Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Том 33. № 2. С. 7–12

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ
ALGEBRA AND NUMBER THEORY

УДК 512.542 EDN: JFHHSG

ЗАМЕТКА О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С СУБНОРМАЛЬНЫМИ КОРАДИКАЛАМИ НЕКОТОРЫХ СИЛОВСКИХ НОРМАЛИЗАТОРОВ

А. Ф. Васильев[1], Т. И. Васильева[2], А. Г. Коранчук[1]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь*
[2]*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*
e-mail: formation56@mail.ru, tivasilyeva@mail.ru, melchenkonastya@mail.ru

Поступила: 22.11.2025 **Исправлена:** 22.11.2025 **Принята:** 15.12.2025

Ключевые слова: конечная группа, p-силовский нормализатор, субнормальная подгруппа, формация, корадикал, сверхразрешимая группа.

Аннотация. Пусть G – группа и множество простых чисел $\tau(G) = \cup\pi(G : M)$ для любой максимальной подгруппы M из G. Для непустой нильпотентной формации $\mathfrak{X}$ доказано, что группа G имеет нильпотентный $\mathfrak{X}$-корадикал тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}$-корадикал p-силовского нормализатора субнормален в G для любого p из $\tau(G)$.

A NOTE ON FINITE GROUPS WITH SUBNORMAL RESIDUALS OF SOME SYLOW NORMALIZERS

A. F. Vasil'ev[1], T. I. Vasil'eva[2], A. G. Koranchuk[1]

[1]*F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus*
[2]*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*
e-mail: formation56@mail.ru, tivasilyeva@mail.ru, melchenkonastya@mail.ru

Received: 22.11.2025 **Revised:** 22.11.2025 **Accepted:** 15.12.2025

Keywords: finite group, p-Sylow normalizer, subnormal subgroup, formation, residual, supersolvable group.

Abstract. Let G be a group and the set of primes $\tau(G) = \cup\pi(G : M)$ for any maximal subgroup M of G. For a non-empty nilpotent formation $\mathfrak{X}$, it is proved that a group G has a nilpotent $\mathfrak{X}$-residual if and only if the $\mathfrak{X}$-residual of the p-Sylow normalizer is subnormal in G for every p from $\tau(G)$.

1. Введение

В заметке под словом группа понимается конечная группа. Пусть p – простое число. Для краткости будем называть *p-силовским нормализатором* нормализатор силовской p-подгруппы группы и *силовским нормализатором* нормализатор силовской подгруппы группы. В 1986 г. в [1] была установлена нильпотентность группы, все силовские нормализаторы которой нильпотентны. В 1999 г. А. Баллестер-Болинше и Л. А. Шеметков [2] доказали, что группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор группы G является p-нильпотентным для любого $p \in \pi(G)$. Здесь $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G.

В работах [1–5] изучались насыщенные формации $\mathfrak{F}$, содержащие группы, все силовские нормализаторы которых являются $\mathfrak{F}$-группами. Однако большинство классических формаций не относится к таким формациям. В частности, в симметрической группе степени 4 все силовские нормализаторы сверхразрешимы, но сама группа не является сверхразрешимой.

В дальнейшем $\mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп, $\mathfrak{A}$ – формация всех абелевых групп. Для формации $\mathfrak{X}$ через $G^{\mathfrak{X}}$ обозначается *$\mathfrak{X}$-корадикал* группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, для которой $G/G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$; $G^{\mathfrak{N}}$ – нильпотентный корадикал G.

В работе [6] были найдены необходимые и достаточные условия, при которых группа со сверхразрешимыми (метанильпотентными, имеющими нильпотентный коммутант) силовскими нормализаторами сверхразрешима (соответственно, метанильпотентна, имеет нильпотентный коммутант). В теореме А [6] было установлено, что для непустой формации $\mathfrak{X}$, состоящей из нильпотентных групп, необходимыми и достаточными условиями принадлежности группы G формации $\mathfrak{N}\mathfrak{X}$ являются разрешимость p-силовского нормализатора и субнормальность в G его $\mathfrak{X}$-корадикала для любого $p \in \pi(G)$. В теореме В [6] было доказано, что для наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ такой, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$, тогда и только тогда группа $G \in \mathfrak{F}$, когда p-силовский нормализатор принадлежит $\mathfrak{F}$ и его нильпотентный корадикал субнормален в G для любого $p \in \pi(G)$. Применяя отмеченный выше результат А. Баллестера-Болинше и Л. А. Шеметкова, в работе [7] было установлено, что в достаточных условиях теоремы А разрешимость силовских нормализаторов можно отбросить.

В [8] для группы G через $\tau(G)$ обозначено множество всех простых чисел p таких, что в G найдется максимальная подгруппа M, для которой p делит $|G:M|$, т. е. $\tau(G) = \cup\pi(G:M)$ для любой максимальной подгруппы M из G. Множество $\tau(G)$ не всегда совпадает с множеством $\pi(G)$, как, например, для группы $G = PSL(2,7)$, в то же время если G – разрешимая группа, то $\tau(G) = \pi(G)$ [8]. Однако из $\tau(G) = \pi(G)$ не всегда следует разрешимость группы G. В качестве примера выступает знакопеременная группа A_5 степени 5, для которой $\tau(A_5) = \{2,3,5\} = \pi(A_5)$.

В [8, теорема 1.2] было установлено, что приведенный выше результат А. Баллестера-Болинше и Л. А. Шеметкова верен для любого $p \in \tau(G)$. Это используется в настоящей заметке при доказательстве следующих результатов.

Теорема 1.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустая формация и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Группа $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$.*

(2) *Любая подгруппа группы G, содержащаяся в $G^{\mathfrak{X}}$, является субнормальной в G.*

(3) *$H^{\mathfrak{X}}$ субнормален в группе G для любой подгруппы H из G.*

(4) *$\mathfrak{X}$-корадикал p-силовского нормализатора субнормален в группе G для любого $p \in \tau(G)$.*

Теорема 1.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустая формация, $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация такая, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{X}$. Группа $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор группы G принадлежит $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$-корадикал p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

Приведем несколько следствий. Для $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}$ из теоремы 1.1 получаются такие результаты соответственно.

Следствие 1.3. *Следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Группа G метанильпотентна.*

(2) *Любая подгруппа, содержащаяся в нильпотентном корадикале группы G, является субнормальной в G.*

(3) *Нильпотентный корадикал любой подгруппы группы G субнормален в G.*

(4) *Нильпотентный корадикал p-силовского нормализатора группы G субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

Следствие 1.4. *Следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Группа G имеет нильпотентный коммутант.*

(2) *Любая подгруппа группы G, содержащаяся в G', является субнормальной в G.*

(3) *Коммутант любой подгруппы группы G субнормален в G.*

(4) *Коммутант p-силовского нормализатора группы G субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

Так как пересечение наследственных насыщенных формаций является наследственной насыщенной формацией, из теорем 1.1 и 1.2 вытекает

Следствие 1.5. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустая формация, $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$. Группа G принадлежит $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор группы G принадлежит $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$-корадикал p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

Следствие 1.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ и имеет нильпотентный корадикал тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор группы G принадлежит $\mathfrak{F}$ и нильпотентный корадикал p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

Следствие 1.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ и имеет нильпотентный коммутант тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор группы G принадлежит $\mathfrak{F}$ и коммутант p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

2. Предварительные сведения

В обозначениях и определениях мы придерживаемся монографий [9; 10].

Теорема 2.1 [8, теорема 1.2]. *Группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда для любого $p \in \tau(G)$ нормализатор каждой силовской p-подгруппы группы G является p-нильпотентным.*

Лемма 2.2 [10, лемма A.8.6(a)]. *Пусть G – группа и π – множество простых чисел. Если K – субнормальная подгруппа группы G и K – π-группа, то $K \leqslant O_\pi(G)$.*

Лемма 2.3 [9, теорема 2.4]. *Любая формация, состоящая из нильпотентных групп, является наследственной формацией.*

Лемма 2.4 [9, лемма 1.2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, K – нормальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$(G/K)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}K/K$;*

(2) *если $G = HK$ для подгруппы H из G , то $H^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}K$;*

(3) *если $G = HK$ и $K \leqslant G^{\mathfrak{F}}$, то $H^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}$.*

Приведем известные свойства класса групп с нильпотентным $\mathfrak{F}$-корадикалом (см., например, [9, с. 36; 10, IV.3, IV.4]).

Лемма 2.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Тогда $\mathfrak{NF} = (G \mid G/N \in \mathfrak{F}$ для некоторой $N \trianglelefteq G$ и $N \in \mathfrak{N}) = \mathfrak{N} \circ \mathfrak{F} = (G \mid G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N})$ – насыщенная формация. Если $\mathfrak{F}$ является наследственной, то и $\mathfrak{NF}$ является наследственной.*

Лемма 2.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация и группа $G \in \mathfrak{NF}$.*

(1) *Любая подгруппа из G, содержащаяся в $G^{\mathfrak{F}}$, является субнормальной в G.*

(2) *Если $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация, то $H^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа в G для любой подгруппы H из G.*

Доказательство. В нильпотентной группе любая подгруппа является субнормальной. Поэтому утверждение (1) следует из нильпотентности $G^{\mathfrak{F}}$ и нормальности $G^{\mathfrak{F}}$ в G.

(2) Для наследственной формации $\mathfrak{F}$ и любой подгруппы H из G имеем $H^{\mathfrak{F}} \leqslant G^{\mathfrak{F}}$. По утверждению (1) $H^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа в G. □

Лемма 2.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, N – нормальная подгруппа группы G. Если $\mathfrak{F}$-корадикал p-силовского нормализатора группы G субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$, то $\mathfrak{F}$-корадикал q-силовского нормализатора группы G/N субнормален в G/N для любого $q \in \tau(G/N)$.*

Доказательство. Пусть $q \in \tau(G/N)$ и Q/N – силовская q-подгруппа из G/N. Тогда $Q/N = G_qN/N$ для некоторой силовской q-подгруппы G_q из G. По [10, теорема A.6.4(a)] $N_{G/N}(Q/N) = N_G(G_q)N/N$. По лемме 2.4 имеем $N_{G/N}(Q/N)^{\mathfrak{F}} = (N_G(G_q)N/N)^{\mathfrak{F}} = N_G(G_q)^{\mathfrak{F}}N/N$. Так как $q \in \tau(G/N) \subseteq \tau(G)$, $N_G(G_q)^{\mathfrak{F}}$ субнормален в G. Из свойств субнормальных подгрупп следует, что $N_{G/N}(Q/N)^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа в G/N. □

3. Доказательства теорем 1.1 и 1.2

Установим справедливость теоремы 1.1.

Доказательство. По лемме 2.3 $\mathfrak{X}$ – наследственная формация. Ввиду леммы 2.6 имеем (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). Очевидно, что из (3) следует (4).

Докажем (4) $\Rightarrow$ (1). Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой $N_G(G_p)^{\mathfrak{X}}$ субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$, а $G \notin \mathfrak{NX}$.

I. G – простая группа. Из субнормальности $N_G(G_p)^{\mathfrak{X}}$ в G для $p \in \tau(G)$ следует, что $N_G(G_p)^{\mathfrak{X}} = 1$. Тогда $N_G(G_p) \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$ и по теореме 2.1 получаем противоречие $G \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{X}$.

II. G не является простой группой. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Из леммы 2.7 следует, что утверждение (4) выполняется для G/N. По выбору G заключаем, что $G/N \in \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{N}\mathfrak{X}$ – наследственная насыщенная формация, имеем $\Phi(G) = 1$ и N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. В группе G существует максимальная подгруппа M с $\mathrm{Core}_G(M) = 1$ и $G = NM$. Рассмотрим два случая.

1. G – разрешимая группа. Тогда N – абелева p-группа для некоторого простого p. По [10, теорема A.15.6] $N = C_G(N) = F(G)$, $M \cap N = 1$ и $O_p(M) = 1$. Из $G \notin \mathfrak{N}$ следует, что $|\pi(G)| \geqslant 2$.

Покажем, что $F(M)$ является p'-холловой подгруппой группы G. Из $M \cong G/N \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$ и $G \notin \mathfrak{N}\mathfrak{X}$ следует, что $1 \neq M^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{N}$. Поэтому $M^{\mathfrak{X}} \leqslant F(M)$. Если $p \in \pi(F(M))$, то силовская p-подгруппа из $F(M)$ нормальна в M, а следовательно, содержится в $O_p(M)$. Из $O_p(M) = 1$ заключаем, что $p \notin \notin \pi(F(M))$, т. е. $F(M)$ – p'-группа. Из $M/F(M) \cong M/M^{\mathfrak{X}}/F(M)/M^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$ следует, что M имеет нормальную p'-холлову подгруппу, которую обозначим через H. Отметим, что H является p'-холловой подгруппой в G.

Возьмем любое $q \in \pi(H)$ и силовскую q-подгруппу H_q из H. Тогда H_q является силовской q-подгруппой в G. Из $q \in \pi(G) = \tau(G)$ следует, что $N_G(H_q)^{\mathfrak{X}}$ – субнормальная подгруппа в G. Ввиду того, что $H_q \cap N_G(H_q)^{\mathfrak{X}} \trianglelefteq N_G(H_q)^{\mathfrak{X}}$, подгруппа $H_q \cap N_G(H_q)^{\mathfrak{X}}$ субнормальна в G.

По лемме 2.2 $H_q \cap N_G(H_q)^{\mathfrak{X}} \leqslant O_q(G)$. Из $q \neq p$ и $O_q(G) = 1$ следует, что $N_G(H_q)^{\mathfrak{X}}$ – q'-группа.

Обозначим $S = N_G(H_q)^{\mathfrak{X}}$. Если $N_G(H_q) = H_qS$, то S является нормальной q'-холловой подгруппой в $N_G(H_q)$. Допустим, что $N_G(H_q) \neq H_qS$. Отметим, что $N_G(H_q)/S \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$. Тогда $N_G(H_q)/S = = H_qS/S \times L_1/S \times \cdots \times L_n/S$, где L_i/S – силовская r_i-подгруппа в $N_G(G_q)/S$ и $r_i \neq q$, $i = 1,\ldots,n$. Отсюда следует, что $L_1 \cdots L_n$ нормальна в $N_G(G_q)$ и является q'-группой.

Так как $N_G(H_q)$ имеет нормальную q'-холлову подгруппу, $N_H(H_q) = N_G(H_q) \cap H$ имеет нормальную q'-холлову подгруппу. Это означает, что $N_H(H_q)$ является q-нильпотентной подгруппой для любого $q \in \pi(H) = \tau(H)$. По теореме 2.1 группа H нильпотентна. Следовательно, $H = F(M)$.

Значит, $M \leqslant N_G(H_q)$. Из максимальности M в G и $\mathrm{Core}_G(M) = 1$ заключаем, что $N_G(H_q) = M$. Тогда $N_G(H_q)^{\mathfrak{X}} = M^{\mathfrak{X}}$ – нильпотентная группа и субнормальна в G. По лемме 2.2 $M^{\mathfrak{X}} \leqslant O_{\pi(H)}(G)$. Так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и N – p-группа, $O_{\pi(H)}(G) = 1$. Получили противоречие с $M^{\mathfrak{X}} \neq 1$.

2. G не является разрешимой. Тогда $|\pi(G)| \geqslant 3$. Из разрешимости G/N следует, что N не является абелевой группой.

Возьмем любое $q \in \tau(G)$ и силовскую q-подгруппу G_q из G. Тогда $N_G(G_q) \neq G$.

Допустим, что $N_G(G_q)^{\mathfrak{X}} \neq 1$. Обозначим $R = G_q \cap N_G(G_q)^{\mathfrak{X}}$. Тогда $R \trianglelefteq N_G(G_q)^{\mathfrak{X}}$. Из субнормальности $N_G(G_q)^{\mathfrak{X}}$ в G следует субнормальность R в G. По лемме 2.2 $R \leqslant O_q(G)$. Ввиду того, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и N неабелева, заключаем $O_q(G) = 1$. Тогда $R = 1$ и $N_G(G_q)^{\mathfrak{X}}$ – q'-группа. Из $N_G(G_q)/N_G(G_q)^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$ следует, что $N_G(G_q)$ имеет нормальную q'-холлову группу, т. е. $N_G(G_q)$ q-нильпотентен.

Если $N_G(G_q)^{\mathfrak{X}} = 1$, то $N_G(G_q)$ нильпотентен.

По теореме 2.1 получаем противоречие $G \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{X}$, которое завершает доказательство. □

Докажем теорему 1.2.

Доказательство. Необходимость. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Для любого $p \in \tau(G)$ из наследственности $\mathfrak{F}$ следует, что $N_G(G_p) \in \mathfrak{F}$. По лемме 2.6(2) $N_G(G_p)^{\mathfrak{X}}$ – субнормальная подгруппа в G.

Достаточность. Предположим, что утверждение неверно. Пусть G – группа наименьшего порядка такая, что $N_G(G_p) \in \mathfrak{F}$, $N_G(G_p)^{\mathfrak{X}}$ – субнормальная подгруппа в G для любого $p \in \tau(G)$, а $G \notin \mathfrak{F}$. По теореме 1.1 группа $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$, а значит, разрешима.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа из G. Из $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что G не является циклической группой, порядок которой есть простое число. Значит, N – абелева p-группа для некоторого простого p. Для любого $q \in \tau(G/N)$ и силовской q-подгруппы Q/N из G/N найдется силовская q-подгруппа G_q из G такая, что $Q/N = G_qN/N$. Так как $q \in \tau(G/N) \subseteq \tau(G)$, по условию $N_G(G_q) \in \mathfrak{F}$. Откуда $N_{G/N}(Q/N) = N_G(G_q)N/N \cong N_G(G_q)/N_G(G_q) \cap N \in \mathfrak{F}$. Ввиду леммы 2.7 для G/N все условия теоремы выполнены. По выбору G получаем, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Так как $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, заключаем, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа из G и $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = NM$ для некоторой максимальной в G подгруппы M. Так как G разрешима и $\mathrm{Core}_G(M) = 1$, по [10, теорема A.15.6] $N = C_G(N) = F(G)$, $M \cap N = 1$ и $O_p(M) = 1$. Ввиду нильпотентности $G^{\mathfrak{X}}$ имеем $G^{\mathfrak{X}} \leqslant F(G)$. Если $G^{\mathfrak{X}} = 1$, то $G \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G. Значит, $G^{\mathfrak{X}} = N$. Тогда $G/N \cong M \in \mathfrak{X}$. Если $p \in \pi(M)$, то в M силовская p-подгруппа является нормальной и содержится в $O_p(M) = 1$. Это противоречие показывает, что $p \notin \pi(M)$. Тогда N – силовская p-подгруппа в G. Так как G разрешима, $p \in \pi(G) = \tau(G)$, по выбору G имеем $G = N_G(N) \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

4. Заключение. Связь с известными результатами

Теоремы 1.1 и 1.2 для разных формаций $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ позволяют получать как новые, так и известные результаты. Теорема 1.1 убирает в достаточных условиях теоремы A из [6] разрешимость силовского нормализатора и уменьшает число силовских p-подгрупп, рассматривая их только для $p \in \tau(G)$. Так как $\tau(G) \subseteq \pi(G)$, из теоремы 1.1 получаются следующие результаты.

Следствие 4.1 [6, теорема A]. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустая формация и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$. Группа $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор разрешим и $\mathfrak{X}$-корадикал p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \pi(G)$.*

Следствие 4.2 [7, теорема 1]. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустая формация и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$. Группа $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}$-корадикал p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \pi(G)$.*

Ввиду того, что $\tau(G) \subseteq \pi(G)$, из теоремы 1.1 вытекает теорема 2 из [11].

Положив $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$, соответственно $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}$, из теоремы 1.2 следуют два таких результата.

Следствие 4.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^2$. Группа $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор принадлежит $\mathfrak{F}$ и нильпотентный корадикал p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

Следствие 4.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Группа $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор принадлежит $\mathfrak{F}$ и коммутант p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

Обозначим через $\mathfrak{D}$ формацию всех дисперсивных по Оре групп. Так как $\mathfrak{D}$ является наследственной насыщенной формацией, из следствия 1.5 вытекает

Следствие 4.5. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустая формация, $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}$. Группа $G \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда когда p-силовский нормализатор принадлежит $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$-корадикал p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

Из принадлежности $\mathfrak{D}$ всех силовских нормализаторов из G не всегда следует, что $G \in \mathfrak{D}$ [7].

Следствие 4.6. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустая формация и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$. Группа $G \in \mathfrak{D} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор дисперсивен по Оре и $\mathfrak{X}$-корадикал p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

Так как $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}^2$ для формации $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп, теорема 1.2 является развитием следующего результата.

Следствие 4.7 [6, теорема B]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$. Группа $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор принадлежит $\mathfrak{F}$ и нильпотентный корадикал p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \pi(G)$.*

Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$, то из теоремы 1.2 получается

Следствие 4.8. *Если $\mathfrak{X}$ – непустая формация и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$, то группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор сверхразрешим и $\mathfrak{X}$-корадикал p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

Отсюда при $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}$ соответственно вытекает

Следствие 4.9. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда p-силовский нормализатор сверхразрешим и нильпотентный корадикал (коммутант) p-силовского нормализатора субнормален в G для любого $p \in \tau(G)$.*

Исследования первого и второго авторов выполнены при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант № 20211750 «Конвергенция-2025»), исследования третьего автора выполнены при поддержке БРФФИ (проект Ф23РНФМ-63).

Литература

1. *Bianchi M., Gillio Berta Mauri A., Hauck P.* On finite soluble groups with nilpotent Sylow normalizers // Arch. Math. 1986. Vol. 47, N 3. P. 193–197.

2. *Баллестер-Болинше А., Шеметков Л. А.* О нормализаторах силовских подгрупп в конечных группах // Сиб. матем. журн. 1999. Т. 40, № 1. С. 3–5.

3. *D'Aniello A., De Vivo C., Giordano G.* Saturated formations and Sylow normalizers // Bull. Austral. Math. Soc. 2004. Vol. 69, N 1. P. 25–33.

4. *D'Aniello A., De Vivo C., Giordano G., Pérez-Ramos M. D.* Saturated formations closed under Sylow normalizers // Commun. Algebra. 2005. Vol. 33, N 8. P. 2801–2808.

5. *Kazarin L., Martínez-Pastor A., Pérez-Ramos M. D.* On Sylow normalizers of finite groups // J. Algebra Appl. 2014. Vol. 13, N 3. Art. 1350116–1–20.

6. *Васильева Т. И., Коранчук А. Г.* Конечные группы с субнормальными корадикалами силовских нормализаторов // Сиб. матем. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 805–813.

7. *Монахов В. С.* О нильпотентных корадикалах силовских нормализаторов конечной группы // Сиб. матем. журн. 2025. Т. 66, № 4. С. 683–688. https://doi.org/10.33048/smzh.2025.66.410

8. *Lu J., Meng W.* Finite groups with certain normalizers of Sylow subgroups // J. Algebra Appl. 2019. Vol. 18, N 6. Art. 1950101 (4 p.).

9. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.

10. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter De Gruyter, 1992. 898 p.

11. *Монахов В. С.* Конечные группы с дисперсивными силовскими нормализаторами // Матем. заметки. 2025. Т. 118, № 5. С. 769–778.

References

1. Bianchi M., Gillio Berta Mauri A., Hauck P. On finite soluble groups with nilpotent Sylow normalizers. *Arch. Math.*, 1986, vol. 47, iss. 3, pp. 193–197.

2. Ballester-Bolinches A., Shemetkov L. A. On normalizers of Sylow subgroup in finite groups. *Siberian Mathematical Journal,* 1999, vol. 40, iss. 1, pp. 1–2.

3. D'Aniello A., De Vivo C., Giordano G. Saturated formations and Sylow normalizers. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 2004, vol. 69, iss. 1, pp. 25–33.

4. D'Aniello A., De Vivo C., Giordano G., Pérez-Ramos M. D. Saturated formations closed under Sylow normalizers. *Commun. Algebra*, 2005, vol. 33, iss. 8, pp. 2801–2808.

5. Kazarin L., Martínez-Pastor A., Pérez-Ramos M. D. On Sylow normalizers of finite groups. *J. Algebra Appl.*, 2014, vol. 13, iss. 3, art. 1350116–1–20.

6. Vasilyeva T. I., Koranchuk A. G. Finite groups with subnormal residuals of Sylow normalizers. *Siberian Mathematical Journal*, 2022, vol. 63, iss. 4, pp. 670–676.

7. Monakhov V. S. On nilpotent residuals of Sylow normalizers of a finite group. *Siberian Mathematical Journal*, 2025, vol. 66, iss. 4, pp. 986–990.

8. Lu J., Meng W. Finite groups with certain normalizers of Sylow subgroups. *J. Algebra Appl.*, 2019, vol. 18, iss. 6, art. 1950101 (4 p.).

9. Shemetkov L. A. *Formations of finite groups*. Moscow, Nauka, 1987. 272 p. (in Russian).

10. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups*. Berlin, New York, Walter De Gruyter, 1992. 898 p.

11. Monakhov V. S. Finite groups with dispersive Sylow normalizers. *Mathematical Notes*, 2025, vol. 118, iss. 5, pp. 716–718 (in Russian).