Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Том 33. № 1. С. 75–86

УДК 517.538.52+517.538.53

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЯВНЫЙ ВИД НЕЛИНЕЙНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА–ЧЕБЫШЁВА

А. П. Старовойтов, И. В. Кругликов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
e-mail: svoitov@gsu.by, igor.v.kruglikov@gmail.com

Поступила: 19.01.2025 **Исправлена:** 31.01.2025 **Принята:** 23.05.2025

Ключевые слова: ряды по многочленам Чебышёва, аппроксимации Эрмита–Паде, аппроксимации Паде–Чебышёва, тригонометрические аппроксимации Эрмита–Якоби, нелинейные аппроксимации Эрмита–Чебышёва.

Аннотация. В работе найдены достаточные условия существования тригонометрических аппроксимаций Эрмита–Якоби системы функций, являющихся суммами сходящихся рядов Фурье. Опираясь на эти результаты, установлены достаточные условия, при которых существуют нелинейные аппроксимации Эрмита–Чебышёва систем функций, представимых рядами Фурье по многочленам Чебышёва первого и второго рода. При выполнении найденных условий получены явные формулы для числителей и знаменателей тригонометрических аппроксимаций Эрмита–Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита–Чебышёва первого и второго рода указанных систем функций.

EXISTENCE AND EXPLICIT FORM OF NONLINEAR HERMITE–CHEBYSHEV APPROXIMATIONS

A. P. Starovoitov, I. V. Kruglikov

F. Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus
e-mail: svoitov@gsu.by, igor.v.kruglikov@gmail.com

Received: 19.01.2025 **Revised:** 31.01.2025 **Accepted:** 23.05.2025

Keywords: series in Chebyshev polynomials, Hermite–Padé approximations, Padé–Chebyshev approximations, trigonometric Hermite–Jacobi approximations, nonlinear Hermite–Chebyshev approximations.

Abstract. In this paper, sufficient conditions for the existence of trigonometric Hermite–Jacobi approximations of a system of functions that are sums of convergent Fourier series are found. Based on these results, sufficient conditions are established under which nonlinear Hermite–Chebyshev approximations of systems of functions representable by Fourier series in Chebyshev polynomials of the first and second kind exist. When the found conditions are met, explicit formulas are obtained for the numerators and denominators of trigonometric Hermite–Jacobi approximations and nonlinear Hermite–Chebyshev approximations of the first and second kind of the specified systems of functions.

1. Введение

Пусть система $\mathbf{f^{ch1}} = (f_1^{ch1}, \ldots, f_k^{ch1})$ состоит из функций, представимых рядами Фурье по многочленам Чебышёва $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ первого рода

$$f_j^{ch1}(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l^j T_l(x),\ j = 1, \ldots, k, \tag{1}$$

с действительными коэффициентами, которые сходятся при всех $x \in [-1,1]$. Через $\mathbb{Z}_+^k$ обозначим множество всех k-мерных мультииндексов $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k)$, являющихся упорядоченным набором k целых неотрицательных чисел. Число $m := m_1 + \ldots + m_k$ назовем порядком мультииндекса $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k)$.

Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ и рассмотрим аналог задачи Эрмита–Паде для $\mathbf{f^{ch1}}$ (см. [1, гл. 4, §1, задача A]):

Задача 1.1 ($\mathbf{A^{ch1}}$). Для системы $\mathbf{f^{ch1}}$ найти такой тождественно не равный нулю многочлен $Q_m^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}}) = Q_{n,\overrightarrow{m}}^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}}) = \sum_{p=0}^{m} u_p T_p(x)$ и такие многочлены $P_j^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}}) = P_{n_j,n,\overrightarrow{m}}^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}}) = \sum_{p=0}^{n_j} v_p^j T_p(x)$, $n_j = n + m - m_j$, чтобы для $j = 1, \ldots, k$

$$Q_m^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}}) f_j^{ch1}(x) - P_j^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}}) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{a}_l^j T_l(x).$$

Определение 1.2. Если пара (Q_m^{ch1}, P^{ch1}), где $P^{ch1} = (P_1^{ch1}, \dots, P_k^{ch1})$, является решением задачи $\mathbf{A^{ch1}}$, то рациональные дроби

$$\pi_j^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}}) = \pi_{n_j,n,\overrightarrow{m}}^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}}) = \frac{P_j^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}})}{Q_m^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}})},\ j = 1,\dots,k,$$

будем называть *линейными аппроксимациями Эрмита–Чебышёва 1-го рода* для мультииндекса $(n,\overrightarrow{m})$ и системы $\mathbf{f^{ch1}}$.

Определение 1.3. *Нелинейными аппроксимациями Эрмита–Чебышёва 1-го рода* для мультииндекса $(n,\overrightarrow{m})$ и системы $\mathbf{f^{ch1}}$ назовем рациональные дроби

$$\widehat{\pi}_j^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}}) = \widehat{\pi}_{n_j,n,\overrightarrow{m}}^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}}) = \frac{\widehat{P}_j^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}})}{\widehat{Q}_m^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}})},$$

где многочлены $\widehat{Q}_m^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}})$, $\widehat{P}_j^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}})$ $(n_j = n+m-m_j)$, степени которых не превышают соответственно m и n_j, подобраны так, чтобы

$$f_j^{ch1}(x) - \frac{\widehat{P}_j^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}})}{\widehat{Q}_m^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}})} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \widehat{a}_l^j\, T_l(x),\ j = 1,\dots,k.$$

При $k = 1$ основные свойства линейных и нелинейных аппроксимаций Эрмита–Чебышёва (в этом случае их называют линейными и нелинейными аппроксимациями Паде–Чебышёва; дополнительно о терминологии см. [2]) описаны достаточно подробно (прежде всего см. [2–4] и приведенную там литературу, а также [5–13]). Например, известно, что линейная аппроксимация Паде–Чебышёва всегда существует, но, вообще говоря, не единственна. Нелинейная аппроксимация Паде–Чебышёва не всегда существует, но в случае существования всегда единственна. Аналогичные свойства справедливы и для аппроксимаций Эрмита–Чебышёва [9; 11]. Имеются примеры систем функций $\mathbf{f^{ch1}}$, для которых нелинейные аппроксимации Эрмита–Чебышёва существуют, но не являются линейными аппроксимациями Эрмита–Чебышёва (см. [2; 9; 11; 14; 15]).

Рассмотрим теперь другой тип аппроксимаций Эрмита–Чебышёва. Предположим, что система $\mathbf{f^{ch2}} = (f_1^{ch2}, \dots, f_k^{ch2})$ состоит из функций, представимых рядами Фурье по многочленам Чебышёва $U_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x)$ второго рода

$$f_j^{ch2}(x) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l^j U_l(x),\ j = 1,\dots,k, \tag{2}$$

с действительными коэффициентами, которые сходятся при всех $x \in [-1,1]$. Если вместо рядов (1) взять ряды (2), то конструкции, аналогичные предыдущим, приводят к линейным и нелинейным аппроксимациям Эрмита–Чебышёва 2-го рода. Постановка задачи Эрмита–Паде для рядов (2) следующая:

Задача 1.4 ($\mathbf{A^{ch2}}$). Найти многочлен $Q_m^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}}) = Q_{n,\overrightarrow{m}}^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}})$, $\deg Q_m^{ch2} \leqslant m$, тождественно не равный нулю, и многочлены $P_j^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}}) = P_{n_j,n,\overrightarrow{m}}^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}})$, $\deg P_j^{ch2} \leqslant n_j$, $n_j = n+m-m_j$, чтобы для $j = 1,\dots,k$

$$Q_m^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}})f_j^{ch2}(x) - P_j^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}}) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{b}_l^j\, U_l(x).$$

Определение 1.5. Если пара (Q_m^{ch2}, P^{ch2}), где $P^{ch2} = (P_1^{ch2}, \dots, P_k^{ch2})$, является решением задачи $\mathbf{A^{ch2}}$, то рациональные дроби

$$\pi_j^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}}) = \pi_{n_j,n,\overrightarrow{m}}^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}}) = \frac{P_j^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}})}{Q_m^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}})},\ j = 1,\dots,k,$$

будем называть *линейными аппроксимациями Эрмита–Чебышёва 2-го рода* для мультииндекса $(n,\overrightarrow{m})$ и системы $\mathbf{f^{ch2}}$.

Определение 1.6. *Нелинейными аппроксимациями Эрмита–Чебышёва 2-го рода* для мультииндекса $(n, \overrightarrow{m})$ и системы $\mathbf{f^{ch2}}$ назовем алгебраические рациональные функции

$$\widehat{\pi}_j^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}}) = \widehat{\pi}_{n_j,n,\overrightarrow{m}}^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}}) = \frac{\widehat{P}_j^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}})}{\widehat{Q}_m^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}})},$$

где многочлены $\widehat{Q}_m^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}})$, $\widehat{P}_j^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}})$ $(n_j = n+m-m_j)$, степени которых не превышают соответственно m и n_j, подобраны так, чтобы

$$f_j^{ch2}(x) - \frac{\widehat{P}_j^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}})}{\widehat{Q}_m^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}})} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \widehat{b}_l^j U_l(x), \ j = 1,\ldots,k.$$

Рассмотрим теперь две системы $\mathbf{f^1} = (f_1^1,\ldots,f_k^1)$, $\mathbf{f^{t1}} = (f_1^{t1},\ldots,f_k^{t1})$ степенных и тригонометрических рядов

$$f_j^1(z) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l^j z^l, \ f_j^{t1}(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l^j \cos lx,$$

ассоциированных с системой $\mathbf{f^{ch1}}$, и две системы $\mathbf{f^2} = (f_1^2,\ldots,f_k^2)$, $\mathbf{f^{t2}} = (f_1^{t2},\ldots,f_k^{t2})$ степенных и тригонометрических рядов

$$f_j^2(z) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l^j z^l, \ f_j^{t2}(x) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l^j \sin lx,$$

ассоциированных с системой $\mathbf{f^{ch2}}$.

При $k = 1$ в [2] , опираясь на свойства операторов Фабера, установлено, что вопрос о существовании нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва 1-го рода решается с помощью известных результатов о классических аппроксимациях Паде соответствующего ассоциированного степенного ряда. Результаты, полученные в данной работе, позволяют сделать вывод о том, что вопрос о существовании нелинейных аппроксимаций Эрмита–Чебышёва 1-го рода аналогичным образом решается с помощью известных результатов об аппроксимациях Эрмита–Паде соответствующей ассоциированной системы степенных рядов. Основные теоремы работы получены нами без привлечения теории операторов Фабера, а предложенный метод решения поставленной задачи оказался применимым и для аппроксимаций Эрмита–Чебышёва 2-го рода. Если доказательство основного результата в [2] проиллюстрировать схемой: *аппроксимации Паде степенного ряда* $\Longleftrightarrow$ *преобразования Фабера* $\Longleftrightarrow$ *аппроксимации Паде–Чебышёва*, то схема наших рассуждений выглядит так: *аппроксимации Эрмита–Паде системы степенных рядов* $\Longleftrightarrow$ *тригонометрические аппроксимации Эрмита–Якоби* $\Longleftrightarrow$ *аппроксимации Эрмита–Чебышёва*. Роль преобразований Фабера в нашей схеме рассуждений занимают тригонометрические аппроксимации Эрмита–Якоби, которым посвящен отдельный параграф.

В дальнейшем будем рассматривать только нелинейные аппроксимации Эрмита–Чебышёва, а основной задачей исследований данной работы является нахождение условий на коэффициенты рядов (1) и (2), при которых нелинейные аппроксимации Эрмита–Чебышёва 1-го и 2-го рода существуют. В случае их существования будем искать явный вид таких аппроксимаций. Доказательство основных теорем работы существенно опирается на установленную в [9–11] связь между нелинейными аппроксимациями Эрмита–Чебышёва и соответствующими тригонометрическими аппроксимациями Эрмита–Якоби.

Описанию условий существования и единственности линейных аппроксимации Эрмита–Чебышёва 1-го и 2-го рода посвящена другая наша работа [16].

2. Аппроксимации Эрмита–Паде и Эрмита–Якоби

Приведем некоторые известные факты теории аппроксимаций Эрмита–Паде и Эрмита–Якоби, которые понадобятся в дальнейшем.

Пусть $\mathbf{f} = (f_1,\ldots,f_k)$ – набор из k степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l^j z^l, \ j = 1,\ldots,k, \tag{3}$$

с комплексными коэффициентами. Зафиксируем $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ и рассмотрим хорошо известную задачу Эрмита–Паде [1, гл. 4, §1, задача A]:

Задача 2.1A. Найти тождественно не равный нулю многочлен $Q_m(z;\mathbf{f}) = Q_{n,\overrightarrow{m}}(z;\mathbf{f})$, $\deg Q_m \leqslant m$, и многочлены $P_j(z;\mathbf{f}) = P_{n_j,n,\overrightarrow{m}}(z;\mathbf{f})$, $\deg P_j \leqslant n_j$, $n_j = n+m-m_j$, чтобы для $j = 1, \ldots, k$

$$Q_m(z;\mathbf{f}) f_j(z) - P_j(z;\mathbf{f}) = O(z^{n+m+1}). \tag{4}$$

Здесь и далее под $O(z^p)$ понимаем степенной ряд вида $c_1 z^p + c_2 z^{p+1} + \ldots$.

Определение 2.2. Если многочлены $Q_m(z;\mathbf{f}), P_1(z;\mathbf{f}), \ldots, P_k(z;\mathbf{f})$ являются решением задачи **A** (решение задачи **A** всегда существует [1]), то рациональные дроби

$$\pi_j(z;\mathbf{f}) = \pi_{n_j,n,\overrightarrow{m}}(z;\mathbf{f}) = \frac{P_j(z;\mathbf{f})}{Q_m(z;\mathbf{f})}, \; j = 1, \ldots, k,$$

называют *аппроксимациями Эрмита–Паде* для мультииндекса $(n, \overrightarrow{m})$ и системы $\mathbf{f}$.

Для системы экспонент дроби $\{\pi_j(z;\mathbf{f})\}_{j=1}^k$ впервые введены в рассмотрение Ш. Эрмитом в работе [17], посвященной доказательству трансцендентности числа e. В случае произвольной системы $\mathbf{f}$ условиями (4) они определяются, вообще говоря, не однозначно [1; 18]. Особый интерес представляют системы функций $\mathbf{f}$, для которых $\{\pi_j(z;\mathbf{f})\}_{j=1}^k$ определяются однозначно для любого мультииндекса $(n, \overrightarrow{m})$. Такими системами являются, например, совершенные системы [1, гл. 4, §1]. Существуют системы $\mathbf{f}$, отличные от совершенных, для которых $\{\pi_j(z;\mathbf{f})\}_{j=1}^k$ также определяются однозначно [18; 19].

Введем в рассмотрение кратные аналоги дробей К. Якоби [20] (подробнее см. [21]).

Определение 2.3. Рациональные функции вида

$$\widehat{\pi}_j(z;\mathbf{f}) = \widehat{\pi}_{n_j,n,\overrightarrow{m}}(z;\mathbf{f}) = \frac{\widehat{P}_j(z;\mathbf{f})}{\widehat{Q}_m(z;\mathbf{f})}, \; j = 1, \ldots, k,$$

где алгебраические многочлены $\widehat{Q}_m(z;\mathbf{f}) = \widehat{Q}_{n,\overrightarrow{m}}(z;\mathbf{f})$, $\widehat{P}_j(z;\mathbf{f}) = \widehat{P}^j_{n_j,n,\overrightarrow{m}}(z;\mathbf{f})$ имеют степени соответственно не выше m и n_j, $n_j = n+m-m_j$, будем называть *аппроксимациями Эрмита–Якоби* для мультииндекса $(n, \overrightarrow{m})$ и системы $\mathbf{f}$, если

$$f_j(z) - \frac{\widehat{P}_j(z;\mathbf{f})}{\widehat{Q}_m(z;\mathbf{f})} = O(z^{n+m+1}).$$

В отличие от аппроксимаций Эрмита–Паде аппроксимации Эрмита–Якоби могут не существовать [11].

Введем новые обозначения. Для индекса $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекса $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k)$, $m \neq 0$, рассмотрим определитель

$$H_{n,\overrightarrow{m}}(\mathbf{f}) = \det \begin{pmatrix} H^1 \\ H^2 \\ \vdots \\ H^k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} f^1_{n-m_1+1} & f^1_{n-m_1+2} & \cdots & f^1_{n_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^1_n & f^1_{n+1} & \cdots & f^1_{n+m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_{n-m_k+1} & f^k_{n-m_k+2} & \cdots & f^k_{n_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_n & f^k_{n+1} & \cdots & f^k_{n+m-1} \end{vmatrix},$$

при $m_j \neq 0$ состоящий из блоков

$$H^j = \begin{pmatrix} f^j_{n-m_j+1} & f^j_{n-m_j+2} & \cdots & f^j_{n_j} \\ f^j_{n-m_j+2} & f^j_{n-m_j+3} & \cdots & f^j_{n_j+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^j_n & f^j_{n+1} & \cdots & f^j_{n+m-1} \end{pmatrix},$$

расположенных друг над другом. При $l < 0$ считаем, что $f^j_l = 0$. По определению считаем, что при $m_j = 0$ определитель $H_{n,\overrightarrow{m}}(\mathbf{f})$ не содержит блок H^j. При $k = 1$ определитель $H_{n,\overrightarrow{m}}(\mathbf{f})$ является хорошо известным определителем Адамара (см. [4]).

В [22] (см. также [11]) доказан кратный аналог теоремы Якоби [4; 20]: если для мультииндекса $(n,\overrightarrow{m})$ и системы функций $\mathbf{f}$ определитель $H_{n,\overrightarrow{m}}(\mathbf{f}) \neq 0$, то аппроксимации Эрмита–Якоби $\{\widehat{\pi}_j(z;\mathbf{f})\}_{j=1}^k$ существуют, определяются единственным образом и каждая из них тождественно совпадает с соответствующей аппроксимацией Эрмита–Паде, т. е.

$$\widehat{\pi}_j(z;\mathbf{f}) = \pi_j(z;\mathbf{f}), \;\; j=1,\dots,k.$$

В таком случае, опираясь на результаты работы [18], можно описать явный вид числителей и знаменателя дробей $\{\widehat{\pi}_j(z;\mathbf{f})\}_{j=1}^k$. Для этого введем необходимые обозначения.

При $m_j \neq 0$ к матрице H^j добавим в качестве последнего столбца столбец

$$\begin{pmatrix} f^j_{n_j+1} & f^j_{n_j+2} & \dots & f^j_{n+m} \end{pmatrix}^T.$$

В результате получим матрицу F^j порядка $m_j \times (m+1)$. Располагая F^j друг над другом согласно своего номера, построим новую матрицу порядка $m \times (m+1)$

$$F_{n,\overrightarrow{m}}(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k \end{bmatrix}^T := \begin{pmatrix} f^1_{n-m_1+1} & f^1_{n-m_1+2} & \dots & f^1_{n_1+1} \\ f^1_{n-m_1+2} & f^1_{n-m_1+3} & \dots & f^1_{n_1+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^1_n & f^1_{n+1} & \dots & f^1_{n+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^k_{n-m_k+1} & f^k_{n-m_k+2} & \dots & f^k_{n_k+1} \\ f^k_{n-m_k+2} & f^k_{n-m_k+3} & \dots & f^k_{n_k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^k_n & f^k_{n+1} & \dots & f^k_{n+m} \end{pmatrix}.$$

Определим также функциональные матрицы-строки порядка $1 \times (m+1)$

$$E(z) = \begin{pmatrix} z^m & z^{m-1} & \dots & z & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_{m_j}(z) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{l=0}^{n-m_j} f^j_l z^{m+l} & \sum\limits_{l=0}^{n-m_j+1} f^j_l z^{m+l-1} & \dots & \sum\limits_{l=0}^{n_j} f^j_l z^l \end{pmatrix}.$$

Если к матрице $F_{n,\overrightarrow{m}}(\mathbf{f})$ в качестве последней строки добавить соответственно строки $E(z)$, $E_{m_j}(z)$ и $\begin{pmatrix} f^j_{n+l} & f^j_{n+l+1} & \dots & f^j_{n+m+l} \end{pmatrix}$, то получим квадратные матрицы, определители которых обозначим соответственно через $D(n,\overrightarrow{m};z)$, $G_j(n,\overrightarrow{m};z)$ и $d^j_{n,\overrightarrow{m},l}$.

Если $H_{n,\overrightarrow{m}}(\mathbf{f}) \neq 0$, то $F_{n,\overrightarrow{m}}(\mathbf{f})$ является матрицей полного ранга и тогда при подходящем выборе нормирующего множителя знаменатели и числители дробей $\pi_j(z;\mathbf{f})$ и $\widehat{\pi}_j(z;\mathbf{f})$ при $j=1,\dots,k$ могут быть представлены в виде [18]

$$Q_m(z;\mathbf{f}) = \widehat{Q}_m(z;\mathbf{f}) = D(n,\overrightarrow{m};z) = \det\begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k & E(z) \end{bmatrix}^T, \tag{5}$$

$$P_j(z;\mathbf{f}) = \widehat{P}_j(z;\mathbf{f}) = G_j(n,\overrightarrow{m};z) = \det\begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k & E_{m_j}(z) \end{bmatrix}^T, \tag{6}$$

кроме того,

$$Q_m(z;\mathbf{f}) f_j(z) - P_j(z;\mathbf{f}) = \sum_{l=1}^{\infty} d^j_{n,\overrightarrow{m},l} z^{n+m+l}. \tag{7}$$

Если коэффициенты рядов (3) – действительные числа, то определители $d^j_{n,\overrightarrow{m},l}$ принимают действительные значения, а $Q_m(z;\mathbf{f})$ и $P_j(z;\mathbf{f})$ являются алгебраическими многочленами с действительными коэффициентами [18]. Из (5)–(7) следует, что при $j=1,\dots,k$

$$f_j(z) - \widehat{\pi}_j(z;\mathbf{f}) = \sum_{l=1}^{\infty} \widehat{d}^j_{n,\overrightarrow{m},l} z^{n+m+l},$$

в которых коэффициенты $\widehat{d}^j_{n,\overrightarrow{m},l}$ – действительные числа.

3. Тригонометрические аппроксимации Эрмита–Паде и Эрмита–Якоби

Пусть $\mathbf{f^t} = (f_1^t, ..., f_k^t)$ – система тригонометрических рядов

$$f_j^t(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \left(a_l^j \cos lx + b_l^j \sin lx \right), \ j = 1, \ldots, k, \tag{8}$$

с действительными коэффициентами. Считаем, что ряды (8) сходятся при всех $x \in \mathbb{R}$ и каждый ряд определяет функцию, заданную на всей действительной прямой.

Для системы $\mathbf{f^t}$ существует [9] тождественно не равный нулю тригонометрический многочлен $Q_m^t(x; \mathbf{f^t}) = Q_{n,\overrightarrow{m}}^t(x; \mathbf{f^t})$, $\deg Q_m^t \leqslant m$, и такие тригонометрические многочлены $P_j^t(x; \mathbf{f^t}) = P_{n_j,n,\overrightarrow{m}}^t(x; \mathbf{f^t})$, $\deg P_j^t \leqslant n_j$, $n_j = n + m - m_j$, что для $j = 1, ..., k$

$$Q_m^t(x; \mathbf{f^t}) f_j^t(x) - P_j^t(x; \mathbf{f^t}) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \left(\tilde{a}_l^j \cos lx + \tilde{b}_l^j \sin lx \right). \tag{9}$$

Определение 3.1. Если многочлены $Q_m^t(x; \mathbf{f^t})$, $P_j^t(x; \mathbf{f^t})$, $j = 1, ..., k$, удовлетворяют условиям (9), то тригонометрические рациональные дроби

$$\pi_j^t(x; \mathbf{f^t}) = \pi_{n_j,n,\overrightarrow{m}}^t(x; \mathbf{f^t}) = \frac{P_j^t(x; \mathbf{f^t})}{Q_m^t(x; \mathbf{f^t})}, \ j = 1, \ldots, k,$$

будем называть *тригонометрическими аппроксимациями Эрмита–Паде* (*совместными аппроксимациями Эрмита–Фурье*) для мультииндекса $(n, \overrightarrow{m})$ и системы $\mathbf{f^t}$.

Отметим, что условиями (9) тригонометрические аппроксимации Эрмита–Паде определяются, вообще говоря, не однозначно. Задача нахождения условий, при которых они определяются однозначно, подробно исследуется в работах [5; 9; 10].

Определим теперь тригонометрические аналоги аппроксимаций Эрмита–Якоби.

Определение 3.2. Рациональные функции

$$\widehat{\pi}_j^t(x; \mathbf{f^t}) = \widehat{\pi}_{n_j,n,\overrightarrow{m}}^t(x; \mathbf{f^t}) = \frac{\widehat{P}_j^t(x; \mathbf{f^t})}{\widehat{Q}_m^t(x; \mathbf{f^t})}, \ j = 1, \ldots, k,$$

где $\widehat{Q}_m^t(x; \mathbf{f^t}) = \widehat{Q}_{n,\overrightarrow{m}}^t(x; \mathbf{f^t})$, $\widehat{P}_j^t(x; \mathbf{f^t}) = \widehat{P}_{n_j,n,\overrightarrow{m}}^t(x; \mathbf{f^t})$ – тригонометрические многочлены, степени которых соответственно не выше m и n_j, $n_j = n + m - m_j$, будем называть *тригонометрическими аппроксимациями Эрмита–Якоби* для мультииндекса $(n, \overrightarrow{m})$ и системы $\mathbf{f^t}$, если

$$f_j^t(x) - \frac{\widehat{P}_j^t(x; \mathbf{f^t})}{\widehat{Q}_m^t(x; \mathbf{f^t})} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \left(\widehat{a}_l^j \cos lx + \widehat{b}_l^j \sin lx \right), \ j = 1, \ldots, k.$$

В отличие от тригонометрических аппроксимаций Эрмита–Паде тригонометрические аппроксимации Эрмита–Якоби могут не существовать [2; 5; 14]. Известны примеры систем функций $\mathbf{f^t}$, для которых тригонометрические аппроксимации Эрмита–Якоби существуют, но не являются тригонометрическими аппроксимациями Эрмита–Паде [9; 11; 23].

Теорема 3.3. *Предположим, что мультииндекс* $(n, \overrightarrow{m})$, $m \neq 0$, *удовлетворяет условию* $n \geqslant \max\{m_j : 1 \leqslant j \leqslant k\}$, *а* $\mathbf{f^1} = (f_1^1, \ldots, f_k^1)$, $\mathbf{f^{t1}} = (f_1^{t1}, \ldots, f_k^{t1})$ *– две ассоциированные с* $\mathbf{f^{ch1}}$ *системы степенных и тригонометрических рядов. Тогда для существования тригонометрических аппроксимаций Эрмита–Якоби* $\{\widehat{\pi}_j^t(x; \mathbf{f^{t1}})\}_{j=1}^k$ *достаточно, чтобы для системы степенных рядов* $\mathbf{f^1}$ *выполнялись следующие условия:*

1) *существуют алгебраические аппроксимации Эрмита–Якоби* $\{\widehat{\pi}_j(z; \mathbf{f^1})\}_{j=1}^k$*;*

2) *каждый степенной ряд* f_j^1 *системы* $\mathbf{f^1}$ *имеет радиус сходимости* $R_j^1 > 1$*;*

3) *рациональные дроби* $\widehat{\pi}_j(z; \mathbf{f^1})$, $j = 1, \ldots, k$, *не имеют полюсов в* $\overline{D} = \{z : |z| \leqslant 1\}$.

Если для системы $\mathbf{f^1}$ *выполнены условия* 1)–3)*, то при соответствующей нормировке для всех* $j = 1, \ldots, k$ *справедливы равенства:*

$$\widehat{Q}_m^t(x; \mathbf{f^{t1}}) = \widehat{Q}_m(e^{ix}; \mathbf{f^1}) \overline{\widehat{Q}_m(e^{ix}; \mathbf{f^1})} = \sum_{l=0}^{m} q_l \cos lx,$$

$$\widehat{P}_j^t(x;\mathbf{f^{t1}}) = \operatorname{Re}\left\{\widehat{P}_j(e^{ix};\mathbf{f^1})\,\overline{\widehat{Q}_m(e^{ix};\mathbf{f^1})}\right\} = \sum_{l=0}^{n_j} p_l^j \cos lx,$$

$$f_j^{t1}(x) - \widehat{\pi}_j^t(x;\mathbf{f^{t1}}) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} d_l^j \cos lx,$$

где q_l, p_l^j, d_l^j *– действительные числа.*

Теорема 3.4. *Предположим, что мультииндекс* $(n,\overrightarrow{m})$, $m \neq 0$, *удовлетворяет условию* $n \geqslant \max\{m_j : 1 \leqslant j \leqslant k\}$, *а* $\mathbf{f^2} = (f_1^2,\dots,f_k^2)$, $\mathbf{f^{t2}} = (f_1^{t2},\dots,f_k^{t2})$ *– две ассоциированные с* $\mathbf{f^{ch2}}$ *системы степенных и тригонометрических рядов. Тогда для существования тригонометрических аппроксимаций Эрмита–Якоби* $\{\widehat{\pi}_j^t(x;\mathbf{f^{t2}})\}_{j=1}^k$ *достаточно, чтобы для системы степенных рядов* $\mathbf{f^2}$ *выполнялись условия:*

1) *существуют алгебраические аппроксимации Эрмита–Якоби* $\{\widehat{\pi}_j(z;\mathbf{f^2})\}_{j=1}^k$;

2) *каждый степенной ряд* f_j^2 *системы* $\mathbf{f^2}$ *имеет радиус сходимости* $R_j^2 > 1$;

3) *рациональные дроби* $\widehat{\pi}_j(z;\mathbf{f^2})$, $j = 1,\dots,k$, *не имеют полюсов в* $\overline{D} = \{z : |z| \leqslant 1\}$.

Если для системы $\mathbf{f^2}$ *выполнены условия* 1)–3), *то при соответствующей нормировке для всех* $j = 1,\dots,k$ *справедливы равенства:*

$$\widehat{Q}_m^t(x;\mathbf{f^{t2}}) = \widehat{Q}_m(e^{ix};\mathbf{f^2})\,\overline{\widehat{Q}_m(e^{ix};\mathbf{f^2})} = \sum_{l=0}^{m} \widehat{q}_l \cos lx, \tag{10}$$

$$\widehat{P}_j^t(x;\mathbf{f^{t2}}) = \operatorname{Im}\left\{\widehat{P}_j(e^{ix};\mathbf{f^2})\,\overline{\widehat{Q}_m(e^{ix};\mathbf{f^2})}\right\} = \sum_{l=0}^{n_j} \widehat{p}_l^j \sin lx, \tag{11}$$

$$f_j^{t2}(x) - \widehat{\pi}_j^t(x;\mathbf{f^{t2}}) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \widehat{d}_l^j \sin lx, \tag{12}$$

где $\widehat{q}_l$, $\widehat{p}_l^j$, $\widehat{d}_l^j$ *– действительные числа.*

Замечание 3.5. *Условия* 2) *и* 3) *в теоремах* 3.3 *и* 3.4 *не являются существенными в следующем смысле. Если они не выполнены, например, для* $\mathbf{f^1}$, *то можно перейти к другой системе функций* $\mathbf{f_r^1} = (f_1^1(rz),\dots,f_k^1(rz))$, *для которой при достаточно малом* r, $0 < r < 1$, *они будут выполнены.*

Замечание 3.6. *В формулировках теорем* 3.3 *и* 3.4 *предполагается, что мультииндекс удовлетворяет условию* $n \geqslant \max\{m_j : 1 \leqslant j \leqslant k\}$. *Это означает, что мы рассматриваем только «верхнюю», часть общей тригонометрической таблицы Паде (см.* [1, гл. 4, §1]*), включая ее главную диагональ. Это условие на мультииндекс позволяет существенно упростить нахождение явных формул для аппроксимаций Эрмита–Паде и поэтому встречается в ряде работ, посвященных данной тематике (см., например,* [2; 8; 24–26]*).*

Остановимся только на доказательстве теоремы 3.4. Теорема 3.3 доказывается аналогично. Так как выполнено условие 1) и коэффициенты рядов (2) действительные числа, то дроби $\{\widehat{\pi}_j(z;\mathbf{f^2})\}_{j=1}^k$ определены, их числители и знаменатель являются многочленами с действительными коэффициентами и в некоторой окрестности нуля

$$f_j^2(z) - \widehat{\pi}_j(z;\mathbf{f^2}) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \widehat{d}_l^j z^l,\ j = 1,\dots,k. \tag{13}$$

Выполнение условий 2) и 3) позволяет в качестве такой окрестности взять открытый круг с центром в нуле, радиус которого больше 1. Очевидно, что $f_j^{t2}(x) = \operatorname{Im} f_j^2(e^{ix})$. Тогда, полагая в (13) $z = e^{ix}$, а затем приравнивая мнимые части нового равенства, получим

$$f_j^{t2}(x) - \operatorname{Im}\left\{\widehat{\pi}_j(e^{ix};\mathbf{f^2})\right\} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \widehat{d}_l^j \sin lx. \tag{14}$$

Покажем, что при $n \geqslant \max\{m_j : 1 \leqslant j \leqslant k\}$

$$\widehat{\pi}_j^t(x;\mathbf{f^{t2}}) = \operatorname{Im}\left\{\widehat{\pi}_j(e^{ix};\mathbf{f^2})\right\}. \tag{15}$$

Знаменатель $\widehat{Q}_m(z;\mathbf{f^2})$ и числитель $\widehat{P}_j(z;\mathbf{f^2})$ дроби $\widehat{\pi}_j(z;\mathbf{f^2})$ – алгебраические многочлены с действительными коэффициентами. Предположим, что они представляются в виде

$$\widehat{Q}_m(z;\mathbf{f^2})=\sum_{l=0}^{m}\widehat{q}_l z^l,\ \ \widehat{P}_j(z;\mathbf{f^2})=\sum_{l=0}^{n_j}\widehat{p}_l^{\,j} z^l.$$

Тогда при $z=e^{ix}$

$$\operatorname{Im}\left\{\widehat{\pi}_j(e^{ix};\mathbf{f^2})\right\}=\frac{1}{2i}\left(\frac{\widehat{P}_j(e^{ix};\mathbf{f^2})}{\widehat{Q}_m(e^{ix};\mathbf{f^2})}-\frac{\overline{\widehat{P}_j(e^{ix};\mathbf{f^2})}}{\overline{\widehat{Q}_m(e^{ix};\mathbf{f^2})}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\frac{\sum_{l=0}^{n_j}\widehat{p}_l^{\,j}e^{ilx}\sum_{s=0}^{m}\widehat{q}_s e^{-isx}-\sum_{l=0}^{n_j}\widehat{p}_l^{\,j}e^{-ilx}\sum_{s=0}^{m}\widehat{q}_s e^{isx}}{\sum_{s=0}^{m}\widehat{q}_s e^{isx}\sum_{l=0}^{m}\widehat{q}_l e^{-ilx}}= \tag{16}$$

$$=\frac{\sum_{l=0}^{n_j}\sum_{s=0}^{m}\widehat{p}_l^{\,j}\widehat{q}_s\sin(l-s)x}{\sum_{s=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}\widehat{q}_s\widehat{q}_l\cos(l-s)x}.$$

Если $n\geqslant\max\{m_j:1\leqslant j\leqslant k\}$, то $n_j\geqslant m$. Поэтому тригонометрический многочлен, стоящий в числителе дроби (16), имеет степень не выше n_j, а многочлен, стоящий в знаменателе, имеет степень не выше m. Отсюда и из (14) делаем вывод о том, что справедливо равенство (15). Тогда из (14)–(16) вытекает справедливость равенств (10)–(12). Теорема 3.4 доказана.

4. Существование нелинейных аппроксимаций Эрмита–Чебышёва

Теоремы 3.3 и 3.4 позволяют найти достаточные условия, при которых существуют нелинейные аппроксимации Эрмита–Чебышёва и описать их явный вид.

Теорема 4.1. *Пусть $n\geqslant\max\{m_j:1\leqslant j\leqslant k\}$, $m\neq 0$, а для системы $\mathbf{f^1}$ степенных рядов, ассоциированных с системой $\mathbf{f^{ch1}}$, выполняются условия* 1)–3) *теоремы* 3.3. *Тогда существуют нелинейные аппроксимации Эрмита–Чебышёва первого рода $\{\widehat{\pi}_j^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}})\}_{j=1}^k$ и для их знаменателя и числителей справедливы представления*

$$\widehat{Q}_m^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}})=\widehat{Q}_m(e^{i\arccos x};\mathbf{f^1})\,\overline{\widehat{Q}_m(e^{i\arccos x};\mathbf{f^1})},$$

$$\widehat{P}_j^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}})=\operatorname{Re}\left\{\widehat{P}_j(e^{i\arccos x};\mathbf{f^1})\,\overline{\widehat{Q}_m(e^{i\arccos x};\mathbf{f^1})}\right\},$$

где многочлены Эрмита–Якоби $\widehat{Q}_m(z;\mathbf{f^1})$, $\widehat{P}_j(z;\mathbf{f^1})$ совпадают с многочленами Эрмита–Паде $Q_m(z;\mathbf{f^1})$, $P_j(z;\mathbf{f^1})$ и в том случае, когда определитель $H_{n,\vec{m}}(\mathbf{f^1})\neq 0$, находятся по формулам (5), (6), *в которых* $\mathbf{f}=\mathbf{f^1}$.

Теорема 4.2. *Пусть $n\geqslant\max\{m_j:1\leqslant j\leqslant k\}$, $m\neq 0$, а для системы $\mathbf{f^2}$ степенных рядов, ассоциированных с системой $\mathbf{f^{ch2}}$, выполняются условия* 1)–3) *теоремы* 3.4. *Тогда существуют нелинейные аппроксимации Эрмита–Чебышёва второго рода $\{\widehat{\pi}_j^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}})\}_{j=1}^k$ и для их знаменателя и числителей справедливы представления*

$$\widehat{Q}_m^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}})=\widehat{Q}_m(e^{i\arccos x};\mathbf{f^2})\,\overline{\widehat{Q}_m(e^{i\arccos x};\mathbf{f^2})}, \tag{17}$$

$$\widehat{P}_j^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}})=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Im}\left\{\widehat{P}_j(e^{i\arccos x};\mathbf{f^2})\,\overline{\widehat{Q}_m(e^{i\arccos x};\mathbf{f^2})}\right\}, \tag{18}$$

где многочлены Эрмита–Якоби $\widehat{Q}_m(z;\mathbf{f^2})$, $\widehat{P}_j(z;\mathbf{f^2})$ совпадают с многочленами Эрмита–Паде $Q_m(z;\mathbf{f^2})$, $P_j(z;\mathbf{f^2})$ и в том случае, когда определитель $H_{n,\vec{m}}(\mathbf{f^2})\neq 0$ находятся по формулам (5), (6), *в которых* $\mathbf{f}=\mathbf{f^2}$.

Докажем теорему 4.2. Рассмотрим ассоциированную с системой $\mathbf{f^{ch2}}$ систему $\mathbf{f^{t2}}$. Поскольку выполняются условия теоремы 3.4, то существуют тригонометрические аппроксимации Эрмита–Якоби $\{\widehat{\pi}_j^{t2}(x;\mathbf{f^{t2}})\}_{j=1}^k$ и справедливы формулы (10)–(12). Заменим в этих равенствах x на $\arccos x$, а затем разделим почленно равенства (11) и (12) на $\sqrt{1-x^2}$. Поскольку на отрезке $[-1,1]$ справедливы тождества

$$f_j^{t2}(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}\,f_j^{ch2}(x),\ \ j=1,\dots,k,$$

то в результате получим

$$\widehat{Q}^{t}_{m}(\arccos x;\mathbf{f^{t2}}) = \widehat{Q}_{m}(e^{i\arccos x};\mathbf{f^{2}})\,\overline{\widehat{Q}_{m}(e^{i\arccos x};\mathbf{f^{2}})} = \sum_{l=0}^{m}\widehat{q}_{l}T_{l}(x),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\widehat{P}^{t}_{j}(\arccos x;\mathbf{f^{t2}}) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Im}\left\{\widehat{P}_{j}(e^{i\arccos x};\mathbf{f^{2}})\,\overline{\widehat{Q}_{m}(e^{i\arccos x};\mathbf{f^{2}})}\right\} = \sum_{l=0}^{n_j}\widehat{p}^{\,j}_{l}U_{l}(x),$$

$$f^{ch2}_{j}(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\widehat{\pi}^{t}_{j}(\arccos x;\mathbf{f^{t2}}) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty}\widehat{d}^{\,j}_{l}U_{l}(x).$$

Отсюда следует существование аппроксимаций Эрмита–Чебышёва $\{\widehat{\pi}^{ch2}_{j}(x;\mathbf{f^{ch2}})\}_{j=1}^{k}$ и справедливость равенств (17), (18). Теорема 4.2 доказана. Теорема 4.1 доказывается аналогично.

Замечание 4.3. *При* $k=1$ *теорема* 4.1 *доказана в* [2] *(без описания явного вида аппроксимаций Паде–Чебышёва). Утверждения теоремы* 4.2 *являются новыми и представляют самостоятельный интерес в том числе в случае* $k=1$*: нелинейные аппроксимации Паде–Чебышёва второго рода в такой же мере, как и нелинейные аппроксимации Паде–Чебышёва первого рода (см.* [27–30]*) могут быть востребованы в различных приложениях, а также при проведении научных и технических расчетов (подробнее см.* [2;31;32]*). Отметим также, что для нелинейных аппроксимаций Эрмита–Чебышёва второго рода задача нахождения условий их существования до настоящего времени не исследовалась.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках Государственной программы научных исследований на 2021–2025 годы.

Литература

1. *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988.

2. *Суетин С. П.* О существовании нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва для аналитических функций // Математические заметки. 2009. Т. 86, № 2. С. 290–303.

3. *Гончар А. А., Рахманов Е. А., Суетин С. П.* Аппроксимации Паде–Чебышёва для многозначных аналитических функций, вариация равновесной энергии и S-свойство стационарных компактов // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, № 6. С. 3–36.

4. *Бейкер мл. Дж., Грейвс-Моррис. П.* Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения. М.: Мир, 1986.

5. *Лабыч Ю. А., Старовойтов А. П.* Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье // Математический сб. 2009. Т. 200, № 7. С. 107–130.

6. *Geddes K. O.* Block structure in the Chebyshev–Padé table // SIAM J. Numer. Anal. 1981. Vol. 18, N 5. P. 844–861.

7. *Адуков В. М., Ибряева О. Л.* Асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде–Чебышёва для последней промежуточной строки. Рациональный случай // Вестник ЮУрГУ. Сер. Математика. Физика. Химия. 2005. Т. 6, № 6. С. 11–18.

8. *Ибряева О. Л.* Достаточное условие единственности линейной аппроксимации Паде–Чебышёва // Известия Челябинского научного центра. 2002. № 4. С. 1–5.

9. *Старовойтов А. П., Кечко Е. П., Оснач Т. М.* О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита–Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита–Чебышёва // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2023. № 2. С. 6–17.

10. *Старовойтов А. П., Кечко Е. П., Оснач Т. М.* Существование и единственность совместных аппроксимаций Эрмита–Фурье // Проблемы физики, математики и техники. 2023. № 2 (55). С. 68–73.

11. *Старовойтов А. П., Кругликов И. В., Оснач Т. М.* Рациональные аппроксимации степенных, тригонометрических рядов и рядов по многочленам Чебышёва // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2024. № 3. С. 6–21.

12. *Mason J. C., Crampton A.* Laurent–Padé approximants to four kinds of Chebyshev polynomial expansions. I. Maehly type approximants // Numer. Algorithms. 2005. Vol. 38. P. 3–18.

13. *Mason J. C., Crampton A.* Laurent–Padé approximants to four kinds of Chebyshev polynomial expansions. II. Clenshaw–Lord type approximants // Numer. Algorithms. 2005. Vol. 38. P. 19–29.

14. *Суетин С. П.* Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда // Успехи мат. наук. 2002. Т. 57, № 1. С. 45–142.

15. *Суетин С. П.* Вопросы сходимости аппроксимаций Паде–Фабера: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1981.

16. *Старовойтов А. П., Кругликов И. В.* Достаточные условия единственности и явный вид линейных аппроксимаций Эрмита–Чебышёва // Проблемы физики, математики и техники. 2025. № 1(62). С. 67–72.

17. *Hermite C.* Sur la fonction exponentielle. Paris: C.R. Akad. Sci., 1873. Vol. 77. P. 18–293.

18. *Старовойтов А. П., Рябченко Н. В.* О детерминантных представлениях многочленов Эрмита–Паде // Труды Московского математического общества. 2022. Т. 83, № 1. С. 17–35.

19. *Старовойтов А. П., Рябченко Н. В.* О единственности решений задач Эрмита–Паде // Весці Нацыянальнай акадэміі навук. Сер. фізіка-матэматычных навук. 2019. Т. 55, № 4. С. 445–456.

20. *Jacobi C.* Uber die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebrochne rationale Function // J. Reine Angew. Math. 1846. Vol. 30. P. 127–156.

21. *Аптекарев А. И., Буслаев В. И., Мартинес-Финкельштейн А., Суетин С. П.* Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, № 6 (402). С. 37–122.

22. *Оснач Т. М., Рябченко Н. В., Старовойтов А. П.* Аналог теоремы Якоби для одновременной эрмитовской интерполяции нескольких функций // Проблемы физики, математики и техники. 2023. № 1 (54). С. 89–92.

23. *Németh G., Páris G.* The Gibbs phenomenon in generalized Padé approximation // J. Math. Phys. 1985. Vol. 26, N 6. P. 1175–1178.

24. *De Bruin M. G.* Convergence of the Padé table for ${}_1F_1(1;c;x)$ // K. Nederl. Akad. Wetensch., Ser. A. 1976. Vol. 79. P. 408–418.

25. *Аптекарев А. И.* Об аппроксимациях Паде к набору $\{{}_1F_1(1,c;\lambda_i z)\}_{i=1}^k$ // Вестник МГУ. Сер. 1, Математика. Механика. 1981. № 2. С. 58–62.

26. *Старовойтов А. П.* Аппроксимации Эрмита–Паде функций Миттаг–Леффлера // Труды Математического института имени В. А. Стеклова РАН. 2018. Т. 301. С. 241–258.

27. *Andrianov I. V.* Application of Padé approximants in perturbation methods // Adv. in Mech. 1991. Vol. 14, N 2. P. 3–25.

28. *Andrianov I. V., Awrejcewicz J.* New trends in asymptotic approaches: summation and interpolation methods // Appl. Mech. Rev. 2001. Vol. 54, N 1. P. 69–92.

29. *Книжнерман Л. А.* Выделение полюсов потенциальных полей с помощью разложения в ряды Фурье–Чебышёва // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1984. № 11. С. 119–123.

30. *Ермохин К. М.* Продолжение геофизических полей в область источников аномалий методом аппроксимации цепными дробями // Геофизика. 2007. № 1. С. 51–55.

31. *Прохоров Г. В., Колбеев В. В., Желнов К. И., Леденев М. А.* Математический пакет Maple V Release 4: Руководство пользователя. Калуга: Облиздат, 1998.

32. *Tee T. W., Trefethen L. N.* A rational spectral collocation method with adaptively transformed Chebyshev grid points // SIAM J. Sci. Comput. 2006. Vol. 28, N 5. P. 1798–1811.

References

1. Nikishin E. M., Sorokin V. N. *Rational approximations and orthogonality*. Moscow, Nauka, 1988 (in Russian).

2. Suetin S. P. On the existence of nonlinear Padé–Chebyshev approximations for analytical functions. *Mathematical Notes,* 2009, vol. 86, iss. 2, pp. 290–303 (in Russian).

3. Gonchar A. A., Rakhmanov E. A., Suetin S. P. Padé–Chebyshev approximations for multivalued analytical functions, equilibrium energy variation and the S-property of stationary compacts. *Russian Mathematical Surveys,* 2011, vol. 66, iss. 6, pp. 3–36 (in Russian).

4. Baker Jr. G., Graves-Morris P. *Padé Approximations. 1. Fundamentals of theory. 2. Generalizations and applications*. Moscow, Mir, 1986 (in Russian).

5. Labych Yu. A., Starovoitov A. P. Trigonometric Padé approximations of functions with regularly decreasing Fourier coefficients. *Sbornik: Mathematics,* 2009, vol. 200, iss. 7, pp. 107–130 (in Russian).

6. Geddes K. O. Block structure in the Chebyshev–Padé table. *SIAM J. Numer. Anal.,* 1981, vol. 18, iss. 5, pp. 844–861.

7. Adukov V. M., Ibryaeva O. L. The asymptotic behavior of the denominators of the Padé–Chebyshev approximations for the last intermediate row. The rational case. *Bulletin of the South Ural State University, series «Mathematics. Mechanics. Chemistry»,* 2005, vol. 6, iss. 6, pp. 11–18 (in Russian).

8. Ibryaeva O. L. Sufficient condition for the uniqueness of the linear Padé–Chebyshev approximation. *News of the Chelyabinsk Scientific Center,* 2002, iss. 4, pp. 1–5 (in Russian).

9. Starovoitov A. P., Kechko E. P., Osnach T. M. On the existence of trigonometric Hermite–Jacobi approximations and nonlinear Hermite–Chebyshev approximations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics,* 2023, iss. 2, pp. 6–17 (in Russian).

10. Starovoitov A. P., Kechko E. P., Osnach T. M. Existence and uniqueness of consistent Hermite–Fourier approximations. *Problems of Physics, Mathematics and Technics,* 2023, iss. 2 (55), pp. 68–73 (in Russian).

11. Starovoitov A. P., Kruglikov I. V., Osnach T. M. Rational approximations of power series, trigonometric series and series of Chebyshev polynomials. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics,* 2025, vol. 61, iss. 3, pp. 6–21 (in Russian).

12. Mason J. C., Crampton A. Laurent–Padé approximants to four kinds of Chebyshev polynomial expansions. I. Maehly type approximants. *Numer. Algorithms,* 2005, vol. 38, pp. 3–18.

13. Mason J. C., Crampton A. Laurent–Padé approximants to four kinds of Chebyshev polynomial expansions. II. Clenshaw–Lord type approximants. *Numer. Algorithms,* 2005, vol. 38, pp. 19–29.

14. Suetin S. P. Padé approximations and effective analytical continuation of the power series. *Russian Mathematical Surveys,* 2002, vol. 57, iss. 1, pp. 45–142 (in Russian).

15. Suetin S. P. *Questions of convergence of the Padé–Faber approximations.* Ph. D. thesis. Moscow: MGU, 1981 (in Russian).

16. Starovoitov A. P., Kruglikov I. V. Uniqueness and explicit form of linear Hermite–Chebyshev approximations. *Problems of Physics, Mathematics and Technics,* 2025, iss. 1(62), pp. 67–72 (in Russian).

17. Hermite C. *Sur la fonction exponentielle*. Paris, C. R. Akad. Sci., 1873, vol. 77, pp. 18–293.

18. Starovoitov A. P., Ryabchenko N. V. On determinant representations of Hermite–Padé polynomials. *Transactions of the Moscow Mathematical Society,* 2022, vol. 83, iss. 1, pp. 17–35 (in Russian).

19. Starovoitov A. P., Ryabchenko N. V. Uniqueness of the solutions of the Hermite–Padé problems. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series,* 2019, vol. 55, iss. 4, pp. 445–456 (in Russian).

20. Jacobi C. Uber die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebrochne rationale Function. *J. Reine Angew. Math.,* 1846, vol. 30, pp. 127–156.

21. Aptekarev A. I., Buslaev V. I., Martinez–Finkelshtein A., Suetin S. P. Padé approximants, continued fractions, and orthogonal polynomials. *Russian Mathematical Surveys,* 2011, vol. 66, iss. 6 (402), pp. 37–122 (in Russian).

22. Osnach T. M., Ryabchenko N. V., Starovoitov A. P. An analogue of Jacobi's theorem for simultaneous Hermitian interpolation of several functions. *Problems of Physics, Mathematics and Technics,* 2023, iss. 1 (54), pp. 89–92 (in Russian).

23. Németh G., Páris G. The Gibbs phenomenon in generalized Padé approximation. *J. Math. Phys.,* 1985, vol. 26, iss. 6, pp. 1175–1178.

24. De Bruin M. G. Convergence of the Padé table for ${}_1F_1(1;c;x)$. *K. Nederl. Akad. Wetensch., Ser. A.,* 1976, vol. 79, pp. 408–418.

25. Aptekarev A. I. On approximations of the Padé to the set $\{{}_1F_1(1,c;\lambda_i z)\}_{i=1}^{k}$. *Moscow University Mathematics Bulletin, Moscow University Mechanics Bulletin,* 1981, iss. 2, pp. 58–62 (in Russian).

26. Starovoitov A. P. Hermite–Padé approximations of Mittag–Leffler functions. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics,* 2018, vol. 301, pp. 241–258 (in Russian).

27. Andrianov I. V. Application of Padé approximants in perturbation methods. *Adv. in Mech.,* 1991, vol. 14, iss. 2, pp. 3–25.

28. Andrianov I. V., Awrejcewicz J. New trends in asymptotic approaches: summation and interpolation methods. *Appl. Mech. Rev.,* 2001, vol. 54, iss. 1, pp. 69–92.

29. Knizhnerman L. A. Identification of potential field poles using Fourier–Chebyshev series expansion. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Earth Physics Series,* 1984, iss. 11, pp. 119–123 (in Russian).

30. Ermokhin K. M. Continuation of geophysical fields into the area of anomaly sources by the method of approximation by chain fractions. *Geophysics,* 2007, iss. 1, pp. 51–55 (in Russian).

31. Prokhorov G. V., Kolbeev V. V., Zhelnov K. I., Ledenev M. A. *Maple V Release 4 Math Package: User's Guide*. Kaluga: Oblizdat, 1998 (in Russian).

32. Tee T. W., Trefethen L. N. A rational spectral collocation method with adaptively transformed Chebyshev grid points. *SIAM J. Sci. Comput.,* 2006, vol. 28, iss. 5, pp. 1798–1811.