Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2024. Том 32. № 1. С. 38–56

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

УДК 517.5

ОБ АППРОКСИМАЦИЯХ ИНТЕГРАЛА РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ НА ОТРЕЗКЕ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ФУРЬЕ–ЧЕБЫШЁВА

П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
e-mail: pahamatby@gmail.com, rovba.ea@gmail.com

Поступила: 21.02.2024 **Исправлена:** 29.02.2024 **Принята:** 18.06.2024

Ключевые слова: интеграл Римана–Лиувилля, рациональный интегральный оператор Фурье–Чебышёва, функции со степенной особенностью, равномерные приближения, асимптотические оценки, метод Лапласа.

Аннотация. Исследуются аппроксимации интеграла Римана–Лиувилля на отрезке рациональными интегральными операторами Фурье–Чебышёва. Найдено интегральное представление приближений. Изучаются рациональные аппроксимации интеграла Римана–Лиувилля с плотностью $\varphi_\gamma(x) = (1-x)^\gamma$, $\gamma > 0$, устанавливаются оценки поточечных и равномерных приближений. В случае одного полюса в открытой комплексной плоскости у аппроксимирующей функции получено асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений и оптимальное значение параметра, при котором мажоранта имеет асимптотически наибольшую скорость убывания. В качестве следствия получены оценки приближений интеграла Римана–Лиувилля с плотностью, принадлежащей некоторым классам непрерывных функций на отрезке, частичными суммами полиномиального ряда Фурье–Чебышёва.

ON APPROXIMATIONS OF RIEMANN–LIOUVILLE INTEGRAL ON A SEGEMENT BY RATIONAL FOURIER–CHEBYSHEV INTEGRAL OPERATORS

P. G. Patseika, Y. A. Rouba

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus
e-mail: pahamatby@gmail.com, rovba.ea@gmail.com

Received: 21.02.2024 **Revised:** 29.02.2024 **Accepted:** 18.06.2024

Keywords: Riemann–Liouville integral, rational Fourier–Chebyshev integral operator, functions with power singularity, uniform approximations, asymptotic estimates, Laplace method.

Abstract. Approximations of Riemann–Liouville integral on a segment by rational integral operators Fourier–Chebyshev are investigated. An integral representation of the approximations is found. Rational approximations Riemann–Liouville integral with density $\varphi_\gamma(x) = (1-x)^\gamma$, $\gamma \in (0,+\infty)\setminus\mathbb{N}$, are studied, estimates of pointwise and uniform approximations are established. In the case of one pole in an open complex plane, an asymptotic expression is obtained for the approximating function majorants of uniform approximations and the optimal value of the parameter at which the majorant has the asymptotically highest rate of decrease. As a consequence, estimates of approximations of Riemann–Liouville integral with density belonging to some classes of continuous functions on the segment by partial sums of the polynomial Fourier–Chebyshev series are obtained.

Введение. Функции, представимые интегралом Римана–Лиувилля [1]

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int\limits_{-1}^{x} (x-t)^{r-1} \varphi(t)\, dt, \quad x \in [-1,\ 1],\ x > t,\ r > 0, \tag{1}$$

где Γ – гамма-функция Эйлера, широко используются в теории как полиномиальной [2–9], так и рациональной аппроксимации [10–15]. С их помощью были найдены новые классы непрерывных функций, равномерная рациональная аппроксимация на которых является лучше соответствующих полиномиальных аналогов.

Полиномиальные ряды Фурье–Чебышёва достаточно хорошо изучены, обладают рядом замечательных свойств и нашли широкое применение в различных областях математики и физики [16–19]. Отметим работу [20], в которой найдены значения дробной производной в смысле Римана–Лиувилля методом разложения в ряд Фурье–Чебышёва и применения правила неопределенных квадратур.

В 1979 г. Е. А. Ровба [21] ввел интегральный оператор на отрезке $[-1,\ 1]$, ассоциированный с системой рациональных функций Чебышёва–Маркова, который является естественным обобщением частичных сумм полиномиального ряда Фурье–Чебышёва.

Пусть задано произвольное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, где a_k либо являются действительными и $|a_k| < 1$, либо попарно комплексно сопряженными. На множестве суммируемых на отрезке $[-1,\ 1]$ с весом $(1-x^2)^{-1/2}$ функций $f(x)$ рассмотрим рациональный интегральный оператор Фурье–Чебышёва (см. [21]):

$$s_n(f,\ x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v)\frac{\sin\lambda_n(v,\ u)}{\sin\dfrac{v-u}{2}}\,dv, \quad x=\cos u, \tag{2}$$

где

$$\lambda_n(v,\ u) = \int\limits_{u}^{v}\left(\frac{1}{2}+\lambda_n(y)\right)dy,$$

$$\lambda_n(y) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{1+2|z_k|\cos(y-\arg z_k)+|z_k|^2}, \quad z_k = \frac{a_k}{1+\sqrt{1-a_k^2}},\ |z_k|<1. \tag{3}$$

Оператор $s_n : f \to \mathbb{R}_n(A)$, где $\mathbb{R}_n(A)$ – множество рациональных функций вида

$$\frac{p_n(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k x)}, \quad p_n(x)\in\mathbb{P}_n,$$

$A=(a_1,\ldots,a_n)$, и $s_n(1,\ x)\equiv 1$. Если $a_k=0,\ k=1,2,\ldots,n$, то величина $s_n(f,\ x)$ представляет собой частичную сумму полиномиального ряда Фурье–Чебышёва. Новый метод рациональной аппроксимации на отрезке нашел широкое применение в решении практических задач [22; 23].

Представляет интерес изучить аппроксимации интеграла Римана–Лиувилля (1) на отрезке $[-1,1]$ рациональным интегральным оператором Фурье–Чебышёва (2). В работе устанавливается интегральное представление приближений и оценки равномерных приближений в случае, когда плотность интеграла Римана–Лиувилля принадлежит некоторым классам непрерывных функций на отрезке. В качестве следствия рассматриваются аппроксимации интеграла Римана–Лиувилля частичными суммами полиномиального ряда Фурье–Чебышёва.

1. Интегральное представление приближений. Введем обозначения

$$\varepsilon_n(f,\ x,\ A) = f(x)-s_n(f,\ x), \quad x\in[-1,\ 1], \tag{4}$$

$$\varepsilon_n(f,\ A) = \|f(x)-s_n(f,\ x)\|_{C[-1,\ 1]}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Положим параметры рационального интегрального оператора Фурье–Чебышёва (3) заданными следующим образом: $a_1=a_2=\ldots a_p=0,\ p=[r-1]$, где символ $[\cdot]$ обозначает целую часть числа.

Следующая теорема устанавливает интегральное представление величины $\varepsilon_n(f,\ x,\ A)$.

Теорема 1. *Для приближений интеграла Римана–Лиувилля на отрезке* $[-1,\ 1]$ *рациональным интегральным оператором Фурье–Чебышёва имеет место интегральное представление*

$$\varepsilon_n(f,\ x,\ A) = \frac{-1}{2^{r-1}\pi\Gamma(r)}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(\cos\tau)\sin\tau\int\limits_{0}^{1}\frac{(1-y)^{r-1}y^{p+1-r}(1-2y\cos2\tau+y^2)^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{1-2y\cos(\tau-u)+y^2}}\times$$

$$\times\sqrt{\prod_{k=p+1}^{n}\frac{y^2+2|z_k|y\cos(\tau-\arg z_k)+|z_k|^2}{1+2|z_k|y\cos(\tau-\arg z_k)+|z_k|^2y^2}}\sin\Omega_n(x,\tau,y)\,dy\,d\tau,\quad x=\cos u, \tag{5}$$

где

$$\Omega_n(x,\tau,y)=\arg\left(\frac{(\bar{z}-yz)^{r-1}}{y-\xi\bar{z}}\frac{\omega(yz)}{\omega(\xi)}\right),\quad \omega(\xi)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\xi+z_k}{1+z_k\xi},\ \xi=\mathrm{e}^{iu},\ z=\mathrm{e}^{i\tau},\ r>0. \tag{6}$$

Доказательство. Запишем рациональный интегральный оператор Фурье–Чебышёва в виде

$$s_n(f,\ x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}f(\cos v)D_n(v,\ u)\,dv,\quad x=\cos u,\ n=0,\ 1,\ \ldots, \tag{7}$$

где

$$D_n(v,\ u)=\frac{\zeta\dfrac{\omega(\zeta)}{\omega(\xi)}-\xi\dfrac{\omega(\xi)}{\omega(\zeta)}}{\zeta-\xi}+\frac{\zeta\xi\omega(\zeta)\omega(\xi)-\dfrac{1}{\omega(\zeta)\omega(\xi)}}{\zeta\xi-1},\quad \zeta=\mathrm{e}^{iv},\ \xi=\mathrm{e}^{iu},\ x=\cos u.$$

Известно (см., напр., [3]), что для интеграла Римана–Лиувилля (1) справедливо представление

$$f(x)=\frac{1}{2\Gamma(r)}\int\limits_{-1}^{+1}(x-t)^{r-2}(|x-t|+(x-t))\varphi(t)\,dt.$$

Подставим последнее интегральное представление в (7) и, воспользовавшись теоремой Фубини, поменяем порядок интегрирования. Тогда

$$s_n(f,\ x)=\frac{1}{4\pi\Gamma(r)}\int\limits_{-1}^{+1}\varphi(t)I_n(x,\ t)\,dt, \tag{8}$$

где

$$I_n(x,\ t)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}(\cos v-\cos\tau)^{r-2}(|\cos v-\cos\tau|+(\cos v-\cos\tau))D_n(v,\ u)\,dv,\ t=\cos\tau,\ x=\cos u.$$

Преобразуем интеграл $I_n(x,\ t)$. Нетрудно заметить, что

$$I_n(x,\ t)=\int\limits_{-\tau}^{+\tau}(\cos v-\cos\tau)^{r-1}D_n(v,\ u)\,dv,\quad x=\cos u.$$

В интеграле выполним замену переменного по формуле $\zeta=\mathrm{e}^{iv}$, положив при этом $z=\mathrm{e}^{i\tau}$, $\xi=$ $=\mathrm{e}^{iu}$, $x=\cos u$. Тогда

$$I_n(x,\ t)=\frac{1}{i}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{(\zeta-z)(\zeta z-1)}{2\zeta z}\right)^{r-1}\left[\frac{\zeta\dfrac{\omega(\zeta)}{\omega(\xi)}-\xi\dfrac{\omega(\xi)}{\omega(\zeta)}}{\zeta-\xi}+\frac{\zeta\omega(\zeta)\omega(\xi)-\dfrac{1}{\xi\omega(\zeta)\omega(\xi)}}{\zeta-1/\xi}\right]\frac{d\zeta}{\zeta},$$

где Γ – дуга единичной окружности от точки $\bar{z}$ до точки z, обходимая против часовой стрелки.

Далее применим метод вычисления интегралов, предложенный В. Н. Русаком [24]. Очевидно, что $I_n(x,\ t)$ при фиксированном значении параметра t представляет собой некоторую функцию параметра x с полюсами первого порядка в точках (см. (3)) $a_k=-(2z_k/(1+z_k^2))^{-1}$, $k=1,2,\ldots,n$. Поэтому достаточно исследовать интеграл $I_n(x,\ t,\ \rho)$, отличающийся от $I_n(x,\ t)$ тем, что $\xi=$ $=\rho\mathrm{e}^{iu}$, $\rho\in(0,\ 1)$, и затем воспользоваться равенством

$$I_n(x,\ t)=\lim_{\rho\to 1}I_n(x,\ t,\ \rho). \tag{9}$$

Представим интеграл в $I_n(x,\ t,\ \rho)$ в виде суммы четырех интегралов

$$I_n(x,\ t,\ \rho)=\frac{1}{i}\left[\frac{1}{\omega(\xi)}I_n^{(1)}-\xi\omega(\xi)I_n^{(2)}+\omega(\xi)I_n^{(3)}-\frac{1}{\xi\omega(\xi)}I_n^{(4)}\right],\quad \xi=\rho\mathrm{e}^{iu},\ x=\cos u, \tag{10}$$

где

$$I_n^{(1)}=\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{(\zeta-z)(\zeta z-1)}{2\zeta z}\right)^{r-1}\frac{\omega(\zeta)}{\zeta-\xi}\,d\zeta,\quad I_n^{(2)}=\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{(\zeta-z)(\zeta z-1)}{2\zeta z}\right)^{r-1}\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-\xi)\omega(\zeta)},$$

$$I_n^{(3)}=\left(\frac{(\zeta-z)(\zeta z-1)}{2\zeta z}\right)^{r-1}\frac{\omega(\zeta)}{\zeta-1/\xi}\,d\zeta,\quad I_n^{(4)}=\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{(\zeta-z)(\zeta z-1)}{2\zeta z}\right)^{r-1}\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-1/\xi)\omega(\zeta)}.$$

Отметим, что при нецелых значениях параметра r подынтегральные функции каждого из интегралов имеют точки ветвления $\zeta=0$, $\zeta=z$ и $\zeta=\bar{z}$. Если же $r\in\mathbb{N}$, то подынтегральные функции являются рациональными по переменному интегрированию. Поскольку первый случай является более сложным и, по сути, включает в себя второй, то будем полагать, что $r\in(0,+\infty)\backslash\mathbb{N}$. Ясно, что окончательное интегральное представление в обоих случаях будет аналогичным. Исследуем каждый из четырех интегралов по отдельности. Так, для интеграла $I_n^{(1)}$ зафиксируем параметр z и рассмотрим область D (рис. 1), ограниченную контуром $C=\Gamma'\cup C_1^-\cup C_\delta^-\cup C_2$, где Γ' – часть дуги Γ, ограниченная точками ее пересечения с окружностями $|\zeta-z|=\delta_1$ и $|\zeta-\bar{z}|=\delta_2$, $C_1=\{\zeta:\zeta=zy,\ y\in[\delta,\ 1]\}$, $C_2=\{\zeta:\zeta=\bar{z}y,\ y\in[\delta,\ 1]\}$, $C_\delta=\left\{\zeta:\zeta=\delta e^{iv},\ v\in[-\tau,\ \tau]\right\}$.

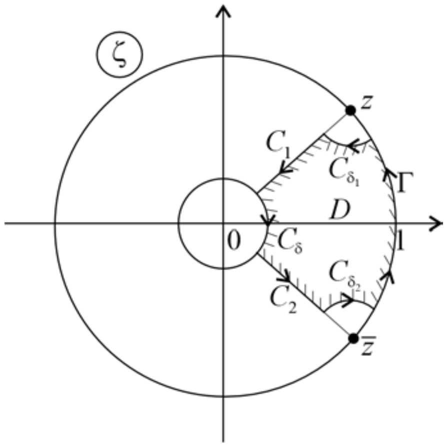

Рис. 1.

В указанной области подынтегральная функция первого интеграла

$$\psi_1(\zeta,\ z)=g_r(\zeta,\ z)\frac{\omega(\zeta)}{\zeta-\xi},\quad g_r(\zeta,\ z)=\left(\frac{(\zeta-z)(\zeta z-1)}{2\zeta z}\right)^{r-1},$$

распадается на регулярные ветви, определяемые условием $g_r(1,z)=(2e^{i\pi k}\sin\tau/2)^{2(r-1)}$, $k\in\mathbb{Z}$, $z=e^{i\tau}$. Выделив ту ветвь, для которой выполняется условие $g_r^*(1,z)=(2\sin\tau/2)^{2(r-1)}$, подынтегральная функция будет регулярна в рассматриваемой области. Применив основную теорему о вычетах, будем иметь

$$\left(\int\limits_{\Gamma'}+\int\limits_{C_{\delta_1}}+\int\limits_{C_1^-}+\int\limits_{C_\delta^-}+\int\limits_{C_2}+\int\limits_{C_{\delta_2}}\right)\psi_1(\zeta,\ z)\,d\zeta=d(\tau,\ u),$$

где

$$d(\tau,\ u)=\begin{cases}2\pi i\omega(\xi)\left(\dfrac{(\xi-z)(\xi z-1)}{2\xi z}\right)^{r-1}, & |u|\leqslant\tau,\\ 0,\quad |u|>\tau.\end{cases}\tag{11}$$

Рассмотрим интеграл по дуге C_δ. Выполнив замену переменного по формуле $\zeta=\delta e^{iv}$, получим

$$\int\limits_{C_\delta^-}\psi_1(\zeta,\ z)\,d\zeta=\frac{i\delta^{p+2-r}}{2^{r-1}}\int\limits_{\tau}^{-\tau}\left(\frac{(\delta e^{iv}-z)(z\delta e^{iv}-1)}{ze^{iv}}\right)^{r-1}\frac{\omega(\delta e^{iv})}{\delta e^{iv}-\xi}e^{iv}\,dv\underset{\delta\to 0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\delta\to 0}{\longrightarrow}\frac{i\sin(2-r)\tau}{\xi(2-r)}\left(\prod_{k=p+1}^{n}z_k\right)\frac{\delta^{p+2-r}}{2^{r-1}}.$$

Поскольку $p+2-r>0$, то при $\delta\to 0$ исследуемый интеграл равномерно по δ стремится к нулю. Рассуждая аналогичным образом, заключаем, что интегралы по дугам C_{δ_1} и C_{δ_2} также стремятся к нулю при $\delta_1\to 0$ и $\delta_2\to 0$ соответственно. При этом получим

$$\int_0^{\bar z}\psi_1(\zeta,\,z)\,d\zeta+I_n^{(1)}+\int_z^0\psi_1(\zeta,\,z)\,d\zeta=d(\tau,\,u),$$

где первый и третий интегралы берутся по соответствующим лучам комплексной плоскости. Выполнив в первом интеграле замену переменного по формуле $\zeta=\bar z y$, а в третьем $\zeta=zy$, придем к выражению

$$I_n^{(1)}=-\frac{1}{2^{r-1}}\int_0^1(y-1)^{r-1}y^{p+1-r}\left[\frac{(z-\bar z y)^{r-1}\,\bar z\omega(y\bar z)}{y\bar z-\xi}-\frac{(\bar z-yz)^{r-1}\,z\omega(yz)}{yz-\xi}\right]dy+d(\tau,\,u),\qquad(12)$$

где

$$\omega(yz)=z^p\prod_{k=p+1}^{n}\frac{yz+z_k}{1+z_k yz},\quad z=\mathrm{e}^{i\tau}.$$

Изучим интеграл $I_n^{(2)}$. Зафиксируем параметр z и рассмотрим область D (рис. 2), ограниченную контуром $C=\Gamma'\cup C_1\cup C_R\cup C_2^-$, где Γ' – часть дуги Γ, ограниченная точками ее пересечения с окружностями $|\zeta-z|=\delta_1$ и $|\zeta-\bar z|=\delta_2$, $C_1=\{\zeta:\zeta=zy,\ y\in[1+\delta_1,\ R]\}$, $C_2=\{\zeta:\zeta=\bar z y,\ y\in[1+\delta_1,\ R]\}$, $C_R=\left\{\zeta:\zeta=R\mathrm{e}^{iv},\ v\in[-\tau,\ \tau]\right\}$.

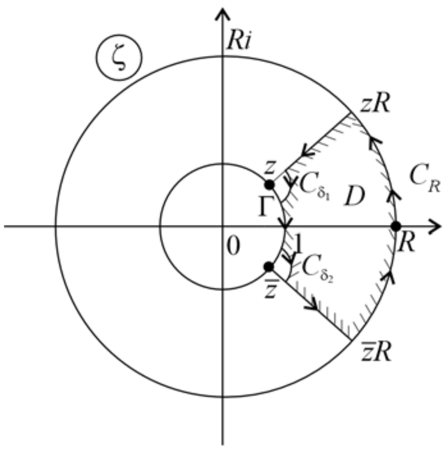

Рис. 2.

В указанной области подынтегральная функция второго интеграла

$$\psi_2(\zeta,\,z)=\frac{g_r(\zeta,\,z)}{\zeta(\zeta-\xi)\omega(\zeta)},\quad g_r(\zeta,\,z)=\left(\frac{(\zeta-z)(\zeta z-1)}{2\zeta z}\right)^{r-1}$$

распадается на регулярные ветви, определяемые условием $g_r(1,z)=(2\mathrm{e}^{i\pi k}\sin\tau/2)^{2(r-1)}$, $k\in\mathbb{Z}$, $z=\mathrm{e}^{i\tau}$. Выделив ту ветвь, для которой выполняется условие $g_r^*(1,z)=(2\sin\tau/2)^{2(r-1)}$, подынтегральная функция регулярна в рассматриваемой области. Применив интегральную теорему Коши, получим

$$\left(\int_{\Gamma'}+\int_{C_{\delta_1}}+\int_{C_1}+\int_{C_R}+\int_{C_2^-}+\int_{C_{\delta_2}}\right)\psi_2(\zeta,\,z)\,d\zeta=0.\qquad(13)$$

Рассмотрим интеграл по дуге C_R. Выполнив замену переменного по формуле $\zeta=R\mathrm{e}^{iv}$, будем иметь

$$\int_{C_R}\psi_2(\zeta,\,z)\,d\zeta=\frac{i}{2^{r-1}R^{p+2-r}}\int_\tau^{-\tau}\left(\frac{(\mathrm{e}^{iv}-z/R)(\mathrm{e}^{iv}z-1/R)}{z\mathrm{e}^{iv}}\right)^{r-1}\frac{dv}{(\mathrm{e}^{iv}-\xi/R)\omega(R\mathrm{e}^{iv})}.$$

Переходя к пределу при $R \to \infty$, находим, что

$$\int\limits_{C_R} \psi_2(\zeta,\, z)\, d\zeta \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{2^{2-r} i \sin(2-r)\tau}{(2-r)R^{p+2-r}} \left(\prod_{k=p+1}^{n} z_k \right).$$

Учитывая, что $p+2-r>0$, при $R \to \infty$ значение интеграла по дуге C_R стремится к нулю. Аналогичными рассуждениями убеждаемся, что интегралы по дугам C_{δ_1} и C_{δ_2} соответственно при $\delta_1 \to 0$ и $\delta_2 \to 0$ также обращаются в нуль. При этом из (13) получим

$$I_n^{(2)} = -\left(\int\limits_{z}^{z\infty} + \int\limits_{\bar{z}\infty}^{\bar{z}} \right) \psi_2(\zeta,\, z)\, d\zeta,$$

где интегрирование ведется по соответствующим лучам в комплексной плоскости. В первом из интегралов слева выполним замену переменного по формуле $\zeta = zy$, а во втором по формуле $\zeta = \bar{z}y$. Тогда

$$I_n^{(2)} = -\frac{1}{2^{r-1}} \int\limits_{1}^{+\infty} (y-1)^{r-1} y^{-r-p} \left[\frac{(yz-\bar{z})^{r-1}}{(yz-\xi)\omega(yz)} - \frac{(y\bar{z}-z)^{r-1}}{(y\bar{z}-\xi)\omega(y\bar{z})} \right] dy.$$

Еще одной заменой по формуле $y \mapsto 1/y$ интеграл справа приводится к виду

$$I_n^{(2)} = -\frac{1}{2^{r-1}} \int\limits_{0}^{1} (1-y)^{r-1} y^{p+1-r} \left[\frac{(z-y\bar{z})^{r-1}\omega(y\bar{z})}{z-y\xi} - \frac{(\bar{z}-yz)^{r-1}\omega(yz)}{\bar{z}-y\xi} \right] dy. \tag{14}$$

Рассуждая аналогичным образом в отношении оставшихся интегралов $I_n^{(3)}$ и $I_n^{(4)}$, заключаем, что

$$I_n^{(3)} = -\frac{1}{2^{r-1}} \int\limits_{0}^{1} (y-1)^{r-1} y^{p+1-r} \left[\frac{(z-\bar{z}y)^{r-1}\bar{z}\omega(y\bar{z})}{y\bar{z}-\bar{\xi}} - \frac{(\bar{z}-yz)^{r-1}z\omega(yz)}{yz-\bar{\xi}} \right] dy, \tag{15}$$

$$I_n^{(4)} = -\frac{1}{2^{r-1}} \int\limits_{0}^{1} (1-y)^{r-1} y^{p+1-r} \left[\frac{(z-y\bar{z})^{r-1}\omega(y\bar{z})}{z-y\bar{\xi}} - \frac{(\bar{z}-yz)^{r-1}\omega(yz)}{\bar{z}-y\bar{\xi}} \right] dy - \xi d(\tau,\, u), \tag{16}$$

где $d(\tau,\; u)$ из (11).

Из представления (10) с учетом выражений (12), (14), (15) и (16) получим

$$I_n(x,\, t,\, \rho) = \frac{-2^{2-r}}{i} \int\limits_{0}^{1} (1-y)^{r-1} y^{p+1-r} \left[-\frac{(z-y\bar{z})^{r-1}}{\xi z - y} \frac{\omega(y\bar{z})}{\omega(\xi)} - \frac{(\bar{z}-yz)^{r-1}}{y-\xi\bar{z}} \frac{\omega(yz)}{\omega(\xi)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(z-y\bar{z})^{r-1}\omega(\xi)\omega(y\bar{z})}{y-\bar{\xi}z} + \frac{(\bar{z}-yz)^{r-1}\xi z\omega(\xi)\omega(yz)}{1-z\xi y} \right] dy + \frac{2}{i} d(\tau,\, u), \quad \xi = \rho e^{iu},\ z = e^{i\tau}.$$

Выражение, находящееся в квадратных скобках подынтегрального выражения, при любом фиксированном $y \in (0,\, 1)$ непрерывно по переменному ξ, поэтому справедлив предельный переход (9). При этом из представления (8) будем иметь

$$s_n(f,\, x) = \frac{-1}{2^r \pi \Gamma(r) i} \int\limits_{-1}^{+1} \varphi(t) \int\limits_{0}^{1} (1-y)^{r-1} y^{p+1-r} \left[-\frac{(z-y\bar{z})^{r-1}}{\xi z - y} \frac{\omega(y\bar{z})}{\omega(\xi)} - \frac{(\bar{z}-yz)^{r-1}}{y-\xi\bar{z}} \frac{\omega(yz)}{\omega(\xi)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(z-y\bar{z})^{r-1}\omega(\xi)\omega(y\bar{z})}{y-\bar{\xi}z} + \frac{(\bar{z}-yz)^{r-1}\xi z\omega(\xi)\omega(yz)}{1-z\xi y} \right] dy\, dt + \frac{1}{\Gamma(r)} \int\limits_{-1}^{x} (x-t)^{r-1} \varphi(t)\, dt.$$

Отметив, что последнее слагаемое справа представляет собой интеграл Римана–Лиувилля, с учетом (4) придем к интегральному представлению приближений

$$\varepsilon_n(f,\, x,\, A) = \frac{1}{2^r \pi \Gamma(r) i} \int\limits_{-1}^{+1} \varphi(t) \int\limits_{0}^{1} (1-y)^{r-1} y^{p+1-r} \left[-\frac{(z-y\bar{z})^{r-1}}{\xi z - y} \frac{\omega(y\bar{z})}{\omega(\xi)} - \frac{(\bar{z}-yz)^{r-1}}{y-\xi\bar{z}} \frac{\omega(yz)}{\omega(\xi)} + \right.$$

$$+\frac{(z-y\bar{z})^{r-1}\omega(\xi)\omega(y\bar{z})}{y-\bar{\xi}z}+\frac{(\bar{z}-yz)^{r-1}\xi z\omega(\xi)\omega(yz)}{1-z\xi y}\Bigg]\,dy\,dt,\quad \xi=\mathrm{e}^{iu},\ z=\mathrm{e}^{i\tau},\ t=\cos\tau.$$

Во внешнем интеграле выполним замену переменного по формуле $t\mapsto\cos\tau$. Тогда

$$\varepsilon_n(f,\ x,\ A)=\frac{1}{2^r\pi\Gamma(r)i}\int_0^{\pi}\varphi(\cos\tau)\sin\tau\int_0^1(1-y)^{r-1}y^{p+1-r}\Bigg[-\frac{(z-y\bar{z})^{r-1}}{\xi z-y}\frac{\omega(y\bar{z})}{\omega(\xi)}-$$

$$-\frac{(\bar{z}-yz)^{r-1}}{y-\xi\bar{z}}\frac{\omega(yz)}{\omega(\xi)}+\frac{(z-y\bar{z})^{r-1}\omega(\xi)\omega(y\bar{z})}{y-\bar{\xi}z}+\frac{(\bar{z}-yz)^{r-1}\xi z\omega(\xi)\omega(yz)}{1-z\xi y}\Bigg]\,dy\,d\tau,$$

где $\xi=\mathrm{e}^{iu}, x=\cos u,\ z=\mathrm{e}^{i\tau},\ t=\cos\tau$. Представив внешний интеграл в виде суммы двух интегралов

$$\varepsilon_n(f,\ x,\ A)=\frac{1}{2^r\pi\Gamma(r)i}\Bigg[\int_0^{\pi}\varphi(\cos\tau)\sin\tau\int_0^1(1-y)^{r-1}y^{p+1-r}\Bigg[-\frac{(\bar{z}-yz)^{r-1}}{y-\xi\bar{z}}\frac{\omega(yz)}{\omega(\xi)}-$$

$$+\frac{(z-y\bar{z})^{r-1}\omega(\xi)\omega(y\bar{z})}{y-\bar{\xi}z}\Bigg]\,dy\,d\tau+$$

$$+\int_0^{\pi}\varphi(\cos\tau)\sin\tau\int_0^1(1-y)^{r-1}y^{p+1-r}\Bigg[-\frac{(z-y\bar{z})^{r-1}}{\xi z-y}\frac{\omega(y\bar{z})}{\omega(\xi)}+$$

$$+\frac{(\bar{z}-yz)^{r-1}\xi z\omega(\xi)\omega(yz)}{1-z\xi y}\Bigg]\,dy\,d\tau\Bigg],$$

и затем выполнив во втором из них замену переменного по формуле $\tau\mapsto-\tau$, придем к выражению

$$\varepsilon_n(f,\ x,\ A)=\frac{-1}{2^r\pi\Gamma(r)i}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\cos\tau)\sin\tau\int_0^1(1-y)^{r-1}y^{p+1-r}\times$$

$$\times\Bigg[\frac{(\bar{z}-yz)^{r-1}}{y-\xi\bar{z}}\frac{\omega(yz)}{\omega(\xi)}-\frac{(z-y\bar{z})^{r-1}\omega(\xi)\omega(y\bar{z})}{y-\bar{\xi}z}\Bigg]\,dy\,d\tau,\quad \omega(\xi)=\xi^p\prod_{k=p+1}^{n}\frac{\xi+z_k}{1+z_k\xi}. \tag{17}$$

Заметив, что выражения в квадратных скобках являются взаимно комплексно-сопряженными, для того, чтобы прийти к (5) необходимо выполнить соответствующие преобразования. □

В интегральном представлении (5) положим значение параметров $a_k=0,\ k=1,2,\ldots,n$. В этом случае $A=(0,0,\ldots,0)=O$, и величина $\varepsilon_n(f,x,O)=\varepsilon_n^{(0)}(f,x)$ представляет собой приближения интеграла Римана–Лиувилля частичными суммами ряда Фурье–Чебышёва.

Следствие 1. *Имеет место интегральное представление*

$$\varepsilon_n^{(0)}(f,\ x)=\frac{-1}{2^{r-1}\pi\Gamma(r)}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\cos\tau)\sin\tau\int_0^1\frac{(1-y)^{r-1}y^{n+1-r}(1-2y\cos2\tau+y^2)^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{1-2y\cos(\tau-u)+y^2}}\times$$

$$\times\sin((n+1)(\tau-u)+\lambda_r(\tau,\ y,\ x))\,dy\,d\tau,\quad x=\cos u,\ x\in[-1,\ 1], \tag{18}$$

где

$$\lambda_r(\tau,\ y,\ x)=(r-1)\arg(\bar{z}-zy)-\arg\left(1-\frac{z}{\xi}y\right),\quad \xi=\mathrm{e}^{iu}.$$

2. Полиномиальные аппроксимации на классах дифференцируемых функций. Пусть $W^{(r)}K[-1,\ 1],\ r\geqslant1$, есть класс функций $f(x)$, определенных на отрезке $[-1,1]$ и имеющих на нем производную $f^{(r)}(x)$ порядка r, удовлетворяющую неравенству $|f^{(r)}(x)|\leqslant K$, K – константа. Рассмотрим верхнюю грань

$$\mathscr{E}_n(W^{(r)}K[-1,\ 1],\ x)=\sup_{f\in W^{(r)}K[-1,\ 1]}||\varepsilon_n^{(0)}(f,\ x)||,\quad x\in[-1,\ 1], \tag{19}$$

отклонений частичных сумм ряда Фурье–Чебышёва на классах $W^{(r)}K[-1,\ 1]$. Асимптотическое поведение величины $\mathscr{E}_n(W^{(r)}K[-1,\ 1],\ x)$ при $r=1$ было исследовано С. М. Никольским [25], при $r \geqslant 1$ Г. С. Селивановой [6]. Покажем, что указанные результаты можно получить используя интегральное представление (18).

Теорема 2. *При любом* $r > 1$ *для величины* (19) *равномерно относительно всех* $x \in [-1,\ 1]$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathscr{E}_n(W^{(r)}K[-1,\ 1],\ x) = \frac{4K}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + O\left(\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r}{n^r}\right) + O\left(\frac{|x|^r}{n^r}\right), \quad n \to \infty. \tag{20}$$

Доказательство. Из интегрального представления (18) с учетом 2π-периодичности по переменному τ внешнего интеграла нетрудно получить, что

$$|\varepsilon_n^{(0)}(f,\ x)| \leqslant \frac{K}{2^{r-1}\pi\Gamma(r)}\int\limits_0^{2\pi}|\sin(\tau+u)|J_n(x,\ \tau)d\tau, \quad x = \cos u,\ x \in [0,\ 1],$$

где

$$J_n(x,\ \tau) = \int\limits_0^1 \frac{(1-y)^{r-1}y^{n+1-r}(1-2y\cos 2(\tau+u)+y^2)^{\frac{r-1}{2}}}{\sqrt{1-2y\cos\tau+y^2}}|\sin((n+1)\tau+\psi_r(\tau,\ y))|\,dy,$$

$$\psi_r(\tau,\ y) = (r-1)\arg(\overline{z\xi} - z\xi y) - \arg(1-zy).$$

Внешний интеграл представим суммой трех интегралов по промежуткам $[0, 1/n]$, $[1/n, 2\pi - 1/n]$ и $[2\pi - 1/n, 2\pi]$, так, что

$$|\varepsilon_n^{(0)}(f, x)| \leqslant \frac{K}{2^{r-1}\pi\Gamma(r)}\left(I_n^{(1)} + I_n^{(2)} + I_n^{(3)}\right), \tag{21}$$

где

$$I_n^{(1)} = \int\limits_0^{\frac{1}{n}}|\sin(\tau+u)|J_n(x,\ \tau)\,d\tau, \quad I_n^{(2)} = \int\limits_{\frac{1}{n}}^{2\pi-\frac{1}{n}}|\sin(\tau+u)|J_n(x,\ \tau)\,d\tau,$$

$$I_n^{(3)} = \int\limits_{2\pi-\frac{1}{n}}^{2\pi}|\sin(\tau+u)|J_n(x,\ \tau)\,d\tau.$$

Исследуем каждый из трех интегралов по отдельности. Так, для интеграла $I_n^{(1)}$ справедлива оценка

$$|I_n^{(1)}| \leqslant \int\limits_0^{\frac{1}{n}}|\sin(\tau+u)|\int\limits_0^1(1-y)^{r-2}y^{n+1-r}(1-2y\cos 2(\tau+u)+y^2)^{\frac{r-1}{2}}\,dy\,d\tau, \quad r > 1.$$

Для исследования асимптотического поведения при $n \to \infty$ внутреннего интеграла справа воспользуемся методом Лапласа [26; 27]. Зафиксируем величину $u, u \in [0, \pi]$, после чего последнее соотношение запишем в виде

$$|I_n^{(1)}| \leqslant \int\limits_0^{\frac{1}{n}}|\sin(\tau+u)|\int\limits_0^1 g_r(y,u)\mathrm{e}^{(n+1-r)\ln y}\,dy,$$

$$g_r(y,u) = (1-y)^{r-2}(1-2y\cos 2(\tau+u)+y^2)^{\frac{r-1}{2}}.$$

Учитывая, что $\ln y = y - 1 + o(y-1),\ y \to 1$, а также асимптотическое равенство

$$g_r(y,u) \sim (2\sin(\tau+u))^{r-1}(1-y)^{r-2}, \quad y \to 1,$$

при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$ получим

$$|I_n^{(1)}| \leqslant 2^{r-1}(1+o(1))\int\limits_0^{\frac{1}{n}}|\sin(\tau+u)|^r\int\limits_{1-\varepsilon}^1(1-y)^{r-2}\mathrm{e}^{(n+1-r)(y-1)}\,d\tau\,dy, \quad n \to \infty.$$

Выполнив в интеграле справа несложные преобразования, придем к оценке

$$|I_n^{(1)}| \leqslant \frac{2^{r-1}\Gamma(r-1)(|\sin u|^r+|\cos u|^r)}{n^r}(1+o(1)) \quad n\to\infty. \tag{22}$$

Во внешнем интеграле выражения $I_n^{(3)}$ выполним замену переменного по формуле $2\pi-\tau\mapsto\tau$. Ввиду 2π-периодичности подынтегральной функции, нетрудно убедиться, что

$$|I_n^{(3)}| \leqslant \frac{2^{r-1}\Gamma(r-1)(|\sin u|^r+|\cos u|^r)}{n^r}(1+o(1)) \quad n\to\infty. \tag{23}$$

Займемся выражением $I_n^{(2)}$. Применив метод Лапласа для исследования асимптотического поведения его внутреннего интеграла, получим

$$I_n^{(2)} = \frac{2^{r-1}\Gamma(r)}{n^r}A_n^{(r)}(1+o(1)), \quad n\to\infty, \tag{24}$$

где

$$A_n^{(r)} = \int\limits_{\frac{1}{n}}^{2\pi-\frac{1}{n}} |\sin(\tau+u)|^r \left|\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau+\frac{r\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{\tau}{2}}\right| d\tau, \quad r>1.$$

Поскольку

$$|\sin(\tau+u)|^r = |\sin u|^r|\cos\tau|^r+\theta|\cos u|^r|\sin\tau|^r, \quad \theta\in[-1,\ 1],$$

а также

$$|\cos\tau|^r = 1+\theta_1 2^r\left|\sin\frac{\tau}{2}\right|^{2r}, \quad \theta_1\in[-1,\ 1],$$

будем иметь

$$A_n^{(r)} = |\sin u|^r\left(I_n^{(4)}+\theta_1 2^r I_n^{(5)}\right)+\theta|\cos u|^r I_n^{(6)}, \tag{25}$$

где

$$I_n^{(4)} = \int\limits_{\frac{1}{n}}^{2\pi-\frac{1}{n}} \left|\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau+\frac{r\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{\tau}{2}}\right| d\tau,$$

$$I_n^{(5)} = \int\limits_{\frac{1}{n}}^{2\pi-\frac{1}{n}} \left|\sin\frac{\tau}{2}\right|^{2r} \left|\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau+\frac{r\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{\tau}{2}}\right| d\tau, \quad r>1,$$

$$I_n^{(6)} = \int\limits_{\frac{1}{n}}^{2\pi-\frac{1}{n}} |\sin\tau|^r \left|\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau+\frac{r\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{\tau}{2}}\right| d\tau, \quad r>1.$$

Нетрудно заметить, что $I_n^{(5)}=O(1)$ и $I_n^{(6)}=O(1)$ при $n\to\infty$. Асимптотическое поведение интеграла $I_n^{(4)}$ по сути исследовалось В. Т. Пинкевичем [28]. Из результатов этой работы, заключаем, что

$$I_n^{(4)} = \frac{4}{\pi}\ln n+O(1), \quad n\to\infty.$$

При этом из (25) придем к асимптотическому равенству

$$A_n^{(r)} = \frac{4}{\pi}|\sin u|^r\ln n+O(|\sin u|^r)+O(|\sin u|^r), \quad n\to\infty.$$

Из (24) и последнего асимптотического равенства получим

$$I_n^{(2)} = \frac{2^{r+1}\Gamma(r)|\sin u|^r}{\pi}\frac{\ln n}{n^r}+O\left(\frac{|\sin u|^r}{n^r}\right)+O\left(\frac{|\cos u|^r}{n^r}\right), \quad n\to\infty. \tag{26}$$

Из соотношения (21) с учетом оценок (22), (23) и (26) получим

$$|\varepsilon_n^{(0)}(f,\,x)| \leqslant \frac{4K}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + O\left(\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r}{n^r}\right) + O\left(\frac{|x|}{n}\right)^r, \quad n \to \infty. \tag{27}$$

С другой стороны, можно показать (см., напр., [6; 7]), что существует функция $f_n(x)$, для которой неравенство (27) с точностью до слагаемого порядка $O(1/n^r)$ обращается в асимптотическое равенство при $n \to \infty$. При этом приходим к (20). □

3. Приближения интеграла Римана–Лиувилля с плотностью, имеющей степенную особенность. Изучим приближения (4), когда плотность $\varphi_\gamma(x) = (1-x)^\gamma$, $\gamma > 0$, т. е. в настоящем разделе изучаются аппроксимации функций вида

$$f_\gamma(x) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}(1-t)^\gamma\,dt, \quad x \in [-1,\ 1],\ r \geqslant 1,\ \gamma > 0. \tag{28}$$

Пусть параметры рационального интегрального оператора Фурье–Чебышёва (2) выбраны следующим образом:

$$z_k \mapsto -\alpha_k,\ \alpha_k \in [0,\ 1),\ k = 1,2,\ldots,n; \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0,\ p = [\gamma + r].$$

Теорема 3. *Для приближений интеграла Римана–Лиувилля с плотностью* $\varphi_\gamma(x)$ *на отрезке* $[-1,\ 1]$ *рациональным интегральным оператором Фурье–Чебышёва справедливы:*

1) *интегральное представление*

$$\varepsilon_n(f_\gamma,\,x,\,A) = \frac{2^{1-\gamma-r}\sin\pi\gamma}{\pi\Gamma(r)}\int\limits_0^1\int\limits_0^1(1-y)^{r-1}y^{p+1-r}\times$$

$$\times\frac{(1-t)^{2\gamma}(1-t^2)(1-t^2y)^{r-1}t^{p-\gamma-r}}{\sqrt{1-2ty\cos u+t^2y^2}}\cos\Omega_n(x,t,y)\omega(ty)\,dt\,dy, \quad x = \cos u, \tag{29}$$

где

$$\Omega_n(x,t,y) = \arg\frac{\xi\omega(\xi)}{1-\xi ty}, \quad \omega(ty) = \prod_{k=1}^{n}\frac{ty-\alpha_k}{1-\alpha_k ty}, \quad \xi = e^{iu};$$

2) *поточечная оценка*

$$|\varepsilon_n(f_\gamma,\,x,\,A)| \leqslant \frac{2^{1-\gamma-r}|\sin\pi\gamma|}{\pi\Gamma(r)}\int\limits_0^1\int\limits_0^1(1-y)^{r-1}y^{p+1-r}\times$$

$$\times\frac{(1-t)^{2\gamma}(1-t^2)(1-t^2y)^{r-1}t^{p-\gamma-r}}{\sqrt{1-2ty\cos u+t^2y^2}}|\omega(ty)|\,dt\,dy; \tag{30}$$

3) *равномерная оценка*

$$\varepsilon_n(f_\gamma,\,A) \leqslant \varepsilon_n^*(f_\gamma,\,A), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{31}$$

где

$$\varepsilon_n^*(f_\gamma,\,A) = \frac{2^{1-\gamma-r}|\sin\pi\gamma|}{\pi\Gamma(r)}\int\limits_0^1\int\limits_0^1(1-y)^{r-1}y^{p+1-r}\times$$

$$\times\frac{(1-t)^{2\gamma}(1-t^2)(1-t^2y)^{r-1}t^{p-\gamma-r}}{1-ty}|\omega(ty)|\,dt\,dy, \quad r \geqslant 1,\ \gamma > 0. \tag{32}$$

Неравенство (31) *является точным в том смысле, что если функция* $\omega(\cdot)$ *имеет полюсы только четной кратности, то неравенство* (31) *превращаются в равенство при* $x = 1$.

Доказательство. В представлении приближений (17) подставим плотность $\varphi_\gamma(x)$ и, воспользовавшись теоремой Фубини, поменяем порядок интегрирования:

$$\varepsilon_n(f_\gamma,\,x,\,A) = \frac{-1}{2^r\pi\Gamma(r)i}\int\limits_0^1(1-y)^{r-1}y^{1-r}J_n(y,x)\,dy, \tag{33}$$

где

$$J_n(y,\,x)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1-\cos\tau)^{\gamma}\sin\tau\left[\frac{(\bar z-yz)^{r-1}z}{z-\xi/y}\,\frac{\omega(yz)}{y\omega(\xi)}+\frac{(z-y\bar z)^{r-1}\xi\omega(\xi)\omega(y\bar z)}{z-\xi y}\right]d\tau,$$

$$\omega(\xi)=\xi^p\prod_{k=p+1}^{n}\frac{\xi-\alpha_k}{1-\alpha_k\xi},\quad z=\mathrm{e}^{i\tau},\ \xi=\mathrm{e}^{iu},\ x=\cos u.$$

Преобразуем интеграл $J_n(y,\,x)$. С этой целью перейдем к интегрированию по переменной $z,\ z=\mathrm{e}^{i\tau}$:

$$J_n(y,\,x)=-\frac{(-1)^{\gamma}}{2^{\gamma+1}}\oint\limits_{\Gamma}\frac{(1-z)^{2\gamma}(z^2-1)}{z^{\gamma+2}}\left[\frac{(\bar z-yz)^{r-1}z}{z-\xi/y}\,\frac{\omega(yz)}{y\omega(\xi)}+\frac{(z-y\bar z)^{r-1}\xi\omega(\xi)\omega(y\bar z)}{z-\xi y}\right]dz,$$

где $\Gamma=\left\{z:z=\mathrm{e}^{i\tau},-\pi\leqslant z\leqslant\pi\right\}$. Отметим, что при нецелых значениях параметра γ и нецелых значениях параметра r подынтегральная функция имеет точки ветвления при $z=0,\ z=1,\ z=y$ и $z=1/y$. Поскольку при $\gamma,r\in\mathbb{N}$ рассуждения являются, на наш взгляд, более простыми и, очевидно, интегральное представление не будет отличаться от общего случая, то будем полагать, что $\gamma\in(0,+\infty)\setminus\mathbb{N}$ и $r\in(1,+\infty)\setminus\mathbb{N}$. Интеграл справа представим в виде суммы двух интегралов так, что

$$J_n(y,\,x)=\frac{(-1)^{\gamma}}{2^{\gamma+1}}\left[\frac{1}{y\omega(\xi)}J_n^{(1)}+\xi\omega(\xi)J_n^{(2)}\right],\quad \xi=\mathrm{e}^{iu},\ x=\cos u,\tag{34}$$

где

$$J_n^{(1)}=\oint\limits_{\Gamma}\frac{(1-z)^{2\gamma}(z^2-1)(1-yz^2)^{r-1}z^{p-\gamma-r}}{z-\xi/y}\prod_{k=p+1}^{n}\frac{yz-\alpha_k}{1-\alpha_k yz}\,dz,$$

$$J_n^{(2)}=\oint\limits_{\Gamma}\frac{(1-z)^{2\gamma}(z^2-1)(z^2-y)^{r-1}}{z^{\gamma+r+1+p}(z-\xi y)}\prod_{k=p+1}^{n}\frac{y-\alpha_k z}{z-\alpha_k y}\,dz.$$

Исследуем каждый из двух интегралов по отдельности. Так, подынтегральная функция интеграла $J_n^{(1)}$

$$\varphi_1(z,\xi)=g_{\gamma}(\zeta)\frac{(z^2-1)(1-yz^2)^{r-1}z^p}{z-\xi/y}\omega(yz),\quad g_{\gamma}(z)=\frac{(1-z)^{2\gamma}}{z^{\gamma+r}},$$

в области D, ограниченной контуром

$$C=C_1\cup\Gamma\cup C_2^-\cup C_\delta^-,$$

где $C_\delta=\left\{z:z=\delta\mathrm{e}^{i\tau},\ 0\leqslant\tau\leqslant2\pi\right\}$; C_1 и C_2 – соответственно верхний и нижний берега разреза по действительной оси от точки $z=\delta$ до точки $z=1$ распадается на регулярные ветви, определяемые условием $g_{\gamma}(\mathrm{e}^{i\pi/3})=\mathrm{e}^{i2\pi k\gamma}$, $k\in\mathbb{Z}$. Выбрав ту ветвь, для которой выполняется условие $g_{\gamma}^{*}(\mathrm{e}^{i\pi/3})=1$, а также учитывая, что $|\xi/y|>1$ и $1/y>1$, применим интегральную теорему Коши

$$\int\limits_{C_1}\varphi_1(t,\xi)\,dt+J_n^{(1)}+\int\limits_{C_2^-}\varphi_1(\mathrm{e}^{2i\pi}t,\xi)\,dt+\int\limits_{C_\delta^-}\varphi_1(z,\xi)\,dz=0.$$

Рассмотрим интеграл по контуру C_δ^-. Выполнив замену переменного интегрирования по формуле $z=\delta\mathrm{e}^{i\tau}$, получим

$$\int\limits_{C_\delta^-}\varphi_1(z)\,dz=i\delta^{p+1-\gamma-r}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{(1-\delta\mathrm{e}^{i\tau})^{2\gamma}(\delta\mathrm{e}^{2i\tau}-1)(1-y\delta^2\mathrm{e}^{2i\tau})^{r-1}}{\mathrm{e}^{i\tau(r+\gamma)}(\delta\mathrm{e}^{i\tau}-\xi/y)}\omega(y\delta\mathrm{e}^{i\tau})\mathrm{e}^{i\tau}\,d\tau$$

ввиду выбора параметра p, интеграл по контуру C_δ^- при стягивании его в точку стремится к нулю. При этом приходим к равенству

$$J_n^{(1)}=(1-\mathrm{e}^{-2\pi i\gamma})\int\limits_{0}^{1}\frac{(1-t)^{2\gamma}(1-t^2)(1-t^2y)^{r-1}t^{p-\gamma-r}}{t-\xi/y}\omega(ty)\,dt,\quad y\in(0,\,1),\ \xi=\mathrm{e}^{iu}.\tag{35}$$

Займемся преобразованием интеграла $J_n^{(2)}$. Рассмотрим область, ограниченную контуром Γ, контуром $C_R=\{z:z=R\mathrm{e}^{i\tau},-\pi\leqslant\tau\leqslant\pi\}$ достаточно большого радиуса R и верхним и нижним берегами разреза по действительной оси от точки $z=1$ до $z=R$. Внутри заданной области подынтегральная функция

$$\varphi_2(z,\xi)=g_\gamma(z)\frac{(z^2-1)(z^2-y)^{r-1}}{(z-\xi y)z^{p+1}}\omega(y\bar z),\quad g_\gamma(z)=\frac{(1-z)^{2\gamma}}{z^{\gamma+r}},$$

допускает выделение регулярных ветвей. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, выделим ее регулярную ветвь

$$\varphi_2(z,\xi)=g^*_\gamma(z)\frac{(z^2-1)(z^2-y)^{r-1}}{(z-\xi y)z^{p+1}}\omega(y\bar z).$$

Применив интегральную теорему Коши к области, ограниченной указанным контуром, и учитывая, что при движении по верхнему берегу разреза аргумент подынтегральной функции не меняется, а при движении по нижнему берегу разреза получает приращение $-2\pi i$, получим

$$J_n^{(2)}=\int\limits_1^R\varphi_2(t,\xi)\,dt+\int\limits_{C_R}\varphi_2(z,\xi)\,dz+\int\limits_R^1\varphi_2(\mathrm{e}^{-2\pi i}t,\xi)\,dt. \tag{36}$$

Исследуем интеграл по окружности C_R. Положим $z=R\mathrm{e}^{i\tau}$. Тогда

$$\int\limits_{C_R}\varphi_2(z,\xi)\,dz=\frac{i}{R^{p+1-\gamma-r}}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\left(\frac{1}{R}-\mathrm{e}^{i\tau}\right)^{2\gamma}\left(\mathrm{e}^{2i\tau}-\frac{1}{R^2}\right)\left(\mathrm{e}^{2i\tau}-\frac{y}{R^2}\right)^{r-1}\mathrm{e}^{-i(r+\gamma-p)\tau}}{\mathrm{e}^{i\tau}-\frac{\xi y}{R}}\prod_{k=p+1}^{n}\frac{\frac{y}{R}-\mathrm{e}^{i\tau}\alpha_k}{\mathrm{e}^{i\tau}-\frac{y\alpha_k}{R}}\,d\tau.$$

Переходя в интеграле справа к пределу при $R\to\infty$, приходим к асимптотическому равенству

$$\int\limits_{C_R}\varphi_2(z,\xi)\,dz\sim\frac{2i(-1)^n\sin\pi(\gamma+r)}{(p+1-\gamma-r)R^{p+1-\gamma-r}}\prod_{k=p+1}^{n}\alpha_k,\quad R\to\infty.$$

Поскольку $p+1-\gamma-r>0$, то заключаем, что при $R\to\infty$ интеграл по окружности C_R стремится к нулю. При этом из (36) получим

$$J_n^{(2)}=(1-\mathrm{e}^{2\pi i\gamma})\int\limits_1^{+\infty}\frac{(1-t)^{2\gamma}(t^2-1)(t^2-y)^{r-1}}{(t-\xi y)t^{p+1+\gamma+r}}\prod_{k=p+1}^{n}\frac{y-t\alpha_k}{t-y\alpha_k}\,dt.$$

Выполнив в интеграле замену переменного по формуле $t\mapsto 1/t$ окончательно будем иметь

$$J_n^{(2)}=(1-\mathrm{e}^{2\pi i\gamma})\int\limits_0^1\frac{(1-t)^{2\gamma}(1-t^2)(1-t^2y)^{r-1}t^{p-\gamma-r}}{1-\xi yt}\omega(ty)\,dt. \tag{37}$$

Из соотношения (34) с учетом интегральных представлений (35) и (37) получим

$$J_n(y,\,x)=-\frac{i\sin\pi\gamma}{2^\gamma}\int\limits_0^1(1-t)^{2\gamma}(1-t^2)(1-t^2y)^{r-1}t^{p-\gamma-r}\left[\frac{\xi\omega(\xi)}{1-\xi ty}+\frac{\overline{\xi\omega(\xi)}}{1-\bar\xi ty}\right]\omega(ty)\,dt.$$

Выражения в квадратных скобках являются взаимно комплексно-сопряженными. Следовательно, их сумма представляет собой удвоенный косинус некоторого угла, умноженного на модуль этих выражений. Выполнив необходимые действия, из последнего интегрального представления находим, что

$$J_n(y,\,x)=-i2^{1-\gamma}\sin\pi\gamma\int\limits_0^1\frac{(1-t)^{2\gamma}(1-t^2)(1-t^2y)^{r-1}t^{p-\gamma-r}}{\sqrt{1-2ty\cos u+t^2y^2}}\cos\Omega_n(x,t,y)\omega(ty)\,dt,$$

где $x=\cos u$, величина $\Omega_n(x,t,y)$ определена в настоящей теореме.
Из представления (33) и последнего интегрального представления получим (29).

Из (29) легко следует оценка (30). Из оценки (30) тривиально следует соотношение (31). Покажем, что равномерная оценка (31) достигается на значении $x=1$. Действительно, из интегрального представления (29) при $x=1$, что соответствует значению параметра $u=0$, получим $\Omega_n(1,t,y)=0$, и

$$\varepsilon_n(f_\gamma,\,1,\,A)=\frac{2^{1-\gamma-r}\sin\pi\gamma}{\pi\Gamma(r)}\int\limits_0^1\int\limits_0^1(1-y)^{r-1}y^{p+1-r}\frac{(1-t)^{2\gamma}(1-t^2)(1-t^2y)^{r-1}t^{p-\gamma-r}}{1-ty}\omega(ty)\,dt\,dy.$$

Очевидно, что при четной кратности полюсов величина $\omega(ty) \geqslant 0$ и правая часть последнего интегрального представления совпадает с правой частью оценки (31).

Представление (29) было получено в предположении, что параметры r и γ не могут принимать натуральные значения. Однако из хода доказательства ясно, что оно справедливо и в случае $r, \gamma \in \mathbb{N}$ при $p = [\gamma + r]$. □

Следствие 2. *Для приближений интеграла типа Римана–Лиувилля с плотностью $\varphi_\gamma(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ частичными суммами ряда Фурье–Чебышёва порядка n, $n+1 > r+\gamma$, справедливы:*

1) *интегральное представление*

$$\varepsilon_n^{(0)}(f_\gamma, x) = \frac{2^{1-\gamma-r}\sin\pi\gamma}{\pi\Gamma(r)} \int_0^1\int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{n+1-r} \times$$

$$\times \frac{(1-t)^{2\gamma}(1-t^2)(1-t^2y)^{r-1}t^{n-\gamma-r}}{\sqrt{1-2ty\cos u + t^2y^2}} \cos\Omega_n^{(0)}(x,t,y)\,dt\,dy, \quad x = \cos u,$$

где $\Omega_n(x,t,y) = (n+1)u - \arg(1-\xi ty), \quad \xi = e^{iu}$;

2) *поточечная оценка*

$$|\varepsilon_n^{(0)}(f_\gamma, x)| \leqslant \frac{2^{1-\gamma-r}|\sin\pi\gamma|}{\pi\Gamma(r)} \int_0^1\int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{n+1-r} \frac{(1-t)^{2\gamma}(1-t^2)(1-t^2y)^{r-1}t^{n-\gamma-r}}{\sqrt{1-2ty\cos u + t^2y^2}}\,dt\,dy;$$

3) *интегральное представление равномерных приближений*

$$\varepsilon_n^{(0)}(f_\gamma) = \frac{2^{1-\gamma-r}|\sin\pi\gamma|}{\pi\Gamma(r)} \int_0^1\int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{n+1-r} \frac{(1-t)^{2\gamma}(1-t^2)(1-t^2y)^{r-1}t^{n-\gamma-r}}{1-ty}\,dt\,dy,$$

где $r \geqslant 1, \gamma > 0$.

4. Случай одного полюса аппроксимирующей функции. Изучим асимптотическое поведение мажоранты равномерных приближений (32) при $n \to \infty$ в зависимости от выбора набора параметров аппроксимирующей функции α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. С этой целью представим мажоранту в виде

$$\varepsilon_n^*(f_\gamma, A) = \frac{2^{1-\gamma-r}|\sin\pi\gamma|}{\pi\Gamma(r)} \int_0^1 (1-t)^{2\gamma}(1-t^2)t^{p-\gamma-r}G_n(t)\,dt, \quad r \geqslant 1,\ \gamma > 0, \tag{38}$$

где

$$G_n(t) = \int_0^1 (1-y)^{r-1} y^{p+1-r} \frac{(1-t^2y)^{r-1}}{1-ty} |\omega(ty)|\,dy, \quad \omega(ty) = \prod_{k=p+1}^{n} \frac{ty-\alpha_k}{1-\alpha_k ty}.$$

Выполнив в интеграле $G_n(t)$ замену переменного по формуле $ty \mapsto y$, будем иметь

$$G_n(t) = \frac{1}{t^{p+1}} \int_0^t \frac{(t-y)^{r-1}y^{p+1-r}(1-ty)^{r-1}}{1-y} |\omega(y)|\,dy, \quad t \in (0, 1).$$

В полученном интеграле снова выполним замену переменного по формуле $y = (1-u)/(1+u)$, $dy = -2du/(1+u)^2$. Тогда

$$G_n(t) = \frac{(1+t)^{2r-2}}{t^{p+1}} \int_\tau^1 \frac{(u^2-\tau^2)^{r-1}}{(1-u^2)^{r-1}u(1+u)} \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p |\chi(u)|\,du, \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$\tau = \frac{1-t}{1+t}, \quad \chi(u) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}, \quad \beta_k = \frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}.$$

Из представления (38) при этом получим

$$\varepsilon_n^*(f_\gamma, A) = \frac{2^{1-\gamma-r}|\sin\pi\gamma|}{\pi\Gamma(r)} \int_0^1 (1-t)^{2\gamma}(1-t^2)t^{-(1+\gamma+r)}(1+t)^{2r-2} \times$$

$$\times \int\limits_{\tau}^{1} \frac{(u^2-\tau^2)^{r-1}}{(1-u^2)^{r-1}u(1+u)} \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p |\chi(u)|\, du\, dt.$$

Во внешнем интеграле перейдем к интегрированию по переменному τ. Тогда

$$\varepsilon_n^*(f_\gamma,\, A) = \frac{2^{2+\gamma+r}|\sin\pi\gamma|}{\pi\Gamma(r)} \int\limits_0^1 \frac{\tau^{2\gamma+1}}{(1-\tau^2)^{1+r+\gamma}(1+\tau)^2} \times$$

$$\times \int\limits_{\tau}^{1} \frac{(u^2-\tau^2)^{r-1}}{(1-u^2)^{r-1}u(1+u)} \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p |\chi(u)|\, du\, d\tau, \quad r \geqslant 1,\ \gamma > 0,\ p = [r+\gamma]. \tag{39}$$

Рассмотрим случай одного полюса. Пусть $n+p$ параметров аппроксимирующей рациональной функции (2) удовлетворяют условию

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0, \quad \alpha_{p+1} = \alpha_{p+2} = \ldots = \alpha_{p+n} = \alpha \in [0,\, 1), \quad \beta = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}. \tag{40}$$

Отметим, что в рассматриваемом нами случае для каждого значения $n \in \mathbb{N}$ может выбираться соответствующий параметр β, т. е., вообще говоря, $\beta = \beta(n)$. При этом будем полагать, что выполняется следующее условие:

$$\lim_{n\to\infty} n\beta = \infty.$$

Изучим асимптотическое поведение величины (39) при $n \to \infty$ в этом случае.

Теорема 4. *Для мажоранты равномерных приближений функции* (28) *рациональным интегральным оператором Фурье–Чебышёва с параметрами, удовлетворяющими условиям* (40), *справедливо асимптотическое равенство*

$$\varepsilon_{n+p,1}^*(f_\gamma,\, \alpha) = \frac{2^{1-r-\gamma}|\sin\pi\gamma|\Gamma(2\gamma+r)\beta^{2\gamma+2r}}{\pi n^{2\gamma+2r}} + O\left(\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n\right), \quad p = [r+\gamma],\ n \to \infty. \tag{41}$$

Доказательство. Мажоранту равномерных приближений (39) представим в виде

$$\varepsilon_{n+p,1}^*(f_\gamma,\, \alpha) = \frac{2^{2+\gamma+r}|\sin\pi\gamma|}{\pi\Gamma(r)} \left[J_n^{(1)} + J_n^{(2)}\right], \tag{42}$$

где

$$J_n^{(1)} = \int\limits_0^{\beta} \nu_{r,\gamma}(\tau) \int\limits_{\tau}^{1} \mu_r(u,\, \tau) \left|\frac{\beta-u}{\beta+u}\right|^n du\, d\tau, \quad J_n^{(2)} = \int\limits_{\beta}^{1} \nu_{r,\gamma}(\tau) \int\limits_{\tau}^{1} \mu_r(u,\, \tau) \left(\frac{u-\beta}{\beta+u}\right)^n du\, d\tau,$$

$$\nu_{r,\gamma}(\tau) = \frac{\tau^{2\gamma+1}}{(1-\tau^2)^{1+r+\gamma}(1+\tau)^2}, \quad \mu_r(u,\, \tau) = \frac{(u^2-\tau^2)^{r-1}}{(1-u^2)^{r-1}u(1+u)} \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p.$$

Исследуем каждый из двух интегралов по отдельности. Так, интеграл $J_n^{(1)}$ представим в виде

$$J_n^{(1)} = \int\limits_0^{\beta} \nu_{r,\gamma}(\tau) K_n^{(1)}(\tau)\, d\tau, \tag{43}$$

где

$$K_n^{(1)}(\tau) = I_1 + I_2, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{44}$$

$$I_1 = \int\limits_{\tau}^{\beta} \mu_r(u,\, \tau) \left(\frac{\beta-u}{\beta+u}\right)^n du, \quad I_2 = \int\limits_{\beta}^{1} \mu_r(u,\, \tau) \left(\frac{u-\beta}{\beta+u}\right)^n du.$$

Для изучения асимптотического поведения интегралов I_1 и I_2 применим метод Лапласа [26; 27]. Интеграл I_1 представим в виде

$$I_1 = \int\limits_{\tau}^{\beta} \mu_r(u,\, \tau) e^{nS(u)}\, du, \quad S(u) = \ln\frac{\beta-u}{\beta+u}.$$

Функция $S(u)$ убывает при $u \in (\tau,\, \beta)$, $\tau \in (0,\, \beta)$, и, значит, достигает своего максимального значения при $u = \tau$. Реализуя метод Лапласа, разложим функцию $S(u)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $u = \tau$:

$$S(u) = \ln\frac{\beta-\tau}{\beta+\tau} - \frac{2\beta}{\beta^2-\tau^2}(u-\tau) + o(u-\tau).$$

Учитывая также, что

$$\mu_r(u,\, \tau) \sim \frac{(2\tau)^{r-1}}{(1-\tau^2)^{r-1}\tau(1+\tau)}\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^p (u-\tau)^{r-1}, \quad u \to \tau,$$

при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$ получим

$$I_1 \sim \frac{(2\tau)^{r-1}}{(1-\tau^2)^{r-1}\tau(1+\tau)}\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^p \left(\frac{\beta-\tau}{\beta+\tau}\right)^n \int\limits_{\tau}^{\tau+\varepsilon} (u-\tau)^{r-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\beta n}{\beta^2-\tau^2}(u-\tau)}\, du.$$

Применив соответствующие преобразования к интегралу справа, приходим к асимптотическому равенству

$$I_1 \sim \frac{\tau^{r-2}\Gamma(r)}{2(1-\tau^2)^{r-1}(1+\tau)}\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^p \left(\frac{\beta-\tau}{\beta+\tau}\right)^n \left(\frac{\beta^2-\tau^2}{2\beta n}\right)^r, \quad n \to \infty.$$

Исследуем интеграл I_2. Представим его в виде

$$I_2 = \int\limits_{\beta}^{1} \mu_r(u,\, \tau) \mathrm{e}^{nS(u)}\, du, \quad S(u) = \ln\frac{u-\beta}{u+\beta}.$$

Функция $S(u)$ возрастает при $u \in (\beta,\, 1)$ и, значит, достигает своего максимального значения при $u = 1$. Используя разложение в ряд Тейлора

$$S(u) = \ln\frac{1-\beta}{1+\beta} + \frac{2\beta}{1-\beta^2}(u-1) + o(u-1)$$

и асимптотическое равенство

$$\mu_r(u,\, \tau) \sim \frac{(1-\tau^2)^{r-1}}{2^{r+p}}(1-u)^{p-r+1},$$

справедливые при $u \to 1$, для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$ получим

$$I_2 \sim \frac{(1-\tau^2)^{r-1}}{2^{r+p}}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n \int\limits_{1-\varepsilon}^{1} (1-u)^{p-r+1} \mathrm{e}^{\frac{2\beta n}{1-\beta^2}(u-1)}\, du.$$

Отсюда после соответствующих преобразований интеграла справа придем к асимптотическому равенству

$$I_2 \sim \frac{(1-\tau^2)^{r-1}}{2^{r+p}}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n \left(\frac{1-\beta^2}{2\beta n}\right)^{2+p-r} \Gamma(2+p-r), \quad n \to \infty.$$

Из представления (44) с учетом асимптотических выражений для интегралов I_1 и I_2 находим

$$K_n^{(1)}(\tau) \sim \frac{\tau^{r-2}\Gamma(r)}{2(1-\tau^2)^{r-1}(1+\tau)}\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^p \left(\frac{\beta-\tau}{\beta+\tau}\right)^n \left(\frac{\beta^2-\tau^2}{2\beta n}\right)^r +$$

$$+\frac{(1-\tau^2)^{r-1}}{2^{r+p}}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n \left(\frac{1-\beta^2}{2\beta n}\right)^{2+p-r} \Gamma(2+p-r), \quad n \to \infty.$$

Из последнего асимптотического равенства и интеграла (43) получим

$$J_n^{(1)} \sim \frac{\Gamma(r)}{2(2\beta n)^r}\int\limits_0^{\beta} \frac{\tau^{2\gamma+r-1}(\beta^2-\tau^2)^r}{(1-\tau^2)^{2r+\gamma}(1+\tau)^3}\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^p \left(\frac{\beta-\tau}{\beta+\tau}\right)^n d\tau +$$

$$+\frac{\Gamma(2+p-r)}{2^{r+p}}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n \left(\frac{1-\beta^2}{2\beta n}\right)^{2+p-r} \int\limits_0^{\beta} \frac{\tau^{2\gamma+1}\, d\tau}{(1-\tau^2)^{2+\gamma}(1+\tau)^2}, \quad n \to \infty.$$

Применив к первому интегралу справа еще один раз метод Лапласа, получим

$$J_n^{(1)} \sim \frac{\Gamma(r)\Gamma(2\gamma+r)\beta^{2\gamma+2r}}{2^{2\gamma+2r+1}n^{2\gamma+2r}} +$$

$$+\frac{\Gamma(2+p-r)}{2^{r+p}}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n\left(\frac{1-\beta^2}{2\beta n}\right)^{2+p-r}\int\limits_0^\beta \frac{\tau^{2\gamma+1}\,d\tau}{(1-\tau^2)^{2+\gamma}(1+\tau)^2}, \quad n\to\infty. \tag{45}$$

Займемся выражением $J_n^{(2)}$ (см. (42)). Оценим его внутренний интеграл

$$I_3 = \int\limits_\tau^1 \frac{(u^2-\tau^2)^{r-1}}{(1-u^2)^{r-1}u(1+u)}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p\left(\frac{u-\beta}{u+\beta}\right)^n du.$$

Нетрудно получить, что

$$I_3 \leqslant \frac{(1-\tau^2)^{r-1}}{\tau(1+\tau)^{r+p}}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n\int\limits_\tau^1(1-u)^{p-r+1}\,du = \frac{(1-\tau^2)^{r-1}}{\tau(1+\tau)^{r+p}}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n\frac{(1-\tau)^{2+p-r}}{2+p-r}.$$

Возвращаясь к представлению интеграла $J_n^{(2)}$, получим

$$J_n^{(2)} \leqslant \frac{1}{2+p-r}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n\int\limits_\beta^1\frac{\tau^{2\gamma}(1-\tau)^{p-r-\gamma}}{(1+\tau)^{r+p+\gamma+4}}\,d\tau, \quad p=[r+\gamma].$$

Интеграл в правой части оценки существует при указанных значениях параметров и представляет собой некоторую функцию переменных r и γ, поэтому

$$J_n^{(2)} \leqslant d(r,\,\gamma)\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^n, \quad n\to\infty, \tag{46}$$

где $d(r,\,\gamma)$ – некоторая величина, не зависящая от n, но зависящая от параметров, указанных в скобках.

Обратив внимание, что второе слагаемое в асимптотическом равенстве (45) имеет заведомо больший порядок малости в сравнении с правой частью в оценке (46), из представления (42) придем к соотношению (41). Доказательство теоремы 4 завершено. □

Следствие 3. *Для равномерных приближений интеграла Римана–Лиувилля с плотностью* $\varphi_\gamma(x)$ *на отрезке* $[-1,\,1]$ *частичными суммами ряда Фурье–Чебышёва порядка* n, $n+1>r+\gamma$, *справедлива асимптотическая оценка*

$$\varepsilon_n^{(0)}(f_\gamma) \sim \frac{2^{1-r-\gamma}|\sin\pi\gamma|\Gamma(2\gamma+r)}{\pi n^{2\gamma+2r}}, \quad r\geqslant 1,\ \gamma>0,\ n\to\infty.$$

Отметим, что в последнем следствии содержится именно асимптотическая оценка равномерных приближений, а не мажоранты.

5. Наилучшая мажоранта равномерных приближений. Представляет интерес минимизировать правую часть асимптотического равенства (41) посредством выбора оптимального для этой задачи параметра β. Другими словами, будем искать наилучшую мажоранту равномерных приближений функции $f_\gamma(x)$ рациональным интегральным оператором (2) с одним полюсом в открытой комплексной плоскости. Положим

$$\varepsilon^*_{n+p,1}(f_\gamma) = \inf_\alpha \varepsilon^*_{n+p,1}(f_\gamma,\,\alpha),$$

где $\varepsilon^*_{n+p,1}(f_\gamma,\,\alpha)$ асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений, определенное в (41).

Теорема 5. *В условиях теоремы* 4 *существует такое значение параметра* α, *что справедливо асимптотическое равенство*

$$\varepsilon^*_{n+p,1}(f_\gamma) = \frac{2^{1+r+\gamma}|\sin\pi\gamma|\Gamma(2\gamma+r)(\gamma+r)^{2\gamma+2r}}{\pi}\frac{(\ln n)^{2\gamma+2r}}{n^{4\gamma+4r}}(1+o(1)), \quad n\to\infty. \tag{47}$$

Доказательство. Обратимся к асимптотическому равенству (41). Очевидно, что при постоянных значениях параметра β порядок стремления к нулю правой части исследуемого асимптотического равенства не отличается от полиномиального, указанного в следствии 3. Пусть $\beta = \beta(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Изучим поведение правой части равенства (41) в этом случае. Положим, что параметр β имеет вид

$$\beta = c\frac{\ln n}{n},$$

где c – некоторая величина, не зависящая от n. Ее значение будет определено позже. Тогда из асимптотического равенства (41) находим, что

$$\varepsilon^*_{n+p,1}(f_\gamma,\ \alpha) = \frac{2^{1-r-\gamma}|\sin\pi\gamma|\Gamma(2\gamma+r)c^{2\gamma+2r}(\ln n)^{2\gamma+2r}}{\pi n^{4\gamma+4r}} + O\left(\frac{1}{n^{2c}}\right), \quad p = [r+\gamma],\ n \to \infty. \qquad (48)$$

Оптимальное значение c^* определим из условия равенства степеней при n,

$$4\gamma + 4r = 2c, \quad c^* = 2\gamma + 2r.$$

При этом из (48) следует, что

$$\varepsilon^*_{n+p,1}(f_\gamma,\ \alpha^*) = \frac{2^{1+r+\gamma}|\sin\pi\gamma|\Gamma(2\gamma+r)(\gamma+a)^{2\gamma+2r}}{\pi}\frac{(\ln n)^{2\gamma+2r}}{n^{4\gamma+4r}}(1+o(1)), \quad n \to \infty.$$

Для того, чтобы доказать, что выбранное значение параметра $\alpha = \alpha^*$, $\alpha^* = (1-\beta^*)/(1+\beta^*)$ является оптимальным в том смысле, что доставляет правой части выражения (41) асимптотически минимальное значение достаточно воспользоваться известными методами, описанными, например, в [22]. Следовательно,

$$\varepsilon^*_{n+p,1}(f_\gamma) = \varepsilon^*_{n+p,1}(f_\gamma,\ \alpha^*), \quad n \to \infty,$$

и приходим к (47). $\square$

Заключение. В работе изучены аппроксимации функций, представимых интегралом Римана–Лиувилля на отрезке $[-1,\ 1]$ рациональными интегральными операторами типа Фурье–Чебышёва. Найдено интегральное представление приближений, зависящее от полюсов аппроксимирующей функции. В случае, когда плотность интеграла Римана–Лиувилля имеет на отрезке $[-1,\ 1]$ степенную особенность, получены оценки поточечных и равномерных приближений, точные в случае четного количества полюсов аппроксимирующей функции. В случае одного полюса в открытой комплексной плоскости у аппроксимирующей функции установлено асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений и оптимальное значение параметров, при которых это асимптотическое выражение имеет наибольшую скорость убывания.

В качестве следствия приведены асимптотические оценки равномерных приближений интеграла Римана–Лиувилля с плотностью, имеющей степенную особенность, частичными суммами полиномиального ряда Фурье–Чебышёва.

Из проведенных исследований можно предположить, что скорости наилучших равномерных рациональных приближений функций, представимых интегралом Римана–Лиувилля с плотностью, имеющей степенную особенность, оказываются в значительной степени выше соответствующих полиномиальных аналогов, поскольку этот результат справедлив уже в случае одного полюса в открытой комплексной плоскости у аппроксимирующей функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований «Конвергенция 2020», № 20162269.

Литература

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

2. *Никольский С. М.* О наилучшем приближении функции, s-ая производная которой имеет разрывы первого рода // Докл. АН СССР. 1947. Т. 55, № 2. С. 99–102.

3. *Тюленева А. А.* Приближение интегралов Римана–Лиувилля алгебраическими полиномами на отрезке // Изв. Саратовского ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, № 3. С. 305–311.

4. *Ганзбург И. М.* О приближении функций с заданным модулем непрерывности суммами П. Л. Чебышёва // Докл. АН СССР. 1953. Т. 91, № 6. С. 1253–1256.

5. *Бадков В. М.* Приближение функций в равномерной метрике суммами Фурье по ортогональным полиномам // Тр. МИАН СССР. 1980. Т. 145. С. 20–62.

6. *Селиванова С. Г.* Асимптотические оценки приближений дифференцируемых непериодических функций суммами Чебышёва // Докл. АН СССР. 1955. Т. 105, № 4. С. 648–651.

7. *Тиман А. Ф., Тучинский Л. И.* Приближение дифференцируемых функций, заданных на конечном отрезке алгебраическими многочленами // Докл. АН СССР. 1956. Т. 111, № 4. С. 771–773.

8. *Райцин Р. А.* О наилучшем приближении одного класса дифференцируемых функций алгебраическими многочленами // Изв. вузов. Математика. 1976. № 1. С. 64–74.

9. *Райцин Р. А.* О рядах Фурье–Чебышёва одного класса функций // Изв. вузов. Математика. 1988. № 10. С. 79–81.

10. *Ровба Е. А.* Приближение функций, дифференцируемых в смысле Римана–Лиувилля, рациональными операторами // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 1996. Т. 40, № 6. С. 18–22.

11. *Смотрицкий К. А.* Аппроксимация рациональными операторами Валле–Пуссена на отрезке // Тр. Ин-та математики. 2001. Т. 9. С. 110–114.

12. *Смотрицкий К. А.* О приближении дифференцируемых в смысле Римана–Лиувилля функций // Весці Нац. акад. навук. Сер. фіз.-мат. навук. 2002. № 4. С. 42–47.

13. *Рыбаченко И. В.* Рациональная интерполяция функций с производной Римана–Лиувилля из L_p // Вестник БГУ. Сер. 1. 2006. № 2. С. 69–74.

14. *Старовойтов А. П.* Сравнение скоростей рациональных и полиномиальных аппроксимаций дифференцируемых функций // Математические заметки. 1988. Т. 44, № 4. С. 528–535.

15. *Старовойтов А. П.* Рациональные приближения дробных интегралов Римана–Лиувилля и Вейля // Математические заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 428–441.

16. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1983.

17. *Васильев Н. И., Клоков Ю. А., Шкерстена А. Я.* Применение полиномов Чебышёва в численном анализе. Рига: Зинатне, 1984.

18. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. 3-е изд., перераб. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

19. *Марфицын С. В., Марфицын В. П.* Применение полиномов Чебышёва 1-го рода для описания устойчивых состояний металла при постоянных и переменных нагрузках // Вестн. Курганского госун-та. Сер. техн. науки. 2016. Вып. 1, № 3. С. 96–98.

20. *Miyakoda T.* Direct discretization of the fractional-order differential by using Chebyshev series expansion // PAMM Proc. Appl. Math. Mech. 2007. Vol. 7. P. 2020011–2020012.

21. *Ровба Е. А.* Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации // Докл. НАН БССР. 1979. Т. 23, № 11. С. 968–971.

22. *Patseika P. G., Rouba Y. A., Smatrytski K. A.* On one rational integral operator of Fourier–Chebyshev type and approximation of Markov functions // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2020. Vol. 2. P. 6–27.

23. *Поцейко П. Г., Ровба Е. А.* Приближения на классах интегралов Пуассона рациональными интегральными операторами Фурье–Чебышёва // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62, № 2. С. 362–386.

24. *Русак В. Н.* Рациональные функции как аппарат приближения. Минск: БГУ, 1979.

25. *Никольский С. М.* О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1946. Т. 10, № 4. С. 295–322.

26. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979.

27. *Федорюк М. В.* Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1987.

28. *Пинкевич В. Т.* О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Wey'я // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4, № 6. С. 521–528.

References

1. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1987 (in Russian).

2. Nikol'skii S. M. On the best approximation of a function whose s-th derivative has discontinuities of the first kind. *Dokl. Academy of Sciences of the USSR,* 1947, vol. 55, no. 2, pp. 99–102 (in Russian).

3. Tyleneva A. A. Approximation of the Riemann–Liouville integrals by algebraic polynomials on the segment. *Izv. Saratov University. Ser. Math. Fur. Inform.*, 2014, vol. 14, no. 3, pp. 305–311 (in Russian).

4. Ganzburg I. M. On the approximation of functions with a given modulus of continuity by P. L. Chebyshev sums. *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*, 1953, vol. 91, no. 6, pp. 1253–1256 (in Russian).

5. Badkov V. M. Approximation of functions in the uniform metric by Fourier sums over orthogonal polynomials. *Trudy MIAN SSSR*, 1980, vol. 145, pp. 20–62 (in Russian).

6. Selivanova S. G. Asymptotic estimates for approximations of differentiable non-periodic functions by Chebyshev sums. *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*, 1955, vol. 105, no. 4, pp. 648–651 (in Russian).

7. Timan A. F., Tuchinskii L. I. Approximation of differentiable functions defined on a finite interval by algebraic polynomials. *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*, 1956, vol. 111, no. 4, pp. 771–773 (in Russian).

8. Raitsin R. A The best approximation of a certain class of differentiable functions by algebraic polynomials. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1976, vol. 20, no. 1, pp. 54–62.

9. Raitsin R. A. Fourier–Chebyshev series of a class of functions. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1988, vol. 32, no. 10, pp. 123–126.

10. Rovba E. A. Approximation of functions differentiable in the Riemann–Liouville sense by rational operators. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 1996, vol. 40, no. 6, pp. 18–22 (in Russian).

11. Smotritskii K. A. Approximation by rational operators of Valle Poussin on a segment. *Trudy Instituta matematiki*, 2001, vol. 9, pp. 136–139 (in Russian).

12. Smotritskii K. A. On the approximation of functions differentiable in the sense of Riemann-Liouville. *Vestsi NAN Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk*, 2002, no. 4, pp. 42–47 (in Russian).

13. Rybachenko I. V. Rational interpolation of functions with the Riemann–Liouville derivative from L_p. *Vestnik BGU. Ser. 1,* 2006, no. 2, pp. 69–74 (in Russian).

14. Starovoitov A. P. Comparison of the rates of rational and polynomial approximations of differentiable functions. *Math. Notes*, 1988, vol. 44, no. 4, pp. 770–774.

15. Starovoitov A. P. Rational approximations of Riemann–Liouville and Weyl fractional integrals. *Math. Notes*, 2005, vol. 78, no. 3, pp. 391–402.

16. Pashkovskii S. *Computational applications of polynomials and Chebyshev series*. Moscow, Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit-ry, 1983 (in Russian).

17. Vasiliev N. I., Klokov Yu. A., Shkerstena A. Ya. *Application of Chebyshev polynomials in numerical analysis*. Riga, Zinatne Publ., 1984 (in Russian).

18. Suetin P. K. *Classical orthogonal polynomials*. 3rd ed., revised. and additional Moscow, FIZMATLIT Publ., 2005.

19. Marfitsyn S. V., Marfitsyn V. P. The use of Chebyshev's polynomials of the first type for a description of the steady-state conditions of metal under constant and variable loading. *Vestnik Kurganskogo gosuniversiteta. Ser. tekhn. nauki,* 2016, iss. 1, no. 3, pp. 96–98 (in Russian).

20. Miyakoda T. Direct discretization of the fractional-order differential by using Chebyshev series expansion. *PAMM Proc. Appl. Math. Mech.*, 2007, vol. 7, pp. 2020011–2020012.

21. Rovba E. A. On one direct method in rational approximation. *Dokl. NAS BSSR*, 1979, vol. 23, no. 11, pp. 968–971 (in Russian).

22. Patseika P. G., Rouba Y. A., Smatrytski K. A. On one rational integral operator of Fourier–Chebyshev type and approximation of Markov functions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics,* 2020, vol. 2, pp. 6–27.

23. Potseiko P. G., Rovba Y. A. Approximations on classes of Poisson integrals by Fourier–Chebyshev rational integral operators. *Siberian Math. J.*, 2021, vol. 62, no. 2, pp. 292–312.

24. Rusak V. N. *Rational functions as an apparatus of approximation.* Minsk, Belorusskii gosudarstvennyi universitet im. V. I. Lenina, 1979. 179 p. (in Russian).

25. Nikolsky S. On the best approximation of functions satisfying Lipschitz's conditions by polynomials. *Izvestia Akad. Nauk SSSR*, 1946, vol. 10, no. 4, pp. 295–322 (in Russian).

26. Evgrafov M. A. *Asymptotic estimates and entire functions*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p. (in Russian).

27. Fedoryuk M. V. *Asymptotics. Integrals and series*. Moscow, Nauka Publ., 1987. 544 p. (in Russian).

28. Pinkewitch W. Sur l'ordre du reste de la serie de Fourier des fonctions derivables au sens de Weyl. *Izvestia Akad. Nauk SSSR*, 1940, vol. 4, no. 6, pp. 521–528 (in Russian).