Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Том 33. № 1. С. 87–94

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
COMPUTATIONAL MATHEMATICS

УДК 519.21+519.6

ПРИБЛИЖЕННАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ ОТ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРЕЙФОМ

А. В. Жерело

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: zherelo@bsu.by

Поступила: 04.04.2025 **Исправлена:** 13.05.2025 **Принята:** 23.05.2025

Ключевые слова: случайный процесс, стохастическое дифференциальное уравнение, интеграл Ито, математическое ожидание, приближенные вычисления, слабые аппроксимации.

Аннотация. В работе рассмотрен случай стохастического дифференциального уравнения в смысле Ито с дрейфом. Для рассматриваемого уравнения построена формула приближенного вычисления математических ожиданий от его решения. Для построенной формулы получена оценка погрешности. Проведен численный эксперимент.

APPROXIMATE FORMULA FOR MATHEMATICAL EXPECTATIONS OF A SOLUTION OF A STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION WITH DRIFT

A. V. Zherelo

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: zherelo@bsu.by

Received: 04.04.2025 **Revised:** 13.05.2025 **Accepted:** 23.05.2025

Keywords: random process, stochastic differential equation, Ito integral, mathematical expectation, approximate calculations, weak approximations.

Abstract. The paper considers the case of a stochastic differential equation in the sense of Ito with drift. For the equation under consideration, a formula for the approximate calculation of mathematical expectations from its solution is constructed. An estimate of the error of the constructed formula is obtained. A numerical experiment is performed.

1. Введение

Исследователи различных направлений науки, например, таких как экономика, физика, генетика, все чаще обращают свое внимание на необходимость учета влияния случайности на исследуемые явления. Желание оценить влияние случайных факторов на получаемые результаты служит мотивом к переходу от детерминированных моделей к моделям, учитывающим случайную природу явлений. В ряде случаев модель явления можно описать с помощью стохастического дифференциального уравнения (СДУ). Здесь необходимо отметить, что точно решается только относительно небольшой класс таких уравнений (например, см. [1–3]). Как следствие, особое значение приобретают методы численного решения СДУ и приближенного вычисления математических ожиданий от функционалов от решений таких уравнений.

В численных методах можно выделить два основных подхода: сильный и слабый. Сильный связан с нахождением решения потраекторно. Здесь, как правило, используются широкий класс методов Монте-Карло (например, см. [4]). Данные методы позволяют построить решение с достаточно небольшой погрешностью, но требуют значительных вычислительных затрат. Еще одной особенностью использования методов Монте-Карло является то, что при моделировании генерируются траектории, приближающие решение уравнения, тогда как во многих задачах нас интересует прежде всего некоторый интегральный показатель, что для обеспечения необходимой точности приводит к еще большему росту вычислительных затрат. Слабый подход связан с поиском приближений, близких к решению СДУ в некотором смысле, например, близких моментов до заданного порядка или характеристического функционала. При таком подходе, как правило, необходимо провести предварительные аналитические вычисления, что в последствии компенсируется высокой скоростью вычисления [5–7].

Особый интерес представляют СДУ с дрейфом, поскольку в случае его нелинейности решение такого уравнения требует симуляции еще большего количества траекторий для сильных методов и значительно усложняется применение слабых методов.

В данной работе предложена формула для приближенного вычисления математических ожиданий от функционалов от решений СДУ с дрейфом, развивающая слабый подход.

Далее будем рассматривать стохастическое дифференциальное уравнение, записанное в соответствующей интегральной форме:

$$X_t \quad = \quad X_0+\int\limits_0^t \alpha(X_{s-},s-)ds+\int\limits_0^t \beta(X_{s-},s-)dW_s, \tag{1}$$

где W_t – процесс Винера, $t\in[0,1]$, $X_0\in\mathbb{R}$, α и β – функции, гладко зависящие от своих переменных.

Здесь будем полагать, что интеграл по W_t в правой части уравнения является стохастическим интегралом в смысле Ито. Также будем предполагать, что на функции α и β наложены условия существования сильного решения (например, см. [2; 3]):

$$|\alpha(y_1,t)-\alpha(y_2,t)|^2+|\beta(y_1,t)-\beta(y_2,t)|^2\leqslant K_1|y_1-y_2|^2,$$
$$|\alpha(y,t)|^2+|\beta(y,t)|^2\leqslant K_2(1+|y|^2),$$

для $\forall y_1,y_2\in\mathbb{R}$, где $K_1,K_2\in\mathbb{R}$.

Задачей исследования является построение приближенной формулы для вычисления математических значений функционалов вида $\mathbb{E}[G]\equiv\mathbb{E}[G(X_{(\cdot)})]$, где $G(x)$ это некоторый функционал, гладко зависящий от своего аргумента. Здесь символ $(\cdot)$ указывает на то, что функционал G может зависеть не только от значения процесса в некоторой точке X_s, $s\in[0,t]$, но и от его траектории (например, функционал может содержать интеграл от X_s).

Здесь и далее будем предполагать, что для указанного функционала существует сильная производная по его аргументу, которую будем обозначать $G'(x)$. Также будем предполагать, что эта производная ограничена некоторым $C\in\mathbb{R}$.

1.1. Построение приближенной формулы

Сначала построим приближенную формулу, точную для моментов третьей степени вида $\mathbb{E}[\xi_1\xi_2\xi_3]$, где $\xi_j=\{t_1,t_2,t_3,W_{t_4},W_{t_5},W_{t_6}\}$. Для ее построения был адаптирован подход к построению формул произвольной степени точности для вычисления функционалов от гауссовских мер, предложенный в работах Л. А. Яновича, А. Д. Егорова, П. И. Соболевского и др. (например, см. [5]). Отличие предлагаемого далее подхода заключается в том, что поскольку рассматриваемое уравнение является уравнением с дрейфом, возникает необходимость, во-первых, учитывать значения моментов, содержащих время как один из множителей, а во-вторых, структура используемых функций должна быть удобна для осуществления вычислений во вспомогательном уравнении, которое будет использовано в дальнейшем для построения приближенной формулы для функционала от решения стохастического уравнения с дрейфом.

Лемма 1.1. *Формула* (2) *точна для математических ожиданий мономов третьей степени вида* $\mathbb{E}[G]=\mathbb{E}[\xi_1\xi_2\xi_3]$, *где* $\xi_j=\{1,t_1,t_2,t_3,W_{t_4},W_{t_5},W_{t_6}\}$ *за исключением случая* $\xi_1\xi_2\xi_3=t_1t_2t_3$.

$$\mathbb{E}[G]\approx J(G)\equiv\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}A_j\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_{-1}^1 G(\rho_{j1}(\cdot,u_1)+\rho_{j2}(\cdot,u_2),\rho(\cdot,v))du_1du_2dv, \tag{2}$$

$$\rho_{jk}(s,u_k)=a_{jk}1_{[u_k,1]}(s), k=1,2, \quad \rho(s,v)=\mathrm{sign}(v)1_{[|v|,1]}(s),$$

$$A_1+A_2=1,$$

$$a_{11}=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}\right), \quad a_{12}=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}\right),$$

$$a_{21}=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}\right), \quad a_{12}=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}\right).$$

Лемму 1.1 не сложно доказать непосредственно подставив $\rho_{k,j}(t,u_k)+\rho_k, j(t,u_k)$ и $\rho(t,v)$ вместо t и W_t в приведенные в формулировке леммы мономы.

Символ точки в формуле (2) указывает на то, что функционал G может зависеть не только от заданного момента времени t, но и от траектории случайных процессов за промежуток $[0,t]$.

В данной работе в качестве параметров построенной приближенной формулы были выбраны следующие значения:

$$A_1=\frac{4}{3}, A_2=-\frac{1}{3}, a_{11}=\frac{1}{4}, a_{12}=\frac{3}{4}, a_{21}=-\frac{1}{2}, a_{22}=\frac{3}{2}.$$

Для построения приближенной формулы для решения уравнения (1) введем и решим вспомогательные уравнения вида (3), полученные с помощью подстановки функций $\rho(t,v)$ и $\rho_{j1}(t,u_1)+$ $+\rho_{j2}(t,u_2)$ в (1):

$$\begin{aligned} Y_j(t,u_1,u_2,v) \quad = \quad & X_0+\int_0^t \alpha(Y_j(s-,u_1,u_2,v),s-)d\left(\rho_{j1}(s,u_1)+\rho_{j2}(s,u_2)\right)+ \\ & +\int_0^t \beta(Y_j(s-,u_1,u_2,v),s)d\rho(s,v). \end{aligned} \tag{3}$$

Решим уравнение (3) с помощью метода последовательных приближений. Обозначим $Y_{jt}^{(k)}=$ $=Y_j^{(k)}(t,u_1,u_2,v)$ значение $Y_j(t,u_1,u_2,v)$ на итерации с номером k.

Пусть $Y_j^{(0)}(t,u_1,u_2,v)=X_0$. На первом шаге получаем

$$\begin{aligned} Y_{jt}^{(1)}(t,u_1,u_2,v)=X_0+\int_0^t \alpha(X_0,s-)d\left(\rho_{j1}(s,u_1)+\rho_{j2}(s,u_2)\right)+\int_0^1 \beta(X_0,s)d\rho(s,v)= \\ =X_0+\alpha(X_0,u_1)\rho_{j1}(t,u_1)+\alpha(X_0,u_2)\rho_{j2}(t,u_2)+\beta(X_0,|v|)\rho(t,v). \end{aligned}$$

Далее подставим $Y_{jt}^{(1)}$ в уравнение (3) и воспользуемся следующими свойствами функций ρ и ρ_{jk}:

$$\rho_{j1}(u_1-,u_1)=0, \quad \rho_{j2}(u_2-,u_2)=0, \quad \rho(|v|-,v)=0,$$

и получим

$$\begin{aligned} Y_{jt}^{(2)}=X_0+\alpha\left(X_0+\alpha(X_0,u_2)\rho_{j2}(u_1-,u_2)+\beta(X_0,|v|)\rho(u_1-,v),u_1\right)\rho_{j1}(t,u_1)+ \\ +\alpha\left(X_0+\alpha(X_0,u_1)\rho_{j1}(u_2-,u_1)+\beta(X_0,|v|)\rho(u_2-,v),u_2\right)\rho_{j2}(t,u_2)+ \\ +\beta\left(X_0+\alpha(X_0,u_1)\rho_{j1}(|v|-,u_1)+\alpha(X_0,u_2)\rho_{j2}(|v|-,u_2),|v|\right)\rho(t,v). \end{aligned}$$

Далее можно вычислить $Y_{jt}^{(3)}$, если принять во внимание значения функций ρ, ρ_{jk} в зависимости от соотношения между переменными u_1,u_2 и v.

Если $u_1<u_2<|v|$, тогда

$$\begin{aligned} \rho_{j2}(u_1-,u_2)=0, \qquad & \rho(u_1-,v)=0, \\ \rho_{j1}(u_2-,u_1)=a_{j1}, \qquad & \rho(u_2-,v)=0, \\ \rho_{j1}(|v|-,u_1)=a_{j1}, \qquad & \rho(|v|-,u_2)=a_{j2}. \end{aligned}$$

Если $u_2 < u_1 < |v|$, тогда

$$\begin{aligned} \rho_{j2}(u_1-,u_2) &= a_{j2}, &\qquad \rho(u_1-,v) &= 0,\\ \rho_{j1}(u_2-,u_1) &= 0, & \rho(u_2-,v) &= 0,\\ \rho_{j1}(|v|-,u_1) &= a_{j1}, & \rho(|v|-,u_2) &= a_{j2}. \end{aligned}$$

Если $u_2 < |v| < u_1$, тогда

$$\begin{aligned} \rho_{j2}(u_1-,u_2) &= a_{j2}, &\qquad \rho(u_1-,v) &= \mathrm{sign}(v),\\ \rho_{j1}(u_2-,u_1) &= 0, & \rho(u_2-,v) &= 0,\\ \rho_{j1}(|v|-,u_1) &= 0, & \rho(|v|-,u_2) &= a_{j2}. \end{aligned}$$

Если $u_1 < |v| < u_2$, тогда

$$\begin{aligned} \rho_{j2}(u_1-,u_2) &= 0, &\qquad \rho(u_1-,v) &= 0,\\ \rho_{j1}(u_2-,u_1) &= a_{j1}, & \rho(u_2-,v) &= \mathrm{sign}(v),\\ \rho_{j1}(|v|-,u_1) &= a_{j1}, & \rho(|v|-,u_2) &= 0. \end{aligned}$$

Если $|v| < u_1 < u_2$, тогда

$$\begin{aligned} \rho_{j2}(u_1-,u_2) &= 0, &\qquad \rho(u_1-,v) &= \mathrm{sign}(v),\\ \rho_{j1}(u_2-,u_1) &= a_{j1}, & \rho(u_2-,v) &= \mathrm{sign}(v),\\ \rho_{j1}(|v|-,u_1) &= 0, & \rho(|v|-,u_2) &= 0. \end{aligned}$$

Если $|v| < u_2 < u_1$, тогда

$$\begin{aligned} \rho_{j2}(u_1-,u_2) &= a_{j2}, &\qquad \rho(u_1-,v) &= \mathrm{sign}(v),\\ \rho_{j1}(u_2-,u_1) &= 0, & \rho(u_2-,v) &= \mathrm{sign}(v),\\ \rho_{j1}(|v|-,u_1) &= 0, & \rho(|v|-,u_2) &= 0. \end{aligned}$$

Если $u_2 = u_1$, тогда

$$\rho_{j2}(u_1-,u_2) = 0, \quad \rho_{j2}(u_2-,u_1) = 0.$$

Если $u_1 = |v|$, тогда

$$\rho_{j1}(|v|-,u_1) = 0, \quad \rho(u_1-,v) = 0.$$

Если $u_2 = |v|$, тогда

$$\rho_{j2}(|v|-,u_2) = 0, \quad \rho(u_2-,v) = 0.$$

Перейдем к третьему шагу и выпишем участвующие в уравнении для $Y^{(3)}_{jt}$ значения функций $\alpha(Y^{(2)}_{ju_1-},u_1)$, $\alpha(Y^{(2)}_{ju_2-},u_2)$, $\beta(Y^{(2)}_{j|v|-},|v|)$, возникающие после подстановки $Y^{(2)}_{jt}$ в уравнение (3) с учетом последующего интегрирования.

Для $\alpha(Y^{(2)}_{ju_1-},u_1)$ получим:

$$\begin{aligned} u_1 < u_2 < |v| \quad &: \quad \alpha(X_0,u_1),\\ u_2 < u_1 < |v| \quad &: \quad \alpha(X_0+\alpha(X_0,u_2)a_{j2},u_1),\\ u_2 < |v| < u_1 \quad &: \quad \alpha(X_0+\alpha(X_0,u_2)a_{j2}+\\ &\qquad +\beta(X_0+\alpha(X_0,u_2)a_{j2},|v|)\mathrm{sign}(v),u_1),\\ u_1 < u_2 < |v| \quad &: \quad \alpha(X_0,u_1),\\ |v| < u_1 < u_2 \quad &: \quad \alpha(X_0+\beta(X_0,|v|)\mathrm{sign}(v),u_1),\\ |v| < u_2 < u_1 \quad &: \quad \alpha(X_0+\alpha(X_0+\\ &\qquad +\beta(X_0,|v|)\mathrm{sign}(v),u_2)a_{j2}+\beta(X_0,|v|)\mathrm{sign}(v),u_1); \end{aligned}$$

для $\alpha(Y^{(2)}_{ju_2-}, u_2)$:

$$\begin{array}{lcl}
u_1 < u_2 < |v| & : & \alpha(X_0+\alpha(X_0,u_1)a_{j1},u_2),\\
u_2 < u_1 < |v| & : & \alpha(X_0,u_2),\\
u_2 < |v| < u_1 & : & \alpha(X_0,u_2),\\
u_1 < u_2 < |v| & : & \alpha(X_0+\alpha(X_0,u_1)a_{j1}+\\
 & & +\beta(X_0+\alpha(X_0,u_1)a_{j1},|v|)\mathrm{sign}(v),u_2),\\
|v| < u_1 < u_2 & : & \alpha(X_0+\alpha(X_0+\beta(X_0,|v|)\mathrm{sign}(v),u_1)a_{j1}+\\
 & & +\beta(X_0,|v|)\mathrm{sign}(v),u_2),\\
|v| < u_2 < u_1 & : & \alpha(X_0+\beta(X_0,|v|)\mathrm{sign}(v),u_2);
\end{array}$$

для $\beta(Y^{(2)}_{j|v|-}, |v|)$:

$$\begin{array}{lcl}
u_1 < u_2 < |v| & : & \beta(X_0+\alpha(X_0,u_1)a_{j1}+\alpha(X_0+\alpha(X_0,u_1)a_{j1},u_2)a_{j2},|v|),\\
u_2 < u_1 < |v| & : & \beta(X_0+\alpha(X_0+\alpha(X_0,u_2)a_{j2},u_1)a_{j1}+\alpha(X_0,u_2)a_{j2},|v|),\\
u_2 < |v| < u_1 & : & \beta(X_0+\alpha(X_0,u_2)a_{j2},|v|),\\
u_1 < u_2 < |v| & : & \beta(X_0+\alpha(X_0,u_1)a_{j1},|v|),\\
|v| < u_1 < u_2 & : & \beta(X_0,|v|),\\
|v| < u_2 < u_1 & : & \beta(X_0,|v|).
\end{array}$$

Таким образом, $Y^{(3)}_t$ имеет вид

$$\begin{aligned}
Y^{(3)}_{jt} = X_0 &+ \alpha\Bigg(X_0+\alpha\left(X_0+\beta(X_0,|v|)\mathrm{sign}(v)1_{(|v|,1]}(u_2),u_2\right)a_{j2}1_{(u_2,1]}(u_1)+\\
&+\beta\left(X_0+\alpha(X_0,u_2)a_{j2}1_{(u_2,1]}(|v|),|v|\right)\mathrm{sign}(v)1_{(|v|,1]}(u_1)+,u_1\Bigg)\rho_{j,1}(t,u_1)+\\
&+\alpha\Bigg(X_0+\alpha\left(X_0+\beta(X_0,|v|)\mathrm{sign}(v)1_{(|v|,1]}(u_1),u_1\right)a_{j1}1_{(u_1,1]}(u_2)+\\
&+\beta\left(X_0+\alpha(X_0,u_1)a_{j1}1_{(u_1,1]}(|v|),|v|\right)\mathrm{sign}(v)1_{(|v|,1]}(u_2),u_2\Bigg)\rho_{j,2}(t,u_2)+\\
&+\beta\Bigg(X_0+\alpha\left(X_0+\alpha(X_0,u_2)a_{j2}1_{(u_2,1]}(u_1),u_1\right)a_{j1}1_{(u_1,1]}(|v|)+\\
&+\alpha\left(X_0+\alpha(X_0,u_1)a_{j1}1_{(u_1,1]}(u_2),u_2\right)a_{j2}1_{(u_2,1]}(|v|),|v|\Bigg)\rho(t,v).
\end{aligned}$$

Осуществив подстановку полученного выражения для $Y^{(3)}_{jt}$ в формулу (3) и проделав аналогичные приведенным выше вычисления, не трудно убедиться, что $Y^{(4)}_{jt} = Y^{(3)}_{jt}$, т. е. $Y_{jt} = Y_j(t,u_1,u_2,v) = Y^{(3)}_{jt}$ является решением уравнения (3).

Приближенную формулу для математического ожидания функционала от решения уравнения (1) получим подставив $Y_j(t,u_1,u_2,v)$ в формулу (2):

$$J(G,Y) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} A_j \int_0^1\int_0^1\int_{-1}^1 G(Y_j(\cdot,u_1,u_2,v),\cdot)\,du_1du_2dv. \tag{4}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2. *Точность приближенной формулы (4) имеет порядок $O(t^{3/2})$, т. е.*

$$\left|\mathbb{E}[G(X_{(\cdot)})]-J[G,Y]\right| = (|A_1|+|A_2|)C\sqrt{K_2(1+X_0^2)}t^{3/2}+o(t^{3/2}) = O(t^{3/2}).$$

Доказательство. Введем следующие обозначения: $\tilde{X}_t = X_t - X_0$ и $\tilde{Y}_{jt} = Y_{jt} - X_0$, тогда, пользуясь представлением, приведенным в [5], можем записать следующее равенство:

$$\left|\mathbb{E}[G(X_{(\cdot)})] - J(G,Y)\right| = \mathbb{E}\left[G(X_0) + \int_0^1\int_0^t G'_s(X_0+\tau\tilde{X}_{(\cdot)})\tilde{X}_s d\tau ds\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} A_j \int_0^1\int_0^1\int_{-1}^1 \left\{G(X_0) + \int_0^1\int_0^t G'_s(X_0+\tau\tilde{Y}_{j(\cdot)})\tilde{Y}_{js} d\tau ds\right\} du_1 du_2 dv = (*)$$

и введем процесс $X_t^{(1)}$ вида

$$X_t^{(1)} = X_0 + \int_0^t \alpha(X_0, s-)ds + \int_0^t \beta(X_0, s-)dW_s,$$

тогда

$$(*) = \left|\mathbb{E}\left[\int_0^1\int_0^t d\tau ds \times \left\{G'_s(X_0+\tau\tilde{X}_{(\cdot)})\tilde{X}_s - G'_s(X_0+\tau\tilde{X}_{(\cdot)})\tilde{X}_s^{(1)} +\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+G'_s(X_0+\tau\tilde{X}_{(\cdot)})\tilde{X}_s^{(1)} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} A_j \int_0^1\int_0^1\int_{-1}^1 G'_s(X_0+\tau\tilde{Y}_{j(\cdot)})\tilde{Y}_{js} du_1 du_2 dv\right\}\right]\right| = (**),$$

следовательно, выражение выше можно переписать в виде

$$(**) = \left|\int_0^1\int_0^t d\tau ds \times \mathbb{E}\left[G'_s(X_0+\tau\tilde{X}_{(\cdot)})(\tilde{X}_s - \tilde{X}_s^{(1)}) +\right.\right.$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} A_j \int_0^1\int_0^1\int_{-1}^1 G'_s(X_0+\tau\tilde{X}_{(\cdot)})\tilde{X}_s^{(1)} - G'_s(X_0+\tau\tilde{Y}_{j,(\cdot)})\tilde{X}_s^{(1)} +$$

$$\left.\left.+G'_s(X_0+\tau\tilde{Y}_{j,(\cdot)})\tilde{X}_s^{(1)} - G'_s(X_0+\tau\tilde{Y}_{j,(\cdot)})\tilde{Y}_{j,s} du_1 du_2 dv\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1\int_0^t d\tau ds \times \left\{C\left(\mathbb{E}\left[\left(X_s - X_s^{(1)}\right)^2\right]\right)^{1/2} + \sum_{j=1}^{2}|A_j| C\mathbb{E}[|\tilde{X}_s^{(1)}|] +\right.$$

$$\left.+\left|\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} A_j \int_0^1\int_0^1\int_{-1}^1 G'_s(X_0+\tau\tilde{Y}_{j(\cdot)})\left(\mathbb{E}[\tilde{X}_s^{(1)}] - \tilde{Y}_{js}\right) du_1 du_2 dv\right|\right\} = (*).$$

Используя условия, накладываемые на функции α и β, не трудно показать, что

$$\left(\mathbb{E}\left[\left(X_s^{(1)} - X_0\right)^2\right]\right)^{1/2} = \sqrt{K_2(1+X_0^2)}s^{1/2} + o(s^{1/2})$$

и

$$\left(\mathbb{E}\left[\left(X_s - X_s^{(1)}\right)^2\right]\right)^{1/2} = \sqrt{K_1K_2(1+X_0^2)}s + o(s) = o(s^{1/2}),$$

(см. [2; 3]), поэтому

$$(*) = (|A_1|+|A_2|)C\sqrt{K_2(1+X_0^2)}t^{3/2} + o(t^{3/2}) +$$

$$+\int_0^1\int_0^t \left|\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} A_j \int_0^1\int_0^1\int_{-1}^1 G'_s(X_0+\tau\tilde{Y}_{j(\cdot)}) \times \left(\int_0^s \alpha(X_0,z)dz - \tilde{Y}_{js}\right) du_1 du_2 dv\right| d\tau ds \leqslant$$

$$\leqslant (|A_1|+|A_2|)C\sqrt{K_2(1+X_0^2)}t^{3/2} + o(t^{3/2}) + \int_0^1\int_0^t \frac{1}{2}(|A_1|+|A_2|)CO(s)d\tau ds =$$

$$= (|A_1|+|A_2|)C\sqrt{K_2(1+X_0^2)}t^{3/2} + o(t^{3/2}) = O(t^{3/2}). \qquad \square$$

2. Численный эксперимент

Для демонстрации возможностей предложенной формулы рассмотрим уравнение вида

$$X_t = 1 + \int_0^t \cos(X_{s-})ds + \int_0^t X_{s-}dW_s$$

и вычислим математическое ожидание его решения $\mathbb{E}[X_t]$.

В таблице приведены результаты вычисления для $t = 0,01$ и $t = 0,1$ с использованием формулы (4) и метода Монте-Карло. При моделировании траекторий использовалась схема Мильштейна (см. [8]), а параметр N указывает на количество выполненных независимых розыгрышей траекторий процесса. Необходимо отметить, что каждая строка в столбцах, соответствующих схеме Мильштейна, является результатом осреднения по независимо смоделированному набору траекторий. Характерной особенностью метода Монте-Карло является то, что при каждом независимом вычислении искомого значения функционала получается новое значение.

Результаты численных экспериментов

$t = 0,01$			
Формула (4)	Схема Мильштейна		
	$N = 100000$	$N = 1000000$	$N = 5000000$
1,005366940	1,005337034	1,005520395	1,005409730
	1,005512123	1,005516914	1,005365776
	1,005171719	1,005347186	1,005468750
$t = 0,1$			
Формула (4)	Схема Мильштейна		
	$N = 10000$	$N = 100000$	$N = 1000000$
1,050521622	1,048873096	1,052577854	1,054480922
	1,052423041	1,054184545	1,054275370
	1,047200251	1,054789066	1,053922429

3. Заключение

В работе предложена формула приближенного вычисления математических ожиданий от решения стохастического дифференциального уравнения, в котором присутствует дрейф. Произведена оценка погрешности полученной формулы. Формула (4) относится к классу слабых аппроксимаций и основана на аппроксимации моментов от случайных процессов. Для своего применения формула требует проведения предварительных символьных вычислений, однако затраты на эти вычисления компенсируются в последствии за счет высокой скорости вычислений. Еще одним преимуществом является то, что вычисление приближенного значения с использованием формулы (4), требует значительно меньшего количества памяти и вычислительных ресурсов, поскольку при использовании схемы метода Монте-Карло необходимо произвести осреднение значения на основе всего множества генерируемых траекторий.

Литература

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. М.: Наука, 1975. Т. 3.

2. *Øksendal B.* Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. Springer, 2003.

3. *Applebaum D.* Levy processes and stochastic calculus. Cambridge University Press, 2009.

4. *Kloeden P. E., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. Springer, 1999.

5. *Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A.* Functiona Integrals; Approximate Evaluation and Applications. Dordreht: Kluwer Acad. Publ., 1993.

6. *Egorov A., Zherelo A.* Approximation of functional integrals with respect to measure generated by solutions of stochastic differential equations // Monte Carlo Methods Appl. 2004. Vol. 10. P. 257–264.

7. *Егоров А. Д., Жидков Е. П., Лобанов Ю. Ю.* Введение в теорию и приложения функциональных интегралов. М.: Физматлит, 2006.

8. *Мильштейн Г. Н.* Приближенное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применения. 1974. Т. 19, № 3. С. 583–588.

References

1. Gihman I. I., Skorokhod A. V. *Theory of random processes. Vol. 3*. Moscow, Nauka, 1975 (in Russian).

2. Øksendal B. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer, 2003.

3. Applebaum D. *Levy processes and stochastic calculus*. Cambridge University Press, 2009.

4. Kloeden P. E., Platen E. *Numerical solution of stochastic differential equations*. Springer, 1999.

5. Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A. *Functiona Integrals; Approximate Evaluation and Applications*. Dordreht, Kluwer Acad. Publ., 1993.

6. Egorov A., Zherelo A. Approximation of functional integrals with respect to measure generated by solutions of stochastic differential equations. *Monte Carlo Methods Appl.,* 2004, vol. 10. pp. 257–264.

7. Egorov A. D., Zhidkov E. P., Lobanov Yu. Yu. *Introduction in a theory and applications of functional integlas.* Moscow, Phismatlit, 2006 (in Russian).

8. Milshtein G. N. Approximate integration of stochastic differential equations. *Theory of Probability & Its Applications,* 1974, vol. 19, no 3. pp. 583–588.