Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Том 33. № 2. С. 73–89

УДК 517.5 EDN: RBMQLB

ОБ ОДНОМ РАЦИОНАЛЬНОМ СИНГУЛЯРНОМ ИНТЕГРАЛЕ ДЖЕКСОНА И АППРОКСИМАЦИЯХ ФУНКЦИЙ МАРКОВА

П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
e-mail: pahamatby@gmail.com, rovba.ea@gmail.com

Поступила: 28.07.2025 **Исправлена:** 10.10.2025 **Принята:** 15.12.2025

Ключевые слова: функции Маркова, рациональные интегральные операторы Фурье–Чебышёва, сингулярный интеграл Джексона, асимптотические оценки, метод Лапласа, точные константы.

Аннотация. Вводится рациональный сингулярный интеграл Джексона, представляющий собой линейную комбинацию рациональных интегральных операторов Фурье–Чебышёва с соответствующей треугольной матрицей коэффициентов и фиксированным количеством геометрически различных полюсов. Устанавливается его интегральное представление.

Исследуются рациональные аппроксимации функций Маркова на отрезке $[-1,\ 1]$ введенным методом. Устанавливается интегральное представление приближений и оценка сверху равномерных приближений.

Изучаются аппроксимации функций Маркова с абсолютно непрерывной мерой, производная которой асимптотически равна некоторой степенной функции. В этом случае найдены оценки сверху поточечных и равномерных приближений и асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений.

Устанавливаются оптимальные значения параметров, при которых обеспечиваются наилучшие равномерные приближения функций Маркова рациональными сингулярными интегралами Джексона. С этой целью решается соответствующая экстремальная задача. Показано, что при специальном выборе параметров равномерные рациональные приближения имеют более высокую скорость убывания в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами. В качестве следствия рассмотрены аппроксимации некоторых элементарных функций, представимых функциями Маркова на отрезке $[-1,\ 1]$.

ON A RATIONAL JACKSON SINGULAR INTEGRAL AND APPROXIMATIONS OF MARKOV FUNCTIONS

P. G. Patseika, Ya. A. Rouba

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus
e-mail: pahamatby@gmail.com, rovba.ea@gmail.com

Received: 28.07.2025 **Revised:** 10.10.2025 **Accepted:** 15.12.2025

Keywords: Markov functions, Fourier–Chebyshev rational integral operators, Jackson singular integral, asymptotic estimates, Laplace method, exact constants.

Abstract. The rational Jackson singular integral is introduced, which is a linear combination of Fourier–Chebyshev rational integral operators with a corresponding triangular matrix of coefficients and a fixed number of geometrically different poles. Its integral representation is established.

Rational approximations of Markov functions on the segment $[-1,\ 1]$ are investigated by the introduced method. An integral representation of approximations and an upper bound of uniform approximations are established.

Approximations of Markov functions with an absolutely continuous measure whose derivative is asymptotically equal to a function with a power singularity are studied. In this case, top-down estimates of pointwise and uniform approximations and an asymptotic expression of the majorant of uniform approximations are found.

Optimal values of the parameters of rational Jackson singular integrals are established, at which the best uniform approximations of Markov functions are provided by this method. For this purpose, the corresponding extreme problem is solved. It is shown that with a special choice of parameters, uniform rational approximations have a higher rate of decrease in comparison with the corresponding polynomial analogues. As a corollary, approximations of some elementary functions represented by Markov functions on the segment $[-1,\ 1]$ are considered.

1. Введение

Пусть μ – положительная борелевская мера с компактным носителем $F = \operatorname{supp}\mu \subset \mathbb{R}$. Преобразование Коши меры μ

$$\hat{\mu}(z) = \int\limits_F \frac{d\mu(t)}{t-z}, \quad z \in \bar{\mathbb{C}} \backslash F,$$

называется функцией Маркова. Функции Маркова голоморфны в $\overline{\mathbb{C}} \backslash F$ и исследование их рациональных аппроксимаций является хорошо известной классической задачей. Одной из первых в этом направлении является работа А. А. Маркова [1]. Позднее данной тематике посвятили свои статьи А. А. Гончар [2], Т. Ганелиус [3], Дж.-Е. Андерссон [4], А. А. Пекарский [5]. Н. С. Вячеславов и Е. П. Мочалина [6] изучили аппроксимации функций Маркова в пространствах Харди $H_p,\ p \in (0, +\infty)$, при определенных условиях на меру μ. А. П. Старовойтовым и Ю. А. Лабыч [7] для функции Маркова, порожденной положительными борелевскими мерами степенного типа, установлена асимптотика поведения строчных последовательностей ее таблицы Паде. Последнее позволило найти точные порядки убывания наилучших приближений функций Маркова рациональными функциями с фиксированным числом полюсов. Отметим недавнюю работу Т. С. Мардвилко [8], в которой исследованы наилучшие равномерные рациональные приближения четного и нечетного продолжения функций со степенной особенностью при помощи функций Маркова. Отметим, что при решении указанных выше задач не применялись методы, основанные на классических рядах Фурье и методах их суммирования.

В работе [9] исследованы аппроксимации функций Маркова в единичном круге частичными суммами рядов Фурье по системам рациональных функций, введенных С. Такенакой [10] и Ф. Мальмквистом [11], а также на отрезке $[-1,\ 1]$ по системам рациональных функций, введенных М. М. Джрбашяном и А. А. Китбаляном [12]. В работе [13] эти исследования были продолжены: найдены асимптотические оценки равномерных рациональных приближений указанными методами при фиксированном числе геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции. Отметим, что впервые аппроксимации с ограничениями на количество геометрически различных полюсов изучались в работах К. Н. Лунгу (см., напр., [14; 15]).

Д. Джексон [16] для решения задачи аппроксимации 2π-периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица, тригонометрическими полиномами, вводит сингулярный интегральный оператор, образом которого является тригонометрический полином. Эта конструкция впоследствии получила название сингулярного интеграла Джексона с ядром Джексона. Полиномиальный тригонометрический сингулярный интеграл Джексона к настоящему времени достаточно хорошо изучен и нашел широкое применение при решении практических задач теории аппроксимаций [17; 18] и других направлений [19; 20]. Г. П. Сафроновой [21] установлено, что сингулярный интеграл Джексона является методом суммирования тригонометрического ряда Фурье с некоторой треугольной матрицей коэффициентов и найдено явное представление этих коэффициентов. Позже А. К. Покало [22] применил найденное представление сингулярного интеграла Джексона для решения задач аппроксимации на ряде функциональных классов. Воспользовавшись результатом Г. П. Сафроновой, в работе [23] было установлено представление сингулярного интеграла Джексона на отрезке $[-1,\ 1]$, ассоциированного с системой полиномов Чебышёва первого рода, линейной комбинацией частичных сумм полиномиального ряда Фурье–Чебышёва:

$$U_{2n}^{(0)}(f,\, x) = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} b_k s_k(f,\, x) + \sum_{k=0}^{n} b_{n+k} s_{n+k}(f,\, x) \right], \quad x \in [-1,\ 1],$$

где

$$\gamma_{n+1} = \frac{2\,(n+1)\,(2(n+1)^2+1)}{3},$$

$$b_k = \begin{cases} -3k^2 + (4n+1)\,k + 2\,(n+1), & k = 0, 1, \ldots, n-1, \\ k^2 - k(2n+3) + (n+1)(n+2), & k = n, n+1, \ldots, 2n, \end{cases} \tag{1}$$

$s_k(f,\ x)$ – частичные суммы ряда Фурье–Чебышёва соответствующих степеней. Последнее позволило найти новые аппроксимационные свойства сингулярного интеграла Джексона на классах функций со степенной особенностью на отрезке $[-1,\ 1]$.

В. Н. Русак [24; 25] ввел рациональные интегральные операторы типа Джексона на вещественной оси и исследовал некоторые их аппроксимационные свойства. Впоследствии А. А. Пекарский [26] применил эти операторы для получения новых оценок равномерных рациональных приближений непрерывных функций. Направление исследований, связанное с построением рациональных интегральных операторов, являющихся аналогами известных полиномиальных периодических операторов типа Фурье, Фейера, Джексона, Валле Пуссена, и изучением их аппроксимационных свойств является актуальным и продолжается в трудах других математиков. Е. А. Ровба [27] ввел рациональные интегральные операторы типа Джексона на отрезке $[-1,\ 1]$ и получил оценки равномерных рациональных приближений непрерывных функций этим методом в терминах модулей непрерывности. К. А. Смотрицкий [28] изучил аппроксимационные свойства рациональных интегральных операторов типа Джексона на классах выпуклых на отрезке функций. Им было установлено, что для данного класса функций равномерные приближения в этом случае имеют порядок наилучшего. Основываясь на результатах работы [23], был построен [29] сингулярный интеграл Джексона на отрезке $[-1,\ 1]$, ассоциированный с системой рациональных функций Чебышёва–Маркова с двумя геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости, и изучены его аппроксимационные свойства на классах функций со степенной особенностью.

В 1979 г. Е. А. Ровба [30] ввел рациональный оператор, ассоциированный с системой рациональных функций Чебышёва–Маркова, который является обобщением полиномиального оператора Фурье–Чебышёва и представляет собой рациональную функцию порядка n с произвольным количеством полюсов. Пусть задано произвольное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, где a_k либо являются действительными и $|a_k| < 1$, либо попарно комплексно сопряженными. На множестве суммируемых на отрезке $[-1,\ 1]$ с весом $1/\sqrt{1-x^2}$ функций $f(x)$ рассмотрим рациональный интегральный оператор типа Фурье–Чебышёва порядка не выше n (см. [30]):

$$s_n(f,\ x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v)\frac{\sin\left(\dfrac{v-u}{2}+\lambda_n(u,\ v)\right)}{\sin\dfrac{v-u}{2}}\,dv, \quad x=\cos u, \tag{2}$$

где

$$\lambda_n(u,\ v)=\int_u^v \lambda_n(y)\,dy, \quad \lambda_n(y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{1+2|z_k|\cos(y-\arg z_k)+|z_k|^2}, \quad z_k=\frac{a_k}{1+\sqrt{1-a_k^2}},\ |z_k|<1.$$

Оператор $s_n : f \to \mathbb{R}_n(A)$, где $\mathbb{R}_n(A)$ – множество рациональных функций вида

$$\frac{p_n(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k x)}, \quad p_n \in \mathbb{N},$$

A – множество параметров $(a_1,\ldots,a_n)$, и $s_n(1,\ x)\equiv 1$. В частности, если положить $a_k=0,\ k=1,\ldots,n$, то $s_n(f,\ x)$ – есть частичная сумма ряда Фурье по многочленам Чебышёва первого рода.

В работе [31] изучены рациональные аппроксимации функции Маркова на отрезке $[-1,\ 1]$ интегральными операторами (2) с фиксированным количеством геометрически различных полюсов. В частности, когда $\operatorname{supp}\mu=[1,a],\ a>1$, мера μ абсолютно непрерывна на $[1,a],\ a>1$, и удовлетворяет условиям: $d\mu(t)=\varphi(t)\,dt$ и $\varphi(t)\asymp(t-1)^{\alpha}$ на $[1,a]$, получены асимптотические оценки равномерных приближений в случае четной кратности полюсов аппроксимирующей функции. Установлено, что специальным выбором параметров аппроксимирующей функции достигается более высокая скорость убывания равномерных приближений на изучаемых классах в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами. В [32] изучены аппроксимационные свойства сумм Абеля–Пуассона рациональных интегральных операторов (2) в приближениях функций Маркова. Аналогичная задача для сумм Фейера и Валле Пуссена решена в [33] и [34] соответственно.

Представляет интерес исследовать аппроксимационные свойства сингулярного интеграла Джексона как метода суммирования рациональных интегральных операторов Фурье–Чебышёва (2) на классах функций Маркова. В настоящей работе вводятся суммы рациональных интегральных операторов Фурье–Чебышёва (2) с фиксированным количеством геометрически различных полюсов, представляющие собой сингулярный интеграл Джексона, и изучаются аппроксимации функций Маркова на отрезке $[-1,\ 1]$ этим методом. В работе получены соответствующие оценки равномерных приближений. Установлено, что введенный рациональный сингулярный интеграл Джексона при определенном выборе полюсов обеспечивает скорости равномерных приближений на кассах функций Маркова лучшие в смысле порядка чем соответствующие полиномиальные.

2. Рациональный сингулярный интеграл Джексона

Пусть q – произвольное натуральное число. A_q – есть множество параметров из A таких, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ровно q различных и кратность каждого параметра равна $m, n = mq$, т. е. $A_q = (\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_q, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_q}_{m \text{ раз}})$. Составим сумму

$$U_{2n,q}(f,\ x) = \frac{1}{\gamma_{m+1}} \sum_{k=0}^{2m} b_k s_{kq,q}(f,\ x), \quad x \in [-1,\ 1],\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{3}$$

где коэффициенты b_k и константа Джексона γ_{m+1} определены в (1), $s_{kq,q}(\cdot,\cdot), k = 0,1,\ldots,2m,$ – рациональные интегральные операторы Фурье–Чебышёва (2), образом которых являются рациональные функции порядка kq. Выражение (3) естественно назвать рациональным сингулярным интегралом Джексона.

Из представления (3) очевидно, что суммы $U_{2n,q} : f \to \mathbb{R}_{2n}(A_q)$, где $\mathbb{R}_{2n}(A_q)$ – множество рациональных функций вида

$$\frac{\pi_{2n}(x)}{\left(\prod_{k=1}^{q}(1+a_k x)\right)^{2m}}, \quad a_k = \frac{2z_k}{1+z_k^2},\ n = mq,\ \pi_{2n}(x) \in \mathbb{P}_{2n}.$$

Причем $U_{2n,q}(1,\ x) \equiv 1$.

Таким образом будем вести речь об аппроксимации рациональными функциями с q геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости кратности $2m$ каждый.

Теорема 2.1. *Для сингулярного интеграла Джексона на отрезке* $[-1,\ 1]$, *ассоциированного с системой рациональных функций Чебышёва–Маркова, с* q *геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости, имеет место интегральное представление*

$$U_{2n,q}(f,\ x) = -\frac{1}{8\pi\gamma_{m+1}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \frac{P_{n,q}(u,\ v)}{\sin\dfrac{v-u}{2}\sin^3\dfrac{\lambda_q(u,\ v)}{2}}\,dv, \quad x = \cos u,\ n = mq, \tag{4}$$

где

$$P_{n,q}(u,\ v) = (m+1)\cos\left(\frac{3\lambda_q(u,\ v)}{2} - \frac{v-u}{2}\right) - 3\cos\left(\frac{\lambda_q(u,\ v)}{2} - \frac{v-u}{2}\right) -$$

$$-(m+1)\cos\left(\frac{\lambda_q(u,\ v)}{2} + \frac{v-u}{2}\right) + 4\cos\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda_q(u,\ v) + \frac{v-u}{2}\right) -$$

$$-\cos\left(\left(2m+\frac{3}{2}\right)\lambda_q(u,\ v) + \frac{v-u}{2}\right),$$

величина $\lambda_q(u,\ v)$ *определена в* (2).

Доказательство. Воспользуемся представлением (3). Известно [30], что для рационального интегрального оператора Фурье–Чебышёва порядка $kq, k = 0,1,2,\ldots,$ с q геометрически различными полюсами имеет место интегральное представление

$$s_{kq,q}(f,\,x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\cos v)\frac{\zeta\left(\dfrac{\omega_q(\zeta)}{\omega_q(\xi)}\right)^k-\xi\left(\dfrac{\omega_q(\xi)}{\omega_q(\zeta)}\right)^k}{\zeta-\xi}\,dv,$$

где

$$\omega_q(y)=\prod_{k=1}^{q}\frac{y+z_k}{1+z_ky},\qquad \xi=\mathrm{e}^{iu},\ \zeta=\mathrm{e}^{iv},\ x=\cos u. \tag{5}$$

Подставим последнее интегральное представление в (3) и поменяем порядок суммирования и интегрирования. Тогда

$$U_{2n,q}(f,\,x)=\frac{1}{2\pi\gamma_{m+1}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\cos v)}{\zeta-\xi}\left[\zeta\sum_{k=0}^{2m}b_k\left(\frac{\omega_q(\zeta)}{\omega_q(\xi)}\right)^k-\xi\sum_{k=0}^{2m}b_k\left(\frac{\omega_q(\xi)}{\omega_q(\zeta)}\right)^k\right]dv,$$

где коэффициенты $b_k,\ k=0,1,\ldots,2m$, определены в (1).
Учитывая известные равенства

$$\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q},\qquad \sum_{k=0}^{n}kq^k=q\frac{1+nq^{n+1}-(n+1)\,q^n}{(1-q)^2},\quad q\neq 1,$$

$$\sum_{k=0}^{n}k^2q^k=q\frac{1+q-(n+1)^2q^n+\left(2n^2+2n-1\right)q^{n+1}-n^2q^{n+2}}{(1-q)^3},\quad q\neq 1,$$

чтобы прийти к представлению (4) достаточно выполнить соответствующие преобразования. $\square$

Отметим, что интегральное представление сумм Джексона, установленное в теореме 2.1, позволяет ассоциировать исследуемый метод суммирования с рациональными интегральными операторами, и, в частности, с рациональным сингулярным интегралом Джексона.

Следствие 2.2. *Для сингулярного интеграла Джексона на отрезке* $[-1,\ 1]$, *ассоциированного с системой полиномов Чебышёва первого рода, имеет место интегральное представление*

$$U_{2n,q}(f,\,x)=\frac{1}{\pi\gamma_{n+1}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\cos v)\left(\frac{\sin\dfrac{n+1}{2}(v-u)}{\sin\dfrac{v-u}{2}}\right)^4dv,\quad x=\cos u.$$

Доказательство. Достаточно в представлении (4) положить $z_k=0, k=1,2,\ldots,q$. Тогда $n=m$, $q=1$, $\lambda_q(u,\,v)=v-u$ и останется выполнить некоторые тригонометрические преобразования. $\square$

Изучим приближения функции Маркова $\hat{\mu}(x)$ на отрезке $[-1,\ 1]$ сингулярным интегралом Джексона (3). Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon_{2n}(x,\,A_q)=\hat{\mu}(x)-U_{2n,q}(\hat{\mu},\,x),\quad x\in[-1,\ 1],$$

$$\varepsilon_{2n}(A_q)=\left\|\hat{\mu}(x)-U_{2n,q}(\hat{\mu},\,x)\right\|_{C[-1,\ 1]},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Будем полагать, что $\operatorname{supp}\mu\subset[1,+\infty)$ и

$$\int\frac{d\mu(t)}{t-1}<\infty. \tag{6}$$

Теорема 2.3. *Пусть мера* μ *удовлетворяет условию* (6), *а мера* ν *определяется соотношением*

$$d\nu(y)=\frac{4y^2}{1-y^2}d\mu(\eta(y)),\quad y\in(0,1],\quad \eta(y)=\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right). \tag{7}$$

Тогда для равномерных приближений функций Маркова $\hat{\mu}(x)$ *на отрезке* $[-1,\ 1]$ *суммами Джексона* (3) *имеет место оценка сверху*

$$\varepsilon_{2n}(A_q)\leqslant\varepsilon^*_{2n}(A_q),\quad n\in\mathbb{N}, \tag{8}$$

где

$$\varepsilon_{2n}^*(A_q)=\frac{1}{\gamma_{m+1}}\int\limits_{\operatorname{supp}\nu}\frac{(m+1)-3|\omega_q(y)|-(m+1)|\omega_q(y)|^2+4|\omega_q(y)|^{m+2}-|\omega_q(y)|^{2m+3}}{(1-|\omega_q(y)|)^3(1-y)}|d\nu(y)|.$$

Доказательство. Рассмотрим приближения на отрезке $[-1,1]$ функций Маркова рациональным интегральным оператором типа Фурье–Чебышёва (2) в случае q геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции

$$\delta_{kq}(x,A_q)=\hat{\mu}(x)-s_{kq,q}(\hat{\mu},x),\quad x\in[-1,\ 1],\ k=1,2,\ldots,\ 2m,\ n=mq.$$

Умножим на коэффициенты b_k, $k=0,1,\ldots,2n$, правую и левую части последнего равенства, просуммируем по k от 0 до $2m$ и разделим их на γ_{m+1}. Тогда

$$\frac{1}{\gamma_{m+1}}\sum_{k=0}^{2m}b_k\delta_{kq}(x,\ A_q)=\hat{\mu}(x)-\frac{1}{\gamma_{m+1}}\sum_{k=0}^{2m}b_ks_{kq,q}(\hat{\mu},\ x)=\varepsilon_{2n}(x,\ A_q),\quad x\in[-1,\ 1],\tag{9}$$

где $\varepsilon_{2n}(x,\ A_q)$ – приближения функций Маркова суммами Джексона.

С другой стороны, известно [31], что в рассматриваемом случае для приближений $\delta_{kq}(x,\ A_q)$ имеет место оценка сверху

$$|\delta_{kq}(x,\ A_q)|\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{\operatorname{supp}\nu}\frac{|\omega_q(y)|^k|d\nu(y)|}{\sqrt{1-2y\cos u+y^2}},$$

где $\xi=e^{iu}$, $x=\cos u$, $\nu(y)$ из (7). Подставив последнее представление в соотношение (9), воспользовавшись формулами для конечных сумм, которые были применены при доказательстве теоремы 2.1, и выполнив соответствующие преобразования, получим

$$|\varepsilon_{2n}(x,\ A_q)|\leqslant\frac{1}{\gamma_{m+1}}\int\limits_{\operatorname{supp}\nu}\frac{(m+1)-3|\omega_q(y)|-(m+1)|\omega_q(y)|^2+4|\omega_q(y)|^{m+2}-|\omega_q(y)|^{2m+3}}{(1-|\omega_q(y)|)^3}\times$$
$$\times\frac{|d\nu(y)|}{\sqrt{1-2y\cos u+y^2}},\quad x=\cos u.\tag{10}$$

Из последнего неравенства очевидным образом следует оценка (8). □

3. Приближения сингулярным интегралом Джексона функций Маркова в случае меры специального вида

При исследовании приближений функций Маркова часто рассматривается случай, когда производная меры $\mu(t)$ слабо эквивалентна некоторой степенной функции [4; 5]. Решим подобную задачу. Пусть мера μ абсолютно непрерывна, $\operatorname{supp}\mu\in[1,\ a], a>1,\ d\mu(t)\sim(t-1)^\gamma\,dt, \gamma>0$. Изучим оценку (8) в этом случае. Будем полагать также, что параметры аппроксимирующей рациональной функции $a_k\in[0,1)$, $k=1,2,\ldots,q$, и для большей наглядности сделаем замену $z_k\mapsto-\alpha_k$, $k=1,2\ldots$ $\ldots,q$, $\alpha_k\in[0,1)$, где $z_k=a_k/(1+\sqrt{1-a_k^2})$, $k=1,2,\ldots,q$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\operatorname{supp}\nu\in[d,1]$, $0<d<1$, $d=a-\sqrt{a^2-1}$, $a>1$, $d\mu(t)=\varphi(t)dt$ *и* $\varphi(t)\sim$ $\sim(t-1)^\gamma, \gamma\in(0,\ 1)$. *Тогда в условиях теоремы* 2.3 *для приближений функции* $\hat{\mu}(x)$ *сингулярным интегралом Джексона справедливы*

1) *оценка поточечных приближений*

$$|\varepsilon_{2n}(x,\ A_q)|\leqslant\frac{2^{1-\gamma}}{\gamma_{m+1}}\int\limits_d^1\frac{(1-y)^{2\gamma}y^{-\gamma}}{\sqrt{1-2yx+y^2}}\times$$
$$\times\frac{(m+1)-3|\omega_q(y)|-(m+1)|\omega_q(y)|^2+4|\omega_q(y)|^{m+2}-|\omega_q(y)|^{2m+3}}{(1-|\omega_q(y)|)^3}\,dy,\tag{11}$$

2) *оценка равномерных приближений*

$$\varepsilon_{2n}(A_q)\leqslant\varepsilon_{2n}^*(A_q),\quad n\in\mathbb{N},\tag{12}$$

где

$$\varepsilon^*_{2n}(A_q) = \frac{2^{1-\gamma}}{\gamma_{m+1}}\int\limits_d^1 (1-y)^{2\gamma-1}y^{-\gamma}\times \\ \times\frac{(m+1)-3|\omega_q(y)|-(m+1)|\omega_q(y)|^2+4|\omega_q(y)|^{m+2}-|\omega_q(y)|^{2m+3}}{(1-|\omega_q(y)|)^3}\,dy, \tag{13}$$

$$\omega_q(y)=\prod_{k=1}^{q}\frac{y-\alpha_k}{1-\alpha_k y},\quad \alpha_k\in[0,1),\ m=0,1,\ldots.$$

Доказательство. В случае $d\mu(t)=\varphi(t)dt$ и $\varphi(t)\sim(t-1)^\gamma$, из оценки (10) и условия (7) сразу же приходим к соотношению (11). Оценка (12) легко следует из соотношения (11). □

В теореме 3.1 положим $\alpha_k=0,\ k=1,2,\ldots,q$. Тогда $A_q=(0,0,\ldots,0)=O$ и величина $\varepsilon_{2n}(O)=$ $=\varepsilon^{(0)}_{2n}$ представляет собой равномерные приближения функций Маркова с мерой $\hat{\mu}$, удовлетворяющей условиям теоремы 3.1, сингулярным интегралом Джексона, ассоциированным с системой полиномов Чебышёва первого рода.

Следствие 3.2. *Справедлива оценка сверху*

$$\varepsilon^{(0)}_{2n}\leqslant\frac{2^{1-\gamma}}{\gamma_{n+1}}\int\limits_d^1(1-y)^{2\gamma-1}y^{-\gamma}\frac{(n+1)-3y-(n+1)y^2+4y^{n+2}-y^{2n+3}}{(1-y)^3}\,dy,\quad n\in\mathbb{N}.$$

4. Асимптотика мажоранты равномерных приближений

Исследуем асимптотическое поведение при $n\to\infty$ величины (13). С этой целью в интеграле выполним замену переменного по формуле $y=(1-u)/(1+u)$. Тогда

$$\varepsilon^*_{2n}(A_q)=\frac{2^{\gamma+1}}{\gamma_{m+1}}\int\limits_0^D\mu_\gamma(u)\frac{(m+1)-3|\pi_q(u)|-(m+1)|\pi_q(u)|^2+4|\pi_q(u)|^{m+2}-|\pi_q(u)|^{2m+3}}{(1-|\pi_q(u)|)^3}\,du,$$

где

$$\mu_\gamma(u)=\frac{u^{2\gamma-1}}{(1+u)(1-u^2)^\gamma},\quad \pi_q(u)=\prod_{k=1}^q\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u},\quad \beta_k=\frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k},\ D=\frac{1-d}{1+d},\ D\in(0,1).$$

Отметим, что в рассматриваемом случае для каждого значения $n\in\mathbb{N}$ может выбираться соответствующий набор параметров $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_q)$, т. е. в общем случае $\alpha_k=\alpha_k(n)$ $k=1,\ 2,\ \ldots,q$. При этом будем полагать, что выполняется следующее условие:

$$\lim_{n\to\infty}n\sum_{k=1}^q(1-\alpha_k)=\infty. \tag{14}$$

Из сказанного следует, что для любого значения величины $d=a-\sqrt{a^2-1}$ существует такое m_0, $m_0=1,2,\ldots$, что при $m>m_0$ будут $\alpha_k\in[d,\ 1)$, $k=1,2,\ldots,q$. Эти ограничения будем учитывать в дальнейших рассуждениях. В этом случае без нарушения общности можно полагать параметры β_k упорядоченными следующим образом: $0<\beta_q<\ldots<\beta_1<D<1$.

Теорема 4.1. *Для мажоранты равномерных приближений функции Маркова с мерой в условиях теоремы* 3.1 *рациональным сингулярным интегралом Джексона имеют место асимптотические равенства*

$$\varepsilon^*_{2n}(A_q)\sim\frac{3}{2(m+1)^2+1}\left[\eta(\gamma)\frac{(m+1)^{2-2\gamma}}{\left(\sum_{k=1}^q\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}}+\Phi^{(\gamma)}_n(A_q)\right],\quad m\to\infty, \tag{15}$$

где

$$\eta(\gamma)=\begin{cases}\dfrac{2^{2-\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma}-1)}{(1-2\gamma)(2-2\gamma)(3-2\gamma)}, & \gamma\in(0,\ 1/2),\\ \sqrt{2}\ln 2, \quad \gamma=1/2,\\ \dfrac{2^{3-3\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{2\gamma-1}-1)}{(2\gamma-1)(2-2\gamma)(3-2\gamma)}, & \gamma\in(1/2,\ 1);\end{cases}$$

$$\Phi_n^{(\gamma)}(A_q)=\int\limits_{\beta_q}^{D}\mu_\gamma(u)\frac{1+|\pi_q(u)|}{(1-|\pi_q(u)|)^2}\,du; \tag{16}$$

$\Gamma(\cdot)$ – *гамма-функция Эйлера;* $n=mq$.

Доказательство. Мажоранту равномерных приближений представим в виде

$$\varepsilon_{2n}^*(A_q)=\frac{2^{\gamma+1}}{\gamma_{m+1}}[I_n^{(1)}(A_q)+I_n^{(2)}(A_q)+I_n^{(3)}(A_q)], \quad n\in\mathbb{N}, \tag{17}$$

где

$$I_n^{(1)}(A_q)=\int\limits_0^{\beta_q}\mu_\gamma(u)\frac{(m+1)-3\pi_q(u)-(m+1)\pi_q^2(u)+4\pi_q^{m+2}(u)-\pi_q^{2m+3}(u)}{(1-\pi_q(u))^3}\,du,$$

$$I_n^{(2)}(A_q)=\sum_{j=1}^{q-1}\int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j}\mu_\gamma(u)\frac{(m+1)-3|\pi_q(u)|-(m+1)|\pi_q(u)|^2+4|\pi_q(u)|^{m+2}-|\pi_q(u)|^{2m+3}}{(1-|\pi_q(u)|)^3}\,du,$$

$$I_n^{(3)}(A_q)=\int\limits_{\beta_1}^{D}\mu_\gamma(u)\frac{(m+1)-3|\pi_q(u)|-(m+1)|\pi_q(u)|^2+4|\pi_q(u)|^{m+2}-|\pi_q(u)|^{2m+3}}{(1-|\pi_q(u)|)^3}\,du.$$

Изучим по отдельности асимптотическое поведение при $n\to\infty$ каждого из этих выражений. Так, для исследования интеграла $I_n^{(1)}(A_q)$ воспользуемся методами, предложенными в [35]. Продифференцируем интеграл $I_n^{(1)}(A_q)$ три раза по параметру m. Тогда находим

$$\frac{\partial I_n^{(1)}(A_q)}{\partial m}=\int\limits_0^{\beta_q}\mu_\gamma(u)\frac{1-\pi_q^2(u)+4\ln\pi_q(u)\pi_q^{m+2}(u)-2\ln\pi_q(u)\pi_q^{2m+3}(u)}{(1-\pi_q(u))^3}\,du,$$

$$\frac{\partial^2 I_n^{(1)}(A_q)}{\partial m^2}=4\int\limits_0^{\beta_q}\mu_\gamma(u)\frac{(\ln\pi_q(u))^2\pi_q^{m+2}(u)-(\ln\pi_q(u))^2\pi_q^{2m+3}(u)}{(1-\pi_q(u))^3}\,du,$$

$$\frac{\partial^3 I_n^{(1)}(A_q)}{\partial m^3}=4\left[\int\limits_0^{\beta_q}\mu_\gamma(u)\left(\frac{\ln\pi_q(u)}{1-\pi_q(u)}\right)^3 e^{(m+2)S(u)}\,du-2\int\limits_0^{\beta_q}\mu_\gamma(u)\left(\frac{\ln\pi_q(u)}{1-\pi_q(u)}\right)^3 e^{(2m+3)S(u)}\,du\right],$$

где

$$S(u)=\sum_{k=1}^{q}\ln\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}.$$

Для исследования асимптотического поведения интегралов справа в предыдущем равенстве воспользуемся методом Лапласа [36; 37]. Функция $S(u)$ убывает на отрезке $[0,\ \beta_q]$, и, следовательно, достигает своего максимального значения при $u=0$. Учитывая разложение

$$S(u)=-2u\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}+o(u),$$

и асимптотическое равенство

$$\mu_\gamma(u)\left(\frac{\ln\pi_q(u)}{1-\pi_q(u)}\right)^3\sim -u^{2\gamma-1},$$

справедливые при $u \to 0$, для некоторого малого $\varepsilon > 0$ будем иметь

$$\frac{\partial^3 I_n^{(1)}(A_q)}{\partial m^3} \sim -4\left[\int_0^{\varepsilon} u^{2\gamma-1}\mathrm{e}^{-2(m+2)u\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}}\,du - 2\int_0^{\varepsilon} u^{2\gamma-1}\mathrm{e}^{-2(2m+3)u\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}}\,du\right], \quad m\to\infty.$$

Выполнив в первом интеграле справа замену переменного по формуле $2(m+2)u\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\mapsto u$, а во втором замену переменного $2(2m+3)u\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\mapsto u$, получим

$$\frac{\partial^3 I_n^{(1)}(A_q)}{\partial m^3} \sim \frac{-4}{\left(2(m+2)\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}}\int_0^{\varepsilon(m+2)\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}} u^{2\gamma-1}\mathrm{e}^{-u}\,du+$$

$$+\frac{8}{\left(2(2m+3)\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}}\int_0^{\varepsilon(2m+1)\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}} u^{2\gamma-1}\mathrm{e}^{-u}\,du, \quad m\to\infty.$$

Принимая во внимание, что

$$\int_0^{+\infty} u^{2\gamma-1}\mathrm{e}^{-u}\,du = \Gamma(2\gamma), \quad 2\gamma>0,$$

получим

$$\frac{\partial^3 I_n^{(1)}(A_q)}{\partial m^3} \sim \frac{-4\Gamma(2\gamma)}{\left(2\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}}\left[\frac{1}{(m+2)^{2\gamma}}-\frac{2}{(2m+3)^{2\gamma}}\right], \quad m\to\infty.$$

Чтобы вернуться к асимптотическому выражению первоначального интеграла, проинтегрируем правую и левую части последнего асимптотического равенства три раза по параметру m. Тогда

$$I_n^{(1)}(A_q) \sim \begin{cases} \dfrac{2^{2-2\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma}-1)(m+1)^{3-2\gamma}}{(1-2\gamma)(2-2\gamma)(3-2\gamma)\left(\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}}, & \gamma\in(0,\ 1/2),\\ \dfrac{(m+1)^2\ln 2}{\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}}, & \gamma=1/2,\\ \dfrac{2^{3-4\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{2\gamma-1}-1)(m+1)^{3-2\gamma}}{(2\gamma-1)(2-2\gamma)(3-2\gamma)\left(\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}}, & \gamma\in(1/2,\ 1).\end{cases} \tag{18}$$

Исследуем выражение $I_n^{(2)}(A_q)$ (см. (17)). Поскольку

$$I_n^{(2)}(A_q) = (m+1)\sum_{j=1}^{q-1}\int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j}\mu_\gamma(u)\frac{1+|\pi_q(u)|}{(1-|\pi_q(u)|)^2}\,du - 3\sum_{j=1}^{q-1}\int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j}\mu_\gamma(u)\frac{|\pi_q(u)|}{(1-|\pi_q(u)|)^3}\,du+$$

$$+4\sum_{j=1}^{q-1}\int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j}\mu_\gamma(u)\frac{|\pi_q(u)|^{m+2}}{(1-|\pi_q(u)|)^3}\,du - \sum_{j=1}^{q-1}\int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j}\mu_\gamma(u)\frac{|\pi_q(u)|^{2m+3}}{(1-|\pi_q(u)|)^3}\,du,$$

то очевидно, что

$$I_n^{(2)}(A_q) = (m+1)\sum_{j=1}^{q-1}\int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j}\mu_\gamma(u)\frac{1+|\pi_q(u)|}{(1-|\pi_q(u)|)^2}\,du + \delta_n^{(1)}(A_q), \quad n\to\infty, \tag{19}$$

где $\delta_n^{(1)}(A_q)$ имеет заведомо больший порядок малости в сравнении с главным членом асимптотического разложения.

Рассуждая аналогичным образом в отношении интеграла $I_n^{(3)}(A_q)$, заключаем, что

$$I_n^{(3)}(A_q) = (m+1)\int\limits_{\beta_1}^{D} \mu_\gamma(u)\frac{1+|\pi_q(u)|}{(1-|\pi_q(u)|)^2}\,du + \delta_n^{(2)}(A_q), \quad n\to\infty. \tag{20}$$

Из представления (17) с учетом найденных асимптотических равенств (18), (19) и (20), получим (15). Доказательство теоремы 4.1 завершено. □

Следствие 4.2. *В условиях теоремы* 3.1 *для равномерных приближений функции Маркова* $\hat{\mu}(x)$ *на отрезке* $[-1,1]$ *сингулярным интегралом Джексона, ассоциированным с системой полиномов Чебышёва первого рода, справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon_{2n}^{(0)} \sim \frac{\eta_0(\gamma)}{(n+1)^{2\gamma}}, \quad n\to\infty, \tag{21}$$

где

$$\eta_0(\gamma) = 3\begin{cases} \dfrac{2^{1-\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma}-1)}{(1-2\gamma)(2-2\gamma)(3-2\gamma)}, & \gamma\in(0,\ 1/2),\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln 2, \quad \gamma = 1/2, & \\ \dfrac{2^{2-3\gamma}\Gamma(2\gamma)(2^{2\gamma-1}-1)}{(2\gamma-1)(2-2\gamma)(3-2\gamma)}, & \gamma\in(1/2,\ 1). \end{cases}$$

Доказательство. Следует непосредственно из асимптотических равенств (15), если положить $a_k = 0, k = 1,2\ldots,q$. □

Обратим внимание, что в отличие от результатов, полученных в теореме 4.1, в следствии 4.2 содержится именно асимптотическая оценка равномерных приближений, а не мажоранты, поскольку в полиномиальном случае максимум приближений достигается при $x = 1$.

5. Наилучшие приближения рациональным сингулярным интегралом Джексона

Представляет интерес минимизировать правые части соотношений (15) посредством выбора оптимального для каждой задачи набора параметров A_q^*, т. е. искать наилучшую оценку равномерных приближений функции Маркова $\hat{\mu}(x)$ на отрезке $[-1,1]$ в условиях теоремы 3.1 сингулярным интегралом Джексона (3). Положим

$$\varepsilon_{2n,q} = \inf_{A_q}\varepsilon_{2n}(A_q), \quad \varepsilon_{2n,q}^* = \inf_{A_q}\varepsilon_{2n}^*(A_q).$$

Отметим, что из неравенства (12) следует справедливость соотношения

$$\varepsilon_{2n,q} \leqslant \varepsilon_{2n,q}^*, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Ввиду последней оценки в дальнейшем будем вести речь об асимптотическом выражении мажоранты равномерных приближений.

Теорема 5.1. *Для мажоранты равномерных приближений функции Маркова мерой в условиях теоремы* 3.1 *на отрезке* $[-1,\ 1]$ *сингулярным интегралом Джексона справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon_{2n,q}^* \sim \frac{\nu(\gamma,\ q)}{(n+1)^{2\left(1-\frac{(1-\gamma)^q}{1+\gamma}\right)}}, \quad n\to\infty, \tag{22}$$

где

$$\nu(\gamma,\ q) = \frac{3(c(\gamma))^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}(1+\gamma)(\eta(\gamma))^{\frac{(1-\gamma)^{q-1}}{1+\gamma}}}{2^{\frac{1}{1+\gamma}}(4\gamma)^{1-\frac{(1-\gamma)^{q-1}}{1+\gamma}}(1-\gamma)^{\frac{1-(1-\gamma)^{q-1}}{\gamma(1+\gamma)}}}q^{2\left(1-\frac{(1-\gamma)^q}{1+\gamma}\right)}, \quad c(\gamma) = \int\limits_0^D \frac{u^{2\gamma+1}\,du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma}, \tag{23}$$

величина $\eta(\gamma)$ *определена в* (15).

Доказательство. Исследуем асимптотические равенства (15). Очевидно, что при постоянных $\beta_k,\ k=1,2,\ldots,q$, порядок в этих соотношениях не отличается от полиномиального. Будем полагать, что $\beta_k=\beta_k(n)\to 0, \beta_{k+1}=o(\beta_k),\ n\to\infty$, с выполнением условия (14). В этом случае нетрудно получить, что при $m\to\infty$ справедливы асимптотические равенства

$$\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\sim\frac{1}{\beta_q},\quad 1-\prod_{k=1}^{j}\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\prod_{k=j+1}^{q}\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\sim\frac{2u}{\beta_j},\quad j=1,2,\ldots,q,\ u\in[\beta_{j+1},\ \beta_j],$$

$$1-\prod_{k=1}^{q}\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\sim\frac{2\beta_1}{u},\quad u\in[\beta_1,\ 1].$$

При этом из (16) находим, что

$$\Phi_n^{(\gamma)}(A_q)\sim\frac{1}{2(2-2\gamma)}\sum_{j=1}^{q-1}\frac{\beta_j^2}{\beta_{j+1}^{2-2\gamma}}+\frac{c(\gamma)}{2\beta_1^2},\quad n\to\infty,$$

где $c(\gamma)$ определена в (23).
Асимптотические равенства (15) при этом примут вид

$$\varepsilon^*_{2n,q}(A_q)\sim\frac{m+1}{(2-2\gamma)\gamma_{m+1}}\left[2(2-2\gamma)\eta(\gamma)(m+1)^{2-2\gamma}\beta_q^{2\gamma}+\sum_{j=1}^{q-1}\frac{\beta_j^2}{\beta_{j+1}^{2-2\gamma}}+\frac{(2-2\gamma)c(\gamma)}{\beta_1^2}\right],\ m\to\infty. \tag{24}$$

При каждом фиксированном $\gamma>0$ правые части асимптотического равенства (24) представляют собой функции переменных $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q)$, непрерывные в каждой точке q-мерного куба $[\delta,1]^q$, где $\delta=\delta(n)>0$ – некоторая величина, зависящая от n и при любом n ограничивающая множество параметров $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q)$ слева. Согласно теореме Вейерштрасса правые части указанных равенств имеют строгий минимум при некотором $\beta^*=(\beta_1^*,\ \beta_2^*,\ldots,\beta_q^*)\in[\delta,1]^q$. Причем поскольку $\beta_k=$ $=1,\ k=1,\ldots,q$, соответствует полиномиальному случаю, а при $\beta_k(n)\to 0,\ n\to\infty$, с достаточно большой скоростью правые части в (24) неограниченно растут, то можно предположить, что β^* – внутренняя точка куба $[\delta,1]^q$. Для того чтобы найти оптимальный набор β^* для соответствующего асимптотического равенства решим экстремальную задачу

$$\varepsilon^*_{2n,q}(A_q)\underset{A_q}{\longrightarrow}\inf.$$

Тогда в квадратной скобке равенства (24) приходим к задаче

$$\Psi^{(\gamma)}(A_q)=c_q\beta_q^{2\gamma}+\frac{\beta_{q-1}^2}{\beta_q^{2-2\gamma}}+\frac{\beta_{q-2}^2}{\beta_{q-1}^{2-2\gamma}}+\cdots+\frac{\beta_2^2}{\beta_3^{2-2\gamma}}+\frac{\beta_1^2}{\beta_2^{2-2\gamma}}+\frac{c_1}{\beta_1^2}\underset{A_q}{\longrightarrow}\inf,$$

где для краткости положено

$$c_q=2(2-2\gamma)\eta(\gamma)(m+1)^{2-2\gamma},\quad c_1=(2-2\gamma)c(\gamma).$$

Функция $\Psi^{(\gamma)}(A_q)$ переменных $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q)$ непрерывно дифференцируема в кубе $(0,1)^q$. Естественно искать точку минимума этой функции там, где выполняется необходимое условие экстремума: $\partial\Psi^{(\gamma)}(A_q)/\partial\beta_k=0,\ k=1,2,\ldots,q$. Несложные вычисления приводят к системе уравнений

$$\begin{cases}\gamma c_q\beta_q^{2\gamma-1}-(1-\gamma)\dfrac{\beta_{q-1}^2}{\beta_q^{3-2\gamma}}=0,\\ \dfrac{\beta_{q-1}}{\beta_q^{2-2\gamma}}-(1-\gamma)\dfrac{\beta_{q-2}^2}{\beta_{q-1}^{3-2\gamma}}=0,\\ \qquad\ldots\\ \dfrac{\beta_2}{\beta_3^{2-2\gamma}}-(1-\gamma)\dfrac{\beta_1^2}{\beta_2^{3-2\gamma}}=0,\\ \dfrac{\beta_1}{\beta_2^{2-2\gamma}}-\dfrac{c_1}{\beta_1^3}=0,\end{cases} \tag{25}$$

из которой находим, что с оптимальным набором параметров целевая функция

$$\Psi^{(\gamma)}(A_q^*) = \frac{1+\gamma}{\gamma}\frac{c_1}{\beta_1^{*2}}. \tag{26}$$

Осталось найти параметр β_1^*. С этой целью снова обратимся к системе (25). Последовательно находим

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\beta_{q-1}^*}{\beta_q^*}\right)^2 = \dfrac{\gamma c_q}{1-\gamma}, \\ \left(\dfrac{\beta_{q-2}^*}{\beta_{q-1}^*}\right)^2 = \dfrac{1}{1-\gamma}\left(\dfrac{\beta_{q-1}^*}{\beta_q^*}\right)^{2-2\gamma} = \dfrac{1}{1-\gamma}\left(\dfrac{\gamma c_q}{1-\gamma}\right)^{1-\gamma}, \\ \dots \\ \left(\dfrac{\beta_1^*}{\beta_2^*}\right)^2 = \dfrac{(\gamma c_q)^{(1-\gamma)^{(q-2)}}}{(1-\gamma)^{\frac{1-(1-\gamma)^{(q-1)}}{\gamma}}}. \end{cases} \tag{27}$$

С другой стороны, из последнего уравнения в (25) получим

$$\beta_2^* = \left(\frac{\beta_1^{*4}}{c_1}\right)^{\frac{1}{2-2\gamma}}.$$

Подставив β_2 в последнее равенство системы (27), после необходимых преобразований будем иметь

$$\beta_1^* = c_1^{\frac{1}{2(1+\gamma)}}\left(\frac{(\gamma c_q)^{(1-\gamma)^{(q-2)}}}{(1-\gamma)^{\frac{1-(1-\gamma)^{(q-1)}}{\gamma}}}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}.$$

При найденном β_1^*, в представлении (26) получим

$$\Psi^{(\gamma)}(A_q^*) = \frac{1+\gamma}{\gamma}c_1^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}\left(\frac{(\gamma c_q)^{(1-\gamma)^{(q-2)}}}{(1-\gamma)^{\frac{1-(1-\gamma)^{(q-1)}}{\gamma}}}\right)^{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}, \quad \gamma \in (0,1).$$

Возвращаясь к первоначальным значениям параметров c_1 и c_q, из последнего соотношения и (24) находим, что

$$\varepsilon_{2n,q}^*(A_q,\, U_{2n,q}) \sim \frac{3(c(\gamma))^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}(1+\gamma)(\eta(\gamma))^{\frac{(1-\gamma)^{q-1}}{1+\gamma}}}{2^{\frac{1}{1+\gamma}}(4\gamma)^{1-\frac{(1-\gamma)^{q-1}}{1+\gamma}}(1-\gamma)^{\frac{1-(1-\gamma)^{q-1}}{\gamma(1+\gamma)}}}\frac{1}{(m+1)^{2\left(1-\frac{(1-\gamma)^q}{1+\gamma}\right)}}, \quad m\to\infty.$$

Теперь, учитывая, что $n = mq$, придем к асимптотическим равенствам (22). □

Замечание 5.2. *Сравнивая результаты теоремы* 5.1 *и асимптотических равенств* (21)*, приходим к выводу, что скорость равномерных рациональных аппроксимаций функции Маркова с мерой в условиях теоремы* 3.1 *сингулярным интегралом Джексона оказывается выше соответствующих полиномиальных аналогов.*

6. Аппроксимации элементарных функций

Многие элементарные функции можно представить в виде комбинаций функций Маркова. Рассмотрим пример такой функции и в качестве следствия теоремы 5.1 найдем точную константу и порядок ее приближений сингулярными интегралами Джексона (3).

Функция $f(z) = (z-1)^\gamma$, $\gamma \in (0,+\infty)\backslash\mathbb{N}$, является голоморфной в области $\mathbb{C}\backslash(1,+\infty)$. Стандартное применение интегральной формулы Коши приводит к соотношению

$$(z-1)^\gamma = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Omega}\frac{(\xi-1)^\gamma}{\xi-z}\,d\xi, \quad z\in\Omega,$$

где Ω – круг радиуса $a > 1$ с центром в начале координат и разрезом по отрезку $[1, a]$. Из последней формулы легко получить (см. [4; 5]), что при $|z| < a$, $z\overline{\in}(1, a)$, справедливо равенство

$$(1-x)^{\gamma} = \hat{\mu}_1(x) + g(x), \tag{28}$$

где

$$\hat{\mu}_1(x) = -\frac{\sin\pi\gamma}{\pi}\int_1^a \frac{(t-1)^{\gamma}}{t-x}\,dt, \quad g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=a} \frac{(1-\xi)^{\gamma}}{\xi - x}\,d\xi.$$

Функция $\hat{\mu}_1(x)$, $x \in [0,\ 1]$, – есть функция, которая удовлетворяет условию теоремы 3.1. Поэтому

$$\varepsilon^*_{2n,q}(\hat{\mu}_1(x)) \sim \frac{\sin\pi\gamma}{\pi}\frac{\nu(\gamma,\ q)}{(n+1)^{2\left(1-\frac{(1-\gamma)^q}{1+\gamma}\right)}}, \quad n \to \infty,$$

где величина $\nu(\gamma,\ q)$ определена в формулировке теоремы 5.1.

Исследуем приближения функции $g(x)$ сингулярным интегралом Джексона (3). Имеем

$$\varepsilon_{2n,q}(g,\ x,\ A_q) = \frac{1}{\gamma_{m+1}}\sum_{k=0}^{2m} b_k \delta_{kq,q}(g,\ x,\ A_q), \quad x \in (-1,\ 1), \tag{29}$$

где

$$\delta_{kq,q}(g,\ x,\ A_q) = g(x) - s_{kq,q}(g,\ x,\ A_q) = \frac{1}{(2\pi)^2 i}\int_{|\xi|=a}\frac{(1-\xi)^{\gamma}}{\xi - x} I_{kq}(x,\ \xi)\,d\xi,$$

– приближения функции $g(x)$ рациональным интегральным оператором Фурье–Чебышёва (2) с набором параметров A_q,

$$I_{kq}(x,\ \xi) = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos u - \cos v}{\xi - \cos v}\left(\zeta\frac{\omega_q^k(\zeta)}{\omega_q^k(z)} - z\frac{\omega_q^k(z)}{\omega_q^k(\zeta)}\right)\frac{dv}{\zeta - z}, \quad \zeta = \mathrm{e}^{iv},\ z = \mathrm{e}^{iu},\ x = \cos u,$$

величина $\omega_q(\cdot)$ определена в (5). Известно [32], что

$$|\delta_{kq,q}(g,\ x,\ A_q)| \leqslant c(a,\ \gamma)\lambda^k, \quad \lambda < 1,$$

$c(a,\ \gamma)$ – некоторая величина, не зависящая от k. Из последней оценки и равенства (29) получим

$$|\varepsilon_{2n,q}(g,\ x,\ A_q)| \leqslant \frac{1}{\gamma_{m+1}}\sum_{k=0}^{2m} b_k|\delta_{kq,q}(g,\ x,\ A_q)| \leqslant \frac{c(a,\ \gamma)}{\gamma_{m+1}}\sum_{k=0}^{2m} b_k\lambda^k, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Воспользовавшись формулами для конечных сумм, которые применялись при доказательстве теоремы 2.1, нетрудно получить, что справедлива оценка

$$|\varepsilon_{2n,q}(g,\ x,\ A_q)| \leqslant O\left(\frac{1}{(m+1)^2}\right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Другими словами, равномерные приближения функции $g(x)$ сингулярным интегралом Джексона убывают со скоростью большего порядка малости в сравнении со скоростью аппроксимации функции $\hat{\mu}_1(x)$. Следовательно, из равенства (28) находим

$$\varepsilon^*_{2n,q}((1-x)^{\gamma}) = \varepsilon^*_{2n}(\hat{\mu}_1(x)) + O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right), \quad n \to \infty.$$

Следствие 6.1 (Аппроксимация функции $(1-x)^{\gamma}$). *Для равномерных рациональных приближений функции $(1-x)^{\gamma}$, $\gamma \in (0,\ 1)$, на отрезке $[-1,\ 1]$ рациональным сингулярным интегралом Джексона с q геометрически различными полюсами справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon^*_{2n,q}((1-x)^{\gamma}) = \frac{\sin\pi\gamma}{\pi}\frac{\nu(\gamma,\ q)}{(n+1)^{2\left(1-\frac{(1-\gamma)^q}{1+\gamma}\right)}} + O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right), \quad n \to \infty, \tag{30}$$

где величина $\nu(\gamma,\ q)$ определена в формулировке теоремы 5.1.

При этом из следствия 4.2 заключаем, что для полиномиальных приближений возможно добиться лишь

$$\varepsilon_{2n}^{(0)}((1-x)^{\gamma}) = O\left(\frac{1}{n^{2\gamma}}\right), \quad n \to \infty.$$

Известно [38, с. 96], что наилучшие равномерные полиномиальные приближения функций со степенной особенностью обладают следующим свойством:

$$E_{2n}(|x|^{2\gamma}; [-1,\ 1]) = \frac{1}{2^{\gamma}} E_n((1-x)^{\gamma}; [-1,\ 1]).$$

Рассуждая аналогичным образом, из асимптотического равенства (30) находим, что

$$\varepsilon_{4n,2q}^{*}(|x|^{s}) \sim \frac{\mu(s,\ q)}{(n+1)^{2\left(1-\frac{(2-s)^{q}}{2^{q-1}(2+s)}\right)}}, \quad s \in (0,\ 2),\ n \to \infty,$$

где величина $\mu(s,\ q)$ может быть выписана в явном виде. В частности, при $q = 1$ приходим к равномерной оценке аппроксимации функции $|x|^{s}$, $s \in (0,\ 2)$, на отрезке $[-1,\ 1]$ рациональным сингулярным интегралом Джексона с двумя геометрически различными полюсами:

$$\varepsilon_{2n,2}^{*}(|x|^{s}) \sim \frac{\mu(s,\ 1)}{(n+1)^{\frac{4s}{2+s}}}, \quad n \to \infty.$$

Этот результат содержится в [29] в случае приближений функции $|x|^{s}$, $s \in (0,\ 2)$, сингулярным интегралом Джексона, ассоциированным с системой алгебраических дробей Чебышёва–Маркова с двумя геометрически различными полюсами.

7. Заключение

В работе изучены аппроксимации функций Маркова на отрезке $[-1,\ 1]$ рациональными функциями с ограничениями на количество геометрически различных полюсов. Методом приближений выступают рациональные сингулярные интегралы Джексона, ассоциированные с системой алгебраических дробей Чебышёва–Маркова с фиксированным количеством геометрически различных полюсов. Для введенного метода рациональной аппроксимации установлено интегральное представление.

Рассмотрены аппроксимации функции Маркова с абсолютно непрерывной мерой, производная которой асимптотически равна функции со степенной особенностью. В этом случае найдены оценки сверху поточечных и равномерных приближений, асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений.

Установлены значения параметров, при которых обеспечиваются наилучшие равномерные приближения этим методом. В качестве следствия рассмотрены рациональные аппроксимации сингулярным интегралом Джексона некоторых элементарных функций на отрезке, представимых функциями Маркова.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований «Конвергенция–2025» (№ ГР 20212046).

Литература

1. *Марков А. А.* Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.: Гостехиздат, 1948. С. 106–119.

2. *Гончар А. А.* О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций // Матем. сб. 1978. Т. 105 (147), № 2. С. 147–163.

3. *Ganelius T.* Ortogonal polynomials and rational approximation of holomorphic function // Studies in Pure Mathematics (To the Memory of Paul Turan) / ed. P. Erdos. Basel, Birkhauser Verlag, 1978. P. 237–243.

4. *Andersson J.-E.* Best Rational Approximation to Markov Functions // J. Approx. Theory. 1994. Vol. 76, N 1. P. 219–232.

5. *Пекарский А. А.* Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, № 2. С. 121–132.

6. *Vyacheslavov N. S., Mochalina E. P.* Rational approximations of functions of Markov–Stieltjes type in Hardy spaces // Mosc. Univ. Math. Bull. 2008. Vol. 63, N 4. P. 125–134.

7. *Старовойтов А. П., Лабыч Ю. А.* Рациональная аппроксимация функций Маркова, порожденных борелевскими мерами степенного типа // Проблемы физики, математики и техники. 2009. Т. 1, № 1. С. 69–73.

8. *Мардвилко Т. С.* Равномерная рациональная аппроксимация нечетного и четного преобразований Коши // Матем. сб. 2025. Т. 216, № 2. С. 110–127.

9. *Пекарский А. А., Ровба Е. А.* Равномерные приближения функций Стилтьеса посредством ортопроекции на множество рациональных функций // Матем. зам. 1999. Т. 65, вып. 3. С. 362–368.

10. *Takenaka S.* On the orthogonal functions and a new formula of interpolations // Jpn. J. Math. 1925. Vol. 2, N 1. P. 129–145.

11. *Malmquist F.* Sur la détermination d’une classe functions analytiques par leurs dans un ensemble donné de points // Compte Rendus Sixiéme Congrés math. scand. Kopenhagen, Denmark, 1925. P. 253–259.

12. *Джрбашян М. М., Китбалян А. А.* Об одном обобщении полиномов Чебышёва // Доклады АН Армянской ССР. 1964. Т. 38, № 5. С. 263–270.

13. *Rovba E. A., Mikulich E. G.* Constants in rational approximation of Markov–Stieltjes functions with fixed number of poles // Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control. 2013. Vol. 1, N 148. P. 12–20.

14. *Лунгу К. Н.* О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов // Матем. сб. 1971. Т. 86(128), № 2(10). С. 314–324.

15. *Лунгу К. Н.* О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов // Сиб. матем. журн. 1984. Т. XXV, № 2. С. 150–159.

16. *Jackson D.* The theory of approximation. Colloq. Publ. Amer. Math. Soc. Vol. XI. 1930. 184 p.

17. *Schurer F., Steutel F. W.* On the degree of approximation of functions in with operators of the Jackson type // J. Approx. Theory. 1979. Vol. 27, N 2. P. 153–178.

18. *Wafi A.* Saturation of local approximation by linear positive operators of Jackson type // Indian J. Pure Appl. Math. 1980. Vol. 11, N 9. P. 1194–1201.

19. *Алексеев В. Г.* Ядра типа Джексона и их применение к построению фильтров низких частот // Проблемы передачи информации. 1994. Т. 30, № 1. С. 97–102.

20. *Алексеев В. Г.* Ядра типа Джексона и Джексона–Валле Пуссена и их вероятностные применения // Теория вероятности и ее применение. 1996. Т. 41, № 1. С. 170–177.

21. *Сафронова Г. П.* О методе суммирования расходящихся рядов, связанном с сингулярным интегралом Джексона // Доклады АН СССР. 1950. Т. 73, № 2. С. 277–278.

22. *Покало А. К.* Об одном классе линейных методов суммирования рядов Фурье дифференцируемых функций // Весці Акадэміі навук Беларускай ССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1969. № 2. С. 48–49.

23. *Поцейко П. Г.* Об одном представлении сингулярного интеграла Джексона и аппроксимации функции $|x|^s$ на отрезке $[-1,\ 1]$ // Веснік Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2019. Т. 9, № 2. С. 22–38.

24. *Русак В. Н.* О приближении рациональными функциями на вещественной оси // Изв. АН БССР. Сер. физ.-тех. наук. 1974. № 1. С. 22–28.

25. *Русак В. Н.* О порядке приближения положительными рациональными операторами // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. 1975. № 3. С. 39–46.

26. *Пекарский А. А.* Чебышевские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке // Матем. сб. 1987. Т. 133(175), № 1(5). С. 86–102.

27. *Ровба Е. А.* Рациональные интегральные операторы на отрезке // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 1996. № 1. С. 34–39.

28. *Смотрицкий К. А.* О приближении выпуклых функций рациональными интегральными операторами на отрезке // Весник БГУ. Сер. 1. 2005. № 3. С. 64–70.

29. *Ровба Е. А., Поцейко П. Г.* Об одном рациональном сингулярном интеграле Джексона на отрезке // Докл. НАН Беларуси. 2019. Т. 63, № 4. С. 398–407.

30. *Ровба Е. А.* Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 11. С. 968–971.

31. *Patseika P. G., Rouba Y. A., Smatrytski K. A.* On one rational integral operator of Fourier–Chebyshev type and approximation of Markov functions // J. BSU, Math. Inform. 2020. Vol. 2. P. 6–27.

32. *Поцейко П. Г., Ровба Е. А.* О рациональных суммах Абеля–Пуассона на отрезке и аппроксимациях функций Маркова // Журн. БГУ. Математика. Информатика. 2021. Т. 3. С. 6–24.

33. *Поцейко П. Г., Ровба Е. А.* О рациональных аппроксимациях функции Маркова на отрезке суммами Фейера с фиксированным количеством полюсов // Труды Института математики. 2022. Т. 30, № 1–2. С. 57–77.

34. *Поцейко П. Г., Ровба Е. А.* Суммы Валле Пуссена рациональных интегральных операторов Фурье–Чебышёва и аппроксимации функции Маркова // Алгебра и анализ. 2023. Т. 35, № 5. С. 183–208.

35. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, Гл. ред. Физ.-мат. лит-ры, 1989. 480 с.

36. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979. 320 с.

37. *Федорюк М. В.* Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Гл. ред. Физ.-мат. лит-ры, 1987. 544 с.

38. *Бернштейн С. Н.* Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. М.; Л.: Гл. ред. общетехн. лит-ры, 1937. Ч. 1. 200 с.

References

1. Markov A. A. *Selected Works on the Theory of Continued Fractions and the Theory of Functions Deviating Least from Zero*. Moscow, Gostehizdat, 1948, pp. 106–119 (in Russian).

2. Gonchar A. A. On the speed of rational approximation of some analytic functions *Math. USSR-Sb.*, 1978. vol. 34, iss. 2, pp. 131–145 (in Russian).

3. Ganelius T. Ortogonal polynomials and rational approximation of holomorphic function. *Studies in Pure Mathematics (To the Memory of Paul Turan)*, ed. P. Erdos. Basel, Birkhauser Verlag, 1978, pp. 237–243.

4. Andersson J.-E. Best Rational Approximation to Markov Functions. *J. Approx. Theory*, 1994, vol. 76, iss. 1, pp. 219–232.

5. Pekarskii A. A. Best uniform rational approximations of Markov functions. *St. Petersburg Math. J.*, 1996, vol. 7, iss. 2, pp. 277–285.

6. Vyacheslavov N. S., Mochalina E. P. Rational approximations of functions of Markov–Stieltjes type in Hardy spaces. *Mosc. Univ. Math. Bull.*, 2008, vol. 63, iss. 4, pp. 125–134.

7. Starovoitov A. P., Labych Yu. A. Rational approximation of Markov functions generated by Borel measures of power type. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki*, 2009, vol. 1, iss. 1, pp. 69–73 (in Russian).

8. Mardvilko T. S. Uniform rational approximation of the odd and even Cauchy transforms. *Sbornik: Mathematics*, 2025, vol. 216, iss. 2, pp. 239–256. https://doi.org/10.4213/sm10116e

9. Pekarskii A. A., Rovba E. A. Uniform approximations of Stieltjes functions by orthogonal projection on the set of rational functions. *Mathematical Notes*, 1999, vol. 65, pp. 302–307.

10. Takenaka S. On the orthogonal functions and a new formula of interpolations. *Jpn. J. Math.*, 1925, vol. 2, iss. 1, pp. 129–145.

11. Malmquist F. Sur la détermination d’une classe functions analytiques par leurs dans un ensemble donné de points. *Compte Rendus Sixiéme Congrés math. scand. Kopenhagen, Denmark*, 1925, pp. 253–259.

12. Dzhrbashyan M. M., Kitbalyan A. A. On a generalization of Chebyshev polynomials. *Doklady AN Armyanskoi SSR*, 1964, vol. 38, iss. 5, pp. 263–270 (in Russian).

13. Rovba E. A., Mikulich E. G. Constants in rational approximation of Markov–Stieltjes functions with fixed number of poles. *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control*, 2013, vol. 1, iss. 148, pp. 12–20.

14. Lungu K. N. On the best approximations by rational functions with a fixed number of poles. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1971, vol. 86(128), iss. 2(10), pp. 314–324 (in Russian).

15. Lungu K. N. On the best approximations by rational functions with a fixed number of poles. *Siberian Mathematical Journal*, 1984. vol. XXV, iss. 2. pp. 150–159 (in Russian).

16. Jackson D. *The theory of approximation. Colloq. Publ. Amer. Math. Soc. Vol. XI*, 1930. 184 p.

17. Schurer F., Steutel F. W. On the degree of approximation of functions in with operators of the Jackson type. *J. Approx. Theory*, 1979. vol. 27, iss. 2, pp. 153–178.

18. Wafi A. Saturation of local approximation by linear positive operators of Jackson type. *Indian J. pure appl. Math.*, 1980, vol. 11, iss. 9, pp. 1194–1201.

19. Alekseev V. G. Jackson-type kernels and their application to the construction of low-pass filters. *Problemy peredachi informatsii*, 1994, vol. 30, iss. 1, pp. 97–102 (in Russian).

20. Alekseev V. G. Jackson and Jackson–Vallee Poussin-type kernels and their probabilistic applications. *Teoriya veroyatnosti i ee primenenie*, 1996, vol. 41, iss. 1, pp. 170–177 (in Russian).

21. Safronova G. P. On the method of summation of divergent series related to the singular Jackson integral. *Doklady AN SSSR*, 1950, vol. 73, iss. 2, pp. 277–278 (in Russian).

22. Pokalo A. K. On one class of linear methods for summing Fourier series of differentiable functions. *Vestsi Akademii navuk Belaruskai SSR. Ser. fiz.-mat. navuk*, 1969, vol. 2, pp. 48–49 (in Russian).

23. Potseiko P. G. On one representation of the singular Jackson integral and the approximation of the function $|x|^s$ on the segment $[-1,\ 1]$. *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and Control*, 2019, vol. 9, iss. 2, pp. 22–38 (in Russian).

24. Rusak V. N. On approximation by rational functions on the real axis. *Izv. AN BSSR. Ser. fiz.-tekh. nauk*, 1974, vol. 1, pp. 22–28 (in Russian).

25. Rusak V. N. On the order of approximation by positive rational operators. *Izv. AN BSSR. Ser. fiz.-tekh. nauk*, 1975, iss. 3. pp. 39–46 (in Russian).

26. Pekarskii A. A. Chebyshev rational approximations in a circle, on a circle and on a segment. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1988, vol. 61, iss. 1, pp. 87–102.

27. Rovba E. A. Rational integral operators on a segment. *Vestn. BGU. Ser. 1, Fizika. Matematika. Informatika*, 1996, no. 1, pp. 34–39 (in Russian).

28. Smotritskii K. A. On the approximation of convex functions by rational integral operators on a segment. *Vesnik BGU. Ser. 1.*, 2005, no. 3, pp. 64–70 (in Russian).

29. Rovba E. A., Potseiko P. G. On a rational singular Jackson integral on a segment. *Dokl. NAN Belarusi*, 2019, vol. 63, no. 4, pp. 398–407 (in Russian).

30. Rovba E. A. On one direct method in rational approximation. *Docl. AN BSSR*, 1979, vol. 23, iss. 11, pp. 968–971 (in Russian).

31. Patseika P. G., Rouba Y. A., Smatrytski K. A. On one rational integral operator of Fourier–Chebyshev type and approximation of Markov functions. *J. BSU, Math. Inform*, 2020, vol. 2, pp. 6–27.

32. Potseiko P. G., Rovba E. A. On rational Abel–Poisson sums on a segment and approximations of Markov functions. *J. BSU, Math. Inform*, 2021, vol. 3, pp. 6–24.

33. Potseiko P. G., Rovba E. A. On rational approximations of the Markov function on a segment by Fejer sums with a fixed number of poles. *Trudy Instituta matematiki*, 2022, vol. 30, iss. 1–2, pp. 57–77 (in Russian).

34. Potseiko P. G., Rovba E. A. Valleé Poussin sums of Fourier–Chebyshev rational integral operators and approximations of the Markov function. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2024, vol. 35, iss. 5, pp. 879–896. https://doi.org/10.1090/spmj/1834.

35. Sidorov Yu. V., Fedoryuk M. V., Shabunin M. I. *Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable*. Moscow, Nauka, Gl. red. Fiz.-mat. lit-ry, 1989. 480 p. (in Russian).

36. Evgrafov M. A. *Asymptotic Estimates and Integer Functions*. Moscow, Nauka, 1979. 320 p. (in Russian).

37. Fedoryuk M. V. *Asymptotics. Integrals and Series*. Moscow, Gl. red. Fiz.-mat. lit-ry, 1987. 544 p. (in Russian).

38. Bernshtein S. N. *Extreme Properties of Polynomials and the Best Approximation of Continuous Functions of One Real Variable. Part 1*. Moscow, Leningrad, The main editorial office of general technical literature, 1937. 200 p. (in Russian).