107} = r'_{107}, [223] = r_{105} = r'_{105}, [231] = r_{106} = [321] = r'_{106}, [332] = r_{104} = r'_{104}.$$

$$\text{Далее, } [222] = -r_{105} + r_{106} + 330, \text{ поэтому } r_{105} - r_{106} = r_{105} - r'_{106} = r_{105} - r'_{106} = r_{105} - \tilde{r}_{106}, \\ [232] = -r_{104} + r_{107} + 99 \text{ и } r_{104} - r_{107} = \tilde{r}_{104} - \tilde{r}_{107}. \text{ Аналогично, } [323] = -r_{105} + r_{107} + 99, \text{ поэтому } r_{105} - r_{107} = \tilde{r}_{105} - \tilde{r}_{107}, \\ [333] = -r_{104} + r_{106} + 36 \text{ и } r_{104} - r_{106} = r_{104} - r'_{106} = r_{104} - r'_{106} = r_{104} - \tilde{r}_{106}.$$

$$\text{Имеем } [122] \sim r'_{107} = [221] = -r_{106} + 33, \text{ поэтому } r'_{107} + r_{106} = 33. \text{ Из равенств } [223]' = r'_{105} = \\ = [232] = -r_{104} + r_{107} + 99 \text{ следует, что } r'_{105} + r_{104} - r_{107} = 99, [323] = -r_{105} + r_{107} + 99 = [332]' = r'_{104}, \\ \text{следовательно, } r_{105} - r_{107} + r'_{104} = 99 \text{ и } r'_{105} - r'_{104} = r_{105} - r_{104}.$$

По лемме 7 имеем $63 \leq [322] = r_{105} - r_{106} - r_{107} + 33 \leq 153$. Так как $\{v, w\} \cup \Lambda(v) \cup \Lambda(w)$ содержит 266 вершин, то $74 \leq [322] \leq 132$.

Найдем число ребер d между $\Lambda(v)$ и $\Lambda_2(v)$. Так как $p_{13}^3 = 11, p_{23}^3 = 132, p_{33}^3 = 48$, то $4366 = 11 \cdot 74 + 48 \cdot 74 \leq d \leq 11 \cdot 128 + 48 \cdot 132 = 7744$. С другой стороны, $d = 132(131 - \lambda)$, $33,075 \leq 131 - \lambda \leq 58,667$, $72,333 \leq \lambda \leq 97,925$, где λ – среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$.

Лемма 8. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 3, d(v, w) = 2$. Тогда выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} [122] &= -r_{103} + 33, [123] = [132] = r_{103}, [133] = -r_{103} + 11; \\ [211] &= -r_{101} + r_{102} + 4, [212] = r_{99}, [213] = r_{101} - r_{102} - r_{99} + 29, [221] = -r_{102} + 29, [222] = \\ &= -r_{100} + r_{102} + 334, [223] = r_{100}, [231] = r_{101}, [232] = r_{100} - r_{102} - r_{99} + 29, [233] = -r_{100} - r_{101} + \\ &+ r_{102} + r_{99} + 103; \\ [311] &= r_{101} - r_{102} - 1, [312] = -r_{99} + 29, [313] = -r_{101} + r_{102} + r_{99} - 17, [321] = r_{102}, [322] = \\ &= r_{100} - r_{102} + r_{103} - 1, [323] = -r_{100} - r_{103} + 132, [331] = -r_{101} + 12, [332] = -r_{100} + r_{102} - r_{103} + \\ &+ r_{99} + 103, [333] = r_{100} + r_{101} - r_{102} + r_{103} - r_{99} - 67, \end{aligned}$$

где $18 \leq r_{99} \leq 29, 73 \leq r_{100} \leq 131, 1 \leq r_{101} \leq 12, 0 \leq r_{102}, r_{103} \leq 11, 1 \leq r_{101} - r_{102} \leq 4, r_{100} + r_{103} \leq 132$.

Доказательство. Упрощения формул (+). $\square$

$$\text{Имеем } [212] = r_{99} = [221]' = -r'_{102} + 29, \text{ поэтому } r_{99} + r'_{102} = 29.$$

По лемме 8 получим $61 \leq [322] = r_{100} - r_{102} + r_{103} - 1 \leq 131$. Как и выше, $72 \leq [322]$.

Пусть $d(u, v) = 3$.

Подсчитаем число f_1 пар вершин u, z на расстоянии 1 в графе Γ , где $u \in \{uv\}_{31}$ и $z \in \{uv\}_{32}$. С одной стороны, по лемме 6 имеем $[321] = -r_{75} - r_{76} + r_{78} - 48$, где $0 \leq r_{75} \leq 48, 0 \leq r_{76} \leq 3, 72 \leq r_{78} \leq 127$, поэтому $0 \leq f_1 \leq 11 \cdot 79 = 869$. С другой стороны, по лемме 8 имеем $[311] = r_{101} - r_{102} - 1$, $0 \leq f_1 = \sum_i (r_{101}^i - r_{102}^i) - 132 \leq 869, 132 \leq \sum_i (r_{101}^i - r_{102}^i) \leq 737$ и $1 \leq \sum_i (r_{101}^i - r_{102}^i) / 132 \leq 5,584$.

Противоречие с тем, что $[231] = r_{101} = [321]^* = r_{102}^*$ и $\sum_i (r_{101}^i - r_{102}^i) / 132 = 0$. $\square$

4. {44, 42, 5; 1, 7, 40}. В этом параграфе Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44, 42, 5; 1, 7, 40\}$. Тогда Γ имеет $1 + 44 + 264 + 33 = 342$ вершины, спектр $44^1, 6^{132}, -1^{152}, -12^{57}$ и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 132 & 152 & 57 \\ 1 & 18 & -\frac{38}{11} & -\frac{171}{11} \\ 1 & -1 & -\frac{38}{11} & \frac{38}{11} \\ 1 & -20 & \frac{304}{11} & -\frac{95}{11} \end{pmatrix}.$$

Лемма 9. Числа пересечений графа Γ равны:

- (1) $p_{11}^1 = 1, p_{12}^1 = 42, p_{22}^1 = 192, p_{23}^1 = 30, p_{33}^1 = 3$;
- (2) $p_{11}^2 = 7, p_{12}^2 = 32, p_{13}^2 = 5, p_{22}^2 = 206, p_{23}^2 = 25, p_{33}^2 = 3$;
- (3) $p_{12}^3 = 40, p_{13}^3 = 4, p_{22}^3 = 200, p_{23}^3 = 24, p_{33}^3 = 4$.

Доказательство. Прямые вычисления. $\square$

Пусть u, v, w – вершины графа Γ , $\{rst\} = \left\{ \begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix} \right\}$ и $[rst] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix} \right]$. Положим $\Sigma = \Gamma_2(u)$, $\Lambda = \Sigma_2$. Тогда Λ является регулярным графом степени 206 на 264 вершинах.

Лемма 10. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 1$. Тогда выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} [111] &= r_{150}, [112] = [121] = -r_{150} + 7, [122] = r_{150} + r_{151} + 20, [123] = [132] = -r_{151} + 5, [133] = \\ &= r_{151}; \\ [211] &= r_{148} - r_{149} - r_{150} + 18, [212] = [221] = -r_{148} + r_{149} + r_{150} + 13, [222] = -r_{149} - r_{150} - \\ &- r_{151} + 171, [223] = [232] = r_{148} + r_{151} + 22, [233] = -r_{148} - r_{151} + 3; \\ [311] &= -r_{148} + r_{149} - 17, [312] = [321] = r_{148} - r_{149} + 22, [322] = r_{149}, [323] = [332] = -r_{148} + \\ &+ 3, [333] = r_{148}, \\ &\text{где } 0 \leq r_{148}, r_{151} \leq 3, 17 \leq r_{149} \leq 21, 0 \leq r_{150} \leq 1, \leq r_{148} + r_{151} \leq 3, 17 \leq r_{149} - r_{148}. \end{aligned}$$

Доказательство. Упрощения формул (+). $\square$

По лемме 10 имеем $146 \leq [222] = -r_{149} - r_{150} - r_{151} + 171 \leq 154$. Так как $\{v, w\} \cup \Lambda(v) \cup \Lambda(w)$ содержит 414 вершины, то $150 \leq [222]$.

Лемма 11. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 3$. Тогда выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} [112] &= -r_{166} + r_{169} + 35, [113] = r_{166} - r_{169} - 28, [121] = r_{167}, [122] = r_{166} - r_{167} + r_{168} - r_{169} - 1, \\ [123] &= -r_{166} - r_{168} + r_{169} + 33, [131] = -r_{167} + 7, [132] = r_{167} - r_{168} - 2, [133] = r_{168}; \\ [212] &= r_{166}, [213] = -r_{166} + 32, [221] = -r_{167} + r_{171} + 35, [222] = -r_{166} + r_{167} - r_{168} + r_{169} - \\ &- r_{170} + 200, [223] = r_{166} + r_{168} - r_{169} + r_{170} - r_{171} - 29, [231] = r_{167} - r_{171} - 3, [232] = -r_{167} + r_{168} - \\ &- r_{169} + r_{170} + 6, [233] = -r_{168} + r_{169} - r_{170} + r_{171} + 21; \\ [312] &= -r_{169} + 5, [313] = r_{169}, [321] = -r_{171} + 5, [322] = r_{170}, [323] = -r_{170} + r_{171} + 20, [331] = \\ &= r_{171}, [332] = r_{169} - r_{170} + 20, [333] = -r_{169} + r_{170} - r_{171} - 17, \\ &\text{где } 28 \leq r_{166} \leq 32, 3 \leq r_{167} \leq 7, 0 \leq r_{168} \leq 4, 0 \leq r_{169}, r_{171} \leq 3, 17 \leq r_{170} \leq 23, r_{169} + 28 \leq r_{166}, \\ &r_{171} + 3 \leq r_{167}, r_{170} \leq r_{169} + 20. \end{aligned}$$

Доказательство. Упрощения формул (+). $\square$

По лемме 11 имеем $144 = -32 + 3 - 4 - 23 + 200 \leq [222] = -r_{166} + r_{167} - r_{168} + r_{169} - r_{170} + 200 \leq -28 + 7 + 3 - 17 + 200 = 165$. Как и выше, $150 \leq [222]$.

Найдем число ребер d между $\Lambda(v)$ и $\Lambda_2(v)$. Так как $p_{12}^2 = 32, p_{22}^2 = 206, p_{23}^2 = 25$, то $8550 = 32 \cdot 150 + 25 \cdot 150 \leq d \leq 32 \cdot 154 + 25 \cdot 165 = 9053$. С другой стороны, $d = 206(205 - \lambda)$, $41,504 \leq 205 - \lambda \leq 43,947$, $161,053 \leq \lambda \leq 163,496$, где λ – среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$.

Лемма 12. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$. Тогда выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} [111] &= -r_{159} - r_{160} - r_{161} + r_{162} + r_{163} - r_{166} + 12, [112] = r_{160}, [113] = r_{159} + r_{161} - r_{162} - r_{163} + \\ &+ r_{165} - 5, [121] = r_{164}, [122] = -r_{163} - r_{164} + 132, [123] = r_{163}, [131] = r_{159} + r_{160} + r_{161} - r_{162} - r_{163} - \\ &- r_{164} + r_{165} - 5, [132] = -r_{160} + r_{163} + r_{164}, [133] = -r_{159} - r_{161} + r_{162} - r_{165} + 10; \\ [211] &= r_{161}, [212] = r_{165}, [213] = -r_{161} - r_{165} + 32, [221] = r_{158}, [222] = -r_{158} - r_{162} + 205, \\ [223] &= r_{162}, [231] = -r_{158} - r_{161} + 32, [232] = r_{158} + r_{162} - r_{165}, [233] = r_{161} - r_{162} + r_{165} - 7; \\ [311] &= r_{159} + r_{160} - r_{162} - r_{163} + r_{165} - 5, [312] = -r_{160} - r_{165} + 32, [313] = -r_{159} + r_{162} + r_{163} - \\ &- 22, [321] = -r_{158} - r_{164} + 32, [322] = r_{158} + r_{162} + r_{163} + r_{164} - 32, [323] = r_{162} - r_{163} + 25, [331] = \\ &= -r_{158} - r_{159} - r_{160} + r_{162} + r_{163} + r_{164} - r_{165} - 22, [332] = -r_{158} + r_{160} - r_{162} - r_{163} - r_{164} + r_{165} + 25, \\ [333] &= r_{159}, \\ &\text{где } 20 \leq r_{158}, r_{165} \leq 32, 0 \leq r_{159} \leq 3, 0 \leq r_{160}, r_{161}, r_{164} \leq 7, 17 \leq r_{162} \leq 25, 0 \leq r_{163} \leq 5, r_{158} + \\ &+ r_{161}, r_{161} + r_{165}, r_{160} + r_{165} \leq 32. \end{aligned}$$

Доказательство. Упрощения формул (+). $\square$

Симметризация $[112] = r_{160} = r_{160}^*, [121] = r_{164} = r_{164}^*, [211] = r_{161} = r_{161}', [212] = r_{165} = r_{165}^*, [221] = r_{158} = r_{158}^*, [223] = r_{162} = r_{162}^*, [333] = r_{159} = r_{159}' = r_{159}^* = r_{159}^*$.

Далее, $[112]' = r_{160}' = [121] = r_{164} = [211]^* = r_{161}^*, [212] = r_{165} = [221]' = r_{158}', [123]^* = r_{163}^* = [213] = -r_{161} - r_{165} + 32$, поэтому $r_{163}^* + r_{161} + r_{165} = 32$. Аналогично, $[223]' = r_{162}' = [232] = r_{158} + r_{162} - r_{165}$ и $r_{162}' + r_{165} = r_{158} + r_{162}$.

По лемме 12 имеем $148 \leq [222] = -r_{158} - r_{162} + 205 \leq 168$.

Пусть $d(u, v) = 2$.

Подсчитаем число f_1 пар вершин y, z на расстоянии 1 в графе Γ , где $y \in \left\{ \begin{smallmatrix} uv \\ 21 \end{smallmatrix} \right\}$ и $z \in \left\{ \begin{smallmatrix} uv \\ 22 \end{smallmatrix} \right\}$. С одной стороны, по лемме 10 имеем $[221] = -r_{148} + r_{149} + r_{150} + 13$, где $0 \leq r_{148} \leq 3, 17 \leq r_{149} \leq 21$,

$0 \leq r_{150} \leq 1$, поэтому $864 = 32 \cdot 27 \leq f_1 \leq 32 \cdot 32 = 1024$. С другой стороны, по лемме 12 имеем $[211] = r_{161}$, поэтому $864 \leq f_1 = \sum_i r_{161}^i \leq 1024$ и $4,194 \leq \sum_i r_{161}^i / 206 \leq 4,971$.

Подсчитаем число f_2 пар вершин y, z на расстоянии 2 в графе Γ , где $y \in \{_{21}^{uv}\}$ и $z \in \{_{22}^{uv}\}$. С одной стороны, по лемме 10 имеем $150 \leq [222] \leq 154$, поэтому $4800 = 32 \cdot 150 \leq f_2 \leq 32 \cdot 154 = 4928$. С другой стороны, по лемме 12 имеем $[212] = r_{165}$, поэтому $4800 \leq f_2 = \sum_i r_{165}^i \leq 4928$ и $23,300 \leq \sum_i r_{165}^i / 206 \leq 23,923$.

Подсчитаем число f_3 пар вершин y, z на расстоянии 3 в графе Γ , где $y \in \{_{21}^{uv}\}$ и $z \in \{_{22}^{uv}\}$. С одной стороны, по лемме 10 имеем $[223] = r_{148} + r_{151} + 22$, где $0 \leq r_{148}, r_{151} \leq 3$, поэтому $704 = 32 \cdot 22 \leq f_3 \leq 32 \cdot 28 = 896$. С другой стороны, по лемме 12 имеем $[213] = [123]^* = r_{163}^*$, поэтому $704 \leq f_3 = \sum_i (r_{163}^*)^i \leq 896$ и $3,417 \leq \sum_i r_{163}^i / 206 \leq 4,350$.

Подсчитаем число g_1 пар вершин y, z на расстоянии 1 в графе Γ , где $y \in \{_{23}^{uv}\}$ и $z \in \{_{22}^{uv}\}$. С одной стороны, по лемме 11 имеем $[221] = [212]' = r_{166}'$, где $28 \leq r_{166} \leq 32$, поэтому $700 = 25 \times 28 \leq g_1 \leq 25 \cdot 32 = 800$. С другой стороны, по лемме 12 имеем $[231] = ([123]')^\sim = (r_{163}')^\sim$, поэтому $700 \leq g_1 = \sum_i ((r_{163}')^\sim)^i \leq 800$ и $3,398 \leq \sum_i r_{163}^i / 206 \leq 3,884$.

Отсюда $3,417 \leq \sum_i r_{163}^i / 206 \leq 3,884$.

Подсчитаем число g_2 пар вершин y, z на расстоянии 2 в графе Γ , где $y \in \{_{23}^{uv}\}$ и $z \in \{_{22}^{uv}\}$. С одной стороны, по лемме 11 имеем $150 \leq [222] \leq 165$, поэтому $3750 = 25 \cdot 150 \leq g_2 \leq 25 \cdot 165 = 4125$. С другой стороны, по лемме 12 имеем $[232] = [223]' = r_{162}'$, поэтому $3750 \leq g_2 = \sum_i (r_{162}')^i \leq 4125$ и $18,203 \leq \sum_i r_{162}^i / 206 \leq 20,025$.

Подсчитаем число g_3 пар вершин y, z на расстоянии 3 в графе Γ , где $y \in \{_{23}^{uv}\}$ и $z \in \{_{22}^{uv}\}$. С одной стороны, по лемме 11 имеем $[223] = [232] = -r_{167} + r_{168} - r_{169} + r_{170} + 6$, где $3 \leq r_{167} \leq 7, 0 \leq r_{168} \leq 4, 0 \leq r_{169} \leq 3, 17 \leq r_{170} \leq 23$, поэтому $325 = 25 \cdot 13 \leq g_3 \leq 25 \cdot 30 = 750$. С другой стороны, по лемме 12 имеем $[233] = [323]^* = r_{162}^* - r_{163}^* + 25$, поэтому $325 \leq g_3 = \sum_i ((r_{162}^*)^i - (r_{163}^*)^i) + 5150 \leq 750$, $4400 \leq \sum_i ((r_{162}^*)^i - (r_{163}^*)^i) \leq 4825$ и $21,359 \leq \sum_i (r_{162}^i - r_{163}^i) / 206 \leq 23,423$.

Противоречие с тем, что $18,203 \leq \sum_i r_{162}^i / 206 \leq 20,025$. $\square$

Исследование выполнено при поддержке Естественного-научного фонда Китая (проект № 12171126) и гранта Лаборатории инженерного моделирования и статистических вычислений провинции Хайнань.

Литература

1. Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. *Distance-Regular Graphs*. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1989.
2. Koolen J. H., Park J. Shilla distance-regular graphs // *Europ. J. Comb.* 2010. Vol. 31, N 8. P. 2064–2073.
3. Coolsaet K., Jurishich A. Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs // *J. Comb. Theory, Series A*. 2008. Vol. 115. P. 1086–1095.
4. Berlekamp E. R., van Lint J. H., Seidel J. J. A strongly regular graph derived from the perfect ternary Golay code // Srivastava J. N. (Ed.). *A survey of combinatorial theory*. North-Holland Publishing Company, 1973. P. 25–30.

References

1. Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. *Distance-Regular Graphs*. Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 1989.
2. Koolen J. H., Park J. Shilla distance-regular graphs. *Europ. J. Comb.*, 2010, vol. 31, no. 8, pp. 2064–2073.
3. Coolsaet K., Jurishich A. Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs. *J. Comb. Theory, Series A*. 2008, vol. 115, pp. 1086–1095.
4. Berlekamp E. R., van Lint J. H., Seidel J. J. A strongly regular graph derived from the perfect ternary Golay code. Srivastava J. N. (Ed.). *A survey of combinatorial theory*. North-Holland Publishing Company, 1973, pp. 25–30.



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ,
ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И
ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMIC
SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL



УДК 517.9

ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ КОМПОНЕНТАМИ СИЛЬНО НЕРЕГУЛЯРНОГО
КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ
АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

А. К. Деменчук

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
e-mail: demenchuk@im.bas-net.by

Поступила: 02.02.2024

Исправлена: 20.03.2024

Принята: 18.06.2024

Ключевые слова: линейная алгебраическая система, квазипериодическая матрица коэффициентов, квазипериодические решения, сильная нерегулярность, зависимость компонент.

Аннотация. Исследуется линейная однородная алгебраическая система с квазипериодической матрицей коэффициентов на предмет существования сильно нерегулярного квазипериодического решения. Показано, что при наличии такого решения между его компонентами имеется линейная зависимость. Приводится алгоритм нахождения этой зависимости.

RELATIONSHIP BETWEEN COMPONENTS OF A STRONGLY IRREGULAR
QUASIPERIODIC SOLUTIONS OF THE LINEAR HOMOGENEOUS ALGEBRAIC SYSTEM

A. K. Demenchuk

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus,
Minsk, Belarus
e-mail: demenchuk@im.bas-net.by*

Received: 02.02.2024

Revised: 20.03.2024

Accepted: 18.06.2024

Keywords: linear algebraic system, quasiperiodic coefficients matrix, quasiperiodic solutions, strong irregular, components dependence.

Abstract. We study a linear homogeneous algebraic system with the quasiperiodic matrix of coefficients for the existence strongly irregular quasiperiodic solution. If there is such a solution, then there is a linear relationship between its components. An algorithm for finding this dependence is given.

1. Введение и постановка задачи. Будем рассматривать линейную алгебраическую систему

$$G(t)z = 0, \quad (1)$$

где $G(t)$ – в общем случае непрерывная почти периодическая $(n \times n)$ -матрица; z – неизвестная n -мерная вектор-функция. Проблему существования квазипериодических решений квазипериодической системы (1) впервые исследовал А. М. Самойленко в связи с задачей о периодическом базисе [1]. Он дал условия существования решений с частотным базисом матрицы $G(t)$.

Отметим, что в большинстве работ по теории колебаний (см., напр. [2–8] и др.) изучался случай, когда частотные модули дифференциальной системы и ее решения совпадают. Вопросы

о других возможных соотношениях модулей частот не затрагивались. Хотя, в частности, для многих прикладных задач необходимо иметь информацию о том, в какой мере специфика частот возмущения влияет на характер частот колебаний системы [9–11].

По-видимому, первым, кто более детально исследовал данный вопрос, был Х. Массера. В 1950 г. он показал, что периодические дифференциальные системы могут иметь периодические решения с иррациональным отношением периодов решения и системы [12]. Этот результат послужил началом нового направления в теории колебаний, которое впоследствии развивалось для различных классов систем и их решений в работах Я. Курцвейля и О. Вейвуды [13], Н. П. Еругина [14; 15], И. В. Гайшуна [16], Э. И. Груды [17–19], В. Т. Борухова [20] и др. Такого рода решения были названы сильно нерегулярными. Как выяснилось в дальнейшем, во многих случаях решение задачи о существовании сильно нерегулярных решений исходных дифференциальных систем сводится к аналогичной задаче для системы (1) (см., напр. [15; 17; 21]). Однако при этом вопросы о строении самого решения оставались открытыми.

В настоящей работе изучим структуру сильно нерегулярного квазипериодического решения системы (1).

2. Необходимые сведения. Приведем нужные в дальнейшем известные понятия теории квазипериодических функций, которые без труда переносятся на векторно- и матричнозначные функции.

Пусть конечное множество действительных чисел $(\omega_1)^{-1}, \dots, (\omega_k)^{-1}$ рационально линейно независимо. Непрерывная функция $f(t)$ называется квазипериодической с периодами $\omega_1, \dots, \omega_k$, если найдется непрерывная функция k переменных $F^*(t_1, \dots, t_k)$, периодическая по t_j с периодом ω_j ($j = \overline{1, k}$), которая является диагональной для исходной функции, т. е.

$$f(t) \equiv F^*(t, \dots, t).$$

Числа $2\pi/\omega_1, \dots, 2\pi/\omega_k$ образуют базис частот квазипериодической функции $f(t)$. Квазипериодическими будут тригонометрические многочлены с рационально линейно независимыми частотами. Например, функция $f(t) = \sin 2\pi t + \cos(2\pi/\sqrt{2})t$ является квазипериодической с периодами $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = \sqrt{2}$.

Среднее значение квазипериодической функции $f(t)$ – это величина

$$\hat{f} = \frac{1}{\omega_1 \dots \omega_k} \int_0^{\omega_1} \dots \int_0^{\omega_k} F^*(\tau_1, \dots, \tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k.$$

Квазипериодическую функцию $f(t)$ можно разложить в формальный ряд Фурье

$$f(t) \sim \sum_{p_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{p_k=-\infty}^{\infty} f_{p_1 \dots p_k} \exp \left[2\pi i \left(\frac{p_1}{\omega_1} + \dots + \frac{p_k}{\omega_k} \right) t \right],$$

где коэффициенты Фурье

$$f_{p_1 \dots p_k} = \frac{1}{\omega_1 \dots \omega_k} \int_0^{\omega_1} \dots \int_0^{\omega_k} F^*(\tau_1, \dots, \tau_k) \exp \left[-2\pi i \times \left(\frac{p_1}{\omega_1} \tau_1 + \dots + \frac{p_k}{\omega_k} \tau_k \right) \right] d\tau_1 \dots d\tau_k.$$

Далее будем считать, что в системе (1) матрица $G(t)$ квазипериодическая с периодами $\omega_1, \dots, \omega_k$. Тогда, согласно приведенному выше определению, найдется непрерывная матричная функция k переменных $G^*(t_1, \dots, t_k)$, периодическая по t_j с периодом соответственно ω_j ($j = \overline{1, k}$), такая, что выполняется тождество

$$G(t) \equiv G^*(t, \dots, t). \quad (2)$$

Некоторое квазипериодическое решение $z = z(t)$ с периодами $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ системы (1) назовем сильно нерегулярным, если базисы частот решения и матрицы $G(t)$ рационально линейно независимы. Другими словами, линейная комбинация

$$q_1(2\pi/\omega_1) + \dots + q_k(2\pi/\omega_k) + q_{k+1}(2\pi/\Omega_1) + \dots + q_{k+m}(2\pi/\Omega_m)$$

с рациональными коэффициентами $q_1, \dots, q_{k+m}$ тождественно обращается в ноль, если и только если все коэффициенты нулевые.

Поскольку квазипериодические функции являются частным случаем более общего класса почти периодических функций, то из теоремы единственности для почти периодических функций [22, с. 45] непосредственно вытекает следующее

Утверждение. *Не существует не равной тождественно нулю квазипериодической функции, все коэффициенты Фурье которой нулевые.*

3. Основной результат. Случай $G(t) \equiv 0$ является вырожденным и не представляет интереса для исследования. Поэтому далее, с целью корректного применения утверждения, считаем, что $G(t) \not\equiv 0$. Справедлива

Теорема. *Если системы (1), (2) имеют нетривиальное сильно нерегулярное квазипериодическое решение, то между его компонентами имеется линейная зависимость.*

Доказательство. Пусть система (1) имеет сильно нерегулярное нетривиальное периодическое решение $z = z(t)$ с периодами $\Omega_1, \dots, \Omega_m$, т. е. выполняется тождество

$$G(t)z(t) \equiv 0. \quad (3)$$

В таком случае найдется непрерывная n -векторная функция m переменных $Z^*(t_1, \dots, t_m)$, периодическая по t_j с периодом соответственно Ω_j ($j = \overline{1, m}$) и совпадающая на диагонали $t_1 = \dots = t_m = t$ с решением $z(t)$.

Дальнейший ход доказательства разобьем на четыре этапа.

i) Предварительно найдем условие, выполнение которого необходимо для существования решения $z(t)$ системы (1). Запишем формальные разложения в ряды Фурье квазипериодических функций:

$$G(t) \sim \sum_{p_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{p_k=-\infty}^{\infty} g_{p_1 \dots p_k} \exp \left[2\pi i \left(\frac{p_1}{\omega_1} + \dots + \frac{p_k}{\omega_k} \right) t \right],$$

где коэффициенты

$$g_{p_1 \dots p_k} = \frac{1}{\omega_1 \dots \omega_k} \int_0^{\omega_1} \dots \int_0^{\omega_k} G^*(\tau_1, \dots, \tau_k) \exp \left[-2\pi i \left(\frac{p_1}{\omega_1} \tau_1 + \dots + \frac{p_k}{\omega_k} \tau_k \right) \right] d\tau_1 \dots d\tau_k,$$

и

$$z(t) \sim \sum_{q_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{q_m=-\infty}^{\infty} z_{q_1 \dots q_m} \exp \left[2\pi i \left(\frac{q_1}{\Omega_1} + \dots + \frac{q_m}{\Omega_m} \right) t \right],$$

где коэффициенты

$$z_{q_1 \dots q_m} = \frac{1}{\Omega_1 \dots \Omega_m} \int_0^{\Omega_1} \dots \int_0^{\Omega_m} Z^*(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \exp \left[-2\pi i \left(\frac{p_1}{\omega_1} \sigma_1 + \dots + \frac{p_k}{\omega_k} \sigma_m \right) \right] d\sigma_1 \dots d\sigma_m.$$

Каждое из полученных разложений представляет собой конечную сумму счетных множеств слагаемых. Поэтому из свойства суммы рядов Фурье для почти периодических функций [22, с. 39] следует возможность перенумерации этих слагаемых в определенном порядке, что позволит записать разложения в следующем виде:

$$G(t) \sim \sum_{p=1}^{\infty} a_p \exp \left[2\pi i \lambda_p t \right],$$

$$z(t) \sim \sum_{q=1}^{\infty} b_q \exp \left[2\pi i \mu_q t \right],$$

в каждом из которых новые коэффициенты должны быть суммами прежних коэффициентов с одинаковыми экспонентами, а показатели экспонент λ_p и μ_q являются конечными линейными комбинациями с целыми коэффициентами множеств частот

$$\left\{ \frac{2\pi}{\omega_1}, \dots, \frac{2\pi}{\omega_k} \right\} = K \quad \text{и} \quad \left\{ \frac{2\pi}{\Omega_1}, \dots, \frac{2\pi}{\Omega_m} \right\} = M$$

соответственно.

Покажем, что, в действительности, например в первом разложении, новые коэффициенты будут состоять только из одного слагаемого. Это равносильно тому, что все экспоненты будут

различными. Допустим, что это не так. Тогда для некоторых различных наборов индексов $p'_1, \dots, p'_k$ и $p''_1, \dots, p''_k$

$$(p'_1 - p''_1)^2 + \dots + (p'_k - p''_k)^2 \neq 0,$$

соответствующие показатели экспонент

$$\lambda' = 2\pi \left(\frac{p'_1}{\omega_1} + \dots + \frac{p'_k}{\omega_k} \right)$$

и

$$\lambda'' = 2\pi \left(\frac{p''_1}{\omega_1} + \dots + \frac{p''_k}{\omega_k} \right)$$

равны между собой. Это, в свою очередь, влечет за собой выполнение равенства

$$\frac{p'_1 - p''_1}{\omega_1} + \dots + \frac{p'_k - p''_k}{\omega_k} = 0,$$

в котором числитель, по меньшей мере одной из дробей, отличен от нуля. Последнее означает рациональную линейную зависимость обратных величин периодов

$$\frac{1}{\omega_1}, \dots, \frac{1}{\omega_k},$$

что противоречит определению квазипериодичности функции $G(t)$. Полученное противоречие завершает данный фрагмент доказательства.

Аналогично доказывается, что в последнем разложении для функции $z(t)$ новые коэффициенты также будут состоять только из одного слагаемого.

Далее возьмем произведение

$$G(t)z(t) \sim \sum_{p=1}^{\infty} a_p \exp \left[2\pi i \lambda_p t \right] \times \sum_{q=1}^{\infty} b_q \exp \left[2\pi i \mu_q t \right],$$

которое на основании свойства формального произведения рядов Фурье [22, с. 40] можно представить в виде ряда

$$G(t)z(t) \sim \sum_l c_l \exp[i\nu_l t],$$

показатели которого являются суммами показателей множителей.

Коэффициенты c_l полученного ряда суммируют всевозможные попарные произведения тех коэффициентов Фурье a_p, b_q , соответствующие которым показатели λ_p, μ_q дают одинаковые равные ν_l суммы. В силу описанного выше строения показателей λ_p и μ_q и рациональной линейной независимости множеств K и M , все суммы $\lambda_p + \mu_q$ будут попарно различны при различных парах индексов p и q . Поэтому для каждой пары p и q новый индекс l будет единственным, обеспечивающим равенство

$$\lambda_p + \mu_q = \nu_l \quad (p, q, l = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, в выражении для коэффициента c_l сумма будет состоять только из одного слагаемого вида $a_p b_q$.

В силу тождества (3) имеем

$$\sum_l c_l \exp[i\nu_l t] \sim 0.$$

Отсюда, согласно утверждению из предыдущего пункта следует, что все коэффициенты c_l , или, что то же самое, как показано выше, произведения $a_p b_q$ равны нулю при всех значениях $p, q = 1, 2, \dots$

Так как квазипериодическое решение $z(t) \neq 0$, то, по утверждению, хотя бы один из коэффициентов Фурье этого решения ненулевой. Пусть это будет векторный коэффициент $z_{n_0} = d = \text{col}(d_1, \dots, d_n) \neq 0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$). Применяя свойства формальных операций рядов Фурье [22, с. 39], получаем

$$G(t)d \sim \sum_{p=1}^{\infty} a_p d \exp(i\lambda_p t).$$

Ранее показано, что все коэффициенты $a_p b_q = 0$ ($p, q = 1, 2, \dots$). Поэтому $a_p d = 0$ при всех $k = 1, 2, \dots$. Тогда, ввиду квазипериодичности функции $G(t)d$ и утверждения имеем $G(t)d \equiv 0$, или

$$d_1 G_1(t) + \dots + d_n G_n(t) \equiv 0, \quad (d_1^2 + \dots + d_n^2) \neq 0, \quad (4)$$

где $G_1(t), \dots, G_n(t)$ – столбцы матрицы $G(t)$. Последнее тождество означает линейную зависимость столбцов квазипериодической матрицы $G(t)$. Такое свойство матрицы $G(t)$ далее будем называть условием L_G .

Таким образом, L_G – необходимое условие существования нетривиального сильно нерегулярного квазипериодического решения системы (1).

ii) Пусть условие L_G выполнено и r – наибольшее число линейно независимых столбцов матрицы $G(t)$, $1 \leq r < n$. На втором этапе доказательства опишем необходимый в дальнейшем один из алгоритмов (см., напр. [23, гл. 2]) приведения матрицы $G(t)$ к специальному виду с нулевыми столбцами.

Условие L_G означает выполнение тождества (4), в котором среди коэффициентов d_i , $i = \overline{1, n}$, имеются нетривиальные. Значит, найдется такой индекс j , $1 \leq j \leq n$, что $d_j \neq 0$. Тогда из тождества (4) находим

$$G_j(t) \equiv -\frac{d_1}{d_j} G_1(t) - \dots - \frac{d_{j-1}}{d_j} G_{j-1}(t) - \frac{d_{j+1}}{d_j} G_{j+1}(t) - \dots - \frac{d_n}{d_j} G_n(t).$$

Поэтому, умножая i -е столбцы матрицы $G(t)$ соответственно на числа d_i/d_j ($i = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$) и прибавляя их к j -му столбцу, получим нулевой столбец. Как следует из [24, с. 21], последнее преобразование равносильно умножению $G(t)$ справа на постоянную неособенную $(n \times n)$ -матрицу

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{d_1}{d_j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{d_2}{d_j} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{d_n}{d_j} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

у которой на главной диагонали стоят единицы, элементами j -го столбца являются числа

$$\frac{d_1}{d_j}, \dots, \frac{d_{j-1}}{d_j}, 1, \frac{d_{j+1}}{d_j}, \dots, \frac{d_n}{d_j},$$

а все остальные элементы нулевые.

Таким образом, у матрицы $G(t)S_1$ нулевым будет j -й столбец. Из [24, с. 21] вытекает, что для того чтобы в матрице $G(t)S_1$ поменять местами этот нулевой столбец с первым столбцом, следует умножить ее справа на постоянную неособенную $(n \times n)$ -матрицу

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

с элементами $t_{ij}^{(1)}$, у которой все внедиагональные элементы нулевые, за исключением $t_{1j}^{(1)} = t_{j1}^{(1)} = 1$, а на главной диагонали стоят единицы, кроме $t_{11}^{(1)} = t_{jj}^{(1)} = 0$.

В итоге найдем преобразование $Q_1 = S_1 T_1$, с помощью которого матрица $G(t)$ приводится к следующему виду

$$G(t)Q_1 = G^{(1)}(t) = [0 \ G_2^{(1)}(t) \ \dots \ G_n^{(1)}(t)]$$

с нулевым первым столбцом.

Если $n - r > 1$, то для столбцов $G_2^{(1)}(t), \dots, G_n^{(1)}(t)$ матрицы $G^{(1)}(t)$ найдутся вещественные коэффициенты e_j ($j = \overline{2, n}$), не все из которых нулевые, такие, что выполняется тождество

$$e_2 G_2^{(1)}(t) + \dots + e_n G_n^{(1)}(t) \equiv 0.$$

Пусть ненулевым будем некоторый коэффициент e_h , $2 \leq h \leq n$. Тогда из последнего тождества находим

$$G_h^{(1)}(t) \equiv -\frac{e_2}{e_h} G_2^{(1)}(t) - \dots - \frac{e_{h-1}}{e_h} G_{h-1}^{(1)}(t) - \frac{e_{h+1}}{e_h} G_{h+1}^{(1)}(t) - \dots - \frac{e_n}{e_h} G_n^{(1)}(t).$$

Поэтому, умножая i -е столбцы матрицы $G^{(1)}(t)$ соответственно на числа e_i/e_h ($i = 2, \dots, h-1, h+1, \dots, n$) и суммируя их с h -м столбцом, получим нулевой вектор. Укажем структуру матрицы S_2 , соответствующей этому элементарному преобразованию. Сначала по аналогии с матрицей S_1 составим вспомогательную постоянную неособенную $(n-1) \times (n-1)$ -матрицу

$$\tilde{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{e_2}{e_h} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{e_3}{e_h} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{e_n}{e_h} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

у которой на главной диагонали стоят единицы, элементами h -го столбца являются числа

$$\frac{e_2}{e_h}, \dots, \frac{e_{j-1}}{e_h}, 1, \frac{e_{j+1}}{e_h}, \dots, \frac{e_n}{e_h},$$

а все остальные элементы нулевые. Затем, учитывая необходимость сохранения без изменения первого столбца матрицы $G^{(1)}(t)$ и преобразования h -го столбца в нулевой, строим невырожденную блочно-диагональную $(n \times n)$ -матрицу

$$S_2 = \text{diag} [1, \tilde{S}_2].$$

Нетрудно видеть, что умножение матрицы $G^{(1)}(t)$ справа на S_2 приведет к матрице, у которой первый и h -й столбцы нулевые

$$G^{(1)}(t)S_2 = [0 \ G_2^{(1)} \ \dots \ G_{h-1}^{(1)} \ 0 \ G_{h+1}^{(1)} \ \dots \ G_n^{(1)}].$$

По аналогии с матрицей T_1 составим вспомогательную постоянную неособенную $(n-1) \times (n-1)$ -матрицу

$$\tilde{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

с элементами $\tilde{t}_{ij}^{(2)}$, у которой все внедиагональные элементы нулевые, за исключением $\tilde{t}_{1,h-1}^{(2)} = t_{h-1,1}^{(2)} = 1$, а на главной диагонали стоят единицы, кроме $\tilde{t}_{11}^{(2)} = \tilde{t}_{h-1,h-1}^{(2)} = 0$. Для того чтобы в матрице $G^{(1)}(t)S_2$ поменять местами h -й столбец со вторым, оставляя без изменения нулевым первый, следует умножить ее справа на постоянную неособенную блочно-диагональную $(n \times n)$ -матрицу

$$T_2 = \text{diag} [1, \tilde{T}_2].$$

Значит, у матрицы $G^{(1)}(t)S_2T_2$ будет два нулевых первых столбца

$$G^{(2)}(t) = G^{(1)}(t)Q_2 = G(t)Q_1Q_2 = [0 \ 0 \ G_3^{(2)} \ \dots \ G_n^{(2)}(t)], \quad Q_1 = S_1T_1, \quad Q_2 = S_2T_2.$$

Если $n - r > 2$, то поступая далее аналогичным образом, можно построить постоянные неособенные $(n \times n)$ -матрицы S_i, T_i ($i = 3, \dots, n - r$) такие, что у матрицы $G(t)S_1T_1 \cdots S_{n-r}T_{n-r}$ будет $n - r$ нулевых первых столбцов, в то время как остальные столбцы будут линейно независимыми. Положим

$$S_1T_1 \cdots S_{n-r}T_{n-r} = Q, \quad \det Q \neq 0.$$

Таким образом, построена постоянная неособенная $(n \times n)$ -матрица Q , с помощью которой исходная матрица $G(t)$ приводится к специальному виду

$$G(t)Q = [0 \cdots 0 \ G_{n,r}(t)],$$

в котором столбцы правого блока $G_{n,r}$ размерности $n \times r$ линейно независимы.

iii) На этом шаге, в дополнение к ii) покажем, что условие L_G является не только необходимым, но и достаточным как для существования, так и нахождения сильно нерегулярного квазипериодического решения $z(t)$. Для этого выполним замену переменной

$$z = Qy,$$

которая приводит систему (1) к системе

$$G(t)Qy = [0 \cdots 0 \ G_{n,r}(t)]y = 0.$$

Введем обозначения

$$y = \text{col}(y^{[n-r]}, y_{[r]}) \quad y^{[n-r]} = \text{col}(y_1, \dots, y_{n-r}), \quad y_{[r]} = \text{col}(y_{n-r+1}, \dots, y_n).$$

Тогда последняя система сводится к значительно более простой системе меньшей размерности

$$A_{n,r}(t)y_{[r]} = 0, \tag{5}$$

при этом компоненты вектора $y^{[n-r]}$, как видим, остаются произвольными. Поэтому с целью решения поставленной на данном этапе задачи, положим

$$y^{[n-r]} = y^{[n-r]}(t) = \xi(t), \quad \xi(t) = \text{col}(\xi_1(t), \dots, \xi_{n-r}(t)),$$

где $\xi_1(t), \dots, \xi_{n-r}(t)$ – произвольные непрерывные квазипериодические функции с периодами $\Omega_1, \dots, \Omega_m$.

Поскольку в системе (5) столбцы матрицы коэффициентов $G_{n,r}(t)$ по построению линейно независимы, то согласно результату этапа i) эта система не имеет нетривиальных сильно нерегулярных квазипериодических решений $y_{[r]} = y_{[r]}(t)$. Поэтому $y_{[r]} \equiv 0$.

Несложно убедиться, что при выполнении условия L_G исходная система (1) будет иметь нетривиальное сильно нерегулярное квазипериодическое решение

$$z(t) = Q \text{col}(y^{[n-r]}(t), 0, \dots, 0) = Q \text{col}(\xi(t), 0, \dots, 0), \quad \xi(t) = \text{col}(\xi_1(t), \dots, \xi_{n-r}(t)).$$

iv) В завершение доказательства установим зависимость между компонентами найденного решения $z(t) = Q \text{col}(\xi(t), 0, \dots, 0)$. Пусть Q_1 – блок размерности $n \times (n - r)$, составленный из первых $n - r$ столбцов матрицы Q ($r < n$). Тогда последнее равенство примет вид

$$z(t) = Q_1 \xi(t). \tag{6}$$

Поскольку построенная матрица Q невырожденная, то столбцы ее блока Q_1 , число которых равно $n - r$, будут линейно независимыми. Поэтому у блока Q_1 найдется минор порядка $n - r$, отличный от нуля. Пусть этот минор находится в строках с номерами $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-r}$, а $i_{n-r+1} < i_{n-r+2} < \dots < i_n$ – упорядоченные номера остальных строк. Пусть Q'_1 – блок размерности $(n - r) \times (n - r)$, образованный $n - r$ строками матрицы Q_1 с номерами $i_1, \dots, i_{n-r}$. Заметим, что по построению, этот блок невырожденный $\det Q'_1 \neq 0$. Через Q''_1 обозначим блок размерности $r \times (n - r)$, образованный оставшимися r строками матрицы Q_1 , т. е. строками с номерами $i_{n-r+1}, \dots, i_n$. Пусть

$$z'(t) = \text{col}(z_{i_1}(t), \dots, z_{i_{n-r}}(t)), \quad z''(t) = \text{col}(z_{i_{n-r+1}}(t), \dots, z_{i_n}(t)),$$

соответствующее согласованию размерностей разбиение вектора $z(t) = \text{col}(z_1(t), \dots, z_n(t))$. Тогда равенство (6) расщепляется на два равенства

$$z'(t) = Q'_1 \xi(t), \quad z''(t) = Q''_1 \xi(t).$$

Так как матрица Q'_1 неособенная, то из первого равенства находим $\xi(t) = (Q'_1)^{-1}z'(t)$. Подставляя найденное выражение для функции $\xi(t)$ во второе равенство, получим

$$z''(t) = Q'_1(Q'_1)^{-1}z'(t).$$

Обозначая $r \times (n-r)$ -матрицу $Q'_1(Q'_1)^{-1}$ через F , находим явную линейную зависимость между компонентами сильно нерегулярного квазипериодического решения

$$z''(t) = Fz'(t).$$

Этап iv), а вместе с ним и теорема доказаны. $\square$

Следствие 1. При $n = 1$ искомые квазипериодические решения у системы (1) отсутствуют.

Доказательство. В таком случае система (1) состоит только из одного уравнения, матрица коэффициентов $G(t)$ становится скалярной функцией и необходимое условие L_G ведет к ее тривиальности. Однако этот случай нами исключен, как не представляющий интереса для исследования. $\square$

Следствие 2. Произведение любых двух тождественно не равных нулю квазипериодических функций, частотные базисы которых образуют рационально линейно независимое множество чисел, не обращается в нуль тождественно.

Доказательство проведем от противного. Пусть найдутся квазипериодические функции $g(t) \neq 0, h(t) \neq 0$, частотные базисы которых образуют рационально линейно независимое множество, такие, что $g(t)z(t) \equiv 0$. Это означает, что линейное скалярное уравнение $g(t)z = 0$ имеет сильно нерегулярное квазипериодическое решение $z = z(t)$, что вступает в противоречие со следствием 1. Значит, наше допущение неверно и таких функций не существует. $\square$

Рассмотрим несколько достаточно прозрачных примеров, иллюстрирующих полученные результаты.

Пример 1. Линейная алгебраическая система с периодом коэффициентов, равным 2π

$$G(t)z = \begin{pmatrix} \sin t & \sin t & 1 \\ 1 & 0 & \sin t \\ \cos t & -\sin t & 0 \end{pmatrix} \text{col}(z_1, z_2, z_3) = 0$$

не имеет сильно нерегулярных периодических решений, поскольку столбцы матрицы $G(t)$ образуют линейно независимую систему векторов. Тем не менее эта система имеет так называемое регулярное решение, период которого совпадает с периодом коэффициентов самой системы

$$z_1(t) = \sin t, \quad z_2(t) = \cos t, \quad z_3(t) = -1,$$

при этом, как видим, линейная зависимость между компонентами такого решения отсутствует.

Пример 2. У квазипериодической с периодами $\omega_1 = 2\pi, \omega_2 = \sqrt{2}\pi$ линейной системы

$$G(t)z = \begin{pmatrix} \sin t & 2 \sin t & \cos \sqrt{2}t \\ \sin \sqrt{2}t & 2 \sin \sqrt{2}t & \sin t \\ \cos t & 2 \cos t & 2 \sin \sqrt{2}t + \cos t \end{pmatrix} \text{col}(z_1, z_2, z_3) = 0$$

столбцы $G_1(t), G_2(t), G_3(t)$ ее матрицы коэффициентов удовлетворяют тождеству

$$2G_1(t) + G_2(t) \equiv 0,$$

т. е. линейно независимы. Поэтому эта система имеет семейство сильно нерегулярных квазипериодических решений. Одним из таких решений будет вектор

$$z(t) = \text{col}(z_1(t), z_2(t), z_3(t)), \quad z_1(t) = \xi(t), \quad z_2(t) = -0,5\xi(t),$$

$$z_3(t) \equiv 0, \quad \xi(t) = \sin \sqrt{3}t + \cos \sqrt{5}t,$$

компоненты которого связаны следующей линейной зависимостью

$$\text{col}(z_2, z_3) = Fz_1, \quad F = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заключение. Для линейной однородной алгебраической системы с квазипериодической матрицей коэффициентов $G(t)$ приведено необходимое и достаточное условие для существования

сильно нерегулярного квазипериодического решения, которое заключается в линейной зависимости столбцов $G(t)$. Показано, что между компонентами такого решения имеется линейная зависимость. Описан алгоритм нахождения такой зависимости. Построены иллюстрирующие примеры. Помимо собственного интереса для алгебраических систем, основное назначение полученного результата – применение при решении задачи управления асинхронным спектром линейных систем с вырождением усреднения матрицы коэффициентов.

Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси по заданию 1.2.05 «Нестационарные дифференциальные системы с неустойчивым поведением редукций» ГПНИ «Конвергенция–2025» (подпрограмма «Математические модели и методы») в рамках гранта Президента Республики Беларусь.

Литература

1. Самойленко А. М. Квазипериодические решения систем линейных алгебраических уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Аналитич. методы исслед. решений нелинейных дифференц. уравнений. Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1975. С. 5–26.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГИТТЛ, 1956.
3. Хаяси Т. Вынужденные колебания в нелинейных системах. М.: Изд-во иностр. лит.-ры, 1957. 204 с.
4. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск: Изд-во АН БССР, 1963.
5. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах. М.: Мир, 1966.
6. Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С. Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970.
7. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
8. Зубов В. И. Теория колебаний. М.: Высш. шк., 1979.
9. Папалекси Н. Д. Об одном случае параметрически связанных систем // J. Phys. Acad. Sc. USSR. 1939. Т. 1. С. 373–379.
10. Пеннер Д. И., Дубошинский Я. Б., Дубошинский Д. Б. Колебания с саморегулирующимся временем взаимодействия // ДАН СССР. 1972. Т. 204, № 5. С. 1065–1066.
11. Ланда П. С., Дубошинский Я. Б. Автоколебательные системы с высокочастотными источниками энергии // Успехи физ. наук. 1989. Т. 158, вып. 4. С. 729–742.
12. Massera J. L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales // Bol. de la Facultad de Ingenieria. 1950. Vol. 4, N 1. P. 37–45.
13. Курцвейль Я., Вейвода О. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Чехосл. матем. журн. 1955. Т. 5, № 3. С. 362–370.
14. Еругин Н. П. О периодических решениях дифференциальных уравнений // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 1. С. 148–152.
15. Еругин Н. П. О периодических решениях линейной однородной системы дифференциальных уравнений // Докл. АН БССР. 1962. Т. 6, № 7. С. 407–410.
16. Гайшин И. В. Уравнения в полных производных с периодическими коэффициентами // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 8. С. 684–686.
17. Грудо Э. И. О периодических решениях с несоизмеримыми периодами периодических дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 9. С. 1499–1504.
18. Грудо Э. И. Периодические системы, имеющие решения с несоизмеримыми периодами по отношению к периоду системы // Успехи матем. наук. 1986. Т. 41, вып. 4. С. 200.
19. Грудо Э. И., Деменчук А. К. О периодических решениях с несоизмеримыми периодами линейных неоднородных периодических дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 3. С. 409–416.
20. Борухов В. Т. Сильно инвариантные подпространства неавтономных линейных периодических систем и их решения с периодом, несоизмеримым с периодом системы // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 5. С. 585–591.
21. Demenchuk A. K. Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems // Math. Bohemica. 2001. Vol. 126, N 1. P. 221–228.
22. Бор Г. Почти периодические функции. М.; Л.: ГТТИ, 1934.
23. Деменчук А. К. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2012.
24. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Наука, 1989.

References

1. Samoilenko A. S. Quasiperiodic solutions of linear systems algebraic equations with quasiperiodic coefficients *Analytical methods for studying solutions of nonlinear differential equations*. Kiev, Inst. of Math. of Acad. of Sc. of Ukrainian SSR, 1975, pp. 5–26 (in Russian).
2. Malkin I. G. *Some problems of the theory of nonlinear oscillations*. Moscow, GITTL, 1956 (in Russian).
3. Hajassi T. *Forced oscillations in nonlinear systems*. Moscow, IIL, 1957 (in Russian).
4. Erugin N. P. *Linear systems of ordinary differential equations with periodic and quasiperiodic coefficients*. Minsk, Izd. Acad. of Sc. of BSSR, 1963 (in Russian).
5. Hale J. *Oscillations in nonlinear systems*. Moscow, Mir, 1966 (in Russian).
6. Kasnoselskii M. A., Burd V. Sh., Kolesovcov Yu. S. *Nonlinear almost periodic oscillations*. Moscow, Nauka, 1970 (in Russian).
7. Yakubovich V. A., Starginskii V. M. *Linear differential equations with periodic coefficients and their applications*. Moscow, Nauka, 1972 (in Russian).
8. Zubov V. I. *Theory of oscillations*. Moscow, Vysshaja Shkola, 1979 (in Russian).
9. Papaleksi N. D. On one case of parametrically related systems. *Journ. Of Phys. Acad. of Sc. of USSR*, 1939, vol. 1, pp. 373–379 (in Russian).
10. Penner D. I., Duboshinskii Ya. B., Duboshinskii D. B. Oscillations with self-regulating interaction time. *Doklady Acad. of Sc. of USSR*, 1972, vol. 204, no. 5, pp. 1065–1066.
11. Landa P. S., Duboshinskii Ya. B. Self-oscillatory systems with high-frequency energy sources. *Uspekhi Fiz. Nauk*, 1989, vol. 158, no. 4, pp. 729–742 (in Russian).
12. Massera J. L. Observaciones sobre las soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales. *Bol. de la Facultad de Ingenieria*, 1950, vol. 4, no. 1, pp. 37–45.
13. Kurzweil Ya., Veyvoda O. On periodic and almost periodic solutions of systems of ordinary differential equations. *Czechosl. Math. J.*, 1955, vol. 5, no. 3, pp. 362–370.
14. Erugin N. P. On periodic solutions of differential equations. *Priklad. Math. and Mech.*, 1956, vol. 20, no. 1, pp. 148–152 (in Russian).
15. Erugin N. P. On periodic solutions of linear homogeneous systems of differential equations. *Doklady Acad. of Sc. of BSSR*, 1962, vol. 6, no. 7, pp. 407–410 (in Russian).
16. Gaishun I. V. Total derivative equations with periodic coefficients. *Doklady Acad. of Sc. of BSSR*, 1979, vol. 23, no. 8, pp. 684–686 (in Russian).
17. Grudo E. I. On periodic solutions with incommensurable periods of periodic differential systems. *Differ. Uravn.*, 1986, vol. 22, no. 9, pp. 1499–1504 (in Russian).
18. Grudo E. I. Periodic systems having solutions with incommensurate periods in relation to the period of the system. *Uspekhi Math. Nauk*, 1986, vol. 41, no. 4, p. 200 (in Russian).
19. Grudo E. I., Demenchuk A. K. On periodic solutions with incommensurate periods of linear inhomogeneous periodic differential systems. *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 3, pp. 409–416 (in Russian).
20. Borukhov V. T. Strongly invariant subspaces of non-autonomous linear periodic systems and solutions whose period is incommensurable with the period of the system itself. *Differential Equations*, 2018, vol. 54, pp. 578–585. <https://doi.org/10.1134/S0012266118050026>
21. Demenchuk A. K. Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems. *Math. Bohemica*, 2001, vol. 126, no. 1, pp. 221–228.
22. Bohr G. *Almost periodic functions*. Moscow–Leningrad, GTTIH, 1934 (in Russian).
23. Demenchuk A. K. *Asynchronous oscillations in differential systems. Conditions of existence and control*. Saarbrücken, Lambert Academic Publishing, 2012 (in Russian).
24. Horn R., Johnson Ch. *Matrix analysis*. Moscow, Nauka, 1989 (in Russian).

УДК 517.965

ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ НА ПРЯМОЙ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М. В. Карпук, П. А. Худякова

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
e-mail: m.vasilitch@gmail.com

Поступила: 25.03.2024

Исправлена: 07.06.2024

Принята: 18.06.2024

Ключевые слова: линейное функциональное уравнение, траекторный подход, одномерная динамика, линейные рекуррентные последовательности.

Аннотация. В работе даны критерий существования и полное описание непрерывных на прямой решений линейного функционального уравнения $f(f(x)) + af(x) + bx = 0$ второго порядка с постоянными коэффициентами.

A COMPLETE DESCRIPTION OF CONTINUOUS ON THE REAL LINE SOLUTIONS OF THE LINEAR FUNCTIONAL EQUATION OF THE SECOND ORDER WITH CONSTANT COEFFICIENTS

M. V. Karpuk, P. A. Khudziakova

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
e-mail: m.vasilitch@gmail.com

Received: 25.03.2024

Revised: 07.06.2024

Accepted: 18.06.2024

Keywords: linear functional equation, trajectory approach, one-dimensional dynamics, linear recurrent sequences.

Abstract. The paper provides an existence criterion and a complete description of continuous solutions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ of the linear second-order functional equation $f(f(x)) + af(x) + bx = 0$ with constant coefficients.

1. Введение. Рассмотрим линейное функциональное уравнение n -го порядка первого класса

$$f^{\circ n}(x) + a_{n-1}f^{\circ(n-1)}(x) + \dots + a_1f(x) + a_0x = 0 \quad (1)$$

с постоянными коэффициентами $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n-1$ (здесь, следуя [1, с. 55], через $f^{\circ k}(\cdot)$ обозначена k -я итерация отображения $f(\cdot)$, т. е. $f^{\circ k}(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{f(f(\dots f(x) \dots))}_{k \text{ раз}}$), где $k \in \mathbb{N}_0$ и $\mathbb{N}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N} \sqcup \{0\}$,

в частности, $f^{\circ 1}(x) \equiv f(x)$ и $f^{\circ 0}(x) \equiv x$; название уравнения (1) дано по классификации [2, с. 699]. Задачи исследования разрешимости функциональных уравнений или нахождения их решений в некотором классе функций являются классическими; тем не менее, для простейшего функционального уравнения, каковым является уравнение (1), полное качественное и аналитическое исследование его решений в наиболее естественных классах функций в общем случае отсутствует. Его качественное исследование (количество решений и характер их поведения в зависимости от коэффициентов) имеется [3, с. 54–71] только в случае $n = 2$ для класса непрерывных решений $f(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Что касается аналитического исследования и представления непрерывных решений уравнения (1) в случае $n = 2$, то формулы, приведенные в [3, с. 66–69], используют непрерывные периодические решения других (более простых) функциональных уравнений и, во всяком случае, не дают ясного и единообразного представления о совокупности его непрерывных решений. В настоящей работе мы дополняем качественное исследование [3] непрерывных решений $f(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$f(f(x)) + af(x) + bx = 0, \quad (2)$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, полным описанием таких решений. Естественно, попутно получается и качественная картина распределения и характера непрерывных решений $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (2) в плоскости Oab коэффициентов – она полностью совпадает с результатами [3].

2. Предварительные рассуждения. Основной метод исследования, применяемый в работе, хорошо известен: в [4, с. 124] он назван траекторным подходом, а в [2, с. 703] – методом сведения к уравнениям в конечных разностях, и применительно к уравнению (2) (или, более общо, к уравнению (1)) состоит в следующем. Пусть $f(\cdot)$ – какое-либо решение уравнения (1) (не обязательно непрерывное и, вообще говоря, $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$). Зафиксируем значение $x \in \mathbb{C}$ и рассмотрим последовательность (x_n) такую, что $x_n = f^{on}(x)$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = f(f(x_n)) + af(x_n) + bx_n = 0$. Таким образом, последовательность (x_n) является рекуррентной линейной последовательностью второго порядка с характеристическим многочленом $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ (обозначим его корни через λ_1 и λ_2 и сохраним за ними это обозначение на протяжении всей статьи). Формула n -го члена этой комплекснозначной рекуррентной последовательности хорошо известна (см., например, [5, с. 25, 40]):

$$x_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n, \quad \text{если } \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \text{и } x_n = (c_1 n + c_2) \lambda^n, \quad \text{если } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad (3)$$

где $n \in \mathbb{Z}$, а c_1 и c_2 – произвольные комплексные постоянные. Таким образом, задача о решениях уравнения (2) в некотором функциональном классе сводится, фактически, к вопросу о том, можно ли из таких последовательностей «склеить» функцию, принадлежащую этому функциональному классу (в работе – классу непрерывных функций $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).

Вследствие первой формулы в (3): если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $f^{on}(x) = c_1(x) \lambda_1^n + c_2(x) \lambda_2^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, где $c_1(x)$ и $c_2(x)$ – постоянные (свои для каждого x). Поскольку $f^{o0}(x) = x$ и $f^{o1}(x) = f(x)$, то для нахождения постоянных $c_1(x)$ и $c_2(x)$ имеем систему уравнений
$$\begin{cases} c_1(x) + c_2(x) = x, \\ c_1(x) \lambda_1 + c_2(x) \lambda_2 = f(x), \end{cases} \quad \text{решая которую, находим}$$

$$c_i(x) = (\lambda_i - \lambda_{3-i})^{-1} (f(x) - \lambda_{3-i} x), \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, то вследствие второй формулы в (3) $f^{on}(x) = (c_1(x)n + c_2(x)) \lambda^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, где $c_1(x)$ и $c_2(x)$ – постоянные (свои для каждого x). Так же, как и в предыдущем случае, получаем линейную систему
$$\begin{cases} c_2(x) = x, \\ (c_1(x) + c_2(x)) \lambda = f(x), \end{cases} \quad \text{откуда находим}$$

$$c_1(x) = f(x) \lambda^{-1} - x \quad \text{и} \quad c_2(x) = x. \quad (5)$$

Таким образом, имеет место

Лемма 1. Пусть $f(\cdot)$ – функция, удовлетворяющая уравнению (2).

Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то для любого x из области определения функции $f(\cdot)$ верны равенства

$$f^{on}(x) = c_1(x) \lambda_1^n + c_2(x) \lambda_2^n \quad \text{и} \quad f(c_1(x) \lambda_1^n + c_2(x) \lambda_2^n) = c_1(x) \lambda_1^{n+1} + c_2(x) \lambda_2^{n+1}, \quad (6)$$

где функции $c_i(\cdot)$, $i = 1, 2$, задаются формулами (4).

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, то для любого x из области определения функции $f(\cdot)$ верны равенства

$$f^{on}(x) = (c_1(x)n + c_2(x)) \lambda^n \quad \text{и} \quad f((c_1(x)n + c_2(x)) \lambda^n) = (c_1(x)(n+1) + c_2(x)) \lambda^{n+1}, \quad (7)$$

где функции $c_i(\cdot)$, $i = 1, 2$, задаются формулами (5).

Вообще говоря, знание функций $c_1(\cdot)$ и $c_2(\cdot)$ равносильно знанию решения $f(\cdot)$ уравнения (2). Однако равенства (6) и (7) позволяют в явном виде выписывать итерации $f^{on}(\cdot)$ этого решения. Описание решений уравнения (2), данное в работе, основано на детальном изучении свойств функций $c_1(\cdot)$ и $c_2(\cdot)$ в зависимости от того, какие значения принимают коэффициенты a и b .

Нетрудно видеть, что в случае, когда корни характеристического многочлена вещественны, тождественные равенства $c_1(x) \equiv 0$ или $c_2(x) \equiv 0$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $c_1(x) \equiv 0$ при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ задают линейные решения $f(x) = \lambda_2 x$, $f(x) = \lambda_1 x$ и $f(x) = \lambda x$ уравнение (2) соответственно. Такие решения назовем тривиальными (к ним также отнесем решение $f(x) \equiv 0$ при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$) и в дальнейшем нас будут интересовать в первую очередь нетривиальные решения уравнения (2).

Непрерывные определенные на всей вещественной прямой вещественнозначные решения уравнения (2) называем далее его $C(\mathbb{R})$ -решениями. Через $\mathbb{R}_-$ и $\mathbb{R}_+$ обозначаются интервалы

$(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ соответственно, а $\overline{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$ (порядок на $\overline{\mathbb{R}}$ естественный: $-\infty < r < +\infty$ для любого $r \in \mathbb{R}$). Тожественно постоянное отображение обозначаем id . Также примем следующее соглашение: если в записи $[\alpha, \beta]$ какое-нибудь из значений α, β равняется ∞ , то считаем, что соответствующий конец не включается в отрезок. Кроме того, считаем, что отрезок $[\alpha, \alpha]$ обозначает точку α , а интервал (α, α) – пустое множество.

3. Вырожденный случай. Рассмотрим отдельно уравнения (2), в которых $b = 0$. Такие уравнения имеют вид

$$f(f(x)) + af(x) = 0$$

и представляют собой линейные функциональные уравнения первого порядка, определенные на множестве значений функции $f(\cdot)$. Условие $b = 0$ равносильно равенству $\lambda_1 \lambda_2 = 0$, не ограничивая общности, в этом разделе будем считать, что $\lambda_1 = 0$. Тогда $\lambda_2 = -a$ и уравнение (2) запишется как

$$f(f(x)) = \lambda_2 f(x). \quad (8)$$

Пусть $f(\cdot)$ – $C(\mathbb{R})$ -решение этого уравнения. Из равенства (8) видно, что $f(x) = \lambda_2 x$ для любого $x \in f(\mathbb{R})$. Из непрерывности $f(\cdot)$ следует, что $f(\mathbb{R})$ – некоторый непустой промежуток, концы которого обозначим через $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$. Из непрерывности $f(\cdot)$ также следует, что $f(x) = \lambda_2 x$ на тех концах указанного промежутка, которые являются конечными числами. Поэтому можно считать, что $f(x) = \lambda_2 x$ при всех вещественных $x \in [\alpha, \beta]$. Случаи $\alpha = \beta$ и $\alpha = -\infty, \beta = +\infty$ очевидным образом соответствуют тривиальным решениям $f(x) \equiv 0$ и $f(x) = \lambda_2 x$ соответственно. Пусть далее $\alpha \neq \beta$ и по крайней мере одно из этих чисел вещественное. Рассматривая возможные значения величин α и β в зависимости от значения λ_2 , получаем полное описание нетривиальных $C(\mathbb{R})$ -решений уравнения (8):

Теорема 1. 1. Если $\lambda_2 > 1$, то все нетривиальные $C(\mathbb{R})$ -решения уравнения (8) составляют два семейства:

$$1) f(x) = \begin{cases} \lambda_2 x, & \text{если } x \geq \alpha, \\ \varphi(x), & \text{если } x < \alpha, \end{cases} \quad \text{где } \alpha \geq 0 - \text{произвольное число, а } \varphi(x): (-\infty, \alpha] \rightarrow [\alpha, +\infty) -$$

произвольная непрерывная функция такая, что $\varphi(\alpha) = \lambda_2 \alpha$ и $\inf(\varphi((-\infty, \alpha])) = \alpha$;

$$2) f(x) = \begin{cases} \lambda_2 x, & \text{если } x \leq \beta, \\ \psi(x), & \text{если } x > \beta; \end{cases} \quad \text{где } \beta \leq 0 - \text{произвольное число, а } \psi(x): [\beta, +\infty) \rightarrow (-\infty, \beta] -$$

произвольная непрерывная функция такая, что $\psi(\beta) = \lambda_2 \beta$ и $\sup(\psi([\beta, +\infty))) = \beta$.

2. Если $\lambda_2 < -1$, то уравнение (8) не имеет нетривиальных $C(\mathbb{R})$ -решений.

3. Если $|\lambda_2| \leq 1$, то каждое $C(\mathbb{R})$ -решение $f(\cdot)$ уравнения (8) задается следующим образом: $f(x) = \lambda_2 x$ при $x \in [\alpha, \beta]$, а при $x \notin (\alpha, \beta)$ функция $f(\cdot)$ – любая непрерывная функция, значения которой принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$ и $\inf(f(\mathbb{R} \setminus (\alpha, \beta))) = \alpha$, $\sup(f(\mathbb{R} \setminus (\alpha, \beta))) = \beta$. При $\lambda_2 \geq 0$ в качестве отрезка $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, может быть взят любой отрезок, удовлетворяющий условию $[\lambda_2 \alpha, \lambda_2 \beta] \subset [\alpha, \beta]$, а при $\lambda_2 < 0$ – любой отрезок, удовлетворяющий условию $[\lambda_2 \beta, \lambda_2 \alpha] \subset [\alpha, \beta]$.

Доказательство. Рассмотрим пункт 1 теоремы. Пусть $t \in \{\alpha, \beta\}$ – вещественное число. Если $t \neq 0$, то число $\lambda_2 t$ имеет тот же знак, что t , и является значением функции, большим, чем t по модулю. При $t = \beta > 0$ и $t = \alpha < 0$ получим противоречие с $f(t) \in [\alpha, \beta]$, следовательно, представляются только две возможности: $[\alpha, \beta] = [\alpha, +\infty)$, где $\alpha \geq 0$, и $[\alpha, \beta] = (-\infty, \beta]$, где $\beta \leq 0$. В первом случае ограничение $\varphi = f|_{(-\infty, \alpha]}$ непрерывной функции $f(x)$ является непрерывной функцией и ее множество значений вложено в множество $f(\mathbb{R}) \subset [\alpha, +\infty)$, т. е. функция $f(x)$

принадлежит семейству $f(x) = \begin{cases} \lambda_2 x, & \text{если } x \geq \alpha, \\ \varphi(x), & \text{если } x < \alpha. \end{cases}$ Аналогично, во втором случае $f(x)$ принадле-

жит семейству $f(x) = \begin{cases} \lambda_2 x, & \text{если } x \leq \beta, \\ \psi(x), & \text{если } x > \beta. \end{cases}$ Условия $\varphi(\alpha) = \lambda_2 \alpha$, $\inf(\varphi((-\infty, \alpha])) = \alpha$, $\psi(\beta) = \lambda_2 \beta$

и $\sup(\psi([\beta, +\infty))) = \beta$ следуют из непрерывности функции $f(x)$ и того, что $f(\mathbb{R})$ – промежуток с концами α, β . Нетрудно видеть, что любой представитель каждого из этих семейств является нетривиальным $C(\mathbb{R})$ -решением уравнения (8).

В пункте 2 предположим, что $f(x)$ – непостоянное $C(\mathbb{R})$ -решение. Выберем ненулевое вещественное число $t \in (\alpha, \beta)$. Так как $\lambda_2 < -1$, то одна из последовательностей $t, \lambda_2^2 t, \lambda_2^4 t, \dots$ и

$\lambda_2 t, \lambda_2^3 t, \lambda_2^5 t, \dots$ стремится к $+\infty$, а другая – к $-\infty$, откуда, по теореме о промежуточном значении, вытекает, что $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Последнее равенство означает, что $f(x) = \lambda_2 x$ при всех $x \in \mathbb{R}$, т. е. $f(x)$ – тривиальное решение.

В пункте 3 условия $[\lambda_2 \alpha, \lambda_2 \beta] \subset [\alpha, \beta]$ и $[\lambda_2 \beta, \lambda_2 \alpha] \subset [\alpha, \beta]$ при разных знаках числа λ_2 вытекают непосредственно из того, что промежуток $[\alpha, \beta]$ содержит множества значений $f([\alpha, \beta]) = [\lambda_2 \alpha, \lambda_2 \beta]$ и $f([\alpha, \beta]) = [\lambda_2 \beta, \lambda_2 \alpha] \subset [\alpha, \beta]$ соответственно, а условия $\inf(f(\mathbb{R} \setminus (\alpha, \beta))) = \alpha$ и $\sup(f(\mathbb{R} \setminus (\alpha, \beta))) = \beta$ следуют из того, что $[\alpha, \beta] = f(\mathbb{R})$. Нетрудно видеть, что все функции, указанные в формулировке данного пункта, являются $C(\mathbb{R})$ -решениями уравнения (8). $\square$

4. Общий случай. Необходимые условия. Везде далее считаем, что коэффициент b уравнения (2) ненулевой и, в частности, $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Опишем условия, которым удовлетворяют $C(\mathbb{R})$ -решения уравнения (2).

Лемма 2. Любое $C(\mathbb{R})$ -решение $f(\cdot)$ уравнения (2) является строго монотонной и взаимнооднозначной функцией из $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Докажем вначале инъективность функции $f(\cdot)$. Предположим, что $x_1 \neq x_2$, но $f(x_1) = f(x_2)$, где $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Тогда $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ и из равенства $f(f(x_1)) + af(x_1) + bx_1 = 0 = f(f(x_2)) + af(x_2) + bx_2$ следует, что $bx_1 = bx_2$, откуда $x_1 = x_2$, так как $b \neq 0$. Противоречие.

Поскольку функция $f(\cdot)$ инъективна и по условию непрерывна, то она строго монотонна. Чтобы доказать ее взаимнооднозначность, достаточно показать, что она не ограничена ни при $x \rightarrow +\infty$, ни при $x \rightarrow -\infty$.

Для этого перепишем уравнение (2) в виде $f(f(x)) + af(x) = -bx$ и докажем, что левая часть записанного равенства ограничена при $x \rightarrow +\infty$ в случае, если ограничена при $x \rightarrow +\infty$ функция $f(\cdot)$. Действительно, в таком случае функция $f(\cdot)$ имеет конечный предел L при $x \rightarrow +\infty$. Следовательно, для некоторого $r \in \mathbb{R}$ при $x > r$ выполняется неравенство $L - 1 < f(x) < L + 1$, и в силу монотонности $f(\cdot)$ число $f(f(x))$ лежит между $f(L - 1)$ и $f(L + 1)$. А это означает ограниченность при $x \rightarrow +\infty$ функций $f^{\circ 2}(\cdot)$ и $(f^{\circ 2} + af)(\cdot)$. Последнее невозможно в силу равенства $f(f(x)) + af(x) = -bx$, поскольку $b \neq 0$.

То, что $f(\cdot)$ не ограничена при $x \rightarrow -\infty$, доказывается аналогичными рассуждениями. $\square$

Вследствие леммы 2 для любого $C(\mathbb{R})$ -решения $f(\cdot)$ уравнения (2), где $b \neq 0$, определена обратная функция $f^{-1}(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Поэтому, считая, что для $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$, по определению $f^{\circ k}(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} (f^{-1})^{\circ(-k)}(\cdot)$, и учитывая, что последовательность $x_n = f^{\circ n}(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x = \text{fix}$, удовлетворяет тому же, что и выше, рекуррентному соотношению, а равенства (3) имеют место при всех $n \in \mathbb{Z}$, получаем точно такими же рассуждениями, как и перед формулировкой леммы 1, что справедлива

Лемма 3. Если $f(\cdot)$ – $C(\mathbb{R})$ -решение уравнения (2), то для каждого $x \in \mathbb{R}$ последовательность $(f^{\circ n}(x))$ корректно определена при $n \in \mathbb{Z}$ и ее значения для $n \in \mathbb{Z}$ даются теми же формулами, что и в лемме 1, т. е. формулами (6), (4), если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и формулами (7), (5), если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Теорема 2. Если числа $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то уравнение (2) не имеет $C(\mathbb{R})$ -решений.

Доказательство. Пусть $f(\cdot)$ – $C(\mathbb{R})$ -решение уравнения (2). Так как $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то дискриминант квадратного трехчлена $\lambda^2 + a\lambda + b$ отрицателен и поэтому $b > 0$. По лемме 2 функция $f(\cdot)$ строго монотонна, а значит, функция $f^{\circ 2}(\cdot)$ монотонно возрастает.

Если $a = 0$, то уравнение (2) переписывается в виде $f(f(x)) = -bx$, а значит, $C(\mathbb{R})$ -решений не имеет: правая часть равенства – монотонно убывающая, а левая – монотонно возрастающая функции.

Если же $a \neq 0$, то корни λ_1 и λ_2 являются взаимно сопряженными не чисто мнимыми комплексными числами, т. е. $\lambda_k = \rho(\cos \omega - (-1)^k i \sin \omega)$, $k = 1, 2$, где $\omega \in (0, \pi) \setminus \{\pi/2\}$, $\rho \in \mathbb{R}_+$. Рассмотрим последовательность $z_n = f^{\circ 2n}(1)$, $n \in \mathbb{N}_0$. В силу леммы 3 верны равенства $z_n = c_1(1)\lambda_1^{2n} + c_2(1)\lambda_2^{2n} = \rho^{2n}(d_1 \cos(2n\omega) + d_2 \sin(2n\omega))$, где d_1 и d_2 – некоторые не зависящие от n вещественные постоянные, не равные нулю одновременно. Поскольку $d_1 \cos(2n\omega) + d_2 \sin(2n\omega) = d_0 \sin(2n\omega + \omega_0)$, где $d_0 = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} \neq 0$ и $\omega_0 = \arcsin(d_1 / \sqrt{d_1^2 + d_2^2})$, то $z_n = d_0 \rho^{2n} \sin(2n\omega + \omega_0)$. Из этого равенства заключаем, поскольку $\omega \in (0, \pi) \setminus \{\pi/2\}$, что последовательность $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ при сколь угодно больших n принимает значения разных знаков. Но это невозможно: так как $z_n = f^{\circ 2n}(1)$ и функция $f^{\circ 2}(\cdot)$ монотонно возрастает, последовательность $z_n = f^{\circ 2n}(1)$ должна быть монотонной. $\square$

Вследствие доказанной теоремы далее будем предполагать корни λ_1 и λ_2 ненулевыми вещественными числами. Кроме того, для сокращения формулировок теорем, не ограничивая общности будем считать, что $\lambda_1 \leq \lambda_2$.

Лемма 4. Пусть $b > 0$. Тогда любое $C(\mathbb{R})$ -решение уравнения (2) строго возрастает, если $a < 0$, и строго убывает, если $a > 0$.

Доказательство. Перепишем уравнение (2) в виде $f(f(x)) + bx = -af(x)$. Функция $f(\cdot)$ строго монотонна по лемме 2, а значит, функция $f^{\circ 2}(\cdot)$ возрастает и, так как $b > 0$, то $f(f(x)) + bx \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Но, поскольку $f(f(x)) + bx = -af(x)$, то и $(-af(x)) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Поэтому функция $f(\cdot)$ в силу своей монотонности убывает, если $a > 0$, и возрастает, если $a < 0$. $\square$

Лемма 5. Пусть $a < 0$ и $b > 0$, а корни λ_1 и λ_2 различны и отличны от единицы. Тогда для любого $C(\mathbb{R})$ -решения $f(\cdot)$ уравнения (2) одно из неравенств

$$c_1(x)\lambda_1^n + c_2(x)\lambda_2^n < c_1(x)\lambda_1^{n+1} + c_2(x)\lambda_2^{n+1} \quad \text{или} \quad c_1(x)\lambda_1^n + c_2(x)\lambda_2^n > c_1(x)\lambda_1^{n+1} + c_2(x)\lambda_2^{n+1}$$

выполняется для всех $x \in \mathbb{R}_+$ и $n \in \mathbb{Z}$, где $c_i(x)$, $i = 1, 2$, задаются равенствами (4).

Доказательство. Если $f(x) \neq x$ для любого $x \in \mathbb{R}$, то одно из неравенств $f(x) < x$ и $f(x) > x$ выполняется для всех $x \in \mathbb{R}$, так как функция $f(\cdot)$ непрерывна. Подставляя $x = c_1(x)\lambda_1^n + c_2(x)\lambda_2^n$ в это неравенство, получим требуемое в силу леммы 3 и формул (6).

Если $f(x_0) = x_0$ для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}$, то $x_0 = 0$. Действительно, подставляя $x = x_0$ в уравнение (2) и учитывая, что $a = -\lambda_1 - \lambda_2$, $b = \lambda_1\lambda_2$, получим $x_0(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) = 0$, откуда, так как по предположению $\lambda_1 \neq 1$ и $\lambda_2 \neq 1$, вытекает, что $x_0 = 0$. Так как $a < 0$ и $b > 0$, то по лемме 4 любое решение уравнения (2) строго возрастает, поэтому из $f(0) = 0$ следует, что $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$, а значит, $f^{\circ n}(x) > 0$ при любых $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}_+$. Поскольку $f(x) \neq x$ для любого ненулевого x , то одно из неравенств $f(x) > x$ или $f(x) < x$ выполняется для всех положительных x . Подставляя в это неравенство $f^{\circ n}(x)$ вместо x и пользуясь леммой 3 и формулами (6), получаем нужное неравенство. $\square$

Для дальнейшего отметим, что, поскольку $C(\mathbb{R})$ -решение $f(\cdot)$ уравнения (2) по определению непрерывно, то отвечающие ему функции $c_i(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, задаваемые равенствами (4) или (5), также являются непрерывными.

Лемма 6. Пусть корни λ_1 и λ_2 положительны, различны и отличны от единицы. Тогда сужение $c_i|_{\mathbb{R}_+}(\cdot)$ каждой из функций $c_i(\cdot)$ на $\mathbb{R}_+$, $i = 1, 2$, является знакопостоянной функцией, и для всех положительных x справедливо одно из утверждений:

1. $c_1(x) \geq 0$ и $c_2(x) \geq 0$, если $1 < \lambda_1 < \lambda_2$ или $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$;
2. $c_1(x)c_2(x) \leq 0$, если $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$.

Доказательство. Заметим, что условия, накладываемые на корни λ_1 и λ_2 , равносильны предположениям леммы 5, поэтому одно из неравенств

$$c_1(x)\lambda_1^n + c_2(x)\lambda_2^n < c_1(x)\lambda_1^{n+1} + c_2(x)\lambda_2^{n+1} \quad \text{или} \quad c_1(x)\lambda_1^n + c_2(x)\lambda_2^n > c_1(x)\lambda_1^{n+1} + c_2(x)\lambda_2^{n+1}$$

выполняется для всех $x \in \mathbb{R}_+$ и $n \in \mathbb{Z}$.

Перепишем первое из них в виде: $c_1(x)(1 - \lambda_1) < c_2(x)(\lambda_2 - 1)(\lambda_2\lambda_1^{-1})^n$. Так как по предположению отношение $\lambda_2\lambda_1^{-1}$ положительно и отлично от единицы, а число n может принимать любые целые значения, то $c_1(x)(1 - \lambda_1) \leq 0 \leq c_2(x)(\lambda_2 - 1)$ при любом $x \in \mathbb{R}_+$. Точно так же из второго неравенства получаем: $c_1(x)(1 - \lambda_1) \geq 0 \geq c_2(x)(\lambda_2 - 1)$ при любом $x \in \mathbb{R}_+$.

Следовательно, если корни λ_1 и λ_2 лежат по одну сторону от 1, то $c_1(x)c_2(x) \geq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}_+$, и, так как $c_1(x) + c_2(x) = x > 0$, то числа $c_1(x)$ и $c_2(x)$ неотрицательны. Если же корни λ_1 и λ_2 лежат по разные стороны от 1, то из полученных неравенств вытекает, что либо $c_1(x) \leq 0 \leq c_2(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}_+$, либо $c_1(x) \geq 0 \geq c_2(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}_+$. $\square$

Лемма 7. Если $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$, то для любого $C(\mathbb{R})$ -решения $f(\cdot)$ уравнения (2) каждая из функций $c_i(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, нестрого возрастает.

Доказательство. По лемме 2 функция $f(\cdot)$ строго монотонна. Значит, функция $f^{\circ 2k}(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ строго возрастает при любом $k \in \mathbb{Z}$, т. е. $f^{\circ 2k}(x_1) < f^{\circ 2k}(x_2)$ для любых вещественных $x_1 < x_2$ и всех $k \in \mathbb{Z}$. Заменяя в этом соотношении $f^{\circ 2k}(\cdot)$ согласно первой формуле в равенствах (6), получаем, что $c_1(x_1)\lambda_1^{2k} + c_2(x_1)\lambda_2^{2k} < c_1(x_2)\lambda_1^{2k} + c_2(x_2)\lambda_2^{2k}$, или $c_1(x_1) - c_1(x_2) < (c_2(x_2) - c_2(x_1))(\lambda_2^2\lambda_1^{-2})^k$. Так как $\lambda_2^2\lambda_1^{-2} \neq 1$, а число k может принимать любые целые значения, то $c_1(x_1) - c_1(x_2) \leq 0 \leq c_2(x_2) - c_2(x_1)$ для любых вещественных $x_1 < x_2$. $\square$

Теорема 3. 1. Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 1$, то единственным $C(\mathbb{R})$ -решением уравнения (2) является функция $f(x) = \lambda x$;

2. Если выполнено любое из условий а) $\lambda_1 \in (-\infty, 0)$, $\lambda_2 \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$, $\lambda_2 \neq -\lambda_1$, или б) $\lambda_1 < -1 < \lambda_2 < 0$, то уравнение (2) имеет ровно два $C(\mathbb{R})$ -решения: $f(x) = \lambda_1 x$ и $f(x) = \lambda_2 x$;

3. Если $\lambda_2 = 1$ и выполнено любое из условий а) $\lambda_1 \in (-\infty, 0) \setminus \{-1\}$, или б) $\lambda_1 = 1$, то все $C(\mathbb{R})$ -решения уравнения (2) задаются равенствами $f(x) = x$ и $f(x) = \lambda_1 x + c$, где $c \in \mathbb{R}$ – произвольная константа.

Доказательство. Сначала покажем, что во всех случаях, кроме 2б), $C(\mathbb{R})$ -решения уравнения (2) имеют вид: $f(x) = \lambda_i x + c$, где $c \in \mathbb{R}$ – произвольная константа и $i \in \{1, 2\}$.

В случаях 2а) и 3а) числа λ_1 и λ_2 удовлетворяют условиям леммы 7 и, кроме того, $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. По лемме 2 функция $f(\cdot)$ строго монотонна, следовательно, функция $f^{\circ 2k+1}(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ либо возрастает для любого $k \in \mathbb{Z}$, либо убывает для любого $k \in \mathbb{Z}$, и поэтому такие же рассуждения, как и в доказательстве леммы 7, дают, что одно из неравенств $(c_1(x_1) - c_1(x_2))\lambda_1 \leq 0 \leq (c_2(x_2) - c_2(x_1))\lambda_2$ и $(c_1(x_1) - c_1(x_2))\lambda_1 \geq 0 \geq (c_2(x_2) - c_2(x_1))\lambda_2$ выполняется для всех вещественных $x_1 < x_2$. Так как $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, то любое из этих неравенств влечет нестрогое убывание одной из функций $c_1(\cdot)$ или $c_2(\cdot)$, а значит, в силу установленного в лемме 7 возрастания каждой из них, – ее равенство константе. Следовательно, взяв в равенстве (4) в качестве функции $c_i(\cdot)$ ту, которая равна тождественно постоянной, заключаем, что все $C(\mathbb{R})$ -решения уравнения (2) имеют вид $f(x) = \lambda_1 x + c$ или $f(x) = \lambda_2 x + c$, где c – некоторая вещественная постоянная.

В случаях 1) и 3б) из леммы 2 следует монотонность и взаимнооднозначность любого $C(\mathbb{R})$ -решения $f(\cdot)$ уравнения (2), а значит, и возрастание функции $f^{\circ 2k}(\cdot)$ при любом $k \in \mathbb{Z}$, т. е. $f^{\circ 2k}(x_1) < f^{\circ 2k}(x_2)$ для любых вещественных $x_1 < x_2$ и всех $k \in \mathbb{Z}$. Обозначая $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и заменяя в предыдущем неравенстве $f^{\circ 2k}(\cdot)$ согласно лемме 3, равенствам (5) и первому равенству в (7), получаем, что для любых вещественных $x_1 < x_2$ и всех $k \in \mathbb{Z}$ верно неравенство $x_1 \lambda^{2k} + 2k \lambda^{2k-1} (f(x_1) - \lambda x_1) < x_2 \lambda^{2k} + 2k \lambda^{2k-1} (f(x_2) - \lambda x_2)$, которое равносильно $2k \lambda ((f(x_1) - \lambda x_1) - (f(x_2) - \lambda x_2)) < \lambda^2 (x_2 - x_1)$. Поскольку k может принимать любые целые значения, то из последнего неравенства следует, что функция $(f - \lambda \text{id})(\cdot)$ постоянна на $\mathbb{R}$, и поэтому любое $C(\mathbb{R})$ -решение уравнения (2) имеет вид $f(x) = \lambda x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Подставив $f(x) = \lambda_i x + c$ в (2), получим равенство $c(1 - \lambda_{3-i}) = 0$. Таким образом, во всех случаях, кроме 2б), все $C(\mathbb{R})$ -решения уравнения (2) – это $f(x) = \lambda_1 x$ и $f(x) = \lambda_2 x$, а также, если $\lambda_{3-i} = 1$ – функция $f(x) = \lambda_i x + c$, где $c \in \mathbb{R}$ – произвольная постоянная.

Рассмотрим теперь случай 2б), а именно, $\lambda_1 < -1 < \lambda_2 < 0$. Пусть $f(\cdot)$ – произвольное $C(\mathbb{R})$ -решение уравнения (2). Докажем тождественное равенство нулю на $\mathbb{R}_+$ произведения функций $c_1(\cdot)$ и $c_2(\cdot)$. Для этого сначала покажем, что обе они неотрицательны на $\mathbb{R}_+$, а затем – что их произведение неположительно на $\mathbb{R}_+$. Из условий на λ_1 и λ_2 по лемме 4 следует строгое убывание функции $f(\cdot)$, откуда, с учетом леммы 2, $f(x_0) = x_0$ при некотором x_0 . Как показано в доказательстве леммы 5, $x_0 = 0$. Значит, $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_-$ и $f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+$. Следовательно, $f^{\circ 2k}(x) > 0$ при любых $x \in \mathbb{R}_+$ и всех $k \in \mathbb{Z}$. Выражая $f^{\circ 2k}(\cdot)$ через $c_1(\cdot)$ и $c_2(\cdot)$ согласно лемме 3 и первой формуле в (6) получаем: $c_1(x)\lambda_1^{2k} + c_2(x)\lambda_2^{2k} > 0$ или $c_2(x)(\lambda_2^2 \lambda_1^{-2})^k > -c_1(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}_+$ и всех $k \in \mathbb{Z}$. Так как $\lambda_2^2 \lambda_1^{-2} \neq 1$, а k может принимать любые целые значения, то из последнего неравенства следует, что $c_1(x)$ и $c_2(x)$ неотрицательны при $x \in \mathbb{R}_+$.

Чтобы доказать неположительность на $\mathbb{R}_+$ произведения $c_1(\cdot)c_2(\cdot)$, рассмотрим функцию $g(\cdot) = f^{\circ 2}(\cdot)$. Покажем, что $g(\cdot)$ – непрерывное решение уравнения

$$g(g(x)) - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)g(x) + \lambda_1^2 \lambda_2^2 x = 0$$

и применим лемму 6. Действительно, в силу леммы 1: $g(g(x)) = f^{\circ 4}(x) = c_1(x)\lambda_1^4 + c_2(x)\lambda_2^4$, $g(x) = f^{\circ 2}(x) = c_1(x)\lambda_1^2 + c_2(x)\lambda_2^2$ и $x = f^{\circ 0}(x) = c_1(x) + c_2(x)$. Подставляя в указанное уравнение эти равенства, непосредственным вычислением убеждаемся, что $g(\cdot)$ – действительно его решение. Заметим, что функции $c_1(\cdot)$ и $c_2(\cdot)$, определенные для функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$, совпадают. Поэтому мы можем применить лемму 6 к решению $g(\cdot)$ этого уравнения и получить, что $c_1(x)c_2(x) \geq 0$ на $\mathbb{R}_+$, а сами сужения $c_i(\cdot)$ на $\mathbb{R}_+$, $i = 1, 2$, являются знакопостоянными функциями.

Таким образом, если $x \in \mathbb{R}_+$, то $c_1(x)c_2(x) = 0$, а значит, $f(x) = \lambda_1 x$ или $f(x) = \lambda_2 x$. Отсюда в силу непрерывности $f(\cdot)$ следует: $f(x) = \lambda_i x$ при $x \in \mathbb{R}_+$, где $i = 1$ или $i = 2$. Подставляя $\lambda_i^{-1}x$

вместо $x \in \mathbb{R}_-$ в уравнение (2), получим, что $f(x) = \lambda_i x$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, в случае 2б) нетривиальных решений нет. $\square$

Во втором пункте следующей теоремы для краткости формулировки откажемся от предположения $\lambda_1 \leq \lambda_2$.

Теорема 4. 1. Если $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 1$, то единственное строго возрастающее $C(\mathbb{R})$ -решение уравнения (2) – это функция $f(x) = x$, а остальные его $C(\mathbb{R})$ -решения – это все непрерывные строго убывающие на $\mathbb{R}$ функции $f(\cdot)$, график которых симметричен относительно прямой $y = x$;

2. Если $|\lambda_i| = 1$, $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то при $\lambda_i = 1$ или $\lambda_i = -1$ все $C(\mathbb{R})$ -решения уравнения (2) задаются соответственно равенствами:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_{3-i}(x - \alpha) + \alpha \lambda_i, & \text{если } x < \alpha, \\ \lambda_i x, & \text{если } x \in [\alpha, \beta], \\ \lambda_{3-i}(x - \beta) + \beta \lambda_i, & \text{если } x > \beta, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \lambda_{3-i}(x + \gamma) - \gamma \lambda_i, & \text{если } x < -\gamma, \\ \lambda_i x, & \text{если } x \in [-\gamma, \gamma], \\ \lambda_{3-i}(x - \gamma) + \gamma \lambda_i, & \text{если } x > \gamma, \end{cases}$$

где $\alpha \leq \beta$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \geq 0$.

Доказательство. В условиях пункта 1 теоремы уравнение (2) имеет вид $f(f(x)) = x$ и по лемме 2 любое его $C(\mathbb{R})$ -решение $f(\cdot)$ монотонно и взаимнооднозначно. В случае, если $f(\cdot)$ строго возрастает, докажем, что $f(x) = x$ для любого x . В самом деле, если бы при некотором $x_0 \in \mathbb{R}$ выполнялось неравенство $f(x_0) > x_0$, то в силу возрастания функции $f(\cdot)$ выполнялось бы и неравенство $x_0 = f(f(x_0)) > f(x_0)$, которое противоречит исходному. Аналогично ни при каком $x_0 \in \mathbb{R}$ не может выполняться и неравенство $f(x_0) < x_0$.

В случае, если $f(\cdot)$ убывает, применим $f^{-1}(\cdot)$ к обеим частям уравнения $f(f(x)) = x$ и получим равенство $f(x) = f^{-1}(x)$, которое верно для всех $x \in \mathbb{R}$ в том и только том случае, когда график функции $f(\cdot)$ симметричен относительно прямой $y = x$. Заметим, что каждая из таких убывающих функций $f(\cdot)$ однозначно определяется действительным числом x_0 , при котором $f(x_0) = x_0$, и ограничением (сужением) $f(\cdot)$ на $[x_0, +\infty)$.

Рассмотрим случай 2 теоремы. Докажем следующее: равенство $f(x) = \lambda_i x$ для некоторого $x \in \mathbb{R}$ равносильно тому, что $x \in c_i(\mathbb{R})$. Заметим, что справедливы соотношения $\lim_{k \rightarrow \infty} (c_i(x) \lambda_i^{2k} + c_{3-i}(x) \lambda_{3-i}^{2k}) = c_i(x)$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} (c_i(x) \lambda_i^{2k+1} + c_{3-i}(x) \lambda_{3-i}^{2k+1}) = c_i(x) \lambda_i$, где ∞ принимается за $+\infty$ при $|\lambda_{3-i}| < 1$ и за $-\infty$ при $|\lambda_{3-i}| > 1$. Так как $f(c_1(x) \lambda_1^{2k} + c_2(x) \lambda_2^{2k}) = c_1(x) \lambda_1^{2k+1} + c_2(x) \lambda_2^{2k+1}$ по лемме 1, то из этих соотношений и непрерывности функции $f(\cdot)$ следует, что $f(c_i(x)) = \lambda_i c_i(x)$. С другой стороны, равенство $f(x) = \lambda_i x$ в силу формулы (4) влечет равенство $c_i(x) = x$, откуда $x \in c_i(\mathbb{R})$. Из непрерывности функции $c_i(\cdot)$ следует, что множество $c_i(\mathbb{R})$ является некоторым промежутком, а из доказанной только что импликации $f(x) = \lambda_i x \Leftrightarrow x \in c_i(\mathbb{R})$ и непрерывности функции $f(\cdot)$ этот промежуток содержит те свои концы, которые являются конечными числами. Значит, $c_i(\mathbb{R}) = [\alpha, \beta]$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$. По лемме 7 функции $c_1(\cdot)$ и $c_2(\cdot)$ нестрого возрастают, и поэтому $c_i(x) = \alpha$ при $x < \alpha$, $c_i(x) = \beta$ при $x > \beta$. Воспользовавшись равенствами (4), получаем, что любая функция, удовлетворяющая в случае 4 уравнению (2), имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_{3-i}(x - \alpha) + \alpha \lambda_i, & \text{если } x < \alpha, \\ \lambda_i x, & \text{если } x \in [\alpha, \beta], \\ \lambda_{3-i}(x - \beta) + \beta \lambda_i, & \text{если } x > \beta, \end{cases} \quad \text{где } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \leq \beta.$$

Легко убедиться, что при $\lambda_i = 1$ для любых таких α и β указанная функция $f(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (2). Если же $\lambda_i = -1$, то $f(x) = -x$ для любого $x \in [\alpha, \beta]$, и, подставляя x в (2), получаем: $f(-x) = x$, т. е. $(-x) \in [\alpha, \beta]$. Значит, $x \in [\alpha, \beta] \Leftrightarrow (-x) \in [\alpha, \beta]$, и поэтому $\alpha = -\beta$. Заменяя в указанной выше формуле α и β на $-\gamma$ и γ соответственно, получаем формулу для $f(\cdot)$, указанную в формулировке теоремы. Непосредственной подстановкой легко проверить, что такая функция $f(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (2) при любом $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \geq 0$. $\square$

Пока что неразобранными в работе остались следующие случаи взаимного расположения корней характеристического уравнения: если оба корня положительны и отличны от 1 и друг друга; оба корня отрицательны, отличны от -1 и друг друга и лежат по одну сторону от -1 ; корни равны по модулю, противоположны по знаку и отличны от ± 1 . Оказывается, что в каждом из указанных случаев существует бесконечно много нетривиальных решений уравнения (2) и

все эти решения параметризуются парами непрерывных функций специального вида. Поэтому, прежде, чем переходить к формулировкам результатов, приведем вспомогательные конструкции, описывающие необходимые классы функций.

Пусть заданы вещественные числа $\ell_2 > 1$, ℓ_1 , c , удовлетворяющие одному из условий:

$$\mathbf{a)} \ell_1 \in (1, \ell_2), c \in [\ell_1, \ell_2]; \quad \mathbf{б)} \ell_1 \in (0, 1), c \in (\ell_2, +\infty); \quad \mathbf{в)} \ell_1 = -\ell_2, c \in (1, \ell_2^2).$$

Для дальнейшего заметим, что при выполнении любого из условий **а)**, **б)** или **в)** число $(\ell_1 + \ell_2)c - \ell_1\ell_2$ больше c . Непрерывное взаимно однозначное отображение $\varphi(\cdot)$ из отрезка $[1, c]$ на отрезок $[c, (\ell_1 + \ell_2)c - \ell_1\ell_2]$ назовем (c, ℓ_1, ℓ_2) -функцией, если оно возрастает на отрезке $[1, c]$, и, кроме того, функции $x \mapsto \varphi(x) - \ell_1x$ и $x \mapsto \ell_2x - \varphi(x)$ в случае выполнения условий **а)** или **б)** возрастают на нем нестрого.

По каждой упорядоченной тройке (c, ℓ_1, ℓ_2) , удовлетворяющей условию **а)**, **б)** или **в)**, зададим последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ равенством $x_n = (\ell_2 - \ell_1)^{-1}((\ell_2 - c)\ell_1^n + (c - \ell_1)\ell_2^n)$. Очевидно, что $x_0 = 1$ и $x_1 = c$, а из условий на c, ℓ_1, ℓ_2 следует строгое возрастание последовательности (при выполнении условий **а)** и **б)** она представляет собой сумму двух возрастающих последовательностей, а при выполнении условия **в)** отношение $x_{n+1}x_n^{-1}$ равно либо $c > 1$, либо $\ell^2 c^{-1} > 1$ в зависимости от четности номера n). Значит, интервал $I = (\lim_{n \rightarrow -\infty} x_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n)$ разбивается на отрезки $[x_n, x_{n+1}]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Теперь мы по каждой (c, ℓ_1, ℓ_2) -функции определим некоторую новую функцию, которую назовем ее продолжением. На языке (c, ℓ_1, ℓ_2) -функций и их продолжений формулируются следующие две теоремы, дающие описание решений уравнения (2) в оставшихся не разобранными случаях.

По каждой (c, ℓ_1, ℓ_2) -функции $\varphi(\cdot)$ построим функцию $f(\cdot): I \rightarrow I$. Для этого обозначим за $f_k(\cdot)$ ее сужение на отрезок $[x_k, x_{k+1}]$, а затем зададим $f_k(\cdot)$ по индукции при всех $k \in \mathbb{Z}$ так, чтобы $f_k(\cdot)$ непрерывно и взаимно однозначно отображала отрезок $[x_k, x_{k+1}]$ на отрезок $[x_{k+1}, x_{k+2}]$. А именно, положим $f_0(x) = \varphi(x)$, $f_k(x) = (\ell_1 + \ell_2)x - \ell_1\ell_2 f_{k-1}^{-1}(x)$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, а для $k \in \mathbb{Z}_-$ определим функцию $f_k(\cdot)$ через ее обратную, заданную равенством $f_k^{-1}(x) = (\ell_1^{-1} + \ell_2^{-1})x - \ell_1^{-1}\ell_2^{-1}f_{k+1}(x)$ на отрезке $[x_{k+1}, x_{k+2}]$.

Убедимся, что так определенная функция $f_k(\cdot)$ непрерывна, строго возрастает и отображает отрезок $[x_k, x_{k+1}]$ на $[x_{k+1}, x_{k+2}]$ при каждом $k \in \mathbb{Z}$. Сделаем это методом математической индукции для всех $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, причем в случае, если числа c, ℓ_1, ℓ_2 удовлетворяют условию **а)** или **б)**, вместе с указанными условиями на функцию $f_k(\cdot)$ будем доказывать вспомогательное, которое состоит в том, что функция $(f_k - \ell_1 \text{id})(\cdot)$ нестрого возрастает на $[x_k, x_{k+1}]$. База индукции – случай $k = 0$, при котором все нужные нам условия выполняются, поскольку $f_0(\cdot) \equiv \varphi(\cdot)$ на $[x_0, x_1]$, а $\varphi(\cdot)$ удовлетворяет этим условиям как (c, ℓ_1, ℓ_2) -функция. Допустим, что им удовлетворяет и функция $f_{k-1}(\cdot)$. Вычислением легко проверить, что $f_k(x_k) = x_{k+1}$ и $f_k(x_{k+1}) = x_{k+2}$. В случае, если числа c, ℓ_1, ℓ_2 удовлетворяют условию **а)** или **б)**, формулу для выражения $f_k(\cdot)$ через $f_{k-1}(\cdot)$ можно переписать в виде $(f_k - \ell_1 \text{id})(x) = \ell_2(f_{k-1} - \ell_1 \text{id})(f_{k-1}^{-1}(x))$, откуда следует, что функция $(f_k - \ell_1 \text{id})(\cdot)$ определена, непрерывна, а также нестрого возрастает на $[x_k, x_{k+1}]$ в силу строгого возрастания $f_{k-1}: [x_{k-1}, x_k] \rightarrow [x_k, x_{k+1}]$ и нестрогого возрастания $(f_{k-1} - \ell_1 \text{id})(\cdot)$. Значит, функция $f_k(\cdot) \equiv (f_k - \ell_1 \text{id} + \ell_1 \text{id})(\cdot)$ определена, непрерывна и возрастает строго на этом отрезке, что и завершает индукционный переход. В случае, если числа c, ℓ_1, ℓ_2 удовлетворяют условию **в)**, верно равенство $f_k(\cdot) \equiv \ell_2^2 f_{k-1}^{-1}(\cdot)$ на $[x_k, x_{k+1}]$, и поэтому индукционный переход очевиден. Чтобы доказать непрерывность, монотонность и взаимнооднозначность функции $f_k(\cdot): [x_k, x_{k+1}] \rightarrow [x_{k+1}, x_{k+2}]$ при всех $k \in \mathbb{Z}_-$, нужно действовать аналогично, только вспомогательное утверждение для тех случаев, когда c, ℓ_1, ℓ_2 удовлетворяют условию **а)** или **б)**, состоит в нестрогом возрастании функции $(\ell_2 \text{id} - f_k)(\cdot)$, а не $(f_k - \ell_1 \text{id})(\cdot)$.

Так определенную функцию $f(\cdot): I \rightarrow I$ будем называть продолжением (c, ℓ_1, ℓ_2) -функции $\varphi(\cdot)$. Заметим, что из проведенных рассуждений следует ее возрастание, непрерывность и взаимнооднозначность, а также то, что она удовлетворяет на I уравнению $f(f(x)) - (\ell_1 + \ell_2)f(x) + \ell_1\ell_2x = 0$ и неравенству $f(x) > x$. Кроме того, $I = \mathbb{R}_+$ при условиях **а)** или **в)** на числа c, ℓ_1, ℓ_2 , и $I = \mathbb{R}$ при условии **б)** на эти числа.

Далее для определенной на $\mathbb{R}$ функции $g(\cdot)$ через $g_-(\cdot)$ и $g_+(\cdot)$ обозначаем ее сужения (ограничения) на интервалы $\mathbb{R}_-$ и $\mathbb{R}_+$ соответственно.

Теорема 5. 1. Если $1 < \lambda_1 < \lambda_2$, то функция $f(\cdot)$ тогда и только тогда является $C(\mathbb{R})$ -решением уравнения (2), когда функции $f_+(t)$ и $-f_-(-t)$, $t > 0$ – продолжения некоторых $(c_+, \lambda_1, \lambda_2)$ - и $(c_-, \lambda_1, \lambda_2)$ -функций соответственно.

2. Если $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, то функция $f(\cdot)$ тогда и только тогда является $C(\mathbb{R})$ -решением уравнения (2), когда функции $f_+^{-1}(t)$ и $-f_-^{-1}(-t)$, $t > 0$, – продолжения некоторых $(c_+, \lambda_2^{-1}, \lambda_1^{-1})$ - и $(c_-, \lambda_2^{-1}, \lambda_1^{-1})$ -функций соответственно.

3. Если $\lambda_1 < \lambda_2 < -1$, то функция $f(\cdot)$ тогда и только тогда является $C(\mathbb{R})$ -решением уравнения (2), когда функция $((\lambda_1 + \lambda_2)f_+ - \lambda_1\lambda_2\text{id})(\cdot)$ – продолжение некоторой $(c, \lambda_2^2, \lambda_1^2)$ -функции и $f_-(\cdot) \equiv ((\lambda_1 + \lambda_2)\text{id} - \lambda_1\lambda_2f_+^{-1})(\cdot)$ на $(-\infty, 0)$.

4. Если $-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < 0$, то функция $f(\cdot)$ тогда и только тогда является $C(\mathbb{R})$ -решением уравнения (2), когда функция $((\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1})f_+^{-1} - \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\text{id})(\cdot)$ – продолжение некоторой $(c, \lambda_1^{-2}, \lambda_2^{-2})$ -функции и $f_-^{-1}(\cdot) \equiv ((\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1})\text{id} - \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}f_+)(\cdot)$ на $(-\infty, 0)$.

Доказательство. Докажем пункт 1 теоремы. Пусть функция $f(\cdot)$ является $C(\mathbb{R})$ -решением уравнения (2). Покажем, что $f_+(\cdot)$ является продолжением $(c_+, \lambda_1, \lambda_2)$ -функции $\varphi(\cdot)$, где $c_+ = f(1)$, а $\varphi(\cdot)$ – это ограничение функции $f(\cdot)$ на $[1, c_+]$.

Сначала докажем, что $\varphi(\cdot)$ задана корректно и является $(c_+, \lambda_1, \lambda_2)$ -функцией. Для этого покажем, что $c_+ \in [\lambda_1, \lambda_2]$, или, $\lambda_1 \cdot 1 \leq f(1) \leq \lambda_2 \cdot 1$. Выразив 1 и $f(1)$ через $c_1(1)$ и $c_2(1)$, получим неравенство $(c_1(1) + c_2(1))\lambda_1 \leq c_1(1)\lambda_1 + c_2(1)\lambda_2 \leq (c_1(1) + c_2(1))\lambda_2$, которое выполняется, поскольку $\lambda_1 < \lambda_2$ по условию и $c_1(1)$ и $c_2(1)$ неотрицательны в силу леммы 6. Таким образом, $c_+ \in [\lambda_1, \lambda_2]$, т. е. числа c_+ , λ_1 , λ_2 удовлетворяют условию а). Кроме того, неравенство $c_+ \geq \lambda_1 > 1$ означает, что функция $\varphi(\cdot)$ корректно задана как ограничение $f(\cdot)$ на $[1, c_+]$. Рассмотрим функцию $f(\cdot)$. Она определена и непрерывна на $\mathbb{R}$, и по лемме 4 строго возрастает, следовательно, отображает отрезок $[1, c_+]$ на отрезок $[f(1), f(c_+)] = [c_+, (\lambda_1 + \lambda_2)c_+ - \lambda_1\lambda_2]$. Отметим, что функции $c_1(\cdot)$ и $c_2(\cdot)$ нестрого возрастают по лемме 7, поэтому, из равенств (4) вытекает нестрого возрастание функций $(f - \lambda_1\text{id})(\cdot)$ и $(\lambda_2\text{id} - f)(\cdot)$. Таким образом, ограничение функции $f(\cdot)$ на $[1, c_+]$ – функция $\varphi(\cdot)$ действительно является $(c_+, \lambda_1, \lambda_2)$ -функцией.

Докажем теперь, что функция $f_+(\cdot)$ является продолжением функции $\varphi(\cdot)$. Пусть $g(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ – ее продолжение, последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ определена по тройке $(c_+, \lambda_1, \lambda_2)$, а $g_k(\cdot)$ – ограничение $g(\cdot)$ на $[x_k, x_{k+1}]$ при каждом $k \in \mathbb{Z}$. Для доказательства совпадения функций $f_+(\cdot)$ и $g(\cdot)$ нужно показать при всех $k \in \mathbb{Z}$, что $g_k(\cdot) \equiv f_+(\cdot)$ на $[x_k, x_{k+1}]$. Для $k = 0$ это верно, так как обе функции совпадают с функцией $\varphi(\cdot)$ на $[x_0, x_1]$. Осталось дважды применить индукцию: чтобы доказать утверждение для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и чтобы доказать его для всех $k \in \mathbb{Z}_-$. При этом нужно использовать, соответственно, формулу для выражения $g_k(\cdot)$ через $g_{k-1}(\cdot)$ и формулу для выражения $g_k(\cdot)$ через $g_{k+1}(\cdot)$.

Для доказательства того, что функция $-f_-(-t)$, $t > 0$, является продолжением некоторой $(c_-, \lambda_1, \lambda_2)$ -функции, рассмотрим функцию $h(\cdot)$, определенную равенством $h(x) = -f(-x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Отметим, что $-f_-(-t) \equiv h_+(t)$ на $\mathbb{R}_+$. Непосредственная подстановка показывает, что функция $h(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (2). Значит, $h_+(\cdot)$, по доказанному выше, является продолжением некоторой $(c_-, \lambda_1, \lambda_2)$ -функции, и требуемое утверждение доказано.

Пусть функции $f_+(t)$ и $-f_-(-t)$, $t > 0$, являются, соответственно, продолжениями некоторых $(c_+, \lambda_1, \lambda_2)$ - и $(c_-, \lambda_1, \lambda_2)$ -функций. Докажем, что непрерывная функция $f(\cdot)$ однозначно ими определяется и является $C(\mathbb{R})$ -решением уравнения (2). Так как $f_+(t)$ и $-f_-(-t)$, $t > 0$, непрерывны, взаимнооднозначны и строго монотонны на $(0, +\infty)$, то $f_+(\cdot)$ и $f_-(\cdot)$ непрерывны и стремятся к нулю при $x \rightarrow 0$, а значит, функция $f(\cdot)$ непрерывна, если и только если $f(0) = 0$. Таким образом, она определена функциями $f_+(\cdot)$ и $f_-(\cdot)$ однозначно и удовлетворяет уравнению (2) при $x = 0$. Функции $f_+(t)$ и $-f_-(-t)$, $t > 0$, удовлетворяют этому уравнению на $\mathbb{R}_+$ как продолжения $(c_\pm, \lambda_1, \lambda_2)$ -функций. Так как $f(\cdot) \equiv f_+(\cdot)$ на $\mathbb{R}_+$, то $f(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (2) при всех $x \in \mathbb{R}_+$. То, что $-f_-(-t)$, $t > 0$, удовлетворяет этому уравнению, значит, что $-f_-(-(-f_-(-x))) + a(-f_-(-x)) + bx = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}_+$, а это равносильно равенству $f_-(f_-(x)) + af_-(x) + bx = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}_-$. Так как $f(\cdot) \equiv f_-(\cdot)$ на $\mathbb{R}_-$, то $f(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (2) и при любом $x \in \mathbb{R}_-$. Пункт 1 теоремы доказан.

Докажем теперь пункт 3 теоремы. Пусть функция $f(\cdot)$ является $C(\mathbb{R})$ -решением уравнения (2). В рассуждениях, проведенных при доказательстве теоремы 3, показано, что функция $g(\cdot) = f^{\circ 2}(\cdot)$ удовлетворяет уравнению $g(g(x)) - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)g(x) + \lambda_1^2\lambda_2^2x = 0$. Следовательно, по доказанному выше пункту 1, функция $(f^{\circ 2})_+(\cdot)$ – это продолжение некоторой $(c, \lambda_2^2, \lambda_1^2)$ -функции. Из

равенства $f(f(x)) = (\lambda_1 + \lambda_2)f(x) - \lambda_1\lambda_2x$ заключаем, что функция $((\lambda_1 + \lambda_2)f_+ - \lambda_1\lambda_2\text{id})(\cdot)$ является продолжением некоторой $(c, \lambda_2^2, \lambda_1^2)$ -функции. По лемме 2 функция $f(\cdot)$ взаимнооднозначна, а по лемме 4 она строго убывает, следовательно, она пересекает прямую $y = x$ в некоторой точке x_0 . Подставляя x_0 в уравнение (2) вместо x , получаем, что $x_0 = 0$ и $f(0) = 0$ и, соответственно, функции $f_+(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_-$, $f_-(\cdot): \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+$ – взаимнооднозначные отображения интервалов $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ друг на друга. Значит, функция $(f_+)^{-1}(\cdot): \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+$ корректно определена, и $f^{\circ 2}(\cdot) \equiv (f_- \circ f_+)(\cdot)$ на $\mathbb{R}_+$. Подставляя $f_+^{-1}(x)$ в уравнение (2) вместо x , получаем, что $f_-(x) = (\lambda_1 + \lambda_2)x - \lambda_1\lambda_2 f_+^{-1}(x)$ для каждого $x \in \mathbb{R}_-$. Таким образом, $f(\cdot)$ удовлетворяет указанным в теореме условиям.

Пусть теперь $((\lambda_1 + \lambda_2)f_+ - \lambda_1\lambda_2\text{id})(\cdot)$ является продолжением некоторой $(c, \lambda_2^2, \lambda_1^2)$ -функции. Докажем, что по этой функции условия теоремы корректно определяют функции $f_+(\cdot)$ и $f_-(\cdot)$. Другими словами, если $g(\cdot)$ – продолжение некоторой $(c, \lambda_2^2, \lambda_1^2)$ -функции, то корректно определены такие функции $f_+(\cdot)$ и $f_-(\cdot)$, что $((\lambda_1 + \lambda_2)f_+ - \lambda_1\lambda_2\text{id})(\cdot) \equiv g(\cdot)$ на $\mathbb{R}_+$ и $f_-(\cdot) \equiv ((\lambda_1 + \lambda_2)\text{id} - \lambda_1\lambda_2 f_+^{-1})(\cdot)$ на $\mathbb{R}_-$. Корректность определения функции $f_+(\cdot)$ очевидна. Для того, чтобы функция $f_-(\cdot)$ была определена корректно, необходимо и достаточно существование у функции $f_+(\cdot)$ заданной на $\mathbb{R}_+$ обратной. Докажем, что функция $f_+(\cdot)$ взаимнооднозначно отображает $\mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}_-$. Функция $g(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ непрерывна, взаимнооднозначна и строго возрастает как продолжение $(c, \lambda_2^2, \lambda_1^2)$ -функции, где тройка $(c, \lambda_2^2, \lambda_1^2)$ удовлетворяет условию а), следовательно, $\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = +0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Выражая $f_+(\cdot)$ через $g(\cdot)$, получим, что $f_+(x) = (\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}(g(x) + \lambda_1\lambda_2x)$ для всех $x \in (0, +\infty)$, а значит, из непрерывности и строгого возрастания функции $g(\cdot)$, с учетом отрицательности λ_1 и λ_2 , следует непрерывность и строгое убывание функции $f(\cdot)$. Переходя к пределу при $x \rightarrow +0$ и $x \rightarrow +\infty$, получаем равенства $\lim_{x \rightarrow +0} f_+(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_+(x) = -\infty$. Заметим, что проведенные рассуждения также показывают непрерывность и стремление к нулю при $x \rightarrow -0$ функции $f_-(\cdot)$. Таким образом, функция $f(\cdot)$ будет непрерывна, если и только если $f(0) = 0$, т. е. она определяется однозначно функциями $f_+(\cdot)$ и $f_-(\cdot)$. В нашем случае это означает, что функция $f(\cdot)$ определена однозначно и корректно по функции $((\lambda_1 + \lambda_2)f_+ - \lambda_1\lambda_2\text{id})(\cdot)$. Отметим также, что $f(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (2) при $x = 0$, а из отрицательности функции $f_+(\cdot)$ – и при всех $x \in \mathbb{R}_+$, так как $f(f(x)) = f_-(f_+(x)) = (\lambda_1 + \lambda_2)f_+(x) - \lambda_1\lambda_2x$ из формулы для $f_-(\cdot)$. Осталось доказать, что функция $f(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (2) при всех $x \in \mathbb{R}_-$. Так как функция $f_+(\cdot)$ принимает все отрицательные значения, то для любого $x \in \mathbb{R}_-$ можно записать $f_-(x)$ как $f_-(f_+(y))$, где $y \in \mathbb{R}_+$, и, пользуясь формулами для выражения $f_-(\cdot)$ и $g(\cdot)$ через $f_+(\cdot)$, получить тождество $f_-(x) = f_-(f_+(y)) = g(y)$. Поскольку функция $g(\cdot)$ принимает только положительные значения, то и $f_-(\cdot)$ принимает только положительные значения, значит, $f(f(x)) = f_+(f_-(x))$ для всех $x \in \mathbb{R}_-$. Так как $f_+(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_-$, то, чтобы проверить выполнение уравнения (2) для всех отрицательных x , достаточно сделать это после подстановки $f_+(y)$ вместо x для всех положительных y . Подставляя и пользуясь равенством $f_-(f_+(y)) = g(y) = (\lambda_1 + \lambda_2)f_+(y) - \lambda_1\lambda_2y$, получим, что необходимо доказать равенство

$$f(f(f_+(y))) - (\lambda_1 + \lambda_2)f(f_+(y)) + \lambda_1\lambda_2f_+(y) = f_+(g(y)) - (\lambda_1 + \lambda_2)g(y) + \lambda_1\lambda_2f_+(y) = 0.$$

При помощи равенства $f_+(\cdot) = ((\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}(g + \lambda_1\lambda_2\text{id}))(\cdot)$ выразим $f_+(g(y))$ и $f_+(y)$ через $g(y)$ и y , после преобразований получим равносильное требуемому равенство

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}(g(g(y)) - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)g(y) + \lambda_1^2\lambda_2^2y) = 0,$$

которое верно, поскольку функция $g(\cdot)$, как продолжение $(c, \lambda_2^2, \lambda_1^2)$ -функции, удовлетворяет уравнению $g(g(y)) - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)g(y) + \lambda_1^2\lambda_2^2y = 0$. Таким образом, $f(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (2) и при отрицательных x . Пункт 3 теоремы доказан.

Для доказательства пунктов 2 и 4 заметим, что функция $f(\cdot)$ является $C(\mathbb{R})$ -решением уравнения (2), если и только если функция $f^{-1}(\cdot)$ является $C(\mathbb{R})$ -решением уравнения $g(g(x)) - (\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1})g(x) + \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}x = 0$, а к этому уравнению можно применить уже доказанные пункты 1 и 3 теоремы. $\square$

Теорема 6. 1. Если $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$, то функция $f(\cdot)$ является $C(\mathbb{R})$ -решением уравнения (2) тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий: или $f(\cdot)$ является продолжением некоторой $(c, \lambda_1, \lambda_2)$ -функции, или $f^{-1}(\cdot)$ является продолжением некоторой $(c, \lambda_2^{-1}, \lambda_1^{-1})$ -функции,

или $f(\cdot)$ задается по формуле $f(x) = \begin{cases} \lambda_i x, & x \geq 0 \\ \lambda_j x, & x < 0, \end{cases}$ где $i, j \in \{1, 2\}$.

2. Если $-\lambda_1 = \lambda_2 > 1$, то любое $C(\mathbb{R})$ -решение уравнения (2) либо строго возрастает, либо строго убывает на $\mathbb{R}$. Функция $f(\cdot)$ является возрастающим $C(\mathbb{R})$ -решением уравнения (2) тогда и только тогда, когда $f_+(t)$ и $-f_-(-t)$, $t > 0$, – продолжения некоторых $(c_+, -\lambda_2, \lambda_2)$ - и $(c_-, -\lambda_2, \lambda_2)$ -функций соответственно. Функция $f(\cdot)$ является убывающим $C(\mathbb{R})$ -решением уравнения (2) тогда и только тогда, когда $f_+ : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_-$ строго убывает и взаимнооднозначна, а $f_-(x) = \lambda_2^2 f_+^{-1}(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}_-$.

3. Если $-\lambda_1 = \lambda_2$ и $1 > \lambda_2 > 0$, то любое $C(\mathbb{R})$ -решение уравнения (2) либо строго возрастает, либо строго убывает на $\mathbb{R}$. Функция $f(\cdot)$ является возрастающим $C(\mathbb{R})$ -решением уравнения (2) тогда и только тогда, когда $(f^{-1})_+(t)$ и $-(f^{-1})_-(-t)$, $t > 0$, – продолжения некоторых $(c_+, -\lambda_2^{-1}, \lambda_2^{-1})$ - и $(c_-, -\lambda_2^{-1}, \lambda_2^{-1})$ -функций соответственно. Функция $f(\cdot)$ является убывающим $C(\mathbb{R})$ -решением уравнения (2) тогда и только тогда, когда $f_+ : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_-$ строго убывает и взаимнооднозначна, а $f_-(x) = \lambda_2^2 f_+^{-1}(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}_-$.

Доказательство. Докажем пункт 1 теоремы. Пусть $f(\cdot)$ является $C(\mathbb{R})$ -решением уравнения (2). Тогда $c_1(1)c_2(1) \leq 0$ согласно лемме 6, откуда легко получить одно из неравенств: $\lambda_2 \leq f(1)$ или $f(1) \leq \lambda_1$. Докажем, что в случае выполнения строгого неравенства $\lambda_2 < f(1)$ функция $f(\cdot)$ является продолжением $(c, \lambda_1, \lambda_2)$ -функции $\varphi(\cdot)$, где $c = f(1)$, а $\varphi(\cdot)$ – это ограничение $f(\cdot)$ на $[1, c]$. При $\lambda_2 < f(1)$ числа c, λ_1, λ_2 удовлетворяют условию б). Это влечет в том числе и выполнение неравенства $c > 1$, а значит, и корректность задания функции $\varphi(\cdot)$ как ограничения $f(\cdot)$ на $[1, c]$. Дальнейшие рассуждения совпадают с соответствующими при доказательстве пункта 1 теоремы 5 с той лишь разницей, что $g(\cdot)$ является функцией из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, а не из $\mathbb{R}_+$ в $\mathbb{R}_+$, и последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ задана на всем $\mathbb{R}$, а не только на $\mathbb{R}_+$. Таким образом, $f(\cdot)$ действительно является продолжением функции $\varphi(\cdot)$.

Пусть теперь функция $f(\cdot)$ является продолжением некоторой $(c, \lambda_1, \lambda_2)$ -функции. Тогда, в силу рассуждений перед теоремой 5, она является $C(\mathbb{R})$ -решением уравнения (2), а из условий на c, λ_1, λ_2 верно неравенство $f(1) = c > \lambda_2$. Таким образом, все $C(\mathbb{R})$ -решения уравнения (2), такие, что $f(1) > \lambda_2$, – это в точности все продолжения $(c, \lambda_1, \lambda_2)$ -функций.

Как уже говорилось выше, функция $f(\cdot)$ является $C(\mathbb{R})$ -решением уравнения (2) в том и только том случае, когда функция $f^{-1}(\cdot)$ является $C(\mathbb{R})$ -решением уравнения $g(g(x)) - (\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1})g(x) + \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}x = 0$. Кроме того, для любого решения уравнения (2) равносильны неравенства $f(1) < \lambda_1$ и $f^{-1}(1) > \lambda_1^{-1}$, поскольку для него имеет место равенство $f(1) - \lambda_1 = \lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{-1} - f^{-1}(1))$. Таким образом, по доказанному выше, все $C(\mathbb{R})$ -решения уравнения (2) такие, что $f(1) < \lambda_1$, – это все продолжения $(c, \lambda_2^{-1}, \lambda_1^{-1})$ -функций.

Покажем, что все остальные решения уравнения (2) – это четыре решения, которые описываются формулой: $f(x) = \begin{cases} \lambda_i x, & x \geq 0 \\ \lambda_j x, & x < 0, \end{cases}$ где $i, j \in \{1, 2\}$. Допустим, что $f(\cdot)$ является $C(\mathbb{R})$ -решением

уравнения (2) и $f(1) = \lambda_i$. По индукции нетрудно доказать неравенство $f(\lambda_i^k) = \lambda_i^{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, для всех $k \in \mathbb{Z}$ верно равенство $c_{3-i}(\lambda_i^k) = 0$ и, так как по лемме 7 функция $c_{3-i}(\cdot)$ нестрого возрастает, то $c_{3-i}(\cdot) \equiv 0$ на всем $\mathbb{R}_+$. Значит, $f(x) = \lambda_i x$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$, и $f(0) = 0$ по непрерывности функции $f(\cdot)$. Рассмотрим функцию $h(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, заданную равенством $h(x) = -f(-x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Она удовлетворяет уравнению (2), но не является $(c, \lambda_1, \lambda_2)$ -функцией, так как в нуле принимает нулевое значение. Следовательно, $h(1) = \lambda_j$ и рассуждениями, аналогичными проведенным, легко показать, что $f(x) = \lambda_j x$ для любого $x \in \mathbb{R}_-$. Таким образом, $f(x) = \lambda_j x$ на $(-\infty, 0)$, т. е. $f(\cdot)$ задается указанной выше формулой. В том, что такая формула задает решение, можно убедиться непосредственными вычислениями. Пункт 1 теоремы доказан.

Докажем пункт 2 теоремы. Любое $C(\mathbb{R})$ -решение уравнения (2) строго монотонно в силу леммы 2. Пусть $f(\cdot)$ является его возрастающим $C(\mathbb{R})$ -решением. Докажем, что $f_+(\cdot)$ – это продолжение $(c_+, -\lambda_2, \lambda_2)$ -функции $\varphi(\cdot)$, где $c_+ = f(1)$, а $\varphi(\cdot)$ – это ограничение $f(\cdot)$ на $[1, c_+]$. Выполнение условия в) на числа $c_+, -\lambda_2, \lambda_2$ следует из таких рассуждений: нарушение условия $c_+ \in (1, \lambda_2^2)$ означает выполнение одного из неравенств $f(1) \leq 1$ и $\lambda_2^2 \leq f(1)$, но последние неравенства равносильны в силу возрастания $f(\cdot)$, а следовательно, выполняются одновременно, откуда получаем $\lambda_2^2 \leq 1$, что неверно по условию теоремы. Функция $f(\cdot)$ определена, непрерывна и строго возрастает на всем $\mathbb{R}$, и поэтому отображает отрезок $[1, c_+]$ на $[f(1), f(c_+)] = [c_+, \lambda_2^2] = [c_+, (\lambda_1 + \lambda_2)c_+ - \lambda_1\lambda_2]$. Так как $\varphi(\cdot)$ – это ограничение $f(\cdot)$ на $[1, c_+]$, то $\varphi(\cdot)$ является $(c_+, -\lambda_2, \lambda_2)$ -функцией. Дальнейшие рассуждения,

показывающие, что $f_+(\cdot)$ – продолжение $(c_+, -\lambda_2, \lambda_2)$ -функции $\varphi(\cdot)$, совпадают с соответствующими из доказательства пункта 1 теоремы 5. Аналогично пункту 1, рассмотрим функцию $h(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, заданную равенством $h(x) = -f(-x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Она является возрастающим решением уравнения (2) и к ее ограничению $h_+(\cdot)$ применима уже доказанная часть пункта 2. Следовательно, функция $-f_-(t) = h_+(t)$ – продолжение некоторой $(c_-, -\lambda_2, \lambda_2)$ -функции.

Пусть теперь функции $f_+(t)$ и $-f_-(t)$, $t > 0$, являются продолжениями некоторых $(c_+, -\lambda_2, \lambda_2)$ - и $(c_-, -\lambda_2, \lambda_2)$ -функциями соответственно. Тогда непрерывная функция $f(\cdot)$ определяется ими однозначно, поскольку обе функции $f_+(\cdot)$ и $f_-(\cdot)$ непрерывны и стремятся к нулю при $x \rightarrow 0$. Из их возрастания следует, что функция $f(\cdot)$ возрастает, и из выполнения равенства (2) на всем $\mathbb{R}_+$ для обеих функций следует его выполнение для функции $f(\cdot)$ на всем $\mathbb{R}$.

Рассмотрим произвольное убывающее решение уравнения (2). Оно пересекает прямую $y = x$ в какой-нибудь точке x_0 . Подставляя x_0 вместо x в уравнение (2), получаем, что $x_0 = 0$ и, так как функция $f(\cdot)$ взаимнооднозначна по лемме 2, то $f_+(\cdot)$ отображает $\mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}_-$. Кроме того, подставляя $f^{-1}(x)$ в уравнение (2) вместо x , получим, что равенство $f(x) = \lambda_2^2 f^{-1}(x)$ верно при всех $x \in \mathbb{R}$, и, в частности, при всех $x \in \mathbb{R}_-$. Поскольку на всем $\mathbb{R}_-$ верны равенства $f(\cdot) \equiv f_-(\cdot)$ и $f^{-1}(\cdot) \equiv f_+^{-1}(\cdot)$, последнее равенство переписывается в виде $f_-(x) = \lambda_2^2 f_+^{-1}(x)$.

Пусть сужение $f_+(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_-$ взаимнооднозначно и строго убывает. Тогда определение функции $f_-(\cdot)$ как $f_-(x) = \lambda_2^2 f_+^{-1}(x)$ корректно, и, кроме того, функции $f_+(\cdot)$ и $f_-(\cdot)$ стремятся к нулю при $x \rightarrow 0$, а значит, однозначно определяют непрерывную функцию $f(\cdot)$. Из убывания функций $f_+(\cdot)$ и $f_-(\cdot)$ следует убывание функции $f(\cdot)$. Вычислением легко проверяется, что она является решением уравнения (2). Пункт 2 теоремы доказан.

Для доказательства пункта 3 теоремы заметим, что функция $f(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (2), если и только если функция $f^{-1}(\cdot)$ удовлетворяет уравнению $g(g(x)) = \lambda_2^{-2}x$, для которого верны предположения уже доказанного пункта 2. Поскольку равенства $f^{-1}(x) = \lambda_2^{-2}(f_+^{-1})^{-1}(x)$ и $f_-(x) = \lambda_2^2 f_+^{-1}(x)$ равносильны, то это завершает доказательство теоремы. $\square$

Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси по заданию 1.2.01 «Развитие конструктивных и асимптотических методов исследования сложных управляемых дифференциальных и дискретных систем» ГПНИ «Конвергенция–2025» (подпрограмма «Математические модели и методы»).

Литература

1. Милнор Дж. Голоморфная динамика. Ижевск: РХД, 2000. 320 с.
2. Математическая энциклопедия: в 5 т. М.: Советская энциклопедия, 1985. Т. 5. 1248 с.
3. Пелюх Г. П., Шарковский А. Н. Введение в теорию функциональных уравнений. Киев: Наукова думка, 1974. 120 с.
4. Антонец А. Б. Линейные функциональные уравнения: операторный подход. Минск: Университетское, 1988. 232 с.
5. Маркушевич А. И. Возвратные последовательности. М.: Наука, 1983. 48 с.

References

1. Milnor J. W. *Dynamics in one complex variable: introductory lectures*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/9201272>
2. *Encyclopaedia of Mathematics. In 5 vol. Vol. 5*. Moscow, Sovetskaya entsiklopediya, 1985. 1248 p. (in Russian).
3. Pelukh G. P., Sharkovsky A. N. *Introduction to the theory of functional equations*. Kyiv, Naukova Dumka, 1974. 120 p. (in Russian).
4. Antonevich A. B. *Linear Functional Equations. Operator Approach*. Birkhauser, 1996.
5. Markushevich A. I. *Recurrent sequences*. Moscow, Nauka, 1983. 48 p. (in Russian).



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
MATHEMATICAL MODELING AND
NUMERICAL METHODS



УДК 519.633.6:536.212.2

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНОГО КОЭФФИЦИЕНТА
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДИСПЕРСНО-НАПОЛНЕННЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ
МАТЕРИАЛОВ

А. Н. Авлас

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
e-mail: aulas@im.bas-net.by

Поступила: 23.05.2024

Исправлена: 10.06.2024

Принята: 18.06.2024

Ключевые слова: эффективный коэффициент теплопроводности, композит, математическая модель, сеточные методы, вычислительный эксперимент.

Аннотация. Разработан численный метод нахождения эффективных коэффициентов теплопроводности дисперсно-наполненных композиционных материалов с учетом их структуры и зависимости теплофизических свойств от температуры. Произведены вычислительные эксперименты.

NUMERICAL CALCULATION OF THE EFFECTIVE THERMAL CONDUCTIVITY
COEFFICIENT OF PARTICLE-FILLED COMPOSITE MATERIALS

A. N. Aulas

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
email: aulas@im.bas-net.by

Received: 23.05.2024

Revised: 10.06.2024

Accepted: 18.06.2024

Keywords: effective thermal conductivity coefficient, composite, mathematical model, grid methods, computational experiment.

Abstract. A comprehensive method has been developed for finding the effective thermal conductivity coefficients of dispersed-filled composite materials, taking into account their structure and depending on the thermophysical properties of temperature. Computational experiments were carried out.

Введение. Развитие современных отраслей промышленности, создание новых технологий во многом связано с применением различных композиционных материалов. Композиционные материалы имеют широкий круг применения, например, при создании покрытий различного типа: упрочняющих, теплозащитных, фрикционных, антифрикционных и др. Поскольку технологии развиваются, на практике часто возникает ситуация, когда известные композиционные материалы не отвечают условиям эксплуатации. Соответственно возникает либо задача улучшения свойств имеющихся композиционных материалов, либо задача разработки принципиально новых композиционных материалов с заданными физическими характеристиками. Значительную долю из них составляют композиционные материалы с периодической структурой [1].

Под композиционным материалом подразумевается материал, состоящий из нескольких компонент с четкими границами раздела, которые могут сильно отличаться по характеристикам, как между собой, так и от характеристик композита. В данной работе будут рассматриваться дисперсно-наполненные композиты. Такие композиты состоят из непрерывной матрицы, в которой

распределена дисперсная фаза в виде твердых частиц (порошка, коротких волокон, микросфер), называемых наполнителем. Использование различных добавок (включений, фаз) можно изменить теплофизические и деформационно-прочностные эксплуатационные характеристики базового материала.

Общая формулировка задачи компьютерного конструирования материалов [2] сводится к следующему: подобрать фазовый состав материала, подобрать распределение фаз в нем («внутреннюю геометрию»), выяснить характер взаимодействия между фазами, чтобы эффективные характеристики материала получили требуемые значения, т. е. найти управляющие параметры, которые влияют на свойства материала.

Сложность определения свойств композиционного материала заключается в его структуре: на свойства композита влияют не только свойства составляющих включений, но также их размер, расположение, форма, распределение относительно друг друга. В более сложных случаях на свойства композита могут оказать существенное влияние межфазный слой, химические взаимодействия компонент с основным материалом, приводящие к возникновению новых включений и др.

Работа посвящена нахождению одного из основных теплофизических свойств материала – коэффициента теплопроводности. В силу сложности структуры композиционного материала основным способом определения коэффициента теплопроводности являются испытания над опытными образцами. Получение значений коэффициента теплопроводности экспериментальными методами является трудоемким способом и требует больших материальных и временных затрат. Отметим, что экспериментальные методы исследования структурно сложных материалов дают информацию лишь о так называемых интегральных характеристиках, которые обычно называют эффективными. В то же время теоретические методы исследования подразумевают разработку математических моделей и методов исследования материалов, в том числе с использованием математического моделирования.

Как показала практика, для нахождения эффективного коэффициента теплопроводности теория смесей непригодна. Существует ряд формул, позволяющих вычислить значение коэффициента теплопроводности композита в зависимости от значений коэффициентов составляющих компонент и их объемной или массовой долей в композите [3]. Расчетные формулы получены, как правило, либо обработкой экспериментальных данных применительно к конкретным материалам, либо априорным заданием распределения температуры и теплового потока в моделях структуры гетерогенных тел. В качестве примеров можно привести модель Максвелла, статистическую и матричную модели [4] и др. Существенным недостатком подобного рода моделей является их низкая точность.

В работе используется метод исследования композита, основанный на прямом численном математическом моделировании тепловых процессов при нагреве, в котором структура компонент учитывается явным образом. Это приводит к решению задачи распространения тепла по неоднородной области с учетом конкретных теплофизических свойств матрицы и включений. Найденное распределение температуры в расчетной области позволяет оценить количество теплоты, накопленное в композиционном материале. Проводя процедуру осреднения, и сопоставляя осредненные по неоднородной расчетной области параметры с аналогичными результатами, полученными для условно однородной среды, устанавливаются эффективные характеристики.

Математическая модель. Математическое моделирование для исследования тепловых процессов в композиционном материале имеет свои особенности. При анализе расчетной области нужно принимать во внимание наличие различных по геометрии границ раздела разных материалов, которые имеют нелинейные свойства, условия на контактных границах и др.

Общий подход к постановке и решению задачи численного моделирования заключается в выборе области расчета, формулировке краевой задачи нелинейной теории теплопроводности в рассматриваемой области, разработке численного метода, проведении вычислительных экспериментов.

В качестве области расчета выберем так называемый представительный объем материала, т. е. такой минимальный объем, по которому можно судить о материале в целом. Для материалов с регулярной структурой в качестве представительного объема принимается ячейка периодичности. Для материалов с хаотическим расположением частиц размер представительного объема зависит от точности, с которой требуется получить эффективные свойства: чем выше требуемая точность, тем больше размеры представительного объема. В данной работе рассматриваются материалы с регулярной структурой.

Рассмотрим двумерный случай представительного объема, который содержит в своем составе N различных материалов, включая материал матрицы. Предполагаем, что исходные свойства составляющих композит материалов, а также их объемная доля, заранее известны.

Введем декартовую систему координат, начало которой поместим в левый верхний угол рассматриваемого объема.

Рассмотрим двумерную задачу теплопроводности для неоднородного композиционного материала в рамках представительного объема, который представим в виде пластины. Обозначим область, занимаемую объемом, как D .

Уравнение теплового баланса в области D будет иметь вид

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right), \quad (x_1, x_2) \in D, \quad t > t_0, \quad (1)$$

где $\rho = \rho(x_1, x_2; T)$ – плотность; $C = C(x_1, x_2; T)$ – теплоемкость; $\lambda_k = \lambda_k(x_1, x_2; T)$ – теплопроводность по соответствующему направлению. В дальнейшем индекс k будет означать направление вдоль одной из направляющих осей координат (соответствующую координату).

Граничные условия определим исходя из условий, заданных на экспериментальной установке для определения коэффициента теплопроводности опытного образца.

Рассмотрим метод пластины, используемый при экспериментальном методе определения коэффициента теплопроводности материалов [5]. Суть метода заключается в размещении образца между нагревателем и охладителем в теплоизолируемой оболочке (рис. 1). Образец представлен пластиной, толщина которой много меньше его ширины. Нагреватель располагается с одной из сторон пластины таким образом, чтобы все тепло, вырабатываемое нагревателем, поглощалось исследуемым образцом. Через нагреватель пропускается электрический ток и в зависимости от его напряжения вычисляется значение теплового потока. С противоположной стороны образца располагается охладитель, поддерживающий постоянную температуру на поверхности пластины.

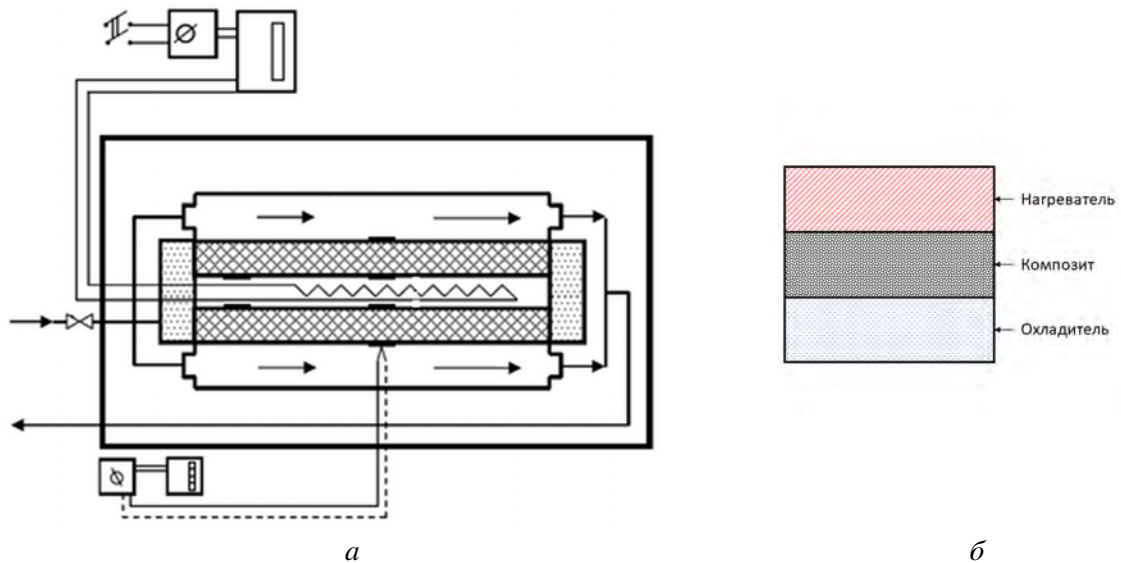


Рис. 1. Экспериментальная установка для метода пластины (а) и условная схема установки (б)

Определим граничные условия в соответствии с экспериментальным подходом. Со стороны расположения охладителя используем условие с постоянной температурой поверхности материала

$$T \Big|_{\Gamma_1} = T_1 = \text{const.}$$

С противоположной стороны зададим условие с постоянной величиной приходящего потока тепла

$$-\left(\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right) \Big|_{\Gamma_3} = q.$$

Поскольку рассматриваемая пластина имеет достаточно большую ширину, предполагаем, что представительный объем заполняет ее периодически, а границы пластины отнесены достаточно

далеко, чтобы влиять на распределение теплового потока в исследуемой области. В таком случае, две оставшиеся границы Γ_2 и Γ_4 дополняем условиями периодичности

$$T \Big|_{\Gamma_2} = T \Big|_{\Gamma_4}.$$

На границах раздела разных материалов Γ_{cont} будем рассматривать условия идеального теплового контакта, при котором имеет место равенство температур и тепловых потоков

$$T \Big|_{\Gamma_{\text{cont}}^-} = T \Big|_{\Gamma_{\text{cont}}^+}, \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_{\text{cont}}^-} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_{\text{cont}}^+},$$

где верхние индексы «-» и «+» означают расположение «слева» и «справа» от границы соответственно.

В качестве начального условия зададим распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$:

$$T(x_1, x_2; 0) = T_0(x_1, x_2).$$

Поскольку теплофизические свойства компонент зависят от температуры, то дифференциальное уравнение (1) – нелинейное, поэтому решаем его приближенным сеточным методом.

При численном моделировании реализация проводится методами вычислительной математики с применением вычислительной техники.

Реализация метода состоит из следующих этапов:

- разбиение области расчета сеткой;
- выбор в каждой ячейке одной точки для искомого решения;
- построение вокруг выбранных точек контрольных объемов;
- аппроксимация уравнения баланса в выбранных контрольных объемах;
- решение полученной нелинейной системы алгебраических уравнений.

Произведем схематизацию структуры композиционного порошкового материала в представительном объеме.

Металлографическое изображение реальной структуры (двумерный случай) вводится в компьютер в виде графического файла, который затем редактируется с помощью стандартных графических редакторов, для того, чтобы выделить значимые элементы структуры и убрать мелкие оттенки. Полученная карта образца дискретизируется с заданной степенью подробности и каждому элементу структуры, состоящему из элементов одного цвета, ставятся в соответствие определенные физико-механические свойства.

При использовании сеточных методов представительный объем разбивается на элементарные ячейки, размер которых должен быть меньше минимального размера компонент композита.

Рассматриваем прямоугольный представительный объем D . Построим сетку $\Omega_h = \sum_{i \in I, j \in J} \omega^{(i,j)}$, где I, J – пространства индексов: $I = \{0, 1, \dots, n_1\}$, $J = \{0, 1, \dots, n_2\}$, а $\omega^{(i,j)} = [ih_1; (i+1)h_1] \times [jh_2; (j+1)h_2]$, где h_1 и h_2 – сеточные шаги. Заметим, что при построении сетки, каждая ячейка состоит из одного материала.

В качестве точки, в которой ищем решение, используем центр масс контрольного объема. Тогда построенный контрольный объем совпадает с сеточной ячейкой. В силу сделанного ранее допущения об однородности материала в каждой сеточной ячейке, координаты центра масс ищем как среднее арифметическое координат вершин контрольного объема.

Вид сеточной области приведен на рис. 2.

Построим систему сеточных уравнений для температуры. Рассмотрим каждую отдельную ячейку $\omega^{(i,j)}$. Аппроксимируем уравнение (1) с помощью метода контрольного объема. Температуру каждой ячейки определяем в центре контрольного объема, т. е. сеточная величина температуры в ячейке представляет среднее интегральное значение соответствующей непрерывно распределенной величины:

$$T^{(i,j)} \approx \frac{1}{V^{(i,j)}} \iint_{\omega^{(i,j)}} T dx_1 dx_2,$$

где $V^{(i,j)}$ – объем ячейки $\omega^{(i,j)}$ (в двумерном случае – площадь ячейки).

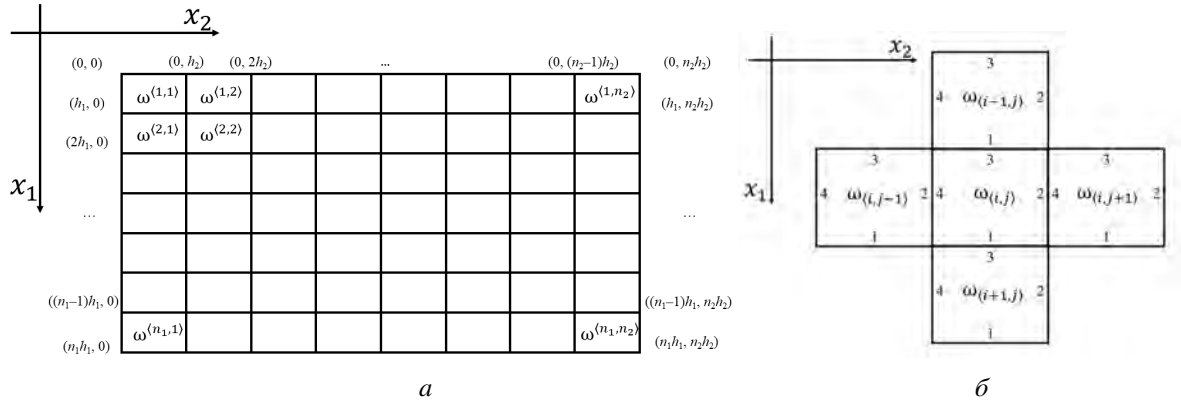


Рис. 2. Общий вид сетки (а); нумерация граней в ячейке (б)

Проинтегрируем уравнение (1) по контрольному объему $\omega^{(i,j)}$. Для удобства, индекс ячейки $\langle i, j \rangle$ временно опустим

$$\frac{1}{V} \iint_{\omega} \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dV = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^2 \iint_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) dV.$$

Используя формулу Остроградского–Гаусса, получим

$$\frac{1}{V} \iint_{\omega} \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dV = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^2 \oint_{\partial \omega} \lambda_k \frac{\partial T}{\partial x_k} n_k dS, \quad (2)$$

где $\partial \omega$ – граница ячейки ω ; $\vec{n}$ – внешняя единичная нормаль к $\partial \omega$. В дальнейшем, для обозначения координаты внешней нормали воспользуемся следующим обозначением: n_k , $k \in \{1, 2\}$. Отметим, что при использовании прямоугольной сетки нормали будут параллельны осям координат.

Учитывая форму ячеек, интеграл по границе контрольного объема вычисляем как сумму произведений значений вектора потока в центрах граней контрольного объема на площади его граней:

$$\frac{1}{V} \sum_{k=1}^2 \oint_{\partial \omega} \lambda_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \vec{n} dS = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^4 S_m \left(\lambda_k \frac{\partial T}{\partial x_k} n_k \right) \Big|_{P_m} = \frac{1}{V} \sum_{m=1}^4 S_m \sum_{k=1}^2 \lambda_{k;m} n_{k;m} \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \right) \Big|_{P_m}, \quad (3)$$

где индекс m соответствует обходу граней ячейки, как указано на рис. 2, б; S_m – площадь m -й грани (в двумерном случае – длина грани). Таким образом, получение дискретного аналога балансового уравнения сводится к аппроксимации потоков $\lambda_k \frac{\partial T}{\partial x_k}$ в серединных точках P_m на соответствующих гранях.

Найдем производные $\frac{\partial T}{\partial x_k} \Big|_{P_m}$:

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} \Big|_{P_m} = \frac{\partial T}{\partial l} \Big|_{L_m} \frac{\partial l}{\partial x_k},$$

где L_m – прямая, соединяющая центр ячейки ω и ячейки, примыкающей к m -й грани; l_m – длина прямой L_m . Направление l задается прямой L_m , причем $\frac{\partial l}{\partial x_k} = \cos \alpha_{x_k}$, где косинусы $\cos \alpha_{x_k}$ – направляющие косинусы прямой l .

Найдем выражение для нижней грани – грани, соединяющей ячейку $\omega^{(i,j)}$ с ячейкой $\omega^{(i+1,j)}$. Относительно ячейки $\omega^{(i,j)}$ индекс m будет равен единице (рис. 2, б). Используя формулы для определения производной по направлению, мы получим следующее выражение:

$$\frac{S_1}{V^{(i,j)}} \sum_{k=1}^2 \lambda_k^{(i+0,5,j)} n_{1;k} \cdot \frac{(T^{(i,j)} - T^{(i+1,j)}) (O_k^{(i+1,j)} - O_k^{(i,j)})}{l_1^2},$$

где $O^{(i,j)} = (O_1^{(i,j)}; O_2^{(i,j)})$ – центральная точка ячейки $\omega^{(i,j)}$; $n_{1;k}$ – k -я компонента вектора нормали $\vec{n}_1$. Под индексом $\langle i+0,5,j \rangle$ подразумеваем вычисление значения на границе ячеек $\omega^{(i,j)}$ и $\omega^{(i+1,j)}$.

Аналогичным образом получаем выражения для тепловых потоков через оставшиеся грани $m = 2, 3, 4$.

В силу определения сеточной величины для левой части имеем

$$\frac{1}{V^{(i,j)}} \iint_{\omega} \rho^{(i,j)} C^{(i,j)} \frac{\partial T}{\partial t} dV = \rho^{(i,j)} C^{(i,j)} \frac{T^{(i,j)} - \check{T}^{(i,j)}}{\Delta t}, \quad (4)$$

где $\check{T}^{(i,j)}$ – температура в ячейке $\omega^{(i,j)}$ на предыдущем временном слое; $\rho^{(i,j)}$ и $C^{(i,j)}$ вычисляются в центре ячейки $\omega^{(i,j)}$.

Используя аппроксимации (3) для $m = 1, \dots, 4$ и (4), запишем аппроксимацию уравнения (2):

$$\begin{aligned} \rho^{(i,j)} C^{(i,j)} \frac{T^{(i,j)} - \check{T}^{(i,j)}}{\Delta t} = \frac{1}{V^{(i,j)}} & \left(S_1 \sum_{k=1}^2 \lambda_k^{(i+0,5,j)} n_{1;k} \cdot \frac{(T^{(i,j)} - T^{(i+1,j)}) (O_k^{(i+1,j)} - O_k^{(i,j)})}{l_1^2} + \right. \\ & + S_2 \sum_{k=1}^2 \lambda_k^{(i,j+0,5)} n_{2;k} \cdot \frac{(T^{(i,j)} - T^{(i,j+1)}) (O_k^{(i,j+1)} - O_k^{(i,j)})}{l_2^2} + \\ & + S_3 \sum_{k=1}^2 \lambda_k^{(i-0,5,j)} n_{3;k} \cdot \frac{(T^{(i,j)} - T^{(i-1,j)}) (O_k^{(i-1,j)} - O_k^{(i,j)})}{l_3^2} + \\ & \left. + S_4 \sum_{k=1}^2 \lambda_k^{(i,j-0,5)} n_{4;k} \cdot \frac{(T^{(i,j)} - T^{(i,j-1)}) (O_k^{(i,j-1)} - O_k^{(i,j)})}{l_4^2} \right). \quad (5) \end{aligned}$$

Поскольку точка P_m располагается на границе ячейки и может оказаться на границе разделения сред, необходимо получить усредненное значение коэффициента теплопроводности. Выберем значения λ_k , наиболее соответствующие физике тепловых процессов [6]. Например, выражение для $\lambda_1^{(i,j)}$ запишем следующим образом:

$$\lambda_1^{(i+0,5,j)} = \frac{2\lambda_1^{(i,j)}\lambda_1^{(i+1,j)}}{\lambda_1^{(i,j)} + \lambda_1^{(i+1,j)}}.$$

Остальные значения λ_k находим аналогичным образом.

Поскольку моделирование производится для сравнительно небольшого представительного объема и до времени установления стационарного режима, а также учитывая мощность современных компьютеров, то для реализации можно использовать явные разностные схемы. Для этого вводим переменный шаг по времени $\Delta t_n, n = 1, \dots, N$, где t_N – время установления стационарного режима, который на каждом временном слое будет обеспечивать условие устойчивости разностной схемы. В правой части разностной схемы (5), все значения температур возьмем на предыдущем временном слое.

Поскольку теплофизические свойства компонент (λ, ρ, C) зависят от температуры, то проверяем условие Куранта, используя их значения на предыдущем временном слое

$$\Delta t_n \leq \frac{\max_{(i,j)} \rho(t_{n-1}) C(t_{n-1})}{\min_{(i,j)} \lambda(t_{n-1})} \Delta x_1 \Delta x_2. \quad (6)$$

В случае нарушения условия Куранта, уменьшаем значение Δt_n до значения, удовлетворяющего выражению (6).

Завершаем вычислительный процесс при достижении стационарного потока, что означает выполнение условия

$$\left| T_n^{(i,j)} - T_{n-1}^{(i,j)} \right| \leq \varepsilon \left| T_{n-1}^{(i,j)} \right|,$$

где ε – некоторая заранее заданная погрешность.

Для определения эффективного коэффициента теплопроводности воспользуемся подходом, описанным в [2]. Гомогенизируем композиционный материал, заменив его на однородный со значением коэффициента теплопроводности, соответствующим значению для рассматриваемого композита. После завершения вычислительного процесса, ищем усредненный коэффициент

теплопроводности композита λ_1^{eff} по формуле

$$\lambda_1^{\text{eff}} = \frac{Q_1}{S_1^{\text{п.о.}} \Delta T_1 \Delta t_N},$$

где Q_1 – переданное через композит количество теплоты; $S_1^{\text{п.о.}}$ – площадь поверхности представительного объема (длина грани Γ_3); ΔT_1 – градиент температур между верхней (Γ_3) и нижней (Γ_1) гранями представительного объема. Вычисления производим в направлении теплового потока, т. е., согласно выбору граничных условий, вдоль направления оси Ox_1 .

Градиент температур ΔT_1 находим как разность между средним арифметическим температур контрольных объемов, прилегающих к верхней и нижней граням. Количество теплоты Q_1 отыскиваем как сумму количества теплоты $q_1^{(i,j)}$, переданной через каждый контрольный объем композита

$$Q_1 = \sum_{\langle i,j \rangle} q_1^{(i,j)}.$$

Поскольку вычисления производятся для заданного шага времени, формула для количества теплоты принимает следующий вид

$$q_1^{(i,j)} = C^{(i,j)} \rho^{(i,j)} V^{(i,j)} \Delta T_1 \Delta t_N.$$

В результате, выражение для нахождения коэффициента теплопроводности композита по направлению Ox_1 принимает вид:

$$\lambda_1^{\text{eff}} = \frac{\sum_{\langle i,j \rangle} C^{(i,j)} \rho^{(i,j)} V^{(i,j)} \Delta T_1^{(i,j)}}{S_1^{\text{п.о.}} \Delta T_1}.$$

Для определения λ_2^{eff} по направлению Ox_2 граничные условия необходимо изменить следующим образом: на границах Γ_1 и Γ_3 задать условия периодичности, на границе Γ_2 задать условие с постоянным потоком тепла, на границе Γ_4 – условие с постоянной температурой поверхности материала. Или, что будет тождественным описанной выше смене граничных условий, найти значение λ_1 для повернутой матрицы материала на 90° против часовой стрелки.

Программная реализация. Реализация численного метода выполнялась на языке программирования C++ с использованием объектно-ориентированной парадигмы программирования.

Для оптимальной программной реализации, например, с перспективой использования произвольных четырехугольных ячеек, внесем изменения в описание ближайших соседних ячеек. Для этого рассмотрим алгоритм на уровне отдельной ячейки сетки $\omega^{(i,j)}$. Введем обозначение inner для внутренних значений рассматриваемой ячейки и обозначение outer для значений соседних, относительно рассматриваемой, ячеек. В качестве основы для нумерации граней воспользуемся уже выбранной на рис. 2, б нумерацией. Для индексов граней используем обозначение $m \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Также введем нумерацию ячеек, соседних с рассматриваемой. Пронумеруем их в соответствии с номерами смежных граней с ячейкой $\omega^{(i,j)}$. Таким образом можно сопоставить локальную индексацию соседних ячеек с индексацией ячеек в общей структуре сетки:

$$*_m^{\text{outer}} = \begin{cases} m = 1, \text{outer} = \langle i + 1, j \rangle, \\ m = 2, \text{outer} = \langle i, j + 1 \rangle, \\ m = 3, \text{outer} = \langle i - 1, j \rangle, \\ m = 4, \text{outer} = \langle i, j - 1 \rangle. \end{cases}$$

Такой способ индексации позволяет унифицировать вычисления для каждой грани ячейки, что в свою очередь положительно сказывается на качестве программной реализации.

Используем нововведенные обозначения, чтобы переписать выражение теплового потока для каждой отдельной грани

$$\frac{1}{V} S_m \sum_{k=1}^2 \lambda_{k;m} n_{k;m} \frac{(T - T_m^{\text{outer}})(O_{k;m}^{\text{outer}} - O_k)}{l_m^2}, \quad m \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Перепишем таким образом уравнение (5) с использованием суммирования

$$\rho^{(i,j)} C^{(i,j)} \frac{T^{(i,j)} - \check{T}^{(i,j)}}{\Delta t} = \frac{1}{V^{(i,j)}} \sum_{m=1}^4 S_m^{(i,j)} \sum_{k=1}^2 \lambda_{k;m}^{(i,j)} n_{k;m}^{(i,j)} \frac{(T^{(i,j)} - T_m^{\text{outer}})(O_{k;m}^{\text{outer}} - O_k^{(i,j)})}{(l_m^{(i,j)})^2}. \quad (7)$$

Выражения для определения значений $\lambda_k \Big|_{P_m}$ также примет унифицированный для каждой грани вид

$$\lambda_k \Big|_{P_m} = \frac{2\lambda_k^{\text{inner}} \lambda_k^{\text{outer}}}{\lambda_k^{\text{inner}} + \lambda_k^{\text{outer}}}, \quad m \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Преобразуем (7) в следующий вид:

$$\rho^{(i,j)} C^{(i,j)} \frac{T^{(i,j)} - \check{T}^{(i,j)}}{\Delta t} = A_0^{(i,j)} T^{(i,j)} + \sum_{m=1}^4 A_m^{(i,j)} T_m^{\text{outer}},$$

где коэффициенты A вычисляются по следующим формулам:

$$A_0^{(i,j)} = \frac{1}{V^{(i,j)}} \sum_{m=1}^4 \frac{S_m^{(i,j)}}{(l_m^{(i,j)})^2} \sum_{k=1}^2 \lambda_{k;m}^{(i,j)} n_{k;m}^{(i,j)} (O_{k;m}^{\text{outer}} - O_k^{(i,j)}),$$

$$A_m^{(i,j)} = -\frac{S_m^{(i,j)}}{V^{(i,j)} (l_m^{(i,j)})^2} \sum_{k=1}^2 \lambda_{k;m}^{(i,j)} n_{k;m}^{(i,j)} (O_{k;m}^{\text{outer}} - O_k^{(i,j)}).$$

Вычислительные эксперименты. Проведены численные эксперименты, показывающие эффективность используемого метода. Некоторые из них приведены ниже.

Влияние компоненты включения на значение коэффициента теплопроводности по отношению к тепловому потоку. Для вычислительного эксперимента возьмем образцы композитных материалов с медной матрицей и разместим внутри графитовый компонент, длина которого сильно превышает его толщину. Свойства материалов композита указаны в табл. 1.

Таблица 1. Свойства материалов

Свойства	Материал	
	Медь	Графит
Теплопроводность λ , Вт/(м·К)	300	150
Удельная теплоёмкость C , Дж/(кг·К)	400	1000
Плотность ρ , кг/м ³	8920	2100
Цветовое обозначение		

Выберем квадратный представительный объем со стороной ребра $5 \cdot 10^{-4}$ м. Разобьем этот объем на 50 квадратных ячеек в каждом направлении. Каждая ячейка примет вид квадрата размером $10^{-5} \times 10^{-5}$ м. Устанавливаем на нижней границе постоянную температуру в 300 градусов Кельвина. Через верхнюю грань устанавливаем тепловой поток величиной 10^4 Вт/м².

Размер компоненты графита составляет $2 \cdot 10^{-5} \times 3 \cdot 10^{-4}$ метра или 2×30 ячеек, что составляет 2,4 % от представительного объема. Расположение компоненты и полученные значения расчетного коэффициента теплопроводности (λ^{eff}) отображены в табл. 2.

Полученные данные соотносятся с теоретическим представлением о поведении теплового потока. При поперечном расположении компоненты по отношению к распространению тепла он оказывает влияние на итоговое значение коэффициента теплопроводности. Различие полученных коэффициентов теплопроводности относительно максимального значения составило 0,06 %.

Таблица 2. Моделирование частицы графита в медной матрице

Изображение	λ^{eff}	Изображение	λ^{eff}
	293,345		296,151
	293,260		296,151
	293,155		296,151

Сравним полученные значения со значениями, получаемыми при использовании модели Максвелла, статистической модели (она же модель Оделевского) и матричной модели в табл. 3.

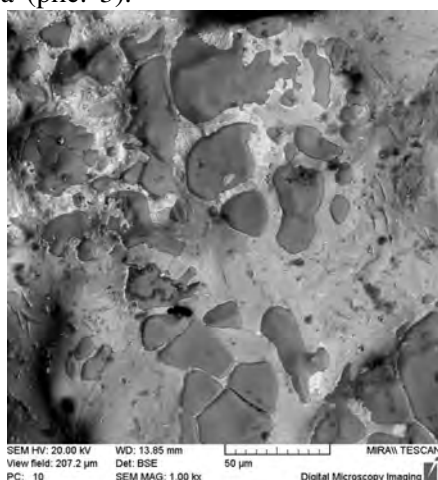
Таблица 3. Значения коэффициентов теплопроводности для различных моделей

Расчетные значения теплопроводности	Вертикальная компонента	296,151
	Горизонтальная компонента	293,260
Модельные значения теплопроводности	Модель Максвелла	294,295
	Статистическая модель	293,358
	Матричная модель	295,541

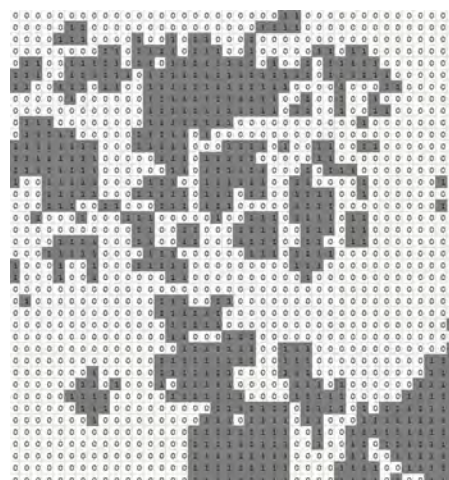
Полученные с помощью моделей значения заметно отличаются друг от друга, что говорит о неоднозначности их применения для разных материалов. Также ни одно из модельных значений не учитывает формы и положения компонент наполнителя в структуре композита, возможную анизотропию материалов наполнителя. В отличие от описанных моделей, численный подход позволяет учесть вышеназванные аспекты материала и получить различные коэффициенты теплопроводности для каждого отдельного случая.

Отдельно отметим, что при замене материала наполнителя на материал матрицы, т. е. при испытании однородного материала, значение λ^{eff} полностью совпадает со значением коэффициента теплопроводности заполняющего материала.

Влияние температуры на эффективный коэффициент теплопроводности композита. Рассмотрим композиционный материал на основе бронзы марки БрО12 с добавлением компонент железа (рис. 3).



а



б

Рис. 3. Представительный объем бронзы с включениями порошка железа (36,7 %):

а – микроструктура материала; б – цифровой вид материала

Для бронзы марки БрО12 имеется постоянное значение коэффициента теплопроводности: $\lambda_{\text{BrO12}} = 48,56 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$. Для железа имеются таблицы для коэффициента теплопроводности при различных температурах исследуемого материала [7].

Произведем вычисление эффективного коэффициента теплопроводности при различной температуре композиции, получим коэффициенты теплопроводности образца для различных температур (от 300 до 800 К) с шагом в 50° . На рис. 4 приведены рассчитанные значения λ^{eff} . Видно, что при повышении температуры значение коэффициента теплопроводности композита падает, что соответствует поведению теплофизических свойств железа.

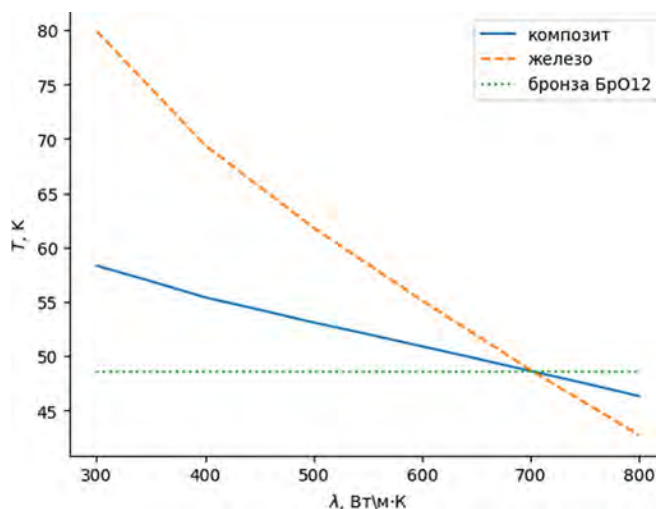


Рис. 4. Зависимость коэффициента теплопроводности композита БрО12-Fe от температуры

Влияние межфазного слоя на коэффициент теплопроводности композита. Рассмотрим композит на основе бронзы БрО12 с добавкой порошка титана марки ТПП-7. При спекании материала на поверхности компонент титана формируется слой карбонитрида титана, который, как будет показано далее, оказывает заметное влияние на значение коэффициента теплопроводности. Свойства материалов композита представлены в табл. 4, структура – на рис. 5.

Таблица 4. Свойства материалов

Свойства	Материал			
	БрО12	Воздух (поры)	Ti	TiCN
Теплопроводность λ , Вт/(м·К)	48,56	1	21,9	14
Удельная теплоёмкость C , Дж/(кг·К)	368,4	1005	523	530
Плотность ρ , кг/м ³	8800	1,2	4540	5800
Числовое обозначение	0	1	2	3

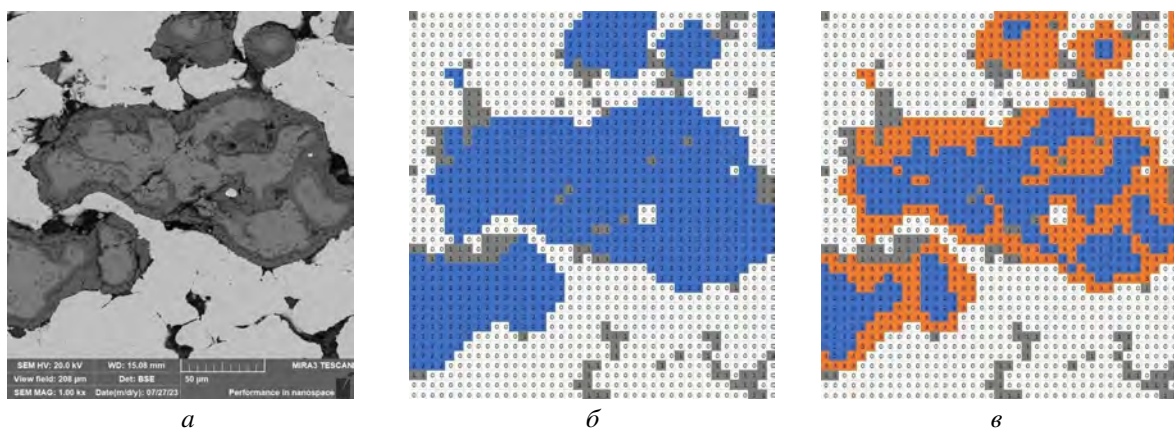


Рис. 5. Представительный объем бронзы с включениями порошка титана: микроструктура материала (а); цифровой вид материала (без промежуточного слоя) (б); цифровой вид материала (с промежуточным слоем) (в)

Полученное значение λ^{eff} для матрицы без промежуточного слоя составило 28,763 Вт/(м·К), с промежуточным слоем – 24,395 Вт/(м·К). Из полученных результатов можно утверждать, что формируемый слой после спекания оказывает заметное влияние на величину коэффициента теплопроводности.

Результаты согласуются с экспериментальными данными. Разработанный метод может быть применен для композитов с включениями произвольной формы и состоящих из нескольких материалов.

Заключение. Сочетание математического моделирования с экспериментальными исследованиями представляется наиболее перспективным для решения подобных задач. Такой подход расширяет инструментарий, который могут использовать разработчики новых материалов, предоставляя возможность увеличить количество рассматриваемых композиций. В этом случае в качестве управляющих параметров выступают такие как степень наполнения композиции, средний размер включений, свойства фаз и др.

Разработанный метод позволяет находить эффективные коэффициенты теплопроводности дисперсно-наполненных композиционных материалов. В математической модели учтены структура композиционного материала (форма, размер и положение компонент наполнителя), зависимость теплофизических свойств материалов от температуры. Математическая модель позволяет определить ортотропию композита и получить значения коэффициента теплопроводности по каждому направлению. Выполнена программная реализация метода, произведены вычислительные эксперименты.

Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси в рамках отдельного проекта «Разработка математических моделей, численных алгоритмов и программ для расчета тепловых и механических свойств композиционных порошковых материалов».

Литература

1. Дульнев Г. Н., Заричняк Ю. П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Ленинград: Энергия, 1974.
2. Люкшин Б. А. [и др.] Дисперсно-наполненные полимерные композиты технического и медицинского назначения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2017.
3. Зарубин В. С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983.
4. Никитин А. В. [и др.] Модельные представления о теплопереносе в полимерных нанокompозитах // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. 2014. № 5(176), вып. 34. С. 150–160.
5. Купцов С. М. Определение коэффициента теплопроводности теплоизоляционных материалов методом пластины. М.: РГУ нефти и газа, 2003.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
7. Зиновьев В. Е. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах. М.: Metallurgia, 1989.

References

1. Dulnev G. N., Zarichnyak Y. P. *Thermal conductivity of mixtures and composite materials*. Leningrad, Energiya, 1974 (in Russian).
2. Lyukshin B. A. [et al.]. *Dispersion-filled polymer composites for technical and medical purposes*. Novosibirsk, Izdatelstvo SO RAN, 2017 (in Russian).
3. Zarubin V. S. *Engineering methods for solving thermal conductivity problems*. Moscow, Energoatomizdat, 1983 (in Russian).
4. Nikitin A. V., Liopo V. A., Avdeychik S. V., Struck V. A. Model representations of thermal conductance in polymer nanocomposites. *Scientific reports BSU. Ser. Mathematics. Physics*, 2014, vol. 34, no. 5(176), pp. 150–160 (in Russian).
5. Kuptsov S. M. *Determination of the thermal conductivity coefficient of thermal insulation materials using the plate method*. Moscow, RGU нефти i gaza, 2003 (in Russian).
6. Samarskii A. A. *The theory of difference schemes*. Moscow, Nauka, 1977 (in Russian).
7. Zinoviev V. E. *Thermophysical properties of metals at high temperatures*. Moscow, Metallurgiya, 1989 (in Russian).

УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭКРАНИРОВАНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НАМАГНИЧЕННЫМИ ЭКРАНАМИ ИЗ ПЕРМАЛЛОЯ

В. Т. Ерофеевко, Г. Ф. Громыко, Г. М. Заяц

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
e-mail: grom@im.bas-net.by, zayats@im.bas-net.by

Поступила: 09.04.2024

Исправлена: 30.05.2024

Принята: 18.06.2024

Ключевые слова: уравнения электродинамики, плоский экран, эффективность экранирования, намагниченность, импульсное электромагнитное поле, численный метод, разностные схемы.

Аннотация. Разработан численный метод решения начально-краевой задачи экранирования импульсных электромагнитных полей плоским намагниченным экраном из пермаллоя для случая, когда поток энергии импульсного поля направлен ортогонально экрану. Численно исследована динамика преобразования импульсов при прохождении через экран. Вычислен коэффициент эффективности экранирования.

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF SHIELDING OF PULSED ELECTROMAGNETIC FIELDS BY MAGNETIZED PERMALLOY SCREENS

V. T. Erofeenko, G. F. Gromyko, G. M. Zayats

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
e-mail: grom@im.bas-net.by, zayats@im.bas-net.by

Received: 09.04.2024

Revised: 30.05.2024

Accepted: 18.06.2024

Keywords: equations of electrodynamics, flat screen, shielding efficiency, magnetization, pulsed electromagnetic field, numerical method, difference schemes.

Abstract. A numerical method for solving the initial boundary value problem of shielding of pulsed electromagnetic fields by a flat magnetized permalloy screen is developed for the case when the energy flow of the pulsed field is orthogonal to the screen. Numerically investigated the dynamics of pulse transformation during their passage through the screen. The shielding efficiency coefficient is calculated.

Введение. Одной из основных проблем при создании электронных устройств в современной технике является их защита от внешних электромагнитных воздействий [1–4]. С целью защиты используются тонкостенные пленочные экраны из специальных материалов [2; 5–8]. При производстве защитных экранов широко используется пермаллой – легко намагничиваемый сплав никеля с железом, обладающий высокой магнитной проницаемостью при незначительной толщине материала.

Экспериментальный подбор нужных свойств экрана является дорогостоящим процессом, поэтому важнейшим инструментом исследования магнитных характеристик экранов служит математическое моделирование. Математическое моделирование включает разработку математических моделей в виде краевых задач, построение численных методов их решения, написание программ расчета электромагнитных полей, визуализацию результатов и др. В работах [10–12] для ряда задач магнитостатики авторами данной статьи разработана численно-аналитическая методика исследования проникновения внешнего магнитного поля внутрь бесконечно протяженной цилиндрической пленочной однослойной оболочки (экрана), выполненной из пермаллоидного материала с магнитной проницаемостью, нелинейно зависящей от напряженности магнитного поля. С помощью данной методики трехобластная задача сводится к однообластной задаче в пленке с граничными условиями третьего рода или интегральными граничными условиями на лицевых поверхностях экрана в зависимости от вида внешнего магнитного поля.

В работе [13] построена математическая модель задачи проникновения импульсных электромагнитных полей через плоский экран, заполненный пермаллоем. Модель основана на использовании уравнений Максвелла и нелинейного уравнения Ландау–Лифшица для поля намагниченности, распространяющегося в слое экрана. Сформулирована начально-краевая задача экранирования в виде системы шести скалярных параболических нелинейных дифференциальных уравнений относительно компонент магнитного поля и поля намагниченности с граничными условиями третьего и первого рода на поверхностях экрана. Разработан численный метод решения начально-краевой задачи и предложена формула для вычисления коэффициента эффективности экранирования, который является важной характеристикой пленочных экранов, указывающей на степень ослабления внешнего электромагнитного поля экранирующим материалом. Численно исследована динамика магнитных полей в экране в зависимости от начального импульса и найден коэффициент эффективности экранирования. Вычислительные эксперименты показали, что начально-краевые условия первого рода для поля намагниченности, рассмотренные в данной модели, приводят к незначительным изменениям магнитного поля и поля намагниченности в плоскостях, касательных к экрану. В работе [14] физико-математическая модель задачи экранирования развита на случай граничных условий второго рода и начального условия специального вида для поля намагниченности.

Данная статья посвящена разработке численного метода решения и итерационного алгоритма реализации сформулированной в [14] начально-краевой задачи. Проведены численные эксперименты по исследованию характеристик магнитного поля и поля намагниченности в слое экрана. Вычислен коэффициент эффективности экранирования.

1. Физико-математическая модель экранирования [14]. В трехмерном пространстве с электрической и магнитной постоянными ε_0, μ_0 расположен плоский экран $D(0 < z < \Delta)$ из пермаллоя, ограниченный плоскостями $\Gamma_1(z = 0), \Gamma_2(z = \Delta)$ (рис. 1). Из полупространства $D_1(z < 0)$ на слой D воздействует первичное электромагнитное поле $\mathbf{E}_0(z, t), \mathbf{H}_0(z, t)$. В результате в области D_1 образуется отраженное поле $\mathbf{E}'_1(z, t), \mathbf{H}'_1(z, t)$ и суммарное электромагнитное поле $\mathbf{E}_1(z, t) = \mathbf{E}_0(z, t) + \mathbf{E}'_1(z, t), \mathbf{H}_1(z, t) = \mathbf{H}_0(z, t) + \mathbf{H}'_1(z, t)$. В полупространство $D_2(z > \Delta)$ через экран D проникает поле $\mathbf{E}_2(z, t), \mathbf{H}_2(z, t)$.

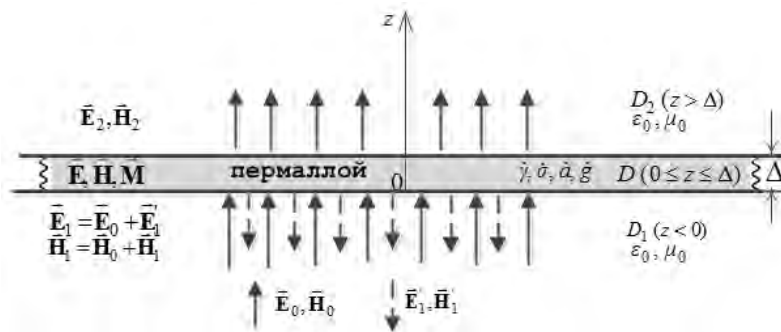


Рис. 1. Экранирование электромагнитного импульса $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ экраном D

Краевая задача. Для заданного первичного поля $\mathbf{E}_0(z, t), \mathbf{H}_0(z, t)$ требуется определить электромагнитные поля $\mathbf{E}'_1(z, t), \mathbf{H}'_1(z, t); \mathbf{E}_2(z, t), \mathbf{H}_2(z, t)$ соответственно в областях D_1, D_2 , и поля $\mathbf{E}(z, t), \mathbf{H}(z, t), \mathbf{M}(z, t)$ в области D , которые удовлетворяют следующим условиям:

– уравнениям Максвелла

$$\text{rot} \mathbf{E}'_1 = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}'_1, \quad \text{rot} \mathbf{H}'_1 = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}'_1, \quad z < 0; \quad (1)$$

$$\text{rot} \mathbf{E}_2 = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}_2, \quad \text{rot} \mathbf{H}_2 = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_2, \quad z > \Delta; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{\dot{\sigma} \mu_0} (\Delta \mathbf{H} - \text{grad div} \mathbf{H}) - \dot{\gamma} \mathbf{P}, \quad 0 < z < \Delta; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \dot{\gamma} \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{M} \times (\mathbf{H} + \dot{a} \Delta \mathbf{M} - \dot{g} \mathbf{M} \times \mathbf{H}), \quad 0 < z < \Delta; \quad (4)$$

– граничным условиям непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на плоскости Γ_1

$$(\mathbf{E}_\tau - \mathbf{E}_{1\tau})|_{z=0} = 0, \quad (\mathbf{H}_\tau - \mathbf{H}_{1\tau})|_{z=0} = 0, \quad (\mathbf{H}, \mathbf{e}_z)|_{z=0} = 0; \quad (5)$$

– граничным условиям непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на плоскости Γ_2

$$(\mathbf{E}_\tau - \mathbf{E}_{2\tau})|_{z=\Delta} = 0, \quad (\mathbf{H}_\tau - \mathbf{H}_{1\tau})|_{z=\Delta} = 0, \quad (\mathbf{H}, \mathbf{e}_z)|_{z=\Delta} = 0; \quad (6)$$

– граничным условиям для поля намагниченности на плоскостях Γ_1, Γ_2

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z}, \mathbf{e}_x \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z}, \mathbf{e}_y \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad (\mathbf{M}, \mathbf{e}_z)|_{z=0} = 0, \\ \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z}, \mathbf{e}_x \right) \Big|_{z=\Delta} = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z}, \mathbf{e}_y \right) \Big|_{z=\Delta} = 0, \quad (\mathbf{M}, \mathbf{e}_z)|_{z=\Delta} = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

– условиям излучения на бесконечность в областях D_1, D_2 .

Здесь μ_0 – магнитная постоянная; $\dot{\sigma}$ – проводимость пермаллоя; величины $\dot{\gamma}, \dot{a}, \dot{g}$ определяют связь намагниченности $\mathbf{M}(z, t)$ с напряженностью магнитного поля $\mathbf{H}(z, t)$; постоянные имеют физические размерности $[\dot{\gamma}] = \text{м}/(\text{А} \cdot \text{с}), [\dot{a}] = \text{м}^2, [\dot{g}] = \text{м}/\text{А}, [\dot{\sigma}] = \text{См}/\text{м}, \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн}/\text{м}$.

В качестве первичного электромагнитного поля $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$, ортогонально падающего на экран, рассмотрим импульсное электромагнитное поле

$$\mathbf{E}_0(z, t) = -B_0(T^{(-)})\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{H}_0(z, t) = \frac{1}{Z_0}B_0(T^{(-)})\mathbf{e}_x, \quad B_0(t') = Z_0 H_0 b(t'), \quad (8)$$

где $B_0(t')$ – импульсная функция, заданная на множестве $0 < t' < \infty$; $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$; $T^{(-)} = (ct - z)/c\tau$, $\tau = T_{\text{imp}}/2$, T_{imp} – длительность импульса первичного поля (8), $\tau = \tau_{fr}$ – время фронта импульса, c – скорость света в вакууме; H_0 – максимальное значение напряженности магнитного поля $\mathbf{H}_0$. В качестве импульсных функций $b(t')$ первичного импульсного поля (8) будем рассматривать функции, используемые в натурных технических экспериментах.

Полагаем, что образующиеся в областях D_1, D_2 импульсные поля по структуре аналогичны полю (8).

Для возбуждения поля намагниченности $\mathbf{M}$ в материале экрана используется магнитное поле $\mathbf{H}_{sm}$. Будем считать, что при $t' \leq 0$ экран намагничен с постоянной намагниченностью вида

$$\mathbf{H}_{sm} = H_{sm}(z)\mathbf{e}_z, \quad H_{sm}(0) = 0, \quad H_{sm}(\Delta) = 0, \quad t' \leq 0. \quad (9)$$

При $t' > 0$ намагниченность экрана изменяется под воздействием внешнего импульсного поля.

В [14] построена начально-краевая задача для нахождения физически безразмерных компонент магнитного поля $u_k(\bar{z}, \bar{t})$, $k = 1, 2, 3$, и поля намагниченности $v_k(\bar{z}, \bar{t})$, $k = 1, 2, 3$, в экране ($\bar{z} = z/\Delta$, $\bar{t} = t\tau$ – физически безразмерная координата и безразмерное время).

2. Начально-краевая задача в слое экрана. Требуется численно решить:

1) уравнения

$$\frac{\partial u_1(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = G \frac{\partial^2 u_1(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}^2} - p_1(\bar{z}, \bar{t}), \quad 0 < \bar{z} < 1, \quad 0 < \bar{t} \leq 3, \quad (10)$$

$$\frac{\partial u_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = G \frac{\partial^2 u_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}^2} - p_2(\bar{z}, \bar{t}), \quad 0 < \bar{z} < 1, \quad 0 < \bar{t} \leq 3, \quad (11)$$

с граничными условиями

$$\left(\frac{\partial u_1(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} - K_0 u_1(\bar{z}, \bar{t}) \right) \Big|_{\bar{z}=0} = -2K_0 b(\bar{t}), \quad \left(\frac{\partial u_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} - K_0 u_2(\bar{z}, \bar{t}) \right) \Big|_{\bar{z}=0} = 0, \quad 0 \leq \bar{t} \leq 3, \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial u_1(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} + K_0 u_1(\bar{z}, \bar{t}) \right) \Big|_{\bar{z}=1} = 0, \quad \left(\frac{\partial u_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} + K_0 u_2(\bar{z}, \bar{t}) \right) \Big|_{\bar{z}=1} = 0, \quad 0 \leq \bar{t} \leq 3, \quad (13)$$

и начальными условиями

$$u_1(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{t}=0} = 0, \quad u_2(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{t}=0} = 0, \quad 0 \leq \bar{z} \leq 1; \quad (14)$$

2) уравнение

$$\frac{\partial u_3(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = -p_3(\bar{z}, \bar{t}), \quad 0 < \bar{z} < 1, \quad 0 < \bar{t} \leq 3, \quad (15)$$

с граничными условиями

$$u_3(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{z}=0} = 0, \quad u_3(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{z}=1} = 0, \quad 0 \leq \bar{t} \leq 3, \quad (16)$$

и с начальным условием

$$u_3(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{t}=0} = 0, \quad 0 \leq \bar{z} \leq 1; \quad (17)$$

3) уравнения

$$\frac{\partial v_1(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = p_1(\bar{z}, \bar{t}), \quad 0 < \bar{z} < 1, \quad 0 < \bar{t} \leq 3, \quad (18)$$

$$\frac{\partial v_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = p_2(\bar{z}, \bar{t}), \quad 0 < \bar{z} < 1, \quad 0 < \bar{t} \leq 3, \quad (19)$$

$$\frac{\partial v_3(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = p_3(\bar{z}, \bar{t}), \quad 0 < \bar{z} < 1, \quad 0 < \bar{t} \leq 3, \quad (20)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial v_1(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=0} = 0, \quad \frac{\partial v_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=0} = 0, \quad v_3(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{z}=0} = 0, \quad 0 \leq \bar{t} \leq 3, \quad (21)$$

$$\frac{\partial v_1(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=1} = 0, \quad \frac{\partial v_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=1} = 0, \quad v_3(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{z}=1} = 0, \quad 0 \leq \bar{t} \leq 3, \quad (22)$$

и с начальными условиями

$$v_1(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{t}=0} = 0, \quad v_2(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{t}=0} = 0, \quad v_3(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{t}=0} = H_s \varphi(\bar{z}), \quad 0 \leq \bar{z} \leq 1. \quad (23)$$

Здесь $b(\bar{t})$ – безразмерная импульсная функция; $H_s \varphi(\bar{z})$ – функция, определяющая начальную намагниченность экрана и заданная таким образом, чтобы граничные условия (21), (22) и начальные условия (23) для функции $v_3(\bar{z}, \bar{t})$ были согласованы в точках $\bar{z} = 0$ и $\bar{z} = 1$; $G = \tau / (\dot{\sigma} \mu_0 \Delta^2)$, $K_0 = \dot{\sigma} Z_0 \Delta$, $F_1 = \dot{\gamma} \tau \dot{a} H_0 / \Delta^2$, $F_2 = \dot{\gamma} \tau H_0$, $F_3 = \dot{\gamma} \tau \dot{g} H_0^2$, $H_s = H_{sm} / H_0$ – физически безразмерные постоянные, H_{sm} – максимальное значение начального поля намагниченности

$$p_k(\bar{z}, \bar{t}) = a_k u_k(\bar{z}, \bar{t}) + b_k v_k(\bar{z}, \bar{t}) + d_k,$$

$$a_k = F_3 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^3 v_l^2(\bar{z}, \bar{t}), \quad b_k = -F_3 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^3 v_l(\bar{z}, \bar{t}) u_l(\bar{z}, \bar{t}), \quad d_k = P_k + R_k,$$

$$P_1 = F_1 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(v_2(\bar{z}, \bar{t}) \frac{\partial v_3(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(v_3(\bar{z}, \bar{t}) \frac{\partial v_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} \right) \right), \quad (24)$$

$$P_2 = F_1 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(v_3(\bar{z}, \bar{t}) \frac{\partial v_1(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(v_1(\bar{z}, \bar{t}) \frac{\partial v_3(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} \right) \right), \quad (25)$$

$$P_3 = F_1 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(v_1(\bar{z}, \bar{t}) \frac{\partial v_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(v_2(\bar{z}, \bar{t}) \frac{\partial v_1(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} \right) \right), \quad (26)$$

$$R_1 = F_2 (v_2(\bar{z}, \bar{t}) u_3(\bar{z}, \bar{t}) - v_3(\bar{z}, \bar{t}) u_2(\bar{z}, \bar{t})), \quad R_2 = F_2 (v_3(\bar{z}, \bar{t}) u_1(\bar{z}, \bar{t}) - v_1(\bar{z}, \bar{t}) u_3(\bar{z}, \bar{t})),$$

$$R_3 = F_2 (v_1(\bar{z}, \bar{t}) u_2(\bar{z}, \bar{t}) - v_2(\bar{z}, \bar{t}) u_1(\bar{z}, \bar{t})).$$

3. Численный метод. Для решения системы уравнений (10)–(23) будем использовать сеточный метод [15]. Область непрерывного изменения временного аргумента $[0, 3]$ заменим дискретной областью: введем временную сетку $\bar{\omega}_{\bar{t}} = \{\bar{t}_j = \bar{t}_{j-1} + \Delta t, j = \overline{1, M}, \Delta t = (\bar{t}_M - \bar{t}_0) / M, \bar{t}_0 = 0, \bar{t}_M = 3\}$. Пусть $\bar{t} = \bar{t}_j$ – текущий временной слой, на котором находим решение, $\bar{t} = \bar{t}_{j-1}$ – предыдущий временной слой, где решение уже найдено. Тогда шаг по времени $\Delta t = \bar{t} - \bar{t}$. Введем неравномерную пространственную сетку по переменной $\bar{z}$: $\bar{\omega}_{\bar{z}} = \{\bar{z}_i \in [0, 1], i = \overline{0, N}, \bar{z}_0 = 0, \bar{z}_N = 1\}$, $\Delta z_i = \bar{z}_i - \bar{z}_{i-1}$ – сеточные шаги, $\Delta z_i = 0, 5(\Delta z_i + \Delta z_{i+1})$.

Значения функций $u_k(\bar{z}, \bar{t})$ и $v_k(\bar{z}, \bar{t})$ в узлах сетки $\bar{\omega}_{\bar{z}} \times \bar{\omega}_{\bar{t}}$ на текущем временном слое обозначим $u_{k,i}^j = u_k(\bar{z}_i, \bar{t}_j)$ и $v_{k,i}^j = v_k(\bar{z}_i, \bar{t}_j)$ соответственно; на предыдущем временном слое – $\check{u}_{k,i} = u_k(\bar{z}_i, \check{\bar{t}})$, $\check{v}_{k,i} = v_k(\bar{z}_i, \check{\bar{t}})$, $k = 1, 2, 3$. В дальнейшем с целью избежания громоздкости выкладок будем использовать безындexсную систему обозначений по времени: индекс j опустим и на j -м слое будем писать $u_{k,i}$ и $v_{k,i}$ вместо $u_{k,i}^j$ и $v_{k,i}^j$.

Аппроксимируя дифференциальные операторы, входящие в (10), (11), (18), (19), получим разностные схемы вида

$$\frac{u_{k,i} - \check{u}_{k,i}}{\Delta t} = \frac{G}{\Delta z_i} \left(\frac{u_{k,i+1} - u_{k,i}}{\Delta z_{i+1}} - \frac{u_{k,i} - u_{k,i-1}}{\Delta z_i} \right) - a_{k,i} u_{k,i} - b_{k,i} v_{k,i} - d_{k,i}, \quad (27)$$

$$i = \overline{1, N-1}, \quad k = 1, 2,$$

$$\frac{v_{k,i} - \check{v}_{k,i}}{\Delta t} = a_{k,i} u_{k,i} + b_{k,i} v_{k,i} + d_{k,i}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = 1, 2, \quad (28)$$

где

$$a_{k,i} = F_3 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^3 v_{l,i}^2, \quad b_{k,i} = -F_3 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^3 v_{l,i} u_{l,i}, \quad d_{k,i} = P_{k,i} + R_{k,i},$$

$$P_{1,i} = F_1 \left(\frac{1}{\Delta z_i} \left(v_{2,i+0,5} \frac{v_{3,i+1} - v_{3,i}}{\Delta z_{i+1}} - v_{2,i-0,5} \frac{v_{3,i} - v_{3,i-1}}{\Delta z_i} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\Delta z_i} \left(v_{3,i+0,5} \frac{v_{2,i+1} - v_{2,i}}{\Delta z_{i+1}} - v_{3,i-0,5} \frac{v_{2,i} - v_{2,i-1}}{\Delta z_i} \right) \right),$$

$$P_{2,i} = F_1 \left(\frac{1}{\Delta z_i} \left(v_{3,i+0,5} \frac{v_{1,i+1} - v_{1,i}}{\Delta z_{i+1}} - v_{3,i-0,5} \frac{v_{1,i} - v_{1,i-1}}{\Delta z_i} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\Delta z_i} \left(v_{1,i+0,5} \frac{v_{3,i+1} - v_{3,i}}{\Delta z_{i+1}} - v_{1,i-0,5} \frac{v_{3,i} - v_{3,i-1}}{\Delta z_i} \right) \right),$$

$$R_{1,i} = F_2(v_{2,i} u_{3,i} - v_{3,i} u_{2,i}), \quad R_{2,i} = F_2(v_{3,i} u_{1,i} - v_{1,i} u_{3,i})$$

и $v_{k,i \pm 0,5} = 0,5(v_{k,i \pm 1} + v_{k,i})$, $i = \overline{1, N-1}$, $k = 1, 2, 3$.

Построим аппроксимацию граничных условий.

Граничные условия (12), (13) аппроксимируем, учитывая уравнения (10), (11). В результате получим следующие разностные соотношения:

на границе Γ_1

$$-\frac{2G\Delta t}{(\Delta z_1)^2} u_{k,1} + \left(1 + \frac{2G\Delta t K_0}{\Delta z_1} + \frac{2G\Delta t}{(\Delta z_1)^2} + \Delta t a_{k,0} \right) u_{k,0} = \check{u}_{k,0} - \Delta t b_{k,0} v_{k,0} - \Delta t d_{k,0} +$$

$$+ \frac{4\Delta t G K_0 b(\bar{t})}{\Delta z_1} (1 - \delta_{k,2}), \quad k = 1, 2,$$

на границе Γ_2

$$-\frac{2\Delta t G}{(\Delta z_{N-1})^2} u_{k,N-1} + \left(1 + \frac{2\Delta t G K_0}{\Delta z_{N-1}} + \frac{2\Delta t G}{(\Delta z_{N-1})^2} + \Delta t a_{k,N} \right) u_{k,N} = \check{u}_{k,N} - \Delta t b_{k,N} v_{k,N} - \Delta t d_{k,N}, \quad (30)$$

$$k = 1, 2.$$

Здесь $\delta_{k,2}$ – символ Кронекера,

$$a_{k,0} = F_3 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^3 v_{l,0}^2, \quad b_{k,0} = -F_3 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^3 v_{l,0} u_{l,0}, \quad d_{k,0} = P_{k,0} + R_{k,0},$$

$$a_{k,N} = F_3 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^3 v_{l,N}^2, \quad b_{k,N} = -F_3 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^3 v_{l,N} u_{l,N}, \quad d_{k,N} = P_{k,N} + R_{k,N}.$$

Выражения для коэффициентов $P_{k;0}$, $R_{k;0}$ и $P_{k;N}$, $R_{k;N}$ получим, учитывая соответствующие граничные условия (21) и (22).

Найдем представление коэффициента $P_{1;0}$. Для этого рассмотрим разностную аппроксимацию функции (24) в точке $\bar{z} = 0$

$$P_1|_{\bar{z}=0} = F_1 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(v_2(\bar{z}, \bar{t}) \frac{\partial v_3(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(v_3(\bar{z}, \bar{t}) \frac{\partial v_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} \right) \right) \Big|_{\bar{z}=0}. \quad (31)$$

Дифференцируя правую часть (31), получим

$$P_1|_{\bar{z}=0} = F_1 \left(\frac{\partial v_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} \frac{\partial v_3(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} + v_2(\bar{z}, \bar{t}) \frac{\partial^2 v_3(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}^2} - \frac{\partial v_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} \frac{\partial v_3(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} - v_3(\bar{z}, \bar{t}) \frac{\partial^2 v_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}^2} \right) \Big|_{\bar{z}=0},$$

откуда следует, что

$$P_1|_{\bar{z}=0} = F_1 \left(v_2(\bar{z}, \bar{t}) \frac{\partial^2 v_3(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}^2} - v_3(\bar{z}, \bar{t}) \frac{\partial^2 v_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}^2} \right) \Big|_{\bar{z}=0}.$$

Учитывая граничное условие (21)

$$v_3(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{z}=0} = 0, \quad 0 \leq \bar{t} \leq 3,$$

запишем

$$P_1|_{\bar{z}=0} = F_1 v_2(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{z}=0} \frac{\partial^2 v_3(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}^2} \Big|_{\bar{z}=0}. \quad (32)$$

Используя аппроксимацию второй производной

$$\frac{\partial^2 v_3(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}^2} \Big|_{\bar{z}=0} \approx \frac{v_{3;1} - 2v_{3;0} + v_{3;-1}}{(\Delta \bar{z}_1)^2},$$

функцию (32) аппроксимируем разностным соотношением

$$P_{1;0} = F_1 v_{2;0} \frac{v_{3;1} - 2v_{3;0} + v_{3;-1}}{(\Delta \bar{z}_1)^2}. \quad (33)$$

С учетом граничного условия $v_{3;0} = 0$ и аппроксимации $v_3(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{z}=0} \approx 0,5(v_{3;1} + v_{3;-1})$ из (33) получим, что $P_{1;0} = 0$, а также $R_{1;0} = F_2 v_{2;0} u_{3;0}$.

Найдем представление коэффициента $P_{1;N}$. Выполним действия, аналогичные приведенным выше при нахождении коэффициента $P_{1;0}$, и учитывая граничное условие (22)

$$v_3(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{z}=1} = 0, \quad 0 \leq \bar{t} \leq 3,$$

запишем функцию (24) в точке $\bar{z} = 1$ в виде

$$P_1|_{\bar{z}=1} = F_1 v_2(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{z}=1} \frac{\partial^2 v_3(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}^2} \Big|_{\bar{z}=1}. \quad (34)$$

Используя аппроксимацию второй производной

$$\frac{\partial^2 v_3(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}^2} \Big|_{\bar{z}=1} \approx \frac{v_{3;N-1} - 2v_{3;N} + v_{3;N+1}}{(\Delta \bar{z}_N)^2},$$

выражение (34) представим разностным соотношением

$$P_{1;N} = F_1 v_{2;N} \frac{v_{3;N-1} - 2v_{3;N} + v_{3;N+1}}{(\Delta \bar{z}_N)^2}. \quad (35)$$

С учетом граничного условия $v_{3;N} = 0$ и аппроксимации $v_3(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{z}=1} \approx 0,5(v_{3;N+1} + v_{3;N-1})$ из (35) следует, что $P_{1;N} = 0$, а также $R_{1;N} = F_2 v_{2;N} u_{3;N}$.

Аналогично можно показать, что $P_{2;0} = 0$, $P_{2;N} = 0$, $R_{2;0} = -F_2 v_{1;0} u_{3;0}$, $R_{2;N} = -F_2 v_{1;N} u_{3;N}$.

Для функций $v_k(\bar{z})$, $k = 1, 2$, рассмотрим аппроксимацию граничных условий (21) и (22) вида

$$v_{k;0} = \frac{4}{3}v_{k;1} - \frac{1}{3}v_{k;2}; \quad v_{k;N} = \frac{4}{3}v_{k;N-1} - \frac{1}{3}v_{k;N-2}, \quad k = 1, 2. \quad (36)$$

Начальные условия (14), (23) для функций $u_k(\bar{z}, \bar{t})$, $v_k(\bar{z}, \bar{t})$, $k = 1, 2$, на сетке $\bar{\omega}_{\bar{z}}$ аппроксимируем соотношениями

$$u_k(\bar{z}_i, 0) = 0, \quad v_k(\bar{z}_i, 0) = 0, \quad i = \overline{0, N}, \quad k = 1, 2. \quad (37)$$

Утверждение 1. Неявная разностная схема (27)–(30), (36), (37) аппроксимирует систему уравнений (10)–(14), (18), (19), (21)–(23) с порядком аппроксимации $O(\Delta t + \Delta z_{\max})$, где $\Delta z_{\max} = \max_{0 \leq i \leq N} \Delta z_i$.

Построим аппроксимацию уравнений (15), (20) для функций u_3, v_3 . Рассмотрим разностную схему вида

$$\frac{u_{3;i} - \check{u}_{3;i}}{\Delta t} = -a_{3;i} u_{3;i} - b_{3;i} v_{3;i} - d_{3;i}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (38)$$

$$\frac{v_{3;i} - \check{v}_{3;i}}{\Delta t} = a_{3;i} u_{3;i} + b_{3;i} v_{3;i} + d_{3;i}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} a_{3;i} &= F_3 \sum_{l=1}^2 v_{l;i}^2, \quad b_{3;i} = -F_3 \sum_{l=1}^2 v_{l;i} u_{l;i}, \quad d_{3;i} = P_{3;i} + R_{3;i}, \\ P_{3;i} &= F_1 \left(\frac{1}{\Delta z_i} \left(v_{1;i+0,5} \frac{v_{2;i+1} - v_{2;i}}{\Delta z_{i+1}} - v_{1;i-0,5} \frac{v_{2;i} - v_{2;i-1}}{\Delta z_i} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Delta z_i} \left(v_{2;i+0,5} \frac{v_{1;i+1} - v_{1;i}}{\Delta z_{i+1}} - v_{2;i-0,5} \frac{v_{1;i} - v_{1;i-1}}{\Delta z_i} \right) \right), \\ R_{3;i} &= F_2 (v_{1;i} u_{2;i} - v_{2;i} u_{1;i}). \end{aligned}$$

Разностные соотношения для граничных условий (16), (21), (22) имеют вид

$$u_{3,0} = 0, \quad u_{3,N} = 0; \quad v_{3,0} = 0, \quad v_{3,N} = 0. \quad (40)$$

Начальные условия (17), (23) на сетке $\bar{\omega}_{\bar{z}}$ аппроксимируем соотношениями

$$u_3(\bar{z}_i, 0) = 0, \quad v_3(\bar{z}_i, 0) = H_s \varphi(\bar{z}_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (41)$$

Утверждение 2. Неявная разностная схема (38), (39), (40), (41) аппроксимирует систему уравнений (15)–(17), (20)–(23) с порядком аппроксимации $O(\Delta t + \Delta z_{\max})$, где $\Delta z_{\max} = \max_{0 \leq i \leq N} \Delta z_i$.

4. Итерационный метод реализации разностной задачи. Для реализации нелинейной разностной задачи, построенной в предыдущем разделе, рассмотрим итерационный процесс.

Для нахождения сеточных значений $u_{k;i}^{s+1}$, $k = 1, 2$, итерационный алгоритм имеет вид:
– во внутренних узлах $i = \overline{1, N-1}$ разностной сетки

$$u_{k;i}^{s+1} = \check{u}_{k;i} + \frac{G\Delta t}{\Delta z_i} \left(\frac{u_{k;i+1}^{s+1} - u_{k;i}^{s+1}}{\Delta z_{i+1}} - \frac{u_{k;i}^{s+1} - u_{k;i-1}^{s+1}}{\Delta z_i} \right) - \Delta t {}^s b_{k;i} v_{k;i} - \Delta t {}^s a_{k;i} u_{k;i}^{s+1} - \Delta t {}^s d_{k;i}, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} {}^s a_{k;i} &= F_3 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^3 v_{l;i}^2, \quad {}^s b_{k;i} = -F_3 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^3 v_{l;i} {}^s u_{l;i}, \quad {}^s d_{k;i} = {}^s P_{k;i} + {}^s R_{k;i}, \\ {}^s P_{1;i} &= F_1 \left(\frac{1}{\Delta z_i} \left({}^s v_{2;i+0,5} \frac{{}^s v_{3;i+1} - {}^s v_{3;i}}{\Delta z_{i+1}} - {}^s v_{2;i-0,5} \frac{{}^s v_{3;i} - {}^s v_{3;i-1}}{\Delta z_i} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Delta z_i} \left({}^s v_{3;i+0,5} \frac{{}^s v_{2;i+1} - {}^s v_{2;i}}{\Delta z_{i+1}} - {}^s v_{3;i-0,5} \frac{{}^s v_{2;i} - {}^s v_{2;i-1}}{\Delta z_i} \right) \right), \end{aligned}$$

$${}^s P_{2;i} = F_1 \left(\frac{1}{\Delta z_i} \left({}^s v_{3;i+0,5} \frac{{}^s v_{1;i+1} - {}^s v_{1;i}}{\Delta z_{i+1}} - {}^s v_{3;i-0,5} \frac{{}^s v_{1;i} - {}^s v_{1;i-1}}{\Delta z_i} \right) - \frac{1}{\Delta z_i} \left({}^s v_{1;i+0,5} \frac{{}^s v_{3;i+1} - {}^s v_{3;i}}{\Delta z_{i+1}} - {}^s v_{1;i-0,5} \frac{{}^s v_{3;i} - {}^s v_{3;i-1}}{\Delta z_i} \right) \right),$$

$${}^s R_{1;i} = F_2({}^s v_{2;i} {}^s u_{3;i} - {}^s v_{3;i} {}^s u_{2;i}), \quad {}^s R_{2;i} = F_2({}^s v_{3;i} {}^s u_{1;i} - {}^s v_{1;i} {}^s u_{3;i}),$$

и ${}^s v_{k;i \pm 0,5} = 0,5({}^s v_{k;i \pm 1} + {}^s v_{k;i})$, $k = 1, 2, 3$;

– в граничном узле $\bar{z}_0$

$$-\frac{2G\Delta t}{(\Delta z_1)^2} {}^{s+1} u_{k;1} + \left(1 + \frac{2G\Delta t K_0}{\Delta z_1} + \frac{2G\Delta t}{(\Delta z_1)^2} + \Delta t {}^s a_{k;0} \right) {}^{s+1} u_{k;0} = \check{u}_{k;0} - \Delta t {}^s b_{k;0} {}^s v_{k;0} - \Delta t {}^s d_{k;0} + \frac{4\Delta t G K_0 b(\bar{r})}{\Delta z_1} (1 - \delta_{k,2}); \quad (43)$$

– в граничном узле $\bar{z}_N$

$$-\frac{2\Delta t G}{(\Delta z_{N-1})^2} {}^{s+1} u_{k;N-1} + \left(1 + \frac{2\Delta t G K_0}{\Delta z_{N-1}} + \frac{2\Delta t G}{(\Delta z_{N-1})^2} + \Delta t {}^s a_{k;N} \right) {}^{s+1} u_{k;N} = \check{u}_{k;N} - \Delta t {}^s b_{k;N} {}^s v_{k;N} - \Delta t {}^s d_{k;N}. \quad (44)$$

При этом в равенстве (43)

$${}^s a_{k;0} = F_3 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^3 {}^s v_{l;0}^2, \quad {}^s b_{k;0} = -F_3 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^3 {}^s v_{l;0} {}^s u_{l;0}, \quad {}^s d_{k;0} = {}^s P_{k;0} + {}^s R_{k;0},$$

где ${}^s P_{k;0} = 0$, $k = 1, 2$; ${}^s R_{1;0} = F_2 {}^s v_{2;0} {}^s u_{3;0}$; ${}^s R_{2;0} = -F_2 {}^s v_{1;0} {}^s u_{3;0}$.

Аналогично определяются величины ${}^s a_{k;N}$, ${}^s b_{k;N}$, ${}^s d_{k;N}$ в равенстве (44)

$${}^s a_{k;N} = F_3 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^3 {}^s v_{l;N}^2, \quad {}^s b_{k;N} = -F_3 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^3 {}^s v_{l;N} {}^s u_{l;N}, \quad {}^s d_{k;N} = {}^s P_{k;N} + {}^s R_{k;N},$$

где ${}^s P_{k;N} = 0$, $k = 1, 2$; ${}^s R_{1;N} = F_2 {}^s v_{2;N} {}^s u_{3;N}$; ${}^s R_{2;N} = -F_2 {}^s v_{1;N} {}^s u_{3;N}$.

Систему линейных алгебраических уравнений (42)–(44) при $k = 1, 2$ решаем методом прогонки [16]

$$\begin{aligned} {}^s C_0 {}^{s+1} u_{k;0} - {}^s B_0 {}^{s+1} u_{k;1} &= {}^s F_0, \\ -{}^s A_i {}^{s+1} u_{k;i-1} + {}^s C_i {}^{s+1} u_{k;i} - {}^s B_i {}^{s+1} u_{k;i+1} &= {}^s F_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ -{}^s A_N {}^{s+1} u_{k;N-1} + {}^s C_N {}^{s+1} u_{k;N} &= {}^s F_N. \end{aligned} \quad (45)$$

Здесь

$$\begin{aligned} {}^s C_0 &= \left(1 + \frac{2G\Delta t K_0}{\Delta z_1} + \frac{2G\Delta t}{(\Delta z_1)^2} + \Delta t {}^s a_{k;0} \right), \quad {}^s B_0 = \frac{2G\Delta t}{(\Delta z_1)^2}, \\ {}^s F_0 &= \check{u}_{k;0} - \Delta t {}^s b_{k;0} {}^s v_{k;0} - \Delta t {}^s d_{k;0} + \frac{4\Delta t G K_0 b(\bar{r})}{\Delta z_1} (1 - \delta_{k,2}); \\ {}^s A_i &= \frac{G\Delta t}{\Delta z_i \Delta z_i}, \quad {}^s C_i = 1 + \Delta t {}^s a_{k;i} + \frac{G\Delta t}{\Delta z_i \Delta z_i} + \frac{G\Delta t}{\Delta z_i \Delta z_{i+1}}, \quad {}^s B_i = \frac{G\Delta t}{\Delta z_i \Delta z_{i+1}}, \\ {}^s F_i &= \check{u}_{k;i} - \Delta t {}^s b_{k;i} {}^s v_{k;i} - \Delta t {}^s d_{k;i}, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ {}^s A_N &= \frac{2\Delta t G}{(\Delta z_{N-1})^2}, \quad {}^s C_N = \left(1 + \frac{2\Delta t G K_0}{\Delta z_{N-1}} + \frac{2\Delta t G}{(\Delta z_{N-1})^2} + \Delta t {}^s a_{k;N} \right), \end{aligned}$$

$$F_N^s = \check{u}_{k;N}^s - \Delta t b_{k;N}^s v_{k;N}^s - \Delta t d_{k;N}^s.$$

Утверждение 3. Система (45) имеет единственное решение, определяемое формулами метода прогонки [16], поскольку $\left| \check{C}_i^s \right| \geq \left| A_i^s \right| + \left| B_i^s \right|$, $i = \overline{1, N-1}$, $\left| C_0^s \right| > \left| B_0^s \right|$ и $\left| C_N^s \right| > \left| A_N^s \right|$.

Для нахождения сеточных значений $v_{k;i}^{s+1}$, $k = 1, 2$, построим итерационный процесс

$$v_{k;i}^{s+1} = \frac{1}{1 - \Delta t b_{k;i}^s} (\check{v}_{k;i}^s + \Delta t a_{k;i}^s u_{k;i}^s + \Delta t d_{k;i}^s), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (46)$$

$$v_{k;0}^{s+1} = \frac{4}{3} v_{k;1}^{s+1} - \frac{1}{3} v_{k;2}^{s+1}, \quad v_{k;N}^{s+1} = \frac{4}{3} v_{k;N-1}^{s+1} - \frac{1}{3} v_{k;N-2}^{s+1}.$$

Значения $u_{3;i}^{s+1}$, $v_{3;i}^{s+1}$ находим с помощью следующего итерационного алгоритма:

$$u_{3;i}^{s+1} = \frac{1}{1 + \Delta t a_{3;i}^s} (\check{u}_{3;i}^s - \Delta t b_{3;i}^s v_{k;i}^s - \Delta t d_{3;i}^s), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad u_{3;0}^{s+1} = u_{3;N}^{s+1} = 0; \quad (47)$$

$$v_{3;i}^{s+1} = \frac{1}{1 - \Delta t b_{3;i}^s} (\check{v}_{3;i}^s + \Delta t a_{3;i}^s u_{3;i}^s + \Delta t d_{3;i}^s), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad v_{3;0}^{s+1} = v_{3;N}^{s+1} = 0. \quad (48)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{3;i}^s &= F_3 \sum_{l=1}^2 v_{l;i}^s, \quad b_{3;i}^s = -F_3 \sum_{l=1}^2 v_{l;i}^s u_{l;i}^s, \quad d_{3;i}^s = P_{3;i}^s + R_{3;i}^s, \\ P_{3;i}^s &= F_1 \left(\frac{1}{\Delta z_i} \left(v_{1;i+0,5}^s \frac{v_{2;i+1}^s - v_{2;i}^s}{\Delta z_{i+1}} - v_{1;i-0,5}^s \frac{v_{2;i}^s - v_{2;i-1}^s}{\Delta z_i} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Delta z_i} \left(v_{2;i+0,5}^s \frac{v_{1;i+1}^s - v_{1;i}^s}{\Delta z_{i+1}} - v_{2;i-0,5}^s \frac{v_{1;i}^s - v_{1;i-1}^s}{\Delta z_i} \right) \right). \end{aligned}$$

В соотношениях (38)–(48) s – номер итерации, $s = 0, 1, 2, \dots$.

На каждом временном слое реализация итерационного процесса осуществляется следующим образом.

В качестве нулевой итерации берем значения функций с нижнего временного слоя: $u_{k;i}^0 = \check{u}_{k;i}$, $v_{k;i}^0 = \check{v}_{k;i}$, $k = 1, 2, 3$:

- 1) решаем систему уравнений (42)–(44) при $k = 1, 2$ методом прогонки и находим $u_{k;i}^{s+1}$, $i = \overline{0, N}$;
- 2) вычисляем сеточные значения $v_{k;i}^{s+1}$, $i = \overline{0, N}$, из системы уравнений (46) при $k = 1, 2$;
- 3) находим сеточные значения $u_{3;i}^{s+1}$, $i = \overline{0, N}$, используя формулы (47);
- 4) вычисляем сеточные значения $v_{3;i}^{s+1}$, $i = \overline{0, N}$ по формулам (48);
- 5) проверяем условие сходимости итерационного процесса:

$$\left| y^{s+1} - y^s \right| \leq \varepsilon_1 \left| y^s \right| + \varepsilon_2, \quad (49)$$

где, при $\left| y^s \right| < 1$, полагаем $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$; при $\left| y^s \right| \geq 1$, полагаем $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$. Здесь ε – заданная точность.

Если для всех вычисленных сеточных функций $u_{k;i}^{s+1}$, $v_{k;i}^{s+1}$ выполняется условие (49), то значения $u_{k;i}^{s+1}$, $v_{k;i}^{s+1}$, $k = 1, 2, 3$, принимаем за решение $u_{k;i}$, $v_{k;i}$, $k = 1, 2, 3$, на текущем временном слое и переходим к следующему временному слою. В качестве нулевой итерации для нового временного слоя выбираем найденные значения функций: $u_{k;i}^0 = u_{k;i}^{s+1}$, $v_{k;i}^0 = v_{k;i}^{s+1}$, $k = 1, 2, 3$.

Если же для какой-то из сеточных функций условие сходимости итераций не выполняется, то переходим к новой итерации на данном временном слое. Итерационный процесс продолжаем рекуррентно для $s = 1, 2, \dots$ и прекращаем при выполнении заданного критерия сходимости. Далее переходим к следующему слою по времени.

В результате получим множество значений $\{u_{k;i}, v_{k;i}\} = \{u_{k;i}^j, v_{k;i}^j\}$, $i = \overline{0, N}$, $j = \overline{0, M}$; $k = 1, 2, 3$, характеризующее компоненты магнитного поля и намагниченности в узлах сетки $\bar{\omega}_{\bar{z}} \times \bar{\omega}_{\bar{t}}$.

5. Вычисление коэффициента эффективности экранирования. Для оценки экранирующих свойств экрана из пермаллоя используем коэффициент эффективности экранирования, расчетная формула для которого имеет вид [14]

$$\Theta = \frac{1}{\max_{0 \leq \bar{t} < \infty} \sqrt{u_1^2(1, \bar{t}) + u_2^2(1, \bar{t})}}.$$

6. Вычислительные эксперименты. На основе разработанного разностного метода написан программный модуль и проведены вычислительные эксперименты. Найдены сеточные значения компонент поля напряженности и поля намагниченности, возникающие в плоском намагниченном экране под воздействием внешнего импульсного электромагнитного поля. Вычислен коэффициент эффективности экранирования, характеризующий ослабление внешнего электромагнитного поля при прохождении через экран.

Для численных экспериментов выбраны следующие материальные параметры экрана из пермаллоя и параметры импульсного поля E_0 , H_0 , воздействующего на экран

$$\dot{\gamma} = 5,51 \cdot 10^2 \text{ м/(А} \cdot \text{с)}, \quad \dot{a} = 1,75 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2, \quad \dot{g} = 3,27 \cdot 10^{-6} \text{ м/А},$$

$$\tau = \tau_{fr} = 10^{-3} \text{ с}, \quad H_0 = 10^3 \text{ А/м}, \quad \mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}, \quad Z_0 = 377 \text{ Ом}.$$

Начальная намагниченность экрана описана с помощью функции $H_{sm}(\bar{z}) = H_s \varphi(\bar{z}) = 16H_s \bar{z}^2(1 - \bar{z})^2$. В качестве импульсных функций первичного поля (8) рассмотрены функции $b(t')$, используемые в натурных технических экспериментах (рис. 2).

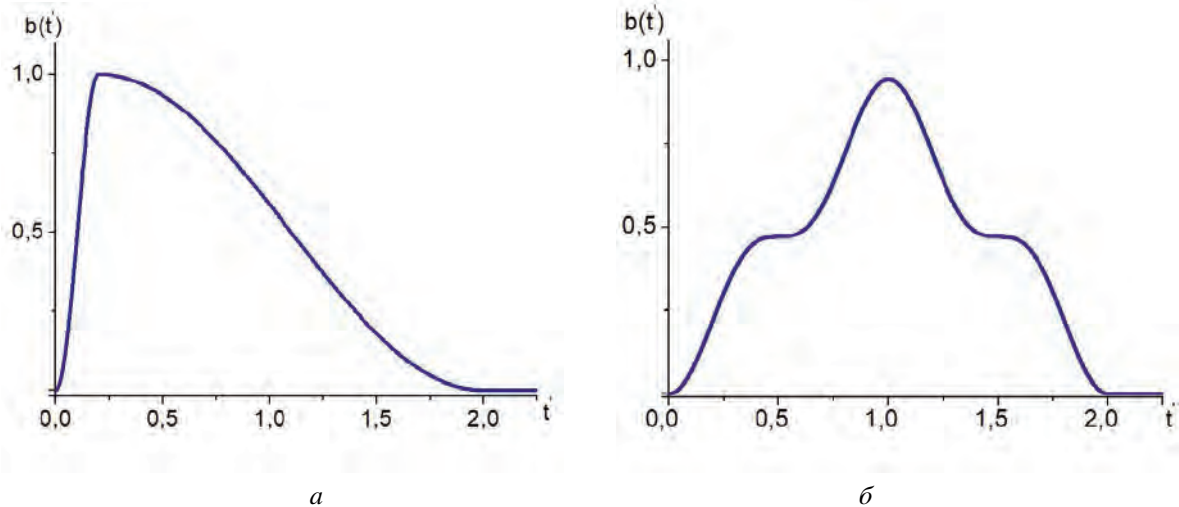


Рис. 2. Вид импульса $b(t')$ (а) и вид импульса $b(t')$ (б)

Пример 1. Пусть экран имеет толщину $\Delta = 5 \cdot 10^{-4}$ м и проводимость $\sigma = 10^3$ См/м, коэффициент $H_{sm} = 10^3$ А/м. На экран воздействует электромагнитное поле (8) с импульсной функцией (рис. 2, а)

$$b(t') = \begin{cases} 0,5 \sin(0,5\pi(10t' - 1)) + 0,5, & 0 \leq t' \leq 0,2, \\ \exp(-c_0(10t' - 2)^2), \quad c_0 = \ln 2/9, & 0,2 \leq t' \leq 2, \\ 0, & t' \leq 0, \quad t' \geq 2, \end{cases} \quad (50)$$

где $t' = 0,2$ – время фронта импульса; $t' = 0,5$ – время полуспада; $t' = 2$ – время длительности импульса; $\max_{0 \leq t' < 2} b(t') = 1$.

На рис. 3 приведена динамика компонент магнитного поля $\mathbf{H}$ в плоском экране.

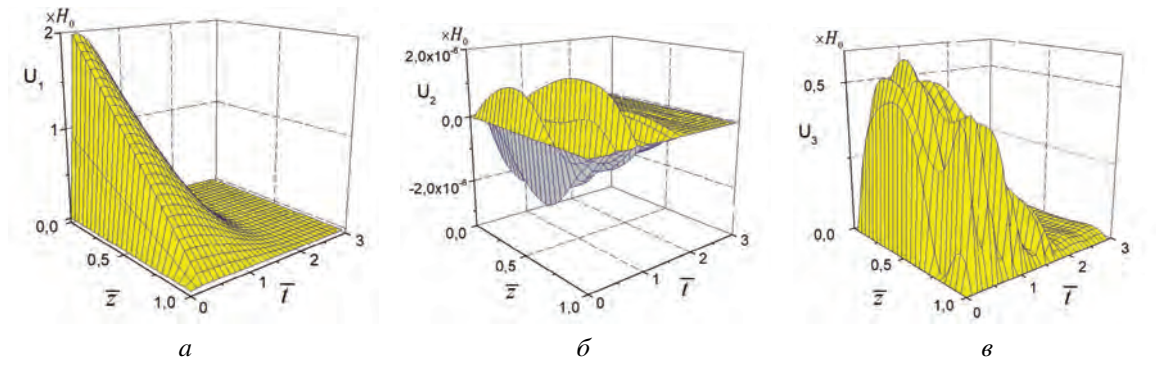


Рис. 3. Компоненты магнитного поля: $H_x(z, t) = H_0 u_1(\bar{z}, \bar{t})$ (а); $H_y(z, t) = H_0 u_2(\bar{z}, \bar{t})$ (б); $H_z(z, t) = H_0 u_3(\bar{z}, \bar{t})$ (в)

Рис. 4 отражает динамику компонент поля намагниченности **М**.

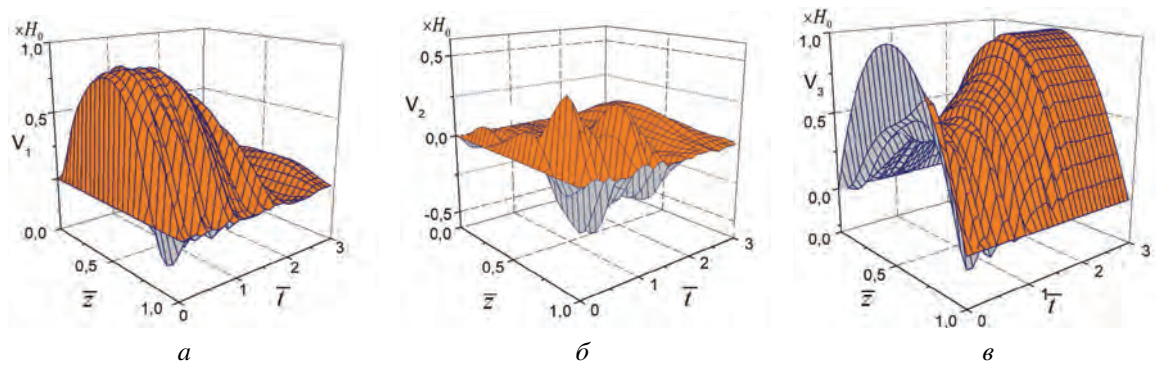


Рис. 4. Компоненты поля намагниченности: $M_x(z, t) = H_0 v_1(\bar{z}, \bar{t})$ (а); $M_y(z, t) = H_0 v_2(\bar{z}, \bar{t})$ (б); $M_z(z, t) = H_0 v_3(\bar{z}, \bar{t})$ (в)

Коэффициент эффективности экрана $\mathfrak{E} = 95,25$.

Пример 2. Пусть экран имеет толщину $\Delta = 8 \cdot 10^{-3}$ м и проводимость $\sigma = 0,5 \cdot 10^2$ См/м, коэффициент $H_{sm} = 10^4$ А/м. Импульс внешнего электромагнитного поля имеет вид (рис. 2, б)

$$b(t') = \begin{cases} 0,5 \sin^3(\pi(t' - 0,5)) + 0,5 & \text{при } 0 \leq t' \leq 2, \\ 0 & \text{при } t' \leq 0 \text{ и } t' \geq 2. \end{cases} \quad (51)$$

На рис. 5 показано изменение компонент магнитного поля **Н** в плоском экране при воздействии внешнего импульсного электромагнитного поля (51).

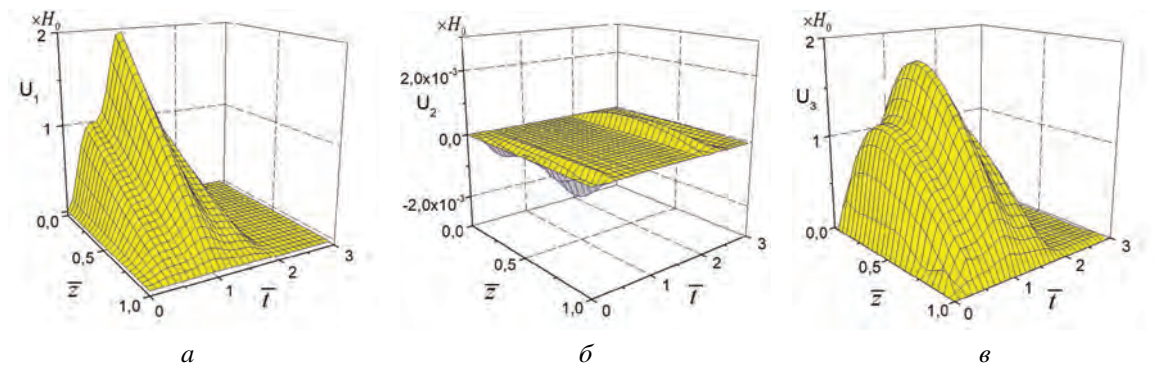


Рис. 5. Компоненты магнитного поля: $H_x(z, t) = H_0 u_1(\bar{z}, \bar{t})$ (а); $H_y(z, t) = H_0 u_2(\bar{z}, \bar{t})$ (б); $H_z(z, t) = H_0 u_3(\bar{z}, \bar{t})$ (в)

Рис. 6 иллюстрирует изменение компонент поля намагниченности **М** в экране при воздействии импульса (51).

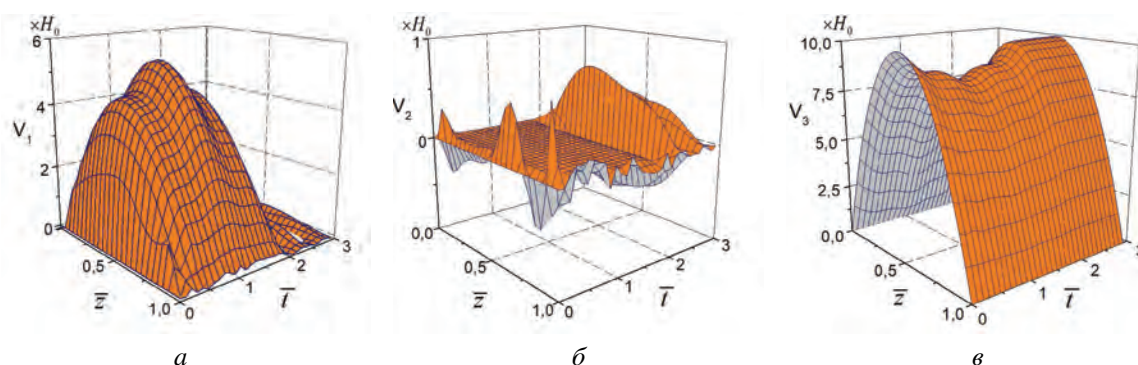


Рис. 6. Компоненты поля намагниченности: $M_x(z, t) = H_0 v_1(\bar{z}, \bar{t})$ (а); $M_y(z, t) = H_0 v_2(\bar{z}, \bar{t})$ (б); $M_z(z, t) = H_0 v_3(\bar{z}, \bar{t})$ (в)

Коэффициент эффективности экрана $\mathcal{E} = 7,4$.

Заключение. В статье разработан численный метод решения начально-краевой задачи, описывающей проникновение импульсных электромагнитных полей через плоский намагниченный экран для случая, когда поток энергии импульсного поля ортогонален экрану. Начально-краевая задача экранирования представлена в виде системы шести скалярных параболических нелинейных дифференциальных уравнений относительно компонент магнитного поля и поля намагниченности с граничными условиями третьего и первого рода на поверхностях экрана. Функция начальной намагниченности экрана задана таким образом, чтобы начальные и граничные условия для поля намагниченности были согласованы. Построен численный метод для нахождения компонент полей напряженности и намагниченности в экране. Нелинейная разностная задача реализована с помощью итерационного процесса. Для оценки экранирующих свойств экрана из пермаллоя вычислен коэффициент эффективности экранирования, показывающий во сколько раз ослабевает электромагнитный импульс при прохождении через экран. Проведены вычислительные эксперименты при различных параметрах задачи. Разработанная методика может найти применение при создании тонких покрытий (экранов) из специальных материалов с улучшенными экранирующими характеристиками для защиты электронных устройств от внешних электромагнитных воздействий.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ, грант № Ф22-106.

Литература

1. Шапиро Д. Н. Электромагнитное экранирование. Долгопрудный: Изд. «Дом Интеллект», 2010.
2. Грабчиков С. С., Труханов А. В., Солобай А. А., Ерофеевко В. Т., Василенков Н. А. Эффективность магнитостатического экранирования цилиндрическими оболочками // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 2015. № 4. С. 107–114.
3. Жуков А. С., Васильева О. В. Модульные магнитные экраны и экранирующие конструкции на их основе для защиты от постоянных и переменных магнитных полей // Новые материалы и технологии: порошковая металлургия, композиционные материалы, защитные покрытия, сварка: сб. докл. XII Междунар. науч.-техн. конф., Минск, 25–27 мая 2016 г. Минск, 2016. С. 199–201.
4. Ринкевич А. Б., Перов Д. В., Васьковский В. О., Лепаловский В. Н. Закономерности проникновения электромагнитных волн через металлические магнитные пленки // Журн. техн. физики. 2009. Т. 79, вып. 9. С. 96–106.
5. Грабчиков С. С., Сосновская Л. Б., Шарапа Т. Е. Многослойный электромагнитный экран: патент РБ №11843 от 28.01.2009.
6. Фуфаева Л. И., Тимофеев А. Б. Эффективность экранирования постоянных магнитных полей многослойными экранами // Тр. МАИ. 1976. Вып. 364. С. 58–63.
7. Ерофеевко В. Т., Бондаренко В. Ф. Экранирование магнитного импульса пленочным многослойным экраном с чередующимися магнитными и немагнитными слоями // Журн. техн. физики. 2017. Т. 87, вып. 6. С. 831–836.
8. Бондаренко В. Ф., Ерофеевко В. Т. Экранирование импульсных электромагнитных полей многослойными плоскопараллельными экранами с чередующимися магнитными и немагнитными слоями // Физические основы приборостроения. 2017. Т. 6, № 2. С. 53–66.
9. Ерофеевко В. Т., Грабчиков С. С., Громыко Г. Ф., Заяц Г. М. Эффективность экранирования постоянных магнитных полей цилиндрическим экраном с учетом нелинейных эффектов // Физические основы приборостроения. 2015. Т. 4, № 4(17). С. 30–39.

10. Ерофеенко В. Т. Математическая модель проникновения цилиндрических электромагнитных полей с осевой симметрией через плоский экран из пермаллоя // Информатика. 2020. Т. 17, № 2. С. 103–119.
11. Громыко Г. Ф., Ерофеенко В. Т., Заяц Г. М. Численное исследование структуры магнитного поля в цилиндрическом пленочном экране // Информатика. 2016. № 2(50). С. 5–18.
12. Ерофеенко В. Т., Громыко Г. Ф., Заяц Г. М. Краевые задачи с интегральными граничными условиями для моделирования магнитных полей в цилиндрических пленочных оболочках // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 7. С. 962–975.
13. Ерофеенко В. Т., Громыко Г. Ф., Заяц Г. М. Численное моделирование задач экранирования импульсных электромагнитных полей экранами из пермаллоя // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 12. С. 1682–1697.
14. Громыко Г. Ф., Ерофеенко В. Т., Заяц Г. М. Задача экранирования импульсных электромагнитных полей намагниченными экранами из пермаллоя // Физические основы приборостроения. 2023. Т. 12, № 3(49). С. 54–63.
15. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1977.
16. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

References

1. Shapiro D. N. *Electromagnetic shielding*. Dolgoprudnyi, Dom Intellect Publ., 2010 (in Russian).
2. Grabchikov S. S., Trukhanov A. V., Solobai A. A., Erofeenko V. T., Vasilenkov N. A. Effectiveness of magnetostatic shielding by cylindrical shells. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Ser. Phys.-Tech. Sci.*, 2015. no. 4, pp. 107–114 (in Russian).
3. Zhukov A. S., Vasilyeva O. V. Modular magnetic screens and shielding structures based on them for protection against constant and alternating magnetic fields. *Collection of Reports of the XII International Scientific and Technical Conference: New materials and technologies: powder metallurgy, composite materials, protective coatings, welding (May 25–27, 2016, Minsk)*. Minsk, 2016, pp. 199–201 (in Russian).
4. Rinkevich A. B., Perov D. V., Vas'kovskii V. O., Lepalovskii V. N. Regularities in penetration of electromagnetic waves through metallic magnetic films. *Technical Physics*, 2009, vol. 54, no. 9, pp. 1339–1349.
5. Grabchikov S. S., Sosnovskaya L. B., Sharapa T. E. *Multilayer electromagnetic screen*: patent of the Republic of Belarus, no. 11843 of 28.01.2009.
6. Fufaeva L. I., Timofeev A. B. Efficiency of shielding of constant magnetic fields by multilayer screens. *Proceedings of MAI*, 1976, iss. 364, pp. 58–63.
7. Erofeenko V. T., Bondarenko V. F. Shielding of a magnetic pulse by the multilayer film shield with alternating magnetic and nonmagnetic layers. *Technical Physics*, 2017, vol. 62, iss. 6, pp. 846–851.
8. Bondarenko V. F., Erofeenko V. T. The shielding of impulse electromagnetic fields by multilayer plane-parallel screens with alternating magnetic and non-magnetic layers. *Physical Bases of Instrumentation*, 2017, vol. 6, no. 2, pp. 53–66 (in Russian).
9. Erofeenko V. T., Grabchikov S. S., Gromyko G. F., Zayats G. M. The shielding effectiveness of static magnetic fields by cylindrical screen taking into account nonlinear effects. *Physical Bases of Instrumentation*, 2015, vol. 4, no. 4(17), pp. 30–39 (in Russian).
10. Erofeenko V. T. Mathematical model of penetration of cylindrical electromagnetic fields with axial symmetry through the plane screen from permalloy. *Informatics*, 2020, vol. 17, no. 2, pp. 103–119 (in Russian).
11. Gromyko G. F., Erofeenko V. T., Zayats G. M. Numerical simulation of magnetic field structure in cylindrical film screen. *Informatics*, 2016, no. 2, pp. 5–18 (in Russian).
12. Erofeenko V. T., Gromyko G. F., Zayats G. M. Boundary value problems with integral boundary conditions for the modeling of magnetic fields in cylindrical film shells. *Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 7, pp. 935–948.
13. Erofeenko V. T., Gromyko G. F., Zayats G. M. Numerical simulation of problems of shielding pulsed electromagnetic fields by permalloy screens. *Differential Equations*, 2021, vol. 57, no. 12, pp. 1702–1718.
14. Gromyko G. F., Erofeenko V. T., Zayats G. M. The shielding problem of pulsed electromagnetic fields by magnetized screens from permalloy. *Physical Bases of Instrumentation*, 2023, vol. 12, no. 3(49), pp. 54–63 (in Russian).
15. Samarskii A. A. *Theory of difference schemes*. Moscow, 1977 (in Russian).
16. Samarskii A. A., Nikolaev E. S. *Methods for solving grid equations*. Moscow, Nauka Publ., 1978 (in Russian).

УДК 519.63

ТРЕХСЛОЙНЫЕ КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

П. П. Матус, В. Т. К. Туен

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
e-mail: piotr.p.matus@gmail.com, vokimtuyen188@gmail.com

Поступила: 22.03.2024

Исправлена: 22.05.2024

Принята: 18.06.2024

Ключевые слова: компактная разностная схема, устойчивость, погрешность аппроксимации, параболическое уравнение, регуляризатор.

Аннотация. Эта работа посвящена построению и исследованию трехслойных компактных разностных схем порядка аппроксимации $O(h^4 + \tau^2)$ для линейных и квазилинейных параболических уравнений. В линейном случае получены априорные оценки устойчивости по входным данным и правой части. Базовой схемой для построения разностных схем заданного качества является асимптотически устойчивая схема второго порядка точности $O(h^2 + \tau^2)$ А. А. Самарского. Результаты обобщены на случай граничных условий третьего рода и переменные коэффициенты. Так же построена трехслойная схема порядка $O(h^6 + \tau^3)$ на трехточечном шаблоне по пространству, которая позволяет использовать метод прогонки для решения соответствующей системы алгебраических уравнений. Приведены эксперименты, иллюстрирующие правильность наших теоретических утверждений. Моделирование нелинейных задач с бегущими волнами показало, что эти алгоритмы можно успешно применять и в случае наличия особенностей в решении дифференциальных задач.

THREE-LAYER OF COMPACT DIFFERENCE SCHEMES FOR THE PARABOLIC EQUATION

P. P. Matus, V. T. K. Tuyen

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
email: piotr.p.matus@gmail.com, vokimtuyen188@gmail.com

Received: 22.03.2024

Revised: 22.05.2024

Accepted: 18.06.2024

Keywords: compact difference scheme, stability, approximation error, parabolic equation, regularizer.

Abstract. This paper is dedicated to construction and study of three-layer of compact difference schemes for linear and quasi-linear parabolic equations of order $O(h^4 + \tau^2)$. In the linear case, a priori stability estimates from the initial data on the right side are obtained. The basic scheme for constructing difference schemes of a given quality is the asymptotic stability of the second order of accuracy $O(h^2 + \tau^2)$ by A. A. Samarsky. The results are generalized to the case of boundary conditions of the third kind, variable coefficients. A three-layer scheme of approximation order $O(h^6 + \tau^3)$ is also constructed on a three-point stencil in space, which allows to use an economical sweep method to solve the corresponding system of algebraic equations. Numerical experiments are presented to illustrate the correctness of our theoretical conclusions. Simulation of nonlinear processes with traveling waves showed that these algorithms can also be used for differential problems that have features in solution.

Введение. Разработка вычислительных методов высокого порядка точности на минимальных шаблонах для решения краевых задач математической физики всегда была актуальной задачей [1]. Использование минимальных шаблонов позволяет применить экономичные методы обращения матричных уравнений, когда число операций пропорционально числу узлов N , используемых по пространственной переменной, в то время как для других методов требуется $O(N^3)$ арифметических операций. В последнее время популярность получают так называемые компактные разностные схемы. Под компактными схемами, аппроксимирующими параболические уравнения, понимаются такие алгоритмы, которые имеют порядок точности по пространственной переменной $O(h^4)$ при использовании минимального трехточечного шаблона по пространству, что в свою очередь позволяет использовать экономичный метод прогонки для решения соответствующей системы алгебраических уравнений на конкретном временном слое.

Простейшие компактные схемы для уравнений с постоянными коэффициентами приведены в известной монографии академика А. А. Самарского [2]. Самое интересное, что эти схемы удалось обобщить и на линейные уравнения математической физики с переменными коэффициентами и многомерные уравнения. Классической в этом смысле является работа 1963 года [3].

С точки зрения моделирования реальных прикладных задач такие методы представляли чисто академический интерес, так как последние задачи описываются, как правило, нелинейными уравнениями математической физики.

Новый интерес к компактным схемам обусловлен появлением работ для нелинейных уравнений типа быстрой диффузии [4–7].

Настоящая работа посвящена построению и исследованию трехслойных компактных разностных схем для параболических линейных и квазилинейных уравнений. Это вызвано несколькими причинами. Во-первых, такие схемы являются асимптотически устойчивыми, а во-вторых, появление в них специального регуляризатора приводит такие алгоритмы к классу аппроксимаций уравнений гипербола-параболического типа. На этом пути появляется возможность построения устойчивых компактных разностных схем четвертого порядка как по пространству, так и по времени. Доказано, что в классе двухслойных компактных схем такие алгоритмы являются абсолютными неустойчивыми.

В статье также затрагиваются вопросы построения и исследования компактных схем в случае уравнений с краевыми условиями третьего рода, строятся трехслойные схемы Саульева порядка аппроксимации $6 + 3$, приведены многочисленные эксперименты, иллюстрирующие правильность наших теоретических утверждений. Моделирование нелинейных задач с бегущими волнами (когда первая производная $\partial u / \partial x \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow Dt$, $x = Dt$ – уравнение фронта) показало, что эти алгоритмы можно успешно применять и в случае наличия особенностей в решении дифференциальных задач.

1. Уравнение с постоянными коэффициентами. Пусть в области $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ требуется найти непрерывную функцию $u = u(x, t)$, удовлетворяющую следующей начальной задаче:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (2)$$

с краевыми условиями Дирихле

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t). \quad (3)$$

Относительно решения задачи (1)–(3) предполагаем, что оно существует, единственно и обладает всеми непрерывными в $\bar{Q}_T$ производными, необходимыми по ходу изложения.

В прямоугольнике $\bar{Q}_T$ обычным образом вводим равномерные сетки узлов с постоянными шагами h, τ по пространству и времени соответственно:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau, \quad \bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N; hN = l\} = \omega_h \cup \gamma_h,$$

$$\gamma_h = \{x_0 = 0, x_N = l\}, \quad \omega_h = \{x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N-1\},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_0, \tau N_0 = T\} = \omega_\tau \cup \{t_{N_0} = T\}.$$

Введем стандартные обозначения теории разностных схем [1, с. 244]

$$y = y_i^n = y(x_i, t_n), \quad \hat{y} = y_i^{n+1} = y(x_i, t_{n+1}),$$

$$\check{y} = y(x_i, t_{n-1}), \quad y_t = (\hat{y} - y)/\tau, \quad y_{\bar{t}} = (y - \check{y})/\tau,$$

$$y_{\bar{x}x} = \frac{1}{h^2} (y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n).$$

При построении компактной схемы порядка аппроксимации $\psi = O(h^4 + \tau^2)$ будем ориентироваться на асимптотически устойчивую схему второго порядка аппроксимации А. А. Самарского [2, с. 309]

$$\frac{3}{2}y_t - \frac{1}{2}y_{\bar{t}} = \Lambda \hat{y} + \hat{f}, \quad (4)$$

в которой $(\Lambda y)_i = y_{\bar{x}x,i}$, $i = 1, 2, \dots, N-1$. Разностное уравнение (4) может быть переписано в эквивалентной форме

$$y_t^\circ + \tau y_{\bar{t}t} = \Lambda \hat{y} + \hat{f}, \quad (5)$$

из которой видно, что при ее построении использовался принцип регуляризации схемы [2, с. 405], т. е. добавления при аппроксимации старших производных. При этом добиваются выполнения в схеме некоторых дополнительных свойств, в данном случае свойства асимптотической (при $t \rightarrow \infty$) устойчивости. Регуляризатор R в схеме (5) был выбран следующим образом:

$$Ry = \tau y_{\bar{t}t}. \quad (6)$$

Развивая дальше эту идею для построения еще и компактных устойчивых схем порядка аппроксимации и точности $4+2$ (4-й порядок по пространству и второй порядок по времени) введем регуляризатор R в виде

$$Ry = \tau y_{\bar{t}t} + \frac{h^2}{12} (y_{t\bar{x}x} - f_{\bar{x}x}). \quad (7)$$

Тогда соответствующая разностная схема совместно с аппроксимацией входных данных примет следующий вид:

$$\frac{3}{2}y_t - \frac{1}{2}y_{\bar{t}} = \Lambda \hat{y} - \frac{h^2}{12}y_{t\bar{x}x} + \varphi, \quad (8)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad y(x, \tau) = u_0(x) + \tau(u_0''(x) + f(x, 0)), \quad x \in \omega_h, \quad (9)$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \quad y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots, N_0 - 1. \quad (10)$$

Здесь шаблонный функционал φ определяется так:

$$\varphi = \hat{f} + \frac{h^2}{12}f_{\bar{x}x}. \quad (11)$$

Второе уравнение в (9) используется для нахождения приближенного решения на первом слое с порядком аппроксимации $O(\tau^2)$ [2].

Для того чтобы определить порядок аппроксимации и точности вычислительного метода рассмотрим задачу для погрешности метода $z = y - u$. Поставляя в уравнения (8)–(11) $y = z + u$, приходим к разностной задаче

$$z_t^\circ + \tau z_{\bar{t}t} = \Lambda \hat{z} - \frac{h^2}{12}z_{t\bar{x}x} + \psi, \quad (12)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad z(x, \tau) = \overset{\circ}{\psi}, \quad z_0^{n+1} = z_N^{n+1} = 0. \quad (13)$$

Здесь

$$\psi = -u_t^\circ - \tau u_{\bar{t}t} + \Lambda \hat{u} - \frac{h^2}{12}u_{t\bar{x}x} + \varphi \quad (14)$$

– погрешность аппроксимации (невязка) разностной схемы на решении $u(x, t)$ дифференциальной задачи (1)–(3),

$$\overset{\circ}{\psi} = -u_1 + u_0 + \tau(u_0''(x) + f(x, 0)) \quad (15)$$

– погрешность аппроксимации второго начального условия.

В дальнейшем будем использовать нормы:

$$\|y\|_C = \max_{x \in \omega_h} |y(x)|, \quad \|y\|_{\bar{C}} = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |y(x)|.$$

Пусть далее $H = L_2(\omega_h)$, H – пространство сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}_h$ и равных нулю при $x_0 = 0$, $x_N = l$. В пространстве H введем обычные скалярные произведения и нормы: $(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} h y_i v_i$, $(y, v) = \sum_{i=1}^N h y_i v_i$, $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$, $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$. Если линейный оператор $A : H \rightarrow H$ является положительным и самосопряженным $A = A^* > 0$, то можно ввести сеточное пространство H_A со скалярным произведением $(y, v)_A = (Ay, v)$ и нормой $\|y\|_A^2 = (y, y)_A$.

Лемма 1. Разностная схема (8)–(11) аппроксимирует исходную дифференциальную задачу с порядком $4 + 2$, т. е.

$$\psi = O(h^4 + \tau^2), \quad \dot{\psi} = O(\tau^2). \quad (16)$$

Доказательство. Используя разложения непрерывных функций в ряд Тейлора, можно получить представления

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial t} + O(\tau^2), \quad -\tau u_{\bar{t}} + \Lambda \hat{u} + \hat{f} = \Lambda u + f + O(\tau^2),$$

$$(\Lambda u + f) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \right) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h^4).$$

Следовательно, для невязки ψ имеет место представление

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda u + f + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - f \right) - \frac{h^2}{12} u_{t\bar{x}x} + \frac{h^2}{12} f_{\bar{x}x} = O(h^4 + \tau^2).$$

Применим теперь разложение

$$u^1 = u_0 + \tau \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} + O(\tau^2)$$

к анализу

$$\dot{\psi} = \tau \left(-\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda u + f \right) \Big|_{t=0} + O(\tau^2) = O(\tau^2), \quad \Lambda u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad \square$$

Глобальная устойчивость. Для анализа устойчивости разностной схемы применим метод энергетических неравенств. К сожалению, этот метод требует свойства положительности и самосопряженности эллиптического оператора, которое невозможно без предположения однородности граничных условий. Поэтому мы рассмотрим вопрос лишь об абсолютной устойчивости разностной схемы по начальным данным и правой части. Для этого возмутим в разностной схеме (8)–(11) начальные условия и правую часть. В результате получим задачу для возмущенного решения $\tilde{y}$. Вычитая из уравнений возмущенной задачи соответствующие уравнения (8)–(11), приходим к следующей системе разностных уравнений для возмущения $\bar{y} = \tilde{y} - y$:

$$\frac{3}{2} \bar{y}_t - \frac{1}{2} \bar{y}_{\bar{t}} = \hat{\bar{y}}_{\bar{x}x} - \frac{h^2}{12} \bar{y}_{t\bar{x}x} + \bar{\varphi}, \quad \bar{\varphi} = \tilde{\varphi} - \varphi, \quad (17)$$

$$\bar{y}(x, 0) = \bar{u}_0(x), \quad \bar{y}(x, \tau) = \bar{u}_0(x) + \tau(\bar{u}_0''(x) + \bar{f}(x, 0)), \quad (18)$$

$$\bar{y}_0^{n+1} = 0, \quad \bar{y}_N^{n+1} = 0. \quad (19)$$

Умножим разностное уравнение (17), записанное в i -м узле, на $2\tau h y_{t,i}$ и просуммируем полученное равенство по внутренним узлам сетки ω_h ($i = 1, 2, \dots, N-1$). В результате получим энергетическое соотношение (после применения разностной формулы Грина)

$$3\tau \|\bar{y}_t\|^2 = \tau(\bar{y}_t, \bar{y}_{\bar{t}}) - 2\tau(\bar{y}_{t\bar{x}}, \hat{\bar{y}}_{\bar{x}}) + \frac{\tau h^2}{6} \|\bar{y}\|^2 + 2\tau(\bar{y}_t, \bar{\varphi}). \quad (20)$$

Рассмотрим отдельные слагаемые (скалярные произведения) в правой части (20). Применяя неравенство Коши с ε , находим оценки

$$\tau(\bar{y}_t, \bar{y}_{\bar{t}}) \leq \frac{\tau}{2} \|\bar{y}_t\|^2 + \frac{\tau}{2} \|\bar{y}_{\bar{t}}\|^2,$$

$$2\tau(\bar{y}_t, \bar{\varphi}) \leq 2\tau \|\bar{y}_t\|^2 + \frac{\tau}{2} \|\bar{\varphi}\|^2.$$

Используя тождество

$$\hat{\bar{y}}_{\bar{x}} = \frac{1}{2} (\hat{\bar{y}}_{\bar{x}} + \bar{y}_{\bar{x}}) + \frac{\tau}{2} \bar{y}_{t\bar{x}},$$

следующее скалярное произведение можно представить в виде

$$-2\tau(\bar{y}_{t\bar{x}}, \hat{\bar{y}}_{\bar{x}}) = -\|\hat{\bar{y}}\|_A^2 + \|\bar{y}\|_A^2 - \tau^2 \|y_t\|_A^2,$$

где $(Ay)_i = -y_{\bar{x}x,i}$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, $y_0 = 0$, $y_N = 0$.

Подставляя полученные оценки в основное энергетическое тождество (20), относительно сеточной полунормы $W_2^1(\omega_h)$

$$Q_n^2 = \frac{\tau}{2} \|\bar{y}_t\|^2 + \|\bar{y}\|_A^2 \quad (21)$$

при условии $\tau \geq \frac{h^2}{6}$, получим следующее рекуррентное неравенство:

$$Q_{n+1}^2 \leq Q_n^2 + \frac{\tau}{2} \|\bar{\varphi}^n\|^2 \leq \dots \leq Q_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \tau \|\bar{\varphi}_k\|^2$$

или

$$\|\bar{y}^{n+1}\|_A \leq \sqrt{\tau/2} \|\bar{y}_t\| + \|\bar{y}^1\|_A + \sqrt{T/2} \max_{t \in \omega_\tau} \|\bar{\varphi}(t)\|. \quad (22)$$

Вспоминая, что $\|\bar{y}_t\| = \|\bar{u}_0''\|$ и учитывая неравенство

$$\|\bar{y}^1\|_A \leq \|\bar{u}_0\|_A + \tau \|\bar{u}_0''\|_A,$$

из (22) находим оценку при $\tau \leq \tau_0$, $\tau_0 = 1/2$

$$\max_{t \in \omega_\tau} \|\bar{y}(t) - y(t)\|_A \leq \|\bar{u}_0 - u_0\|_A + \|\bar{u}_0'' - u_0''\|_A + \sqrt{T/2} \max_{t \in \omega_\tau} \|\bar{\varphi}(t) - \varphi(t)\|, \quad (23)$$

выражающую устойчивость решения разностной схемы по начальным данным и правой части, а также глобальную устойчивость (при $t \rightarrow \infty$) по начальным условиям ($\bar{\varphi} = 0$).

Следствие 1. В силу вложения $\|\bar{y}\|_C \leq \frac{\sqrt{l}}{2} \|\bar{y}\|_A$ из оценки (23) следует также устойчивость u в равномерной C -норме или норме L_∞ .

Следствие 2. В силу линейности дифференциальной и разностной задач оценку (23) можно использовать и для оценки скорости сходимости решения разностной задачи к точному решению исходной дифференциальной задачи в силу идентичности разностных уравнений для $\bar{y}$ и $z = y - u$.

После несложных математических преобразований получаем неравенство

$$\max_{t \in \omega_\tau} \|z(t)\|_C \leq c(h^4 + \tau^2), \quad c = \text{const} > 0. \quad (24)$$

Отсюда следует, что порядок точности разностной схемы (8)–(11) $4 + 2$ совпадает на гладких решениях с порядком аппроксимации схемы.

Схемы для квазилинейных уравнений. В прямоугольнике $\bar{Q}_T$ при некотором $T > 0$ рассмотрим первую краевую задачу для квазилинейного уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (25)$$

с начальными и граничными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t). \quad (26)$$

Введем область значений точного решения M_u и определим ее окрестность D_u :

$$M_u = \{u : u_1 \leq u(x, t) \leq u_2, (x, t) \in \bar{Q}_T\},$$

$$D_u = \{\bar{u} : u_1 - \delta \leq \bar{u}(x, t) \leq u_2 + \delta, (x, t) \in K \subseteq Q_T\}.$$

Предполагаем, что задача однозначно разрешима, а также

$$k \in C(D_u), \quad 0 \leq k_1 \leq k(v) \leq k_2, \quad v \in D_u.$$

Определим новую функцию $\varphi(u) = \int_0^u k(\omega) d\omega$ и приведем уравнение (25) к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T. \quad (27)$$

Уравнение (27) иногда называют также уравнением быстрой диффузии [8].

В дальнейшем будем рассматривать задачу (27), (26).

Трехслойная разностная схема порядка аппроксимации $O(h^4 + \tau^2)$ имеет вид

$$\frac{3}{2}y_i - \frac{1}{2}y_{\bar{i}} = (\varphi(\hat{y}))_{\bar{x}x} - \frac{h^2}{12}y_{t\bar{x}x} + \varphi, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

$$\hat{y}_0 = \mu_1(t_{n+1}), \quad \hat{y}_N = \mu_2(t_{n+1}),$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, \dots, N,$$

$$y_i^1 = u_0(x_i) + \tau \varphi''(u_0(x_i)), \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$y_0^1 = \mu_1(t_1), \quad y_N^1 = \mu_2(t_1).$$

Для реализации данной нелинейной разностной схемы рекомендуется использовать итерационный процесс Ньютона

$$\frac{3}{2} \frac{\hat{y}_i^{(s+1)} - y_i^n}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{y_i^n - y_i^{n-1}}{\tau} = \left(\varphi(\hat{y}) + (\hat{y}^{(s+1)} - \hat{y}^{(s)}) \varphi'(\hat{y}^{(s)}) \right)_{\bar{x}x} - \frac{h^2}{12\tau} (\hat{y}_{\bar{x}x}^{(s+1)} - y_{\bar{x}x}^n).$$

Выбор нулевой итерации осуществляется с учетом решения на двух предыдущих слоях

$$y_0^{(0)n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \quad y_i^{(0)n+1} = 2y_i^n - y_i^{n-1}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad y_N^{(0)n+1} = \mu_2(t_{n+1}).$$

При этом погрешность нулевой итерации $y_i^{(0)n+1} - u^{n+1} = O(\tau^2)$ имеет второй порядок аппроксимации по временной переменной.

Вычислительный эксперимент. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^6}{\partial x^2}.$$

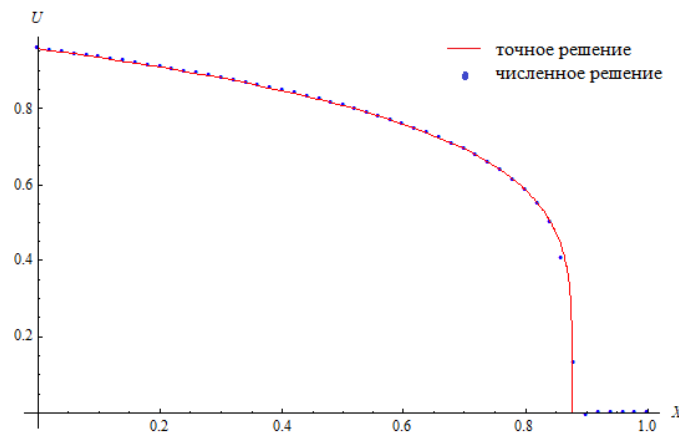
Начальные и граничные условия задавались исходя из точного решения

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^{1/5}} \left(\sqrt{\frac{6}{5}}t - x\right)^{1/5} & \text{при } 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{6}{5}}t, \\ 0, & \text{при } x \geq \sqrt{\frac{6}{5}}t, \end{cases}$$

имеющего вид бегущей волны. Особенностью данной задачи является тот факт, что первая производная $\partial u / \partial x$ обращается в бесконечность в окрестности линии $x = Dt$, $D = 6/5$. Итерационный процесс прекращался при выполнении неравенства

$$\|y^{s+1} - y^s\|_{\bar{C}} \leq 10^{-7}, \quad \|\cdot\|_{\bar{C}} = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |\cdot(x)|.$$

На рисунке приведены результаты расчетов на момент времени $T = 0,8$ при $\tau = h = 0,02$. Заданная точность итерационного процесса достигалась при $s = 6$.



Рисунок

Следовательно, разностные схемы высокого порядка точности прекрасно работают как на гладких, так и негладких решениях.

Трехслойная схема Саульева порядка 6 + 3 на трехточечном шаблоне. Для уравнения (1) известна двухслойная схема Саульева [9] (для простоты будем рассматривать однородное уравнение с $f(x, t) = 0$)

$$y_t = y_{\bar{x}\bar{x}}^{(\sigma)}, \quad \sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}, \quad \tau = h^2/2\sqrt{5}, \quad (28)$$

порядка аппроксимации $O(h^6)$ при выполнении условия (28) или $\psi = O(h^6 + \tau^3)$.

Ниже мы предлагаем трехслойную схему Саульева, построенную на базе схемы 4 + 2. Для этого же уравнения она имеет вид

$$y_{\bar{t}} + \tau y_{\bar{t}\bar{t}} = \Lambda \hat{y} - \frac{h^2}{12} y_{t\bar{x}\bar{x}}, \quad \tau = h^2/(5 + \sqrt{105}). \quad (29)$$

Второе начальное условие или решение на первом слое мы находим по схеме третьего порядка точности по временной переменной

$$y_i^1 = u_0(x_i) + \tau u_0''(x_i) + \frac{\tau^2}{2} u_0^{(4)}(x_i), \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Как и схема (28), разностное уравнение (29) аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение (1) на трехточечном шаблоне с порядком 6 + 3 или $\psi = O(h^6 + \tau^3)$. Не составляет труда выписать соответствующие схемы и для неоднородного уравнения с $f(x, t) \neq 0$.

Крайевые условия третьего рода. Пусть при $x = 0$ задано краевое условие третьего рода

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \beta_1 u(0, t) - \mu_1(t), \quad \beta_1 = \text{const} > 0. \quad (30)$$

Для аппроксимации (30) будем использовать разностное уравнение

$$\hat{y}_{x,0} = \beta_1 \hat{y}_0 + \frac{h}{2} \left(1 + \frac{h}{3} \beta_1 \right) y_{i,0}^{\circ} + \left(\frac{h^3}{24} + \frac{\tau h}{2} \right) y_{\bar{t},0} - (\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2), \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \mu_1(t) + \frac{h^2}{6} \mu_1'(t), \\ \varphi_2(t) &= \frac{h}{2} f(0, t) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial f(0, t)}{\partial x} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial^2 f(0, t)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial f(0, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение (невязку) для определения порядка аппроксимации граничного условия (31)

$$\psi_1 = -\hat{u}_{x,0} + \beta_1 \hat{u}_0 + \left(\frac{h}{2} u_{i,0}^{\circ} + \frac{\tau h}{2} u_{\bar{t},0} \right) + \frac{h^2}{6} \beta_1 u_{i,0}^{\circ} + \frac{h^3}{24} u_{\bar{t},0} - \hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2. \quad (32)$$

Используя разложение функции в ряд Тейлора в окрестности точки (x_i, t_{n+1}) , получим соотношение

$$-\hat{u}_{x,0} = -\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 \hat{u}_0}{\partial x^2} - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \hat{u}_0}{\partial x^3} - \frac{h^3}{24} \frac{\partial^4 \hat{u}_0}{\partial x^4} + O(h^4), \quad (33)$$

в котором старшие производные $\partial^k u / \partial x^k$, $k = 2, 3, 4$, необходимо выразить через исходное уравнение (1) и граничное условие (30). Это вызвано тем, что эти производные невозможно аппроксимировать на 2-точечном шаблоне.

После элементарных преобразований, получаем

$$\begin{aligned} -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 \hat{u}_0}{\partial x^2} &= -\frac{h}{2} \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial t} + \frac{h}{2} f(0, t_{n+1}), \\ -\frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \hat{u}_0}{\partial x^3} &= -\frac{h^2}{6} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial t} - f(0, t_{n+1}) \right) = -\frac{h^2}{6} \beta_1 \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial t} + \frac{h^2}{6} \mu_1'(t_{n+1}) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial f(0, t_{n+1})}{\partial x}, \\ -\frac{h^3}{24} \frac{\partial^4 \hat{u}_0}{\partial x^4} &= -\frac{h^3}{24} \frac{\partial^2 \hat{u}_0}{\partial t^2} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial^2 f(0, t_{n+1})}{\partial x^2} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial f(0, t_{n+1})}{\partial t}. \end{aligned}$$

Подставим полученные результаты в (33). Получим

$$\begin{aligned} -\hat{u}_{x,0} = & -\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial t} - \frac{h^2}{6} \beta_1 \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial t} - \frac{h^3}{24} \frac{\partial^2 \hat{u}_0}{\partial t^2} + \\ & + \frac{h}{2} f(0, t_{n+1}) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial f(0, t_{n+1})}{\partial x} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial^2 f(0, t_{n+1})}{\partial x^2} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial f(0, t_{n+1})}{\partial t} + \frac{h^2}{6} \mu'_1(t_{n+1}) O(h^4). \end{aligned} \quad (34)$$

Теперь рассмотрим член $\left(\frac{h}{2} u_{i,0}^\circ + \frac{\tau h}{2} u_{\bar{t},0}\right)$ в формуле (32). Очевидно,

$$u_{i,0}^\circ = \frac{\partial u_0}{\partial t} + O(\tau^2), \quad u_{\bar{t},0} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + O(\tau^2).$$

Отсюда следует

$$\frac{h}{2} u_{i,0}^\circ + \frac{\tau h}{2} u_{\bar{t},0} = \frac{h}{2} \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\tau h}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + O(h\tau^2) = \frac{h}{2} \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial t} + O(h\tau^2) = \frac{h}{2} \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial t} + O(\tau^2). \quad (35)$$

Теперь подставим (34), (35) в (32). Находим, что

$$\begin{aligned} \psi_1 = & \left(-\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial x} + \beta_1 \hat{u}_0\right) + \left(-\frac{h}{2} \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial t} + \frac{h}{2} \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial t} + O(\tau^2)\right) + \\ & + \left(-\frac{h^2}{6} \beta_1 \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial t} + \frac{h^2}{6} \beta_1 u_{i,0}^\circ\right) + \left(-\frac{h^3}{24} \frac{\partial^2 \hat{u}_0}{\partial t^2} + \frac{h^3}{24} u_{\bar{t},0}\right) - \\ & - \hat{\varphi}_2 + \frac{h}{2} f(0, t_{n+1}) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial f(0, t_{n+1})}{\partial x} + \\ & + \frac{h^3}{24} \frac{\partial^2 f(0, t_{n+1})}{\partial x^2} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial f(0, t_{n+1})}{\partial t} - \hat{\varphi}_1 + \frac{h^2}{6} \mu'_1 t_{n+1} + O(h^4) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \psi_1 = & \left(-\frac{h^2}{6} \beta_1 \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial t} + \frac{h^2}{6} \beta_1 u_{i,0}^\circ\right) + \left(-\frac{h^3}{24} \frac{\partial^2 \hat{u}_0}{\partial t^2} + \frac{h^3}{24} u_{\bar{t},0}\right) - \\ & - \hat{\varphi}_2 + \frac{h}{2} f(0, t_{n+1}) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial f(0, t_{n+1})}{\partial x} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial^2 f(0, t_{n+1})}{\partial x^2} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial f(0, t_{n+1})}{\partial t} - \\ & - \hat{\varphi}_1 + \mu_1(t_{n+1}) + \frac{h^2}{6} \mu'_1(t_{n+1}) + O(h^4 + \tau^2) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \psi_1 = & O(\tau h^2) + O(\tau h^3) - \hat{\varphi}_2 + \frac{h}{2} f(0, t_{n+1}) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial f(0, t_{n+1})}{\partial x} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial^2 f(0, t_{n+1})}{\partial x^2} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial f(0, t_{n+1})}{\partial t} - \\ & - \hat{\varphi}_1 + \mu_1(t_{n+1}) + \frac{h^2}{6} \mu'_1(t_{n+1}) + O(h^4 + \tau^2) = O(h^4 + \tau^2). \end{aligned}$$

Аналогично, краевое условие при $x = l$

$$-\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \beta_2 u(l, t) - \mu_2(t), \quad \beta_2 = \text{const} > 0, \quad (36)$$

аппроксимируется с порядком $O(h^4 + \tau^2)$ разностным выражением

$$-\hat{y}_{\bar{x},N} = \beta_2 \hat{y}_N + \frac{h}{2} \left(1 + \frac{h}{3} \beta_2\right) y_{i,N}^\circ + \left(\frac{h^3}{24} + \frac{\tau h}{2}\right) y_{\bar{t},N} - (\hat{\varphi}_3 + \hat{\varphi}_4),$$

где

$$\varphi_3(t) = \mu_2(t) + \frac{h^2}{6} \mu'_2(t),$$

$$\varphi_4(t) = \frac{h}{2} f(x_N, t) - \frac{h^2}{6} \frac{\partial f(x_N, t)}{\partial x} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial^2 f(x_N, t)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial f(x_N, t)}{\partial t}.$$

2. Вычислительные эксперименты. Вычислительный эксперимент для задачи Дирихле.

Рассмотрим функцию $u(x, t) = e^{-t} \sin x$, которая является точным решением задачи (1)–(3) в области $Q_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq T\}$.

Для проверки порядка сходимости по пространственной и временной переменным воспользуемся правилом Рунге [10]

$$p_C^h = \log_2 \frac{\|z(2h, \tau)\|_C}{\|z(h, \tau)\|_C}, \quad p_C^\tau = \log_2 \frac{\|z(h, 2\tau)\|_C}{\|z(h, \tau)\|_C}.$$

В табл. 1 и 2 приведены порядки скорости сходимости по пространственному и временному направлению, полученные экспериментальным путем. Величины, представленные в таблице 1 и 2 соответствуют моменту времени $T = 2$. В качестве оценки погрешности было выбрано отклонение рассчитанных значений от точного решения в норме C . Данный вычислительный эксперимент иллюстрирует наши теоретические выводы.

Таблица 1. Скорость сходимости по пространственному направлению

$h = \pi/30$	$\tau = 0,1$	$\ z^h\ _C$	P_C^h
h	τ	$2,07703e^{-3}$	–
$h/2$	$\tau/4$	$1,22758e^{-4}$	4,08063
$h/4$	$\tau/16$	$7,57039e^{-6}$	4,01931
$h/8$	$\tau/64$	$4,71584e^{-7}$	4,00478

Таблица 2. Скорость сходимости по временному направлению

$h = \pi/300$	$\tau = 0,01$	$\ z^\tau\ _C$	P_C^τ
$h = \pi/300$	τ	$7,65554e^{-7}$	–
$h = \pi/300$	$\tau/2$	$1,93465e^{-7}$	1,98443
$h = \pi/300$	$\tau/4$	$4,86932e^{-8}$	1,99028
$h = \pi/300$	$\tau/8$	$1,2217e^{-8}$	1,99483

Вычислительный эксперимент для третьей краевой задачи. Рассмотрим функцию $u(x, t) = e^{t-x} + t \cos x$, которая является точным решением задачи (1) с граничными условиями (30), (36), где $f(x, t) = (1+t) \cos x$, $u_0(x) = e^{-x}$, $\mu_1(t) = 2e^t + t$, $\mu_2(t) = -t$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, 2]$. Результаты численных расчетов отражены в табл. 3 и 4.

Таблица 3. Скорость сходимости по пространственному направлению

$h = \pi/30$	$\tau = 0,01$	$\ z^h\ _C$	P_C^h
h	τ	$1,26355e^{-4}$	–
$h/2$	$\tau/4$	$7,92049e^{-6}$	3,99303
$h/4$	$\tau/16$	$4,95022e^{-7}$	4,00003
$h/8$	$\tau/64$	$3,09281e^{-8}$	4,0005

Таблица 4. Скорость сходимости по временному направлению

$h = \pi/300$	$\tau = 0,01$	$\ z^\tau\ _C$	P_C^τ
$h = \pi/300$	τ	$9,18767e^{-6}$	–
$h = \pi/300$	$\tau/2$	$2,33089e^{-6}$	1,97882
$h = \pi/300$	$\tau/4$	$5,90453e^{-7}$	1,98099
$h = \pi/300$	$\tau/8$	$1,50328e^{-7}$	1,997371

Приведенные выше вычислительные эксперименты снова подтверждают наши теоретические выводы.

3. Уравнение с переменными коэффициентами. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (37)$$

с краевыми и начальными условиями (2), (3), где

$$0 < k_1 \leq k(x, t) \leq k_2 \quad \text{для всех } (x, t) \in \bar{Q}_T.$$

При построении трехслойной компактной разностной схемы будем ориентироваться на наилучшую консервативную схему, обеспечивающую второй порядок точности даже в случае

разрывных коэффициентов [2], и на квадратурную формулу Симпсона четвертого порядка точности

$$\tilde{a}_i = \left[\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k} \right]^{-1} = a_i + O(h^4),$$

$$a_i = 6(p_{i-1} + 4p_{i-1/2} + p_i)^{-1}, \quad p = \frac{1}{k}. \quad (38)$$

Шаблонный функционал (38) был предложен А. А. Самарским при построении двухслойных компактных разностных схем [3].

Соответствующая разностная схема порядка точности $4 + 2$ будет иметь вид

$$y_{\bar{t}} = \Lambda y^{(\sigma)} + \varphi, \quad \sigma = 1 - \frac{h^2}{12\tau}, \quad (39)$$

где теперь

$$\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x, \quad \varphi = \hat{f} + \frac{h^2}{12} \Lambda(pf).$$

Доказательство 4-го порядка аппроксимации по пространству базируется на уникальном тождестве [3]

$$\Lambda u = Lu + \frac{h^2}{12} L \left(p \frac{\partial u}{\partial t} - pf \right) + O(h^4).$$

Разностная схема (39) относится уже к классу схем с переменными весами [1], условием p -устойчивости и сходимости которой является нестандартное условие

$$\tau \geq \frac{h^2}{6} k_1.$$

Если коэффициент $k = k(x)$ зависит только от пространственной переменной, то здесь, как и в случае постоянных коэффициентов, удастся доказать глобальную (при $t \rightarrow \infty$) устойчивость решения разностной схемы по начальным условиям. Более подробно эти вопросы будут обсуждаться в отдельной работе.

Замечание 1. Для уравнения (37) третья краевая задача ставится следующим образом:

$$k \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \beta_1 u(0, t) - \mu_1(t), \quad -k \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \beta_2 u(l, t) - \mu_2(t).$$

Аппроксимация краевых условий с порядком $4 + 2$ является далеко не тривиальной проблемой. Чтобы избавиться от возникшей проблемы, можно конечно раздифференцировать эллиптический оператор и привести уравнение (37) к виду

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k'_x}{k} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{k} f(x, t).$$

В этом случае поток на границах не будет содержать коэффициента k , а для аппроксимации конвективного слагаемого можно использовать безусловно монотонную аппроксимацию 4-го порядка В. К. Полевинова [6; 11].

Однако в случае обобщенных решений нарушать дивергентность дифференциальных уравнений нельзя.

Для сохранения консервативности схемы и избежания присутствия коэффициента $k = k(x, t)$ в потоке на границе можно использовать замену переменных, предложенную в работе [12]

$$\bar{x} = \int_0^x \frac{d\alpha}{\sqrt{k(\alpha, t)}}, \quad \bar{t} = t,$$

которая приводит уравнение (37) к виду

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} - a(\bar{x}, \bar{t}) \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} - b(\bar{x}, \bar{t}) u(\bar{x}, \bar{t}) = -f(\bar{x}, \bar{t}).$$

Литература

1. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Матус П. П. Разностные схемы с операторными множителями. М.: Наука, 1998. 442 с.
2. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1987. 616 с.
3. Самарский А. А. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1963. Т. 3, № 5. С. 812–840.
4. Матус П. П., Утебаев Б. Д. Компактные и монотонные разностные схемы для параболических уравнений // Математическое моделирование. 2021. Т. 33, № 4. С. 60–78. <https://doi.org/10.20948/mm-2021-04-04>
5. Матус П. П., Ань Х. Т. К. Компактные разностные схемы на трехточечном шаблоне для гиперболических уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 7. С. 963–975. <https://doi.org/10.31857/s0374064121070098>
6. Матус П. П., Утебаев Б. Д. Компактные и монотонные разностные схемы для обобщенного уравнения Фишера // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 7. С. 947–961.
7. Матус П. П., Громыко Г. Ф., Утебаев Б. Д. Консервативные компактные и монотонные разностные схемы четвертого для квазилинейных уравнений // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2024. Т. 68, № 1. С. 7–14. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-1-7-14>
8. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
9. Саульев В. К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М.: Физматгиз, 1960.
10. Wang T. Convergence of an eight-order compact difference scheme for the nonlinear Schrodinger equation // Advances in Numerical Analysis. 2012. Vol. 2012. P. 1–24.
11. Полевиков В. К. Монотонная разностная схема повышенного порядка точности для двумерных уравнений конвекции-диффузии // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2019. № 3. С. 71–83. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-71-83>
12. Самарский А. А. Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами // Докл. АН. СССР. 1958. Т. 121, № 2. С. 225–228.

References

1. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N., Matus P. P. *Difference schemes with operator factors*. Dordrecht, 2002. 348 p.
2. Samarskii A. A. *Theory of difference schemes*. Moscow, 1989. 616 p. (in Russian).
3. Samarskii A. A. Schemes of high-order accuracy for the multi-dimensional heat conduction equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1963, vol. 3, no. 5, pp. 1107–1146. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(63\)90104-6](https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90104-6)
4. Matus P. P., Utebaev B. D. Compact and monotone difference schemes for parabolic equations. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2021, vol. 13, pp. 1038–1048. <https://doi.org/10.1134/s2070048221060132>
5. Matus P. P., Anh H. Th. K. Compact difference schemes on a three-point stencil for second-order hyperbolic equations. *Differential Equations*, 2021, vol. 57, no. 7, pp. 934–946. <https://doi.org/10.1134/s0012266121070090>
6. Matus P. P., Utebaev B. D. Compact and monotone difference schemes for the generalized Fisher equation. *Differential Equations*, 2022, vol. 58, no. 7, pp. 937–951. <https://doi.org/10.1134/s0012266122070072>
7. Matus P. P., Gromyko G. Ph., Utebaev B. D. Conservative compact and monotone fourth order difference schemes for quasilinear equations. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2024, vol. 68, no. 1, pp. 7–14 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-1-7-14>
8. Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., Mikhailov A. P. *Modes with blow-up in problems for quasilinear parabolic equations*. Moscow, Nauka Publ., 1987 (in Russian).
9. Saul'ev V. K. *Integration of equations of parabolic type by the grid method*. Moscow, Fizmatgiz, 1960 (in Russian).
10. Wang T. Convergence of an eight-order compact difference scheme for the nonlinear Schrodinger equation. *Advances in Numerical Analysis*, 2012, vol. 2012, pp. 1–24.
11. Polevikov V. K. A monotone finite-difference high order accuracy scheme for the 2D convection–diffusion equations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2019, no. 3, pp. 71–83. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-71-83>
12. Samarskii A. A. Parabolic equations with discontinuity coefficients. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1958, vol. 121, pp. 225–228 (in Russian).

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Для публикации в журнале принимаются ранее не опубликованные в других изданиях научные статьи. Обзорные статьи публикуются по решению редколлегии.
2. Объем статьи не более 20 журнальных страниц (с учетом таблиц и рисунков, а также списка литературы на 2 языках), объем краткого сообщения – до 5 страниц.
3. Статьи в Журнале публикуются на русском или английском языке.
4. Статья должна быть подготовлена в системе $\text{\LaTeX}$ по образцу, находящемуся на сайте Журнала. Не допускается использование в $\text{\TeX}$ -файлах «нестандартных» $\text{\TeX}$ -команд (т. е. команд, не входящих в стандартную поставку $\text{\LaTeX}$), а также переопределение стандартных команд. При подаче статьи автору необходимо указывать рубрику Журнала, к которому относится статья.
5. Текст статьи начинается с индекса УДК, затем следуют название статьи, инициалы и фамилии авторов, а также краткая аннотация (не более 15 строк) и ключевые слова (5–10 слов). Аннотация не должна содержать ссылок на формулы и литературу статьи. Сведения об авторе (авторах), название статьи, аннотация и ключевые слова пишутся на русском и английском языках, остальные элементы оформляются на русском (английском) языке.
6. Список литературы печатается в конце текста. Ссылки на литературу в тексте нумеруются в порядке их упоминания и даются в квадратных скобках. Использование ссылок на неопубликованные работы не допускается. Затем приводится список цитированных источников в романском алфавите («References»). Пример оформления библиографического списка приведен в образце, находящемся на сайте журнала.
7. Если присутствует информация о финансировании (поддержке грантами проектов и т. п.), ее следует размещать в конце статьи.

GUIDELINES FOR AUTHORS

1. Scientific articles not previously published in other publications are accepted for publication in the journal. Review articles are published by decision of the editorial board.
2. The volume of the article is no more than 20 journal pages, taking into account tables and figures, the volume of a short message is up to 5 pages.
3. Articles in the Journal are published in Russian or English.
4. The article must be prepared in the $\text{\LaTeX}$ system according to the model located on the Journal's website. It is not allowed to use "non-standard" in $\text{\TeX}$ files $\text{\TeX}$ commands (i.e. commands not included in the standard $\text{\LaTeX}$ distribution), and also override standard commands. When submitting an article, the author must indicate the category of the Journal to which the article belongs.
5. The text of the paper must begin with the UDC, the title, and the name(s) of the author(s) preceded by initials followed by a short abstract (no more than 15 lines) and keywords (5–10 words). The abstract must not contain numbered references to the formulas and bibliography items. Information about the author (authors), title of the article, abstract and keywords are written in Russian and English, other elements are written in Russian (English).
6. The list of references should be at the end. The references in the text are numbered in order of their appearance and in square brackets. The use of references to unpublished works is not permitted. Then there is a list of cited sources in the Roman alphabet ("References"). An example of bibliographic descriptions is given in the model located on the Journal's website.
7. If there is information about financial support for the research (grant support for projects, etc.), it should be placed at the end of the article.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ
2024. ТОМ 32, № 1

Редактор Т. П. Петрович
Компьютерная верстка И. В. Блинец

Подписано в печать __.__.2024. Формат $60 \times 84 \frac{1}{8}$. Усл. печ. л. 14,42. Уч.-изд. л. 15,25.
Государственное научное учреждение «Институт математики Национальной академии наук Беларуси».
220072, г. Минск, ул. Сурганова, д. 11.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1 / 257 от 2 апреля 2014 г.

Отпечатано в Республиканском унитарном предприятии «Издательский дом «Беларуская навука».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1 / 18 от 02.08.2013. ЛП № 02330 / 455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40. 220141, г. Минск.
Тираж 30 экз. Заказ

© Институт математики НАН Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси, 2024