

О НЕПРИВОДИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУППАХ С АБЕЛЕВЫМИ ПОДГРУППАМИ СИЛОВА

А. А. Ядченко

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
e-mail: yadchenko_56@mail.ru

Поступила: 17.11.2025

Исправлена: 11.12.2025

Принята: 15.12.2025

Ключевые слова: конечные группы, степени характеров, нормальные подгруппы.

Аннотация. Для π -разрешимых не π -замкнутых неприводимых комплексных линейных групп G степени n с π -холловой TI -подгруппой H нечетного порядка, большего 3, найдены условия, при которых n делится на $|H|$ или на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{|H|}$.

ON IRREDUCIBLE LINEAR GROUPS WITH ABELIAN SYLOW SUBGROUPS

A. A. Yadchenko

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
e-mail: yadchenko_56@mail.ru

Received: 17.11.2025

Revised: 11.12.2025

Accepted: 15.12.2025

Keywords: finite groups, degrees of characters, normal subgroups.

Abstract. For finite π -solvable non- π -closed irreducible complex linear groups of degree n with an π -Hall TI -subgroup H of odd order greater than 3 conditions are found under which n is divisible by $|H|$ or by a power $f > 1$ of some prime number such that $f \equiv 1 \pmod{|H|}$.

1. Введение

Пусть G – конечная группа, A – такая группа ее автоморфизмов, что $(|A|, |G|) = 1$. Тогда A называется группой *копростых* автоморфизмов группы G . Если $C_G(a) = C_G(A)$ для каждого элемента $a \in A^\#$, то A называется *сильноцентрализованной группой копростых автоморфизмов* группы G .

Заметим, что для $|A| = p$ – простое число, условие сильноцентрализованности выполняется. Для случая, когда группа A имеет нечетный порядок в [1] сформулирована гипотеза о том, что для неприводимых комплексных линейных групп $\Gamma = AG$ произвольной степени n справедливо утверждение, что n делится на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv -1$ или $1 \pmod{|A|}$.

В [2] эта гипотеза была доказана при условии, что силовская 2-подгруппа группы G абелева. В [3] она решена положительно без дополнительного условия. При $|A| = p$ она же совпадает с проблемой, сформулированной Айзексом [4] и доказанной Ньютоном [5].

Из теоремы 4.1 [6] вытекает, что степень $n = 2p - 2$ не p -замкнутой неприводимой линейной группы G является степенью 2. А из теоремы 2 [7] следует, что ее силовская 2-подгруппа G_2 не может быть абелевой. Рассмотрим неприводимые линейные группы G степени n , у которых силовская q -подгруппа G_q является абелевой, если степень $f = q^\alpha \leq n_q$, $\alpha \in \mathbf{N}$, и $f \equiv -1 \pmod{|A|}$.

Пусть $\pi(n^*)$ – множество таких простых делителей числа n , хотя бы одна степень $f > 1$ которых делит n и для нее выполняется условие: $f \equiv -1 \pmod{|A|}$. Предположим, что подгруппа A нечетного порядка, большего 3, и для $q \in \pi(n^*)$ силовская q -подгруппа G_q группы G абелева.

В теореме 1.2 для группы Γ и числа n сформулировано и доказано более сильное утверждение, чем в [2], [3] и [5].

С помощью теоремы 1.2 доказываются теорема 1.3 и теорема 1.4. Теорема 1.3 также усиливает соответствующий результат из [2], [3] и [5]. Теорема 1.4 для разрешимых групп ранее была доказана Романовским [8].

Условие 1.1. Скажем, что для Γ, A, G, C, χ и n выполнено условие 1.1, если $\Gamma = AG, G \triangleleft \Gamma, (|A|, |G|) = 1, A$ – группа нечетного порядка, большего 3, которая не является нормальной в группе $\Gamma, C_G(a) = C_G(A) = C$ для каждого элемента $a \in A^\#,$ для каждого $q \in \pi(n^*)$ подгруппа G_q абелева и группа G имеет точный неприводимый комплексный характер χ степени $n,$ который является A -инвариантным хотя бы для одного элемента $a \in A^\#.$

Теорема 1.2. Если для группы Γ, A, G, C, χ и n выполнено условие 1.1, то n делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{|A|}.$

Теорема 1.3. Пусть π -разрешимая не π -замкнутая группа G с π -холловой TI -подгруппой H нечетного порядка, большего 3, имеет точный неприводимый комплексный характер степени $n.$ Если для каждого $q \in \pi(n^*)$ подгруппа G_q абелева, то n делится на $|H|$ или на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{|H|}.$

Теорема 1.4. Пусть r -разрешимая не r -замкнутая группа G для простого числа $r > 3$ имеет точный неприводимый комплексный характер степени $n.$ Если для каждого $q \in \pi(n^*)$ подгруппа G_q абелева, то n делится на r или на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{r}.$

2. Некоторые обозначения и предварительные результаты

\mathbf{N} – множество натуральных чисел; если $n \in \mathbf{N}$ и q – простое натуральное число, то $n = n_q n_{q'}$; если ψ – характер некоторой группы $X,$ то $\text{Irr}(\psi)$ обозначает множество всех неприводимых компонент характера $\psi;$ $\pi = \pi(A);$ если $X \subseteq \Gamma,$ то $\pi' = \pi(X) \setminus \pi;$ $X_{\pi'}$ – холлова π' -подгруппа группы $X.$ Если $X \triangleleft \Gamma$ и φ – неприводимый характер подгруппы $X,$ то условие, что φ g -инвариантен для некоторого элемента $g \in \Gamma \setminus X,$ запишем для краткости в виде $I_\Gamma(\varphi) \neq X.$ Все остальные обозначения и определения обычны и их можно найти, например, в [9] или [10]. Всюду под характером группы будем понимать комплексный характер, а под группой – конечную группу.

Пусть $\Gamma = AB$ – группа, для которой подгруппа $B \triangleleft \Gamma, (|A|, |B|) = 1,$ т. е. A – группа копростых автоморфизмов группы B и $|A|$ нечетен. Тогда она удовлетворяет условию теоремы 13.1 [10]. Согласно этой теореме существует взаимно-однозначное соответствие $\pi(B, A) : \text{Irr}_A(B) \rightarrow \text{Irr}(C_B(A))$ между множеством всех A -инвариантных неприводимых характеров группы B и множеством всех неприводимых характеров подгруппы $C_B(A),$ которое обладает рядом свойств, зависящих, в частности, от свойств подгруппы $A.$ Пусть $\varphi \in \text{Irr}_A(B).$ Тогда по лемме 13.3 [10] существует такой единственный неприводимый характер $\widehat{\varphi}$ группы $\Gamma,$ что $\widehat{\varphi}_B = \varphi$ и $A \subseteq \ker(\det \widehat{\varphi}).$ Он называется каноническим продолжением характера φ на группу $\Gamma.$ В дальнейшем под $\widehat{\varphi}$ будем понимать именно такой характер.

Приведем ряд вспомогательных лемм.

Лемма 2.1 [3, лемма 2.7]. Пусть A – группа копростых автоморфизмов группы $B.$ Тогда $B = [B, A]C_B(A).$

Лемма 2.2 [11, лемма 11]. Пусть A – сильноцентрализованная группа копростых автоморфизмов группы $B.$ Предположим, что для некоторой A -инвариантной подгруппы $B_1 \subseteq B$ число $|B : B_1|$ не делится на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{|A|}.$ Тогда $B = B_1 C_B(A).$

Лемма 2.3 [3, лемма 2.9]. Пусть $\Gamma = AB$ – группа, где $B \triangleleft \Gamma, (|A|, |B|) = 1, A$ – разрешима и $C_B(a) = C_B(A)$ для каждого элемента $a \in A^\#.$ Если $\varphi \in \text{Irr}(B)$ и $I_\Gamma(\varphi) \neq B,$ то $\varphi \in \text{Irr}_A(B).$

Лемма 2.4. Пусть $\Gamma = AB$ – группа, где $B \triangleleft \Gamma, (|A|, |B|) = 1$ и $C_B(a) = C_B(A)$ для каждого элемента $a \in A^\#.$ Тогда A – TI -подгруппа в Γ и, если $\varphi \in \text{Irr}(B)$ и $I_\Gamma(\varphi) \neq B,$ то группа Γ имеет такой неприводимый характер $\widehat{\varphi}$ π' -степени, что $\widehat{\varphi}_B = \varphi.$ Группа $\Gamma = AO_{\pi'}(\Gamma).$

Доказательство. По лемме 2.6 [3] A – TI -подгруппа в $\Gamma.$ По лемме 2.3 $\varphi \in \text{Irr}_A(B).$ Поэтому существует каноническое продолжение $\widehat{\varphi}$ характера φ на $\Gamma.$ Ясно, что степень этого характера – π' -число. Последняя фраза леммы очевидна. \square

Лемма 2.5 [3, лемма 2.8]. Пусть $\Gamma = AB$ – группа, где $B \triangleleft \Gamma, (|A|, |B|) = 1$ и $C_B(a) = C_B(A)$ для каждого элемента $a \in A^\#.$ Если $K \triangleleft \Gamma$ такая подгруппа, что AK/K не является нормальной в $\Gamma/K,$ то $A \cap K = 1,$ а если $AK/K \triangleleft \Gamma/K,$ то $B = K_{\pi'} C_B(A).$

В дальнейшем при рассмотрении случаев, когда факторгруппа AK/K не является нормальной в Γ/K для некоторой нормальной подгруппы K в $\Gamma,$ мы будем учитывать, что $A \cap K = 1$ и, следовательно, $|AK/K| = |A/A \cap K| = |A|.$

Лемма 2.6 [3, лемма 2.5]. Пусть $t \geq 5$ – натуральное число, p – простое число и m – любое положительное число кратное t . Тогда для каждого целого положительного числа n существует такой простой делитель s числа $\Phi_n(p^m)$, что $s > n + 1$ и $s \equiv 1 \pmod{t}$.

3. Основная часть

3.1. Доказательство теоремы 1.2

Так как по условию 1.1 характер χ является a -инвариантным для некоторого $a \in A^\#$, то $I_\Gamma(\chi) \neq G$. Поскольку $\chi \in \text{Irr}_A(G)$ по лемме 2.3, то по лемме 2.4 группа Γ имеет такой неприводимый характер $\widehat{\chi}$, что $(\widehat{\chi})_G = \chi$. Ясно, что $\widehat{\chi}(1) = n$.

Доказательство теоремы проведем индукцией по порядку группы Γ . Пусть Γ – группа наименьшего порядка, для которой выполняется условие 1.1, но в то же время n не делится на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{|A|}$. Заметим, что если некоторая силовская подгруппа группы Γ абелева, то такими являются любые ее подгруппа и факторгруппа. В случае применения индукции, это обстоятельство будем учитывать.

Лемма 3.1. Характер $\widehat{\chi}$ точный.

Доказательство. Предположим, что $\ker \widehat{\chi} \neq 1$. Поскольку характер $(\widehat{\chi})_G = \chi$ точный по условию 1.1, то $\ker \widehat{\chi} \subseteq A$. Так как A – TI -подгруппа в Γ по лемме 2.4, то $A \triangleleft \Gamma$. Это противоречит условию 1.1. \square

Лемма 3.2. $O^{\pi'}(\Gamma) = \Gamma$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. $S = O^{\pi'}(\Gamma) \neq \Gamma$. По факторизационной лемме Чунихина [12, лемма 2.2.1]

$$\Gamma = N_\Gamma(A)S. \quad (1)$$

По теореме Клиффорда

$$(\widehat{\chi})_S = e \sum_{x \in T} \psi^x, \quad (2)$$

где $\psi \in \text{Irr}(S)$; e – число, делящее $\widehat{\chi}(1)$ и T – полное множество представителей всех смежных классов группы Γ по подгруппе $I = I_\Gamma(\psi)$. Поскольку $n = e|T|\psi(1)$, то $\psi(1)$ делит n .

Допустим, что

$$\bar{A} = A \ker \psi / \ker \psi \triangleleft S / \ker \psi = \bar{S}.$$

Тогда $A \ker \psi \triangleleft S$ и, следовательно, $(A \ker \psi)^t \triangleleft S^t$ для всех $t \in T$. Следовательно,

$$\bigcap_{t \in T} (A \ker \psi)^t \triangleleft S^t = S.$$

Отсюда получаем, что

$$\bigcap_{t \in T} A^t (\ker \psi)^t \triangleleft S.$$

Поскольку, согласно выражению (1), можем считать, что $t \in N_\Gamma(A)$, то

$$\bigcap_{t \in T} A (\ker \psi)^t \triangleleft S.$$

Так как $\bigcap_{t \in T} (\ker \psi)^t = \ker(\widehat{\chi})_S = 1$, то $A \triangleleft S$. Видим, что $A \triangleleft \Gamma$. Мы получили противоречие с выбором группы Γ .

Пусть теперь $\bar{A} \not\triangleleft \bar{S}$.

Покажем, что для $\bar{S}, \bar{A}, \bar{S}_{\pi'}, C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{A}), \bar{\psi}_{\bar{S}_{\pi'}}$ и $\bar{\psi}_{\bar{S}_{\pi'}}(1)$ выполняется условие 1.1. Здесь $\bar{\psi}$ – точный неприводимый характер факторгруппы \bar{S} в смысле леммы 2.22 [10]. Очевидно, $\bar{S}_{\pi'} \triangleleft \bar{S}$.

Покажем, что $C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{a}) = C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{A})$ для всех $\bar{a} \in \bar{A}^\#$. Пусть $\bar{s} \in C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{a}_1)$ для некоторого неединичного элемента \bar{a}_1 из \bar{A} . Тогда $\bar{a}_1 \in \bar{A} \cap (\bar{A})^{\bar{s}}$. Поскольку из леммы 2.4 вытекает, что A в группе S и, следовательно, \bar{A} в факторгруппе \bar{S} является TI -подгруппой, то $\bar{A} = (\bar{A})^{\bar{s}}$, т. е. $\bar{s} \in N_{\bar{S}}(\bar{A})$. Отсюда видим, что $\bar{s} \in C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{A})$. Следовательно, $C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{a}) \subseteq C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{A})$ для всех $\bar{a} \in \bar{A}^\#$. Поскольку обратное включение очевидно, то желаемое равенство установлено.

Так как $\bar{A} \not\triangleleft \bar{S}$, то к группе S и ее нормальной подгруппе $K = \ker \psi$ можем применить лемму 2.5. По ней $A \cap K = 1$. Значит, $\bar{A} \simeq A$.

Поскольку $\bar{\psi}(1)$ делит n , то $\bar{\psi}(1) - \pi'$ -число. Тогда видим, что $\bar{\psi}_{\bar{S}_{\pi'}} \in \text{Irr}_{\bar{A}}(\bar{S}_{\pi'})$.

Итак, для $\bar{S}, \bar{A}, \bar{S}_{\pi'}, C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{A}), \bar{\psi}_{\bar{S}_{\pi'}} \text{ и } \bar{\psi}_{\bar{S}_{\pi'}}(1)$ выполняется условие 1.1. Так как $|\bar{S}| < |\Gamma|$, то по индукции $\bar{\psi}(1)$ делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{|\bar{A}|}$. Поскольку $\bar{A} \simeq A$, то, отсюда и того, что $\bar{\psi}(1)$ делит n , замечаем, что и n делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{|A|}$. Полученное противоречие с минимальностью группы Γ указывает на то, что наше предположение о том, что $S = O^{\pi'}(\Gamma) \neq \Gamma$ ошибочно. Стало быть, $O^{\pi'}(\Gamma) = \Gamma$. \square

Лемма 3.3. *Если L – максимальная нормальная в G A -инвариантная подгруппа, то $L \subseteq C$.*

Доказательство. Мы можем положить, что $L \neq 1$. По теореме Клиффорда

$$(\hat{\chi})_L = e \sum_{x \in T} \psi^x,$$

где $\psi \in \text{Irr}(L)$, e и T соответствуют обозначениям в выражении (2). По теореме 6.11 [10] $\hat{\chi} = \psi_1^\Gamma$ для такого характера $\psi_1 \in \text{Irr}(I)$, что $(\psi_1)_L = e\psi$. Поскольку $\hat{\chi}(1) = |\Gamma : I|\psi_1(1)$ и $\hat{\chi}(1) = \chi(1) = n$ является π' -числом, то и $\psi_1(1)$ также π' -число. Мы можем также считать, что $A \subseteq I$.

Предположим поначалу, что $I \neq \Gamma$. Так как $|\Gamma : I|$ делит n , то из предположения, что $|\Gamma : I|$ делится на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{|A|}$ вытекает, что и n делится на такую же степень с таким же свойством. В этом случае теорема верна и мы получим противоречие с выбором группы Γ . Следовательно, мы полагаем, что $|\Gamma : I|$ не делится на такую степень. По лемме 2.2

$$G = I_{\pi'}C. \tag{3}$$

Пусть, как и ранее, $\bar{A} = A \ker \psi_1 / \ker \psi_1$ и $\bar{I} = I / \ker \psi_1$. Нетрудно видеть, что характер $(\psi_1)_{I_{\pi'}}$ неприводим, т. е. $(\psi_1)_{I_{\pi'}} \in \text{Irr}_A(I_{\pi'})$. Тогда $(\bar{\psi}_1)_{\bar{I}_{\pi'}} \in \text{Irr}_{\bar{A}}(\bar{I}_{\pi'})$. Здесь $\bar{\psi}_1$ – точный неприводимый характер факторгруппы \bar{I} в смысле леммы 2.22 [10].

Предположим также, что $\bar{A} \not\triangleleft \bar{I}$. Как и ранее устанавливаем, что для $\bar{I}, \bar{A}, \bar{I}_{\pi'}, C_{\bar{I}_{\pi'}}(\bar{A}), (\bar{\psi}_1)_{\bar{I}_{\pi'}}$ и $(\bar{\psi}_1)_{\bar{I}_{\pi'}}(1)$ выполняется условие 1.1.

Так как $|\bar{I}| < |\Gamma|$, то, согласно минимальности группы Γ , мы получаем, что $(\bar{\psi}_1)_{\bar{I}_{\pi'}}(1)$ делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{|\bar{A}|}$. Поскольку $(\psi_1)_L$ делит $\hat{\chi}(1) = n$ и $|\bar{A}| = |A|$, что следует из леммы 2.5, то видим, что f делит n и $f \equiv 1 \pmod{|A|}$. Мы получили противоречие с минимальностью группы Γ .

Рассмотрим теперь случай, когда $\bar{A} \triangleleft \bar{I}$. Поскольку $\ker \psi_1 \triangleleft I$, то по лемме 2.5 $I_{\pi'} = (\ker \psi_1)_{\pi'} C_{I_{\pi'}}(A)$. Откуда, с учетом формулы (3), получаем, что $G = (\ker \psi_1)_{\pi'} C$. Поэтому $g = kc$ для всех элементов $g \in G$ и для соответствующих им элементов $k \in \ker \psi_1$ и $c \in C$. Поэтому

$$[g, a] = [k, a] \in (\ker \psi_1)_{\pi'}$$

для всех $g \in G$ и для всех $a \in A$. Значит, $[G, A] \subseteq (\ker \psi_1)_{\pi'}$. Поскольку по предположению $I \neq \Gamma$, т. е. $(\ker \psi_1)_{\pi'} \neq G$, то $[G, A] \neq G$. Это означает, что $A[G, A] \neq \Gamma$. Так как из леммы 2.1 вытекает, что $A[G, A] \triangleleft \Gamma$, то мы получили противоречие с леммой 3.2.

Пусть теперь $I = \Gamma$. Тогда $\hat{\chi}_L = e\psi$.

Если $A \triangleleft AL$, то $L \subseteq C$ и лемма верна.

Поэтому $A \not\triangleleft AL$. Легко заметить, что для $AL, A, L, C_L(A), \psi$ и $\psi(1)$ выполняется условие 1.1. Так как $|AL| < |\Gamma|$, то по индукции $\psi(1)$ делится на такую степень f некоторого простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{|A|}$. Тогда и n делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{|A|}$. Мы вновь получили противоречие с минимальностью группы Γ . \square

Лемма 3.4. $L \subseteq Z(\Gamma)$ для подгруппы L из леммы 3.3 и $\bar{G} = G/L$ – главный фактор группы Γ .

Доказательство. По лемме 3.3 $L \subseteq C$, т. е. $A \subseteq C_\Gamma(L)$. Так как $C_\Gamma(L) \triangleleft \Gamma$, то из леммы 3.2 следует, что $C_\Gamma(L) = \Gamma$. Значит, $L \subseteq Z(\Gamma)$. Поскольку L является максимальной нормальной в G A -инвариантной подгруппой, то \bar{G} является главным фактором группы Γ . \square

Лемма 3.5. *Группа \bar{G} – неразрешима.*

Доказательство. По лемме 3.4 \bar{G} – либо элементарная абелева q -группа для некоторого простого числа q , т. е. разрешима, либо является прямым произведением простых неабелевых групп.

Допустим она разрешима. Из леммы 3.4 вытекает, что, $\Gamma = AG_q \times G_{q'}$, где $G_{q'} \subseteq Z(\Gamma)$. Так как $n - \pi'$ -число, то по теореме 6.15 [10] n является степенью простого числа q , т. е. $n = q^\alpha$.

Если $\alpha = 0$, то $n = 1$. Тогда группа Γ циклическая. Значит, $A \triangleleft \Gamma$. Это противоречит условию 1.1.

Следовательно, $\alpha > 0$. Легко видеть, что характер $\widehat{\chi}_{AG_q}$ неприводим и неприводим характер $\widehat{\chi}_{G_q}$, ибо он имеет π' -степень. Тогда подгруппа G_q не является абелевой.

Допустим, что $q^{\alpha_1} \equiv -1 \pmod{|A|}$ для некоторого числа $\alpha_1 \leq \alpha$. Тогда по условию 1.1 подгруппа G_q абелева. Противоречие. Отсюда и из теоремы 1 [13] следует, что $q^{\alpha_1} \equiv 1 \pmod{|A|}$ для некоторого числа $\alpha_1 \leq \alpha$. \square

Лемма 3.6. *Группа \overline{G} – неабелева простая группа.*

Доказательство. По лемме 3.3 $L \subseteq C$, т. е. $A \subseteq C_\Gamma(L)$. Так как $C_\Gamma(L) \triangleleft \Gamma$, то из леммы 3.2 следует, что $C_\Gamma(L) = \Gamma$. Значит, $L \subseteq Z(\Gamma)$. Поскольку L является максимальной нормальной подгруппой в Γ , то \overline{G} является главным фактором группы $\overline{\Gamma}$. Согласно теореме 1 [13] мы можем предположить, что \overline{G} неразрешима.

Предположим, что \overline{G} не является простой группой. Тогда \overline{G} – прямое произведение $|A|$ копий, изоморфных некоторой простой неабелевой группе. Значит, G – центральное произведение $|A|$ изоморфных групп. Из леммы 3 [5] следует, что $n = m^{|A|}$ для некоторого натурального числа m . Тогда $p^{|A|}$ делит n для некоторого простого числа p , делящего n . Поскольку по теореме Эйлера из теории чисел $p^{\varphi(|A|)} \equiv 1 \pmod{|A|}$, где $\varphi(|A|)$ – количество натуральных чисел меньших $|A|$ и взаимнопростых с $|A|$, и $p^{\varphi(|A|)}$ делит n , то мы получили противоречие с минимальностью Γ . Поэтому группа \overline{G} простая. \square

Пусть $\overline{\Gamma} = \Gamma/L$ и так как $\overline{A} = AL/L \simeq A/A \cap L = A$, то можем записать, что $\overline{\Gamma} = A\overline{G}$.

Из леммы 3.6 и из леммы 5 [5] вытекает, что \overline{G} – простая группа типа Ли над некоторым конечным полем F . Пусть $q = p^m$ – число элементов этого поля. Так как мы можем рассматривать A как группу автоморфизмов поля F по лемме 5 [5], то делаем вывод, что $|A|$ делит m .

По условию $|A| \geq 5$. Поэтому $m \geq 5$. Применим лемму 6 [5]. Предположим, что q делит n . Тогда $p^{|A|}$ делит n . Ранее мы убедились, что в этом случае мы приходим к противоречию с минимальностью группы Γ . Значит, как следует из леммы 6 [5], существуют такие целые числа d и k , что dn делится на $\Phi_k(q)$.

Положив $t = |A|$, из леммы 2.6 получаем, что dn делится на такое простое число s , что $s \equiv 1 \pmod{|A|}$ и $s > k + 1$.

Если \overline{G} группа не типа $A_l(q)$ или ${}^2A_l(q)$ для некоторого положительного числа l , то d не делится на любое простое число, большее чем 5. Так как $|A| \geq 5$, что отмечено выше, то $s > 5$ и, значит, s делит n .

Пусть теперь \overline{G} группа типа $A_l(q)$ или ${}^2A_l(q)$. Тогда d не делится на любое простое число, большее чем $l + 1$, и мы можем взять число k , большее или равное l . В этом случае $s > l + 1$ и мы вновь имеем, что s делит n . Это последнее противоречие доказывает теорему 1.2.

3.2. Доказательство теоремы 1.3

Используем индукцию по порядку группы G . Пусть G – группа минимального порядка среди всех групп, для которых условие теоремы выполняется, а заключение нет. Представлению группы G как неприводимой линейной группы степени n отвечает точный неприводимый характер χ .

Лемма 3.7. *H не содержится в такой собственной нормальной подгруппе M группы G , что M имеет нормальное π -дополнение.*

Доказательство. Обозначим $M = O_{\pi'}(\Gamma)$ и повторим доказательство леммы 3.2. \square

Поскольку группа G – π -разрешима и подгруппа H – TI -множество, то справедлива

Лемма 3.8. $O_{\pi'}(G) \neq 1$.

Лемма 3.9. $G = HO_{\pi'}(G)$.

Доказательство. Рассмотрим подгруппу $O_{\pi',\pi}(G)$. По определению

$$O_{\pi',\pi}(G)/O_{\pi'}(G) = O_{\pi}(G/O_{\pi'}(G)).$$

Так как группа $G/O_{\pi'}(G)$ – π -разрешима и согласно теореме 6.3.1 [9] $O_{\pi'}(G/O_{\pi'}(G)) = 1$, то

$$O_{\pi}(G/O_{\pi'}(G)) \neq 1.$$

Поскольку $HO_{\pi'}(G)/O_{\pi'}(G)$ – холлова π -подгруппа с тривиальным пересечением в $G/O_{\pi'}(G)$, то

$$O_{\pi',\pi}(G) = HO_{\pi'}(G).$$

Осталось лишь заметить, что $O_{\pi',\pi}(G) \triangleleft G$, и применить лемму 3.7. \square

Так как по лемме 3.9 $G = HO_{\pi'}(G)$ и $C_{O_{\pi'}(G)}(h) = C_{O_{\pi'}(G)}(H)$ для всех $h \in H^\#$, то для $G, H, O_{\pi'}(G), C_{O_{\pi'}(G)}(h)$, точного неприводимого характера $\chi_{O_{\pi'}(G)}$ и n выполнено условие 1.1. По теореме 1.2 n делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{|H|}$. Получили противоречие с минимальностью группы G . Это последнее противоречие доказывает теорему 1.3.

3.3. Доказательство теоремы 1.4

Пусть χ данный в условии теоремы точный неприводимый характер группы G степени n . Доказательство теоремы проведем индукцией по порядку группы G . Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой выполняются условия теоремы 1.4, но в то же время n не делится на p и не делится на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{p}$.

Как в лемме 3.2 мы убеждаемся в том, что $S = O_{p'}(G) = G$.

Далее. Поскольку группа G является p -разрешимой, то либо $O_p(G) \neq 1$, либо $O_{p'}(G) \neq 1$.

Допустим поначалу, что $O_p(G) \neq 1$. Пусть M – такая максимальная нормальная подгруппа в G , что $O_p(G) \subseteq N \triangleleft G$ и M/N – главный фактор группы G . Заметим, что факторгруппа G/M также является главным фактором группы G . Поэтому G/M – p -группа либо p' -группа.

Поскольку $S = G$, то G/M – p -группа. Тогда $M_{p'} = G_{p'}$ и $|G/M| = p^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{N}$. Чуть ранее мы отметили, что $\chi(1)$ не делится на простое число p . Тогда характер χ_M неприводим. Поэтому неприводим и характер χ_{M_1} , где M_1 такая подгруппа, что $M \subseteq M_1 \triangleleft G$ и $|G : M_1| = p$.

И, если подгруппа M_1 не p -замкнута, то по индукции n делится на p или на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{p}$. Это противоречит выбору группы G .

Поэтому подгруппа M_1 p -замкнута. Очевидно, $O_p(M_1) = O_p(G)$ и $|\bar{G}_p| = p$, $\bar{G}_p = G_p/O_p(G)$. Мы можем положить, что $M_1 = M$. Мы также видим, что $M = M_{p'}O_p(G)$ и $M_{p'} = G_{p'}$, т. е. $M = G_{p'}O_p(G)$.

Напомним, что $O_p(G) \neq 1$. По теореме Клиффорда к характеру $\chi_{O_p(G)}$ применима формула (2). В ее обозначениях по теореме 6.17 [10] существует такой неприводимый характер ψ_1 подгруппы I , что $(\psi_1)_{O_p(G)} = e\psi$ для некоторого неприводимого характера ψ группы $O_p(G)$ и $\chi = (\psi_1)^G$. Отсюда видим, что $\chi(1) = \psi_1(1)|G : I|$, и что $\psi_1(1)$ и $|G : I|$ не делятся на p и на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{p}$. Следовательно, $\psi(1) = 1$ и, значит, подгруппа $O_p(G)$ абелева. Мы также можем утверждать, что $G_p \subseteq I$, т. е. $G_p = I_p$.

Предположим вначале, что $I \neq G$.

Пусть $G_p \ker \psi_1 / \ker \psi_1 \not\triangleleft I / \ker \psi_1$. Легко видеть, что группа $I / \ker \psi_1$ и ее точный неприводимый характер ψ_1 в смысле леммы 2.22 [10] удовлетворяют условиям теоремы 1.4. Тогда по индукции $\psi_1(1)$ делится на p или на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{p}$, что не так.

Поэтому $G_p \ker \psi_1 / \ker \psi_1 \triangleleft I / \ker \psi_1$ и, значит, $G_p \ker \psi_1 \triangleleft I$.

Рассмотрим факторгруппу

$$\bar{G} = G/O_p(G) = \bar{G}_p \bar{M}, \quad \bar{M} = M/O_p(G).$$

Мы видим, что группа \bar{G}_p имеет порядок p , $\bar{M} \triangleleft \bar{G}$ и является p' -группой, и поэтому \bar{G}_p является сильноцентрализованной группой копростых автоморфизмов группы \bar{M} . А поскольку $G = MI$, то также мы видим, что

$$\bar{G} = \bar{M}\bar{I}, \quad \bar{I} = I/O_p(G),$$

и что

$$|G : I| = |\bar{G} : \bar{I}| = \frac{|\bar{M}\bar{I}|}{|\bar{I}|} = |\bar{M} : \bar{M} \cap \bar{I}_{p'}|.$$

По лемме 2.2

$$\bar{M} = \bar{I}_{p'} C_{\bar{M}}(\bar{G}_p).$$

Пусть

$$\overline{M} = \langle mO_p(G), |m \in M \rangle, \quad \overline{G}_p = \langle nO_p(G), |n \in G_p \rangle.$$

Тогда

$$C_{\overline{M}}(\overline{G}_p) = \langle m \in M | [m, n] \in O_p(G), n \in G_p \rangle$$

и, значит,

$$G = IC_{\overline{M}}(\overline{G}_p).$$

Поскольку $[C_{\overline{M}}(\overline{G}_p), G_p] \subseteq O_p(G) \subseteq G_p$, то $C_{\overline{M}}(\overline{G}_p) \subseteq N_G(G_p)$ и, следовательно,

$$G = IN_G(G_p).$$

Так как $G_p \ker \psi_1 \triangleleft I$, то по факторизационной лемме Чунихина $I = N_I(G_p) \ker \psi_1$. Поскольку $N_I(G_p) \subseteq N_G(G_p)$, то

$$G = N_G(G_p) \ker \psi_1.$$

Поскольку $G_p \not\triangleleft G$, то $\ker \psi_1 \neq 1$.

Допустим, что $(\ker \psi_1)_p = G_p \cap \ker \psi_1 = 1$. Тогда $\ker \psi_1 \subseteq C_G(O_p(G))$. Заметим, что $C_G(O_p(G)) \triangleleft G$.

Предположим, что $C_G(O_p(G)) = G$. Тогда $O_p(G) \subseteq Z(G)$ и, следовательно, подгруппа $I = G$, что не так по предположению.

Поэтому $C_G(O_p(G)) \neq G$. Отсюда и из последней выделенной формулы вытекает, что $G_p C_G(O_p(G)) \triangleleft G$. Однако ранее мы отметили, что $S = O^{p'}(G) = G$.

Следовательно, $(\ker \psi_1)_p = G_p \cap \ker \psi_1 \neq 1$. Так как $(\ker \psi_1)_p \triangleleft G_p$, то $Z = (\ker \psi_1)_p \cap Z(G_p) \neq 1$ и поскольку $T \subseteq N_G(G_p)$ и $Z(G_p) \triangleleft N_G(G_p)$, то $Z^t \subseteq Z(G_p) \subseteq I$ для всех $t \in T$. Здесь T из формулы (2). Поэтому для $1 \neq z \in Z$ получаем, что

$$\chi(z) = (\psi_1)^G(z) = \sum_{t \in T} (\psi_1)^0(tzt^{-1}) = \sum_{t \in T} \psi_1(tzt^{-1}) = |T| \psi_1(z) = |T| \psi_1(1) = \chi(1),$$

ибо $z \in \ker \psi_1$. Здесь $(\psi_1)^0(x) = \psi_1(x)$, если $x \in I$ и $(\psi_1)^0(x) = 0$, если $x \notin I$. Мы получили противоречие с точностью характера χ .

Рассмотрим теперь случай, когда $I = G$. Поскольку по выбору группы G число n не делится на p , то $\chi_{O_p(G)} = \chi(1)\lambda$ для линейного неприводимого характера λ подгруппы $O_p(G)$. Тогда $O_p(G) \subseteq Z(G)$. Значит, $M = M_{p'} \times O_p(G)$ и, так как $M_{p'} = G_{p'}$, то видим, что $G = G_p G_{p'}$, где $G_{p'} \triangleleft G$ и $|G_p : O_p(G)| = p$. Замечаем, что характер χ и группа G удовлетворяют условиям леммы 2 [7]. По этой лемме группа G имеет неприводимый характер χ' степени n и $\ker \chi' = O_p(G)$. Рассмотрим факторгруппу $\overline{G} = G/O_p(G)$. Она и ее точный неприводимый характер χ' в смысле леммы 2.22 [10] удовлетворяют условиям теоремы 1.4. Поскольку $|\overline{G}| < |G|$, то по индукции $\chi'(1)$ делится на p или на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{p}$. Поскольку $\chi'(1) = n$, то мы получили противоречие с выбором группы G .

Осталось рассмотреть случай, когда $O_p(G) = 1$. По теореме 6.3.2 [9] $C_G(O_{p'}(G)) \subseteq O_{p'}(G)$. Допустим, что $O_{p,p'}(G) \neq G$. По теореме Клиффорда все неприводимые компоненты характера $\chi_{O_{p,p'}(G)}$ имеют одинаковую степень, делящую n . Если группа $O_{p,p'}(G)$ не p -замкнута, то мы приходим к тому, что n делится на p или на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{p}$. Поскольку это противоречит выбору группы G , то делаем вывод, что группа $O_{p,p'}(G)$ является p -замкнутой. Это противоречит тому, что $O_p(G) = 1$.

Делаем вывод, что $O_{p,p'}(G) = G$ и $|G : O_{p'}(G)| = p$. Мы видим, что группа $G = G_p O_{p'}(G)$, G_p , $O_{p'}(G)$, $C_{O_{p'}(G)}(G_p)$, $\chi_{O_{p'}(G)}$ и n удовлетворяют условию 1.1. По теореме 1.2 n делится на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{p}$.

Теорема 1.4 доказана.

Работа поддержана Институтом математики НАН Беларуси в рамках государственной программы «Конвергенция–2025».

Литература

1. Ядченко А. А. О Π -разрешимых неприводимых линейных группах с холловой TI -подгруппой нечетного порядка III // Труды Института математики. 2010. Т. 18, № 2. С. 94–114.
2. Ядченко А. А. Об автоморфизмах неприводимых линейных групп с абелевой силовой 2-подгруппой // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 1. С. 121–139.
3. Ядченко А. А. К проблеме Айзекса // Матем. сборник. 2013. Т. 204, № 12. С. 147–156.
4. Isaacs I. M. Characters of solvable groups // The Santa Cruz Conference on Finite Groups. Proc. Symp. Pure Math. 1980. Vol. 37. P. 377–384.
5. Newton B. On the degrees of complex p -solvable linear groups // J. Algebra. 2005. Vol. 288. P. 384–391.
6. Isaacs I. M. Complex p -solvable linear groups // J. Algebra. 1973. Vol. 24, N 3. P. 513–530.
7. Романовский А. В., Ядченко А. А. О силовских подгруппах линейных групп // Матем. сборник. 1988. Т. 137(179), № 4(12). С. 568–573.
8. Романовский А. В. О конечных разрешимых линейных группах // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1975. С. 129–132.
9. Gorenstein D. Finite groups. New York: Harper and Row, 1968. 527 p.
10. Isaacs I. M. Character theory of finite groups. New York: Academic Press, 1976. 303 p.
11. Ядченко А. А. О факторизации некоторых Π -разрешимых неприводимых линейных групп // Труды Института математики. 2019. Т. 27, № 1–2. С. 79–107.
12. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. Минск: Наука и техника, 1964. 158 с.
13. Ядченко А. А. Разрешимые неприводимые линейные группы произвольной степени с холловской TI -подгруппой // Матем. заметки. 1990. Т. 48, № 2. С. 137–144.
14. Романовский А. В., Ядченко А. А. Мономимальные характеры и нормальные подгруппы конечных групп // Укр. матем. журнал. 1991. Т. 43, № 7–8. С. 991–996.

References

1. Yadchenko A. A. On the π -solvable irreducible linear groups with Hall TI -subgroups of odd order III. *Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2010, vol. 18, no. 2, pp. 94–114 (in Russian).
2. Yadchenko A. A. On automorphisms of irreducible linear groups with an Abelian Sylow 2-subgroup. *Math. Notes*, 2007, vol. 99, no. 1, pp. 121–139 (in Russian).
3. Yadchenko A. A. On Isaacs' problem. *Matem. sbornik*, 2013, vol. 204, no. 12, pp. 147–156 (in Russian).
4. Isaacs I. M. Characters of solvable groups. *The Santa Cruz Conference on Finite Groups. Proc. Symp. Pure Math.*, 1980, vol. 37, pp. 377–384.
5. Newton B. On the degrees of complex p -solvable linear groups. *J. Algebra*, 2005, vol. 288, pp. 384–391.
6. Isaacs I. M. Complex p -solvable linear groups. *J. of Algebra*, 1973, vol. 24, no. 3, pp. 513–530.
7. Romanovskiy A. V., Yadchenko A. A. On Sylow subgroups of linear groups. *Matem. sbornik*, 1988, vol. 137(179), no. 4(12), pp. 568–573 (in Russian).
8. Romanovskiy A. V. On finite solvable linear groups. *Finite Groups*. Minsk, Nauka i Tekhnika, 1975, pp. 129–132 (in Russian).
9. Gorenstein D. *Finite groups*. New York, Harper and Row, 1968. 527 p.
10. Yadchenko A. A. On factorization of some Π -solvable irreducible linear groups *Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2019, vol. 27, no. 1–2, pp. 79–107 (in Russian).
11. Isaacs I. M. *Character theory of finite groups*. New York, Academic Press, 1976. 303 p.
12. Chunihin S. A. *Subgroup of finite groups*. Minsk, Nauka i Tekhnika, 1975. 158 p. (in Russian).
13. Yadchenko A. A. Solvable irreducible linear groups of arbitrary degree with Hall TI -subgroup. *Math. Notes*, 1990, vol. 48, no. 2, pp. 137–144 (in Russian).
14. Romanovskiy A. V., Yadchenko A. A. Monomial characters and normal subgroups of finite groups. *Ukrainian Mathem. Journal*, 1991, vol. 43, no. 7–8, pp. 991–996 (in Russian).