Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2024. Том 32. № 1. С. 57–63

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА
DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

УДК 519.17

О ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ ДИАМЕТРА 3 И СТЕПЕНИ 44

М. Чень[1], А. А. Махнев[2], В. С. Климин[3]

[1] *Университет провинции Хайнань, г. Хэйкоу, Китай*
[2] *Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Россия*
[3] *Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Россия*
e-mail: mzchen@hainanu.edu.cn, makhnev@imm.uran.ru, m65v19@gmail.com

Поступила: 01.03.2024 **Исправлена:** 05.06.2024 **Принята:** 18.06.2024

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, сильно регулярный граф, тройные числа пересечений.

Аннотация. Дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3 имеет массив пересечений $\{r(c_2+1)+a_3,\ rc_2,\ a_3+1;\ 1,\ c_2,\ r(c_2+1)\}$ (М. С. Нирова). Для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и степени 44 имеется 7 допустимых массивов пересечений. Для каждого из них граф Γ_3 сильно регулярен. Для массива пересечений $\{44,30,5;1,3,40\}$ имеем $a_3=4$, $c_2=3$, $r=10$, Γ_2 имеет параметры (540, 440, 358, 360) и Γ_3 имеет параметры (540, 55, 10, 5). Граф не существует (Кулен–Пак). Для массива пересечений $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$ граф Γ_3 имеет параметры (375, 22, 5, 1). Граф не существует (окрестность вершины – объединение изолированных 6-клик). В работе доказано, что дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{44, 36, 5; 1, 9, 40\}$, $\{44, 36, 12; 1, 3, 33\}$ и $\{44, 42, 5; 1, 7, 40\}$ не существуют.

ON DISTANCE REGULAR GRAPHS WITH DIAMETER 3 AND DEGREE 44

M. Chen[1], A. A. Makhnev[2], V. S. Klimin[3]

[1] *Universitet provintsii Khaynan', Kheykou, China*
[2] *N. N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia*
[3] *Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia*
e-mail: mzchen@hainanu.edu.cn, makhnev@imm.uran.ru, m65v19@gmail.com

Received: 01.03.2024 **Revised:** 05.06.2024 **Accepted:** 18.06.2024

Keywords: distance-regular graph, strongly regular graph, triple intersection numbers.

Abstract. Distance-regular graph Γ with strongly regular graphs Γ_2 and Γ_3 has intersection array $\{r(c_2+1)+a_3, rc_2, a_3+1; 1, c_2, r(c_2+1)\}$ (M. S. Nirova). For distance-regular graph with diameter 3 and degree 44 there are 7 fisiable intersection arrays. For each of them the graph Γ_3 is strongly regular. For intersection array $\{44,30,5;1,3,40\}$ we have $a_3=4$, $c_2=3$ and $r=10$, Γ_2 has parameters (540, 440, 358, 360) and Γ_3 has parameters (540, 55, 10, 5). This graph does not exist (Koolen-Park). For intersection array $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$ the graph Γ_3 has parameters (375, 22, 5, 1). Graph Γ_3 does nor exist (local subgraph is the union of isolated 6-cliques). In this paper it is proved that distance-regular graphs with intersection arrays $\{44, 36, 5; 1, 9, 40\}$, $\{44, 36, 12; 1, 3, 33\}$ and $\{44, 42, 5; 1, 7, 40\}$ do not exist.

Введение. Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a,b – вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ –

подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, и каждое ребро из Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v,k,λ,μ), если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин в случае $d(a,b)=2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Число вершин в $[a]\cap[b]$ обозначим через $\lambda(a,b)$ (через $\mu(a,b)$), если $d(a,b)=1$ (если $d(a,b)=2$), а соответствующий подграф назовем (μ-) λ-*подграфом*.

Если вершины u,w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0,...,b_{d-1};c_1,...,c_d\}$, если значения $b_i = b_i(u,w)$ и $c_i=c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u,w на расстоянии i. Положим $a_i=k-b_i-c_i$ и $k_i=|\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Числа пересечений графа p^l_{ij} и параметры Крейна q^l_{ij} определены в [1, с. 43 и 48 соответственно].

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра d. Для $i\in\{1,2,...,d\}$ граф Γ_i определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u,w смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u,w)=i$.

Имеется семь допустимых пересечений графов Γ степени 44 с сильно регулярным графом Γ_3.

Для массива пересечений $\{44,30,5;1,3,40\}$ имеем $a_3=4$, $c_2=3, r=10$, Γ_2 имеет параметры (540, 440, 358, 360) и Γ_3 имеет параметры (540, 55, 10, 5). Граф не существует (Кулен–Пак [2]).

Для массива пересечений $\{44,30,9;1,5,36\}$ имеем $a_3=8, c_2=5, r=6$, Γ_2 имеет параметры (375, 264, 188, 180) и Γ_3 имеет параметры (375, 66, 9, 12). Существование обоих сильно регулярных графов неизвестно.

Для массива пересечений $\{44,35,3;1,5,42\}$ имеем $a_3=4, c_2=3, r=10$, Γ_2 имеет параметры (375, 308, 253, 252) и Γ_3 имеет параметры (375, 22, 5, 1). Граф не существует (окрестность вершины – объединение изолированных 6-клик).

Для массива пересечений $\{44,36,5;1,9,40\}$ имеем $a_3=4, c_2=9, r=4$, Γ_2 имеет параметры (243, 176, 130, 120) и Γ_3 имеет параметры (243, 22, 1, 2).

Для массива пересечений $\{44,36,12;1,3,33\}$ (граф Шилла с $b=4$) граф Γ_3 имеет параметры (765, 192, 48, 48).

Для массива пересечений $\{44,40,12;1,5,33\}$ граф Γ_3 имеет параметры (525, 128, 28, 32).

Для массива пересечений $\{44,42,5;1,7,40\}$ граф Γ_3 имеет параметры (342, 33, 4, 3).

В работе изучаются графы с массивами пересечений $\{44,36,5;1,9,40\}$, $\{44,36,12;1,3,33\}$ и $\{44,42,5;1,7,40\}$.

Теорема 1. *Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений* $\{44,36,5;1,9,40\}$ *и* $\{44,36,12;1,3,33\}$ *не существуют.*

Теорема 2. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{44,42,5;1,\ 7,40\}$ *не существует.*

Проблема существования дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{44,30,9;1,5,36\}$ и $\{44,40,12;1,5,33\}$ остается открытой.

1. Тройные числа пересечений. В доказательстве теорем используются тройные числа пересечений [3].

Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра d. Если u_1,u_2,u_3 – вершины графа Γ, r_1,r_2,r_3 – неотрицательные целые числа, не большие d, то $\left\{\begin{smallmatrix}u_1u_2u_3\\ r_1r_2r_3\end{smallmatrix}\right\}$ – множество вершин $w\in\Gamma$ таких, что $d(w,u_i)=r_i$, $\left[\begin{smallmatrix}u_1u_2u_3\\ r_1r_2r_3\end{smallmatrix}\right]=|\left\{\begin{smallmatrix}u_1u_2u_3\\ r_1r_2r_3\end{smallmatrix}\right\}|$. Числа $\left[\begin{smallmatrix}u_1u_2u_3\\ r_1r_2r_3\end{smallmatrix}\right]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1,u_2,u_3 вместо $\left[\begin{smallmatrix}u_1u_2u_3\\ r_1r_2r_3\end{smallmatrix}\right]$ будем писать $[r_1r_2r_3]$.

Пусть u,v,w – вершины графа Γ, $W=d(u,v)$, $U=d(v,w)$, $V=d(u,w)$. Так как имеется точно одна вершина $x=u$ такая, что $d(x,u)=0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh]=\delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h]=\delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0]=\delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u,v,w\}$, и сосчитав число вершин всех расстояний от третьей, получим

$$\sum_{l=1}^{d}[ljh]=p_{jh}^{U}-[0jh],\quad \sum_{l=1}^{d}[ilh]=p_{ih}^{V}-[i0h],\quad \sum_{l=1}^{d}[ijl]=p_{ij}^{W}-[ij0], \qquad (+)$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i-j|>W$ или $i+j<W$ имеем $p_{ij}^{W}=0$, поэтому $[ijh]=0$ для всех $h\in\{0,...,d\}$.

Положим $S_{ijh}(u,v,w)=\sum\limits_{r,s,t=0}^{d}Q_{ri}Q_{sj}Q_{th}\left[\begin{smallmatrix}uvw\\rst\end{smallmatrix}\right]$. Если параметр Крейна $q_{ij}^{h}=0$, то $S_{ijh}(u,v,w)=0$.

Зафиксируем вершины u,v,w дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и положим $\{ijh\}=\left\{\begin{smallmatrix}uvw\\ijh\end{smallmatrix}\right\}$, $[ijh]=\left[\begin{smallmatrix}uvw\\ijh\end{smallmatrix}\right]$, $[ijh]'=\left[\begin{smallmatrix}uwv\\ihj\end{smallmatrix}\right]$, $[ijh]^{*}=\left[\begin{smallmatrix}vuw\\jih\end{smallmatrix}\right]$ и $[ijh]^{\sim}=\left[\begin{smallmatrix}wvu\\hji\end{smallmatrix}\right]$. В случаях $d(u,v)=$ $=d(u,w)=d(v,w)=2$ или $d(u,v)=d(u,w)=d(v,w)=3$ вычисление чисел $[ijh]'=\left[\begin{smallmatrix}uwv\\ihj\end{smallmatrix}\right]$, $[ijh]^{*}=$ $=\left[\begin{smallmatrix}vuw\\jih\end{smallmatrix}\right]$ и $[ijh]^{\sim}=\left[\begin{smallmatrix}wvu\\hji\end{smallmatrix}\right]$ (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

2. $\{44,36,5;1,9,40\}$. В этом параграфе Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44,36,5;1,9,40\}$. Тогда Γ имеет $1+44+176+22=243$ вершин, спектр $44^{1},8^{66}$, $-1^{132},-10^{44}$ и дуальную матрицу собственных значений

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 66 & 132 & 44\\ 1 & 12 & -3 & -10\\ 1 & -3/2 & -7 & -7/2\\ 1 & -15 & 24 & -10\end{pmatrix}.$$

Пусть H^{*} – проверочная 5×11-матрица совершенного тернарного кода Голея со столбцами $x_1,\dots,x_{11}$ из 5-мерного пространства $V(5,3)$ над F_3. Тогда $V(5,3)$ содержит нулевой вектор, 22 вектора $\pm x_1,\dots,\pm x_{11}$ и 220 векторов $\pm x_i\pm x_j$ для $i\neq j$. Граф Берлекэмпа–ван Линта–Зейделя [4] с параметрами (243, 22, 1, 2) в качестве вершин имеет вектора пространства $V(5,3)$ и два вектора смежны, если разность между ними это один из векторов $\pm x_1,\dots,\pm x_{11}$. Группа автоморфизмов этого графа – расширение E_{3^5} с помощью Z_2M_{11}.

Для нашего графа Γ и вершины $u=0$ имеем $\Gamma_3(u)=\{\pm x_1,...,\pm x_{11}\}$.

Лемма 1. *Числа пересечений графа Γ равны:*

(1) $p_{11}^{1}=7$, $p_{12}^{1}=36$, $p_{22}^{1}=120$, $p_{23}^{1}=20$, $p_{33}^{1}=2$;

(2) $p_{11}^{2}=9$, $p_{12}^{2}=30$, $p_{13}^{2}=5$, $p_{22}^{2}=130$, $p_{23}^{2}=15$, $p_{33}^{2}=2$;

(3) $p_{12}^{3}=40$, $p_{13}^{3}=4$, $p_{22}^{3}=120$, $p_{23}^{3}=16$, $p_{33}^{3}=1$.

Доказательство. Прямые вычисления. □

Пусть u,v,w – вершины графа Γ, $\{rst\}=\left\{\begin{smallmatrix}uvw\\rst\end{smallmatrix}\right\}$ и $[rst]=\left[\begin{smallmatrix}uvw\\rst\end{smallmatrix}\right]$. Положим $\Sigma=\Gamma_3(u)$, $\Lambda=\Sigma_2$. Тогда Λ является регулярным графом степени 16 на 22 вершинах.

Лемма 2. *Пусть $d(u,v)=d(u,w)=3, d(v,w)=1$. Тогда выполняются следующие равенства:* $[122]=-r_{49}+40$, $[123]=[132]=r_{49}$, $[133]=-r_{49}+4$;

$[211]=r_{50}+4$, $[212]=[221]=-r_{50}+36$, $[222]=r_{49}+r_{50}-r_{51}+65$, $[223]=[232]=-r_{49}+$ $+r_{51}+19$, $[233]=r_{49}-r_{51}-3$;

$[311]=-r_{50}+3$, $[312]=[321]=r_{50}$, $[322]=-r_{50}+r_{51}+15$, $[323]=[332]=-r_{51}+1$, $[333]=$ $=r_{51}$,

где $3\leqslant r_{49}\leqslant 4$, $0\leqslant r_{50}\leqslant 3$, $0\leqslant r_{51}\leqslant 1$, $r_{51}+3\leqslant r_{49}$.

Доказательство. Упрощения формул (+). □

По лемме 2 имеем $12\leqslant[322]=-r_{50}+r_{51}+15\leqslant 16$. Так как $\{v,w\}\cup\Lambda(v)\cup\Lambda(w)$ содержит 34 вершины, то $12\leqslant[322]$.

Лемма 3. *Пусть $d(u,v)=d(u,w)=d(v,w)=3$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

$[122]=36$, $[123]=[132]=4$;

$[212]=[221]=36$, $[213]=[231]=4$, $[221]=r_{60}+r_{61}+r_{64}+r_{65}-16$, $[222]=72$, $[223]=$ $=[232]=12$;

$[312]=[321]=4$, $[322]=12$.

Доказательство. Упрощения формул (+). □

По лемме 3 имеем $[322]=12$.

Найдем число ребер d между $\Lambda(v)$ и $\Lambda_2(v)$. Так как $p^3_{13}=4$, $p^3_{23}=16$, $p^3_{33}=1$, то

$$60=4\cdot 12+1\cdot 12\leqslant d\leqslant 4\cdot 16+1\cdot 12=76.$$

С другой стороны, $d=16(15-\lambda)$, $3,75\leqslant 15-\lambda\leqslant 4,75$, $10,25\leqslant\lambda\leqslant 11,25$, где λ – среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$.

Лемма 4. *Пусть $d(u,v)=d(u,w)=3, d(v,w)=2$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

$[122]=-r_{70}+40$, $[123]=[132]=r_{70}$, $[133]=-r_{70}+4$;

$[211]=r_{66}-r_{68}+10$, $[212]=r_{67}$, $[213]=-r_{66}-r_{67}+r_{68}+30$, $[221]=-r_{66}+30$, $[222]=r_{66}-$ $-r_{69}+90$, $[223]=r_{69}$, $[231]=r_{68}$, $[232]=-r_{66}-r_{67}+r_{69}+30$, $[233]=r_{66}+r_{67}-r_{68}-r_{69}-14$;

$[311]=-r_{66}+r_{68}-1$, $[312]=-r_{67}+30$, $[313]=r_{66}+r_{67}-r_{68}-25$, $[321]=r_{66}$, $[322]=-r_{66}+$ $+r_{69}+r_{70}$, $[323]=-r_{69}-r_{70}+15$, $[331]=-r_{68}+5$, $[332]=r_{66}+r_{67}-r_{69}-r_{70}-15$, $[333]=-r_{66}-$ $-r_{67}+r_{68}+r_{69}+r_{70}+11$,

где $0\leqslant r_{66}\leqslant 4$, $26\leqslant r_{67}\leqslant 30$, $4\leqslant r_{68}\leqslant 5$, $10\leqslant r_{69}\leqslant 12$, $3\leqslant r_{70}\leqslant 4$, $r_{69}+r_{70}\leqslant 15$, $r_{66}+1\leqslant r_{68}$.

Доказательство. Упрощения формул (+). □

Заметим, что $[231]=r_{68}=[321]^*=r^*_{66}$.

По лемме 4 имеем $9\leqslant[322]=-r_{66}+r_{69}+r_{70}\leqslant 15$. Так как $\{v,w\}\cup\Lambda(v)\cup\Lambda(w)$ содержит 32 вершины, то $10\leqslant[322]$.

Пусть $d(u,v)=3$.

Подсчитаем число f_1 пар вершин y,z на расстоянии 1 в графе Γ, где $y\in\left\{{uv \atop 31}\right\}$ и $z\in\left\{{uv \atop 32}\right\}$. С одной стороны, по лемме 2 имеем $[321]=r_{50}$, где $0\leqslant r_{50}\leqslant 3$, поэтому $0\leqslant f_1\leqslant 4\cdot 3=12$. С другой стороны, по лемме 4 имеем $[311]=-r_{66}+r_{68}-1$, поэтому $0\leqslant f_1=\sum_i(-r^i_{66}+r^i_{68})-16\leqslant 12$, $16\leqslant\sum_i(-r^i_{66}+r^i_{68})\leqslant 28$ и $1\leqslant\sum_i(-r^i_{66}+r^i_{68})/16\leqslant 1,75$.

Так как $[231]=r_{68}=[321]^*=r^*_{66}$, то $\sum_i(-r^i_{66}+r^i_{68})/16=0$, противоречие.

3. $\{44,36,12;1,3,33\}$. В этом параграфе Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44,36,12;1,3,33\}$. Тогда Γ имеет $1+44+528+192=765$ вершин, спектр $44^1,11^{170}$, $-1^{374},-7^{220}$ и дуальную матрицу собственных значений

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 170 & 374 & 220\\ 1 & \frac{85}{2} & -\frac{17}{2} & -35\\ 1 & 0 & -\frac{17}{2} & \frac{15}{2}\\ 1 & -\frac{85}{8} & \frac{187}{8} & -\frac{55}{4}\end{pmatrix}.$$

Лемма 5. *Числа пересечений графа Γ равны:*

(1) $p^1_{11}=7$, $p^1_{12}=36$, $p^1_{22}=348$, $p^1_{23}=144$, $p^1_{33}=48$;

(2) $p^2_{11}=3$, $p^2_{12}=29$, $p^2_{13}=12$, $p^2_{22}=366$, $p^2_{23}=132$, $p^2_{33}=48$;

(3) $p^3_{12}=33$, $p^3_{13}=11$, $p^3_{22}=363$, $p^3_{23}=132$, $p^3_{33}=48$.

Доказательство. Прямые вычисления. □

Пусть u,v,w – вершины графа Γ, $\{rst\}=\left\{{uvw \atop rst}\right\}$ и $[rst]=\left[{uvw \atop rst}\right]$. Положим $\Sigma=\Gamma_3(u)$, $\Lambda=\Sigma_2$. Тогда Λ является регулярным графом степени 132 на 192 вершинах.

Лемма 6. *Пусть $d(u,v)=d(u,w)=3, d(v,w)=1$. Тогда выполняются следующие равенства:*

$[122]=-r_{82}-r_{83}-r_{84}+274$, $[123]=[132]=r_{82}+r_{83}+r_{84}-241$, $[133]=-r_{82}-r_{83}-r_{84}+252$;

$[211]=-r_{84}+7$, $[212]=[221]=r_{84}+26$, $[222]=r_{82}$, $[223]=[232]=-r_{82}-r_{84}+337$, $[233]=$ $=r_{82}+r_{84}-205$;

$[311]=r_{84}$, $[312]=[321]=-r_{84}+10$, $[322]=r_{83}+r_{84}+74$, $[323]=[332]=-r_{83}+48$, $[333]=$ $=r_{83}$,

где $198\leqslant r_{82}\leqslant 252$, $0\leqslant r_{83}\leqslant 47$, $0\leqslant r_{84}\leqslant 7$, $205\leqslant r_{82}+r_{84}\leqslant 252-r_{83}$.

Доказательство. Упрощения формул (+). □

По лемме 6 имеем $74\leqslant[322]=r_{83}+r_{84}+74\leqslant 128$.

Лемма 7. *Пусть* $d(u,v)=d(u,w)=d(v,w)=3$. *Тогда выполняются следующие равенства:*

$[122]=r_{107}$, $[123]=[132]=-r_{107}+33$, $[133]=r_{107}-22$;

$[212]=r_{104}+r_{105}-r_{106}-r_{107}-66$, $[213]=-r_{104}-r_{105}+r_{106}+r_{107}+99$, $[221]=-r_{106}+33$, $[222]=-r_{105}+r_{106}+330$, $[223]=r_{105}$, $[231]=r_{106}$, $[232]=-r_{104}+r_{107}+99$, $[233]=r_{104}-r_{106}-r_{107}+33$;

$[312]=-r_{104}-r_{105}+r_{106}+r_{107}+99$, $[313]=r_{104}+r_{105}-r_{106}-r_{107}-88$, $[321]=r_{106}$, $[322]=r_{105}-r_{106}-r_{107}+33$, $[323]=-r_{105}+r_{107}+99$, $[331]=-r_{106}+11$, $[332]=r_{104}$, $[333]=-r_{104}+r_{106}+36$,

где $0\leqslant r_{104}\leqslant 47$, $74\leqslant r_{105}\leqslant 132$, $0\leqslant r_{106}\leqslant 11$, $22\leqslant r_{107}\leqslant 33$, $r_{104}-r_{106}\leqslant 36$.

Доказательство. Упрощения формул (+). □

Симметризация $[122]=r_{107}=r'_{107}$, $[223]=r_{105}=r^*_{105}$, $[231]=r_{106}=[321]=r^*_{106}$, $[332]=r_{104}=r^*_{104}$.

Далее, $[222]=-r_{105}+r_{106}+330$, поэтому $r_{105}-r_{106}=r_{105}-r'_{106}=r_{105}-r^*_{106}=r_{105}-r^{\sim}_{106}$, $[232]=-r_{104}+r_{107}+99$ и $r_{104}-r_{107}=r^{\sim}_{104}-r^{\sim}_{107}$. Аналогично, $[323]=-r_{105}+r_{107}+99$, поэтому $r_{105}-r_{107}=r^{\sim}_{105}-r^{\sim}_{107}$, $[333]=-r_{104}+r_{106}+36$ и $r_{104}-r_{106}=r_{104}-r'_{106}=r_{104}-r^*_{106}=r_{104}-r^{\sim}_{106}$.

Имеем $[122]^{\sim}=r^{\sim}_{107}=[221]=-r_{106}+33$, поэтому $r^{\sim}_{107}+r_{106}=33$. Из равенств $[223]'=r'_{105}=[232]=-r_{104}+r_{107}+99$ следует, что $r'_{105}+r_{104}-r_{107}=99$, $[323]=-r_{105}+r_{107}+99=[332]'=r'_{104}$, следовательно, $r_{105}-r_{107}+r'_{104}=99$ и $r'_{105}-r'_{104}=r_{105}-r_{104}$.

По лемме 7 имеем $63\leqslant[322]=r_{105}-r_{106}-r_{107}+33\leqslant 153$. Так как $\{v,w\}\cup\Lambda(v)\cup\Lambda(w)$ содержит 266 вершин, то $74\leqslant[322]\leqslant 132$.

Найдем число ребер d между $\Lambda(v)$ и $\Lambda_2(v)$. Так как $p^3_{13}=11$, $p^3_{23}=132$, $p^3_{33}=48$, то $4366=11\cdot 74+48\cdot 74\leqslant d\leqslant 11\cdot 128+48\cdot 132=7744$. С другой стороны, $d=132(131-\lambda)$, $33,075\leqslant 131-\lambda\leqslant 58,667$, $72,333\leqslant\lambda\leqslant 97,925$, где λ – среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$.

Лемма 8. *Пусть* $d(u,v)=d(u,w)=3, d(v,w)=2$. *Тогда выполняются следующие равенства:*

$[122]=-r_{103}+33$, $[123]=[132]=r_{103}$, $[133]=-r_{103}+11$;

$[211]=-r_{101}+r_{102}+4$, $[212]=r_{99}$, $[213]=r_{101}-r_{102}-r_{99}+29$, $[221]=-r_{102}+29$, $[222]=-r_{100}+r_{102}+334$, $[223]=r_{100}$, $[231]=r_{101}$, $[232]=r_{100}-r_{102}-r_{99}+29$, $[233]=-r_{100}-r_{101}+r_{102}+r_{99}+103$;

$[311]=r_{101}-r_{102}-1$, $[312]=-r_{99}+29$, $[313]=-r_{101}+r_{102}+r_{99}-17$, $[321]=r_{102}$, $[322]=r_{100}-r_{102}+r_{103}-1$, $[323]=-r_{100}-r_{103}+132$, $[331]=-r_{101}+12$, $[332]=-r_{100}+r_{102}-r_{103}+r_{99}+103$, $[333]=r_{100}+r_{101}-r_{102}+r_{103}-r_{99}-67$,

где $18\leqslant r_{99}\leqslant 29, 73\leqslant r_{100}\leqslant 131, 1\leqslant r_{101}\leqslant 12, 0\leqslant r_{102}, r_{103}\leqslant 11, 1\leqslant r_{101}-r_{102}\leqslant 4, r_{100}+r_{103}\leqslant 132$.

Доказательство. Упрощения формул (+). □

Имеем $[212]=r_{99}=[221]'=-r'_{102}+29$, поэтому $r_{99}+r'_{102}=29$.

По лемме 8 получим $61\leqslant[322]=r_{100}-r_{102}+r_{103}-1\leqslant 131$. Как и выше, $72\leqslant[322]$.

Пусть $d(u,v)=3$.

Подсчитаем число f_1 пар вершин y,z на расстоянии 1 в графе Γ, где $y\in\left\{{uv \atop 31}\right\}$ и $z\in\left\{{uv \atop 32}\right\}$. С одной стороны, по лемме 6 имеем $[321]=-r_{75}-r_{76}+r_{78}-48$, где $0\leqslant r_{75}\leqslant 48$, $0\leqslant r_{76}\leqslant 3$, $72\leqslant r_{78}\leqslant 127$, поэтому $0\leqslant f_1\leqslant 11\cdot 79=869$. С другой стороны, по лемме 8 имеем $[311]=r_{101}-r_{102}-1$, $0\leqslant f_1=\sum_i(r^i_{101}-r^i_{102})-132\leqslant 869$, $132\leqslant\sum_i(r^i_{101}-r^i_{102})\leqslant 737$ и $1\leqslant\sum_i(r^i_{101}-r^i_{102})/132\leqslant 5,584$.

Противоречие с тем, что $[231]=r_{101}=[321]^*=r^*_{102}$ и $\sum_i(r^i_{101}-r^i_{102})/132=0$. □

4. $\{44,42,5;1,7,40\}$. В этом параграфе Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44,42,5;1,7,40\}$. Тогда Γ имеет $1+44+264+33=342$ вершины, спектр $44^1,6^{132},-1^{152},-12^{57}$ и дуальную матрицу собственных значений

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 132 & 152 & 57\\ 1 & 18 & -\frac{38}{11} & -\frac{171}{11}\\ 1 & -1 & -\frac{38}{11} & \frac{38}{11}\\ 1 & -20 & \frac{304}{11} & -\frac{95}{11}\end{pmatrix}.$$

Лемма 9. *Числа пересечений графа* Γ *равны:*

(1) $p^1_{11}=1$, $p^1_{12}=42$, $p^1_{22}=192$, $p^1_{23}=30$, $p^1_{33}=3$;

(2) $p^2_{11}=7$, $p^2_{12}=32$, $p^2_{13}=5$, $p^2_{22}=206$, $p^2_{23}=25$, $p^2_{33}=3$;

(3) $p^3_{12}=40$, $p^3_{13}=4$, $p^3_{22}=200$, $p^3_{23}=24$, $p^3_{33}=4$.

Доказательство. Прямые вычисления. □

Пусть u,v,w – вершины графа Γ, $\{rst\}=\left\{{uvw \atop rst}\right\}$ и $[rst]=\left[{uvw \atop rst}\right]$. Положим $\Sigma=\Gamma_2(u)$, $\Lambda=\Sigma_2$. Тогда Λ является регулярным графом степени 206 на 264 вершинах.

Лемма 10. *Пусть* $d(u,v)=d(u,w)=2, d(v,w)=1$. *Тогда выполняются следующие равенства:*

$[111]=r_{150}$, $[112]=[121]=-r_{150}+7$, $[122]=r_{150}+r_{151}+20$, $[123]=[132]=-r_{151}+5$, $[133]=$ $=r_{151}$;

$[211]=r_{148}-r_{149}-r_{150}+18$, $[212]=[221]=-r_{148}+r_{149}+r_{150}+13$, $[222]=-r_{149}-r_{150}-$ $-r_{151}+171$, $[223]=[232]=r_{148}+r_{151}+22$, $[233]=-r_{148}-r_{151}+3$;

$[311]=-r_{148}+r_{149}-17$, $[312]=[321]=r_{148}-r_{149}+22$, $[322]=r_{149}$, $[323]=[332]=-r_{148}+$ $+3$, $[333]=r_{148}$,

где $0\leqslant r_{148},r_{151}\leqslant 3$, $17\leqslant r_{149}\leqslant 21$, $0\leqslant r_{150}\leqslant 1$, $\leqslant r_{148}+r_{151}\leqslant 3$, $17\leqslant r_{149}-r_{148}$.

Доказательство. Упрощения формул (+). □

По лемме 10 имеем $146\leqslant[222]=-r_{149}-r_{150}-r_{151}+171\leqslant 154$. Так как $\{v,w\}\cup\Lambda(v)\cup\Lambda(w)$ содержит 414 вершины, то $150\leqslant[222]$.

Лемма 11. *Пусть* $d(u,v)=d(u,w)=2, d(v,w)=3$. *Тогда выполняются следующие равенства:*

$[112]=-r_{166}+r_{169}+35$, $[113]=r_{166}-r_{169}-28$, $[121]=r_{167}$, $[122]=r_{166}-r_{167}+r_{168}-r_{169}-1$, $[123]=-r_{166}-r_{168}+r_{169}+33$, $[131]=-r_{167}+7$, $[132]=r_{167}-r_{168}-2$, $[133]=r_{168}$;

$[212]=r_{166}$, $[213]=-r_{166}+32$, $[221]=-r_{167}+r_{171}+35$, $[222]=-r_{166}+r_{167}-r_{168}+r_{169}-$ $-r_{170}+200$, $[223]=r_{166}+r_{168}-r_{169}+r_{170}-r_{171}-29$, $[231]=r_{167}-r_{171}-3$, $[232]=-r_{167}+r_{168}-$ $-r_{169}+r_{170}+6$, $[233]=-r_{168}+r_{169}-r_{170}+r_{171}+21$;

$[312]=-r_{169}+5$, $[313]=r_{169}$, $[321]=-r_{171}+5$, $[322]=r_{170}$, $[323]=-r_{170}+r_{171}+20$, $[331]=$ $=r_{171}$, $[332]=r_{169}-r_{170}+20$, $[333]=-r_{169}+r_{170}-r_{171}-17$,

где $28\leqslant r_{166}\leqslant 32$, $3\leqslant r_{167}\leqslant 7$, $0\leqslant r_{168}\leqslant 4$, $0\leqslant r_{169},r_{171}\leqslant 3$, $17\leqslant r_{170}\leqslant 23$, $r_{169}+28\leqslant r_{166}$, $r_{171}+3\leqslant r_{167}$, $r_{170}\leqslant r_{169}+20$.

Доказательство. Упрощения формул (+). □

По лемме 11 имеем $144=-32+3-4-23+200\leqslant[222]=-r_{166}+r_{167}-r_{168}+r_{169}-r_{170}+$ $+200\leqslant -28+7+3-17+200=165$. Как и выше, $150\leqslant[222]$.

Найдем число ребер d между $\Lambda(v)$ и $\Lambda_2(v)$. Так как $p^2_{12}=32$, $p^2_{22}=206$, $p^2_{23}=25$, то $8550=$ $=32\cdot 150+25\cdot 150\leqslant d\leqslant 32\cdot 154+25\cdot 165=9053$. С другой стороны, $d=206(205-\lambda)$, $41,504\leqslant$ $\leqslant 205-\lambda\leqslant 43,947$, $161,053\leqslant\lambda\leqslant 163,496$, где λ – среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$.

Лемма 12. *Пусть* $d(u,v)=d(u,w)=d(v,w)=2$. *Тогда выполняются следующие равенства:*

$[111]=-r_{159}-r_{160}-r_{161}+r_{162}+r_{163}-r_{166}+12$, $[112]=r_{160}$, $[113]=r_{159}+r_{161}-r_{162}-r_{163}+$ $+r_{165}-5$, $[121]=r_{164}$, $[122]=-r_{163}-r_{164}+132$, $[123]=r_{163}$, $[131]=r_{159}+r_{160}+r_{161}-r_{162}-r_{163}-$ $-r_{164}+r_{165}-5$, $[132]=-r_{160}+r_{163}+r_{164}$, $[133]=-r_{159}-r_{161}+r_{162}-r_{165}+10$;

$[211]=r_{161}$, $[212]=r_{165}$, $[213]=-r_{161}-r_{165}+32$, $[221]=r_{158}$, $[222]=-r_{158}-r_{162}+205$, $[223]=r_{162}$, $[231]=-r_{158}-r_{161}+32$, $[232]=r_{158}+r_{162}-r_{165}$, $[233]=r_{161}-r_{162}+r_{165}-7$;

$[311]=r_{159}+r_{160}-r_{162}-r_{163}+r_{165}-5$, $[312]=-r_{160}-r_{165}+32$, $[313]=-r_{159}+r_{162}+r_{163}-$ -22, $[321]=-r_{158}-r_{164}+32$, $[322]=r_{158}+r_{162}+r_{163}+r_{164}-32$, $[323]=r_{162}-r_{163}+25$, $[331]=$ $=-r_{158}-r_{159}-r_{160}+r_{162}+r_{163}+r_{164}-r_{165}-22$, $[332]=-r_{158}+r_{160}-r_{162}-r_{163}-r_{164}+r_{165}+25$, $[333]=r_{159}$,

где $20\leqslant r_{158},r_{165}\leqslant 32$, $0\leqslant r_{159}\leqslant 3$, $0\leqslant r_{160},r_{161},r_{164}\leqslant 7$, $17\leqslant r_{162}\leqslant 25$, $0\leqslant r_{163}\leqslant 5$, $r_{158}+$ $+r_{161},r_{161}+r_{165},r_{160}+r_{165}\leqslant 32$.

Доказательство. Упрощения формул (+). □

Симметризация $[112]=r_{160}=r^*_{160}$, $[121]=r_{164}=r^{\sim}_{164}$, $[211]=r_{161}=r'_{161}$, $[212]=r_{165}=r^{\sim}_{165}$, $[221]=r_{158}=r^*_{158}$, $[223]=r_{162}=r^*_{162}$, $[333]=r_{159}=r'_{159}=r^*_{159}=r^{\sim}_{159}$.

Далее, $[112]'=r'_{160}=[121]=r_{164}=[211]^*=r^*_{161}$, $[212]=r_{165}=[221]'=r'_{158}$, $[123]^*=r^*_{163}=$ $=[213]=-r_{161}-r_{165}+32$, поэтому $r^*_{163}+r_{161}+r_{165}=32$. Аналогично, $[223]'=r'_{162}=[232]=r_{158}+$ $+r_{162}-r_{165}$ и $r'_{162}+r_{165}=r_{158}+r_{162}$.

По лемме 12 имеем $148\leqslant[222]=-r_{158}-r_{162}+205\leqslant 168$.

Пусть $d(u,v)=2$.

Подсчитаем число f_1 пар вершин y,z на расстоянии 1 в графе Γ, где $y\in\left\{{uv \atop 21}\right\}$ и $z\in\left\{{uv \atop 22}\right\}$. С одной стороны, по лемме 10 имеем $[221]=-r_{148}+r_{149}+r_{150}+13$, где $0\leqslant r_{148}\leqslant 3$, $17\leqslant r_{149}\leqslant 21$,

$0 \leqslant r_{150} \leqslant 1$, поэтому $864 = 32 \cdot 27 \leqslant f_1 \leqslant 32 \cdot 32 = 1024$. С другой стороны, по лемме 12 имеем $[211] = r_{161}$, поэтому $864 \leqslant f_1 = \sum_i r_{161} \leqslant 1024$ и $4,194 \leqslant \sum_i r^i_{161}/206 \leqslant 4,971$.

Подсчитаем число f_2 пар вершин y, z на расстоянии 2 в графе Γ, где $y \in \left\{ {uv \atop 21} \right\}$ и $z \in \left\{ {uv \atop 22} \right\}$. С одной стороны, по лемме 10 имеем $150 \leqslant [222] \leqslant 154$, поэтому $4800 = 32 \cdot 150 \leqslant f_2 \leqslant 32 \cdot 154 = 4928$. С другой стороны, по лемме 12 имеем $[212] = r_{165}$, поэтому $4800 \leqslant f_2 = \sum_i r^i_{165} \leqslant 4928$ и $23,300 \leqslant \sum_i r^i_{165}/206 \leqslant 23,923$.

Подсчитаем число f_3 пар вершин y, z на расстоянии 3 в графе Γ, где $y \in \left\{ {uv \atop 21} \right\}$ и $z \in \left\{ {uv \atop 22} \right\}$. С одной стороны, по лемме 10 имеем $[223] = r_{148} + r_{151} + 22$, где $0 \leqslant r_{148}, r_{151} \leqslant 3$, поэтому $704 = 32 \cdot 22 \leqslant f_3 \leqslant 32 \cdot 28 = 896$. С другой стороны, по лемме 12 имеем $[213] = [123]^* = r^*_{163}$, поэтому $704 \leqslant f_3 = \sum_i (r^*_{163})^i \leqslant 896$ и $3,417 \leqslant \sum_i r^i_{163}/206 \leqslant 4,350$.

Подсчитаем число g_1 пар вершин y, z на расстоянии 1 в графе Γ, где $y \in \left\{ {uv \atop 23} \right\}$ и $z \in \left\{ {uv \atop 22} \right\}$. С одной стороны, по лемме 11 имеем $[221] = [212]' = r'_{166}$, где $28 \leqslant r_{166} \leqslant 32$, поэтому $700 = 25 \times 28 \leqslant g_1 \leqslant 25 \cdot 32 = 800$. С другой стороны, по лемме 12 имеем $[231] = ([123]')^\sim = (r'_{163})^\sim$, поэтому $700 \leqslant g_1 = \sum_i ((r'_{163})^\sim)^i \leqslant 800$ и $3,398 \leqslant \sum_i r^i_{163}/206 \leqslant 3,884$.

Отсюда $3,417 \leqslant \sum_i r^i_{163}/206 \leqslant 3,884$.

Подсчитаем число g_2 пар вершин y, z на расстоянии 2 в графе Γ, где $y \in \left\{ {uv \atop 23} \right\}$ и $z \in \left\{ {uv \atop 22} \right\}$. С одной стороны, по лемме 11 имеем $150 \leqslant [222] \leqslant 165$, поэтому $3750 = 25 \cdot 150 \leqslant g_2 \leqslant 25 \cdot 165 = 4125$. С другой стороны, по лемме 12 имеем $[232] = [223]' = r'_{162}$, поэтому $3750 \leqslant g_2 = \sum_i (r'_{162})^i \leqslant 4125$ и $18,203 \leqslant \sum_i r^i_{162}/206 \leqslant 20,025$.

Подсчитаем число g_3 пар вершин y, z на расстоянии 3 в графе Γ, где $y \in \left\{ {uv \atop 23} \right\}$ и $z \in \left\{ {uv \atop 22} \right\}$. С одной стороны, по лемме 11 имеем $[223] = [232] = -r_{167} + r_{168} - r_{169} + r_{170} + 6$, где $3 \leqslant r_{167} \leqslant 7$, $0 \leqslant r_{168} \leqslant 4$, $0 \leqslant r_{169} \leqslant 3$, $17 \leqslant r_{170} \leqslant 23$, поэтому $325 = 25 \cdot 13 \leqslant g_3 \leqslant 25 \cdot 30 = 750$. С другой стороны, по лемме 12 имеем $[233] = [323]^* = r^*_{162} - r^*_{163} + 25$, поэтому $325 \leqslant g_3 = \sum_i ((r^*_{162})^i - (r^*_{165})^i) + 5150 \leqslant 750$, $4400 \leqslant \sum_i ((r^*_{162})^i - (r^*_{165})^i) \leqslant 4825$ и $21,359 \leqslant \sum_i (r^i_{162} - r^i_{165})/206 \leqslant 23,423$.

Противоречие с тем, что $18,203 \leqslant \sum_i r^i_{162}/206 \leqslant 20,025$. □

Исследование выполнено при поддержке Естественно-научного фонда Китая (проект № 12171126) и гранта Лаборатории инженерного моделирования и статистических вычислений провинции Хайнань.

Литература

1. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-Regular Graphs. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1989.

2. *Koolen J. H., Park J.* Shilla distance-regular graphs // Europ. J. Comb. 2010. Vol. 31, N 8. P. 2064–2073.

3. *Coolsaet K., Jurishich A.* Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of sertain distance-regular graphs // J. Comb. Theory, Series A. 2008. Vol. 115. P. 1086–1095.

4. *Berlekamp E. R., van Lint J. H., Seidel J. J.* A strongly regular graph derived from the perfect ternary Golay code // Srivastava J. N. (Ed.). A survey of combinatorial theory. North-Holland Publishing Company, 1973. P. 25–30.

References

1. Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. *Distance-Regular Graphs*. Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 1989.

2. Koolen J. H, Park J. Shilla distance-regular graphs. *Europ. J. Comb.*, 2010, vol. 31, no. 8, pp. 2064–2073.

3. Coolsaet K., Jurishich A. Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of sertain distance-regular graphs. *J. Comb. Theory, Series A.* 2008, vol. 115, pp. 1086–1095.

4. Berlekamp E. R., van Lint J. H., Seidel J. J. A strongly regular graph derived from the perfect ternary Golay code. Srivastava J. N. (Ed.). *A survey of combinatorial theory*. North-Holland Publishing Company, 1973, pp. 25–30.