Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Том 33. № 1. С. 58–74

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

УДК 512.542

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ГРАДУИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ

А. Б. Антоневич[1], **М. Д. Ёжикова**[2]

[1]*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*
[2]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*
e-mail: antonevich@bsu.by, maya.yo1989banan@gmail.com

Поступила: 19.03.2025 **Исправлена:** 19.05.2025 **Принята:** 23.05.2025

Ключевые слова: градуированное множество, неархимедова метрика, sharp-топология, градуированная группа, градуированное векторное пространство, p-адический анализ, полином Тейлора, асимптотическая сходимость.

Аннотация. Группа L называется градуированной, если она представлена в виде объединения убывающей последовательности подгрупп L_m. Предложена общая схема введения так называемой sharp-метрики на таких группах, относительно которой алгебраические операции непрерывны и которая является неархимедовой. Показано, что такая группа всюду плотно вкладывается в полную группу, элементами которой являются ряды специального вида из элементов L. Аналогичные конструкции рассмотрены для градуированных колец и градуированных векторных пространств.
В качестве примеров показано, что в конкретных частных случаях применение описанной конструкции приводит к построению p-адических чисел и к построению рядов Тейлора и Лорана.

TOPOLOGICAL STRUCTURES ON GRADED SETS

A. B. Antonevich[1], **M. D. Yozhikova**[2]

[1]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
[2]*Belarusian State University, Minsk, Belarus*
e-mail: antonevich@bsu.by, maya.yo1989banan@gmail.com

Received: 19.03.2025 **Revised:** 19.05.2025 **Accepted:** 23.05.2025

Keywords: graded set, non-archimedean metric, sharp topology, graded group, graded vector space, p-adic analysis, Taylor polynomial, asymptotic convergence.

Abstract. A group L is called graded if it is represented as the union of a decreasing sequence of subgroups L_m. A general scheme for introducing the so-called sharp metric on such groups is proposed, with respect to which the algebraic operations are continuous and which is non-archimedean. It is shown that such a group is densely embedded in a complete group whose elements are series of a special type composed of elements of L. Similar constructions are considered for graded rings and graded vector spaces.
As examples, it is shown that in concrete special cases, the application of the described construction leads to the construction of p-adic numbers and to the construction of Taylor and Laurent series.

Введение

В анализе чаще всего используются топологические векторные пространства [1], в которых, по определению, топология согласована с алгебраическими операциями, т. е. сложение и умножение на число являются непрерывными в заданной топологии. Вместе с тем в ряде исследований встречаются *градуированные векторные пространства*. Это векторные пространства L, в которых задана двусторонняя последовательность векторных подпространств L_m, $m \in \mathbb{Z}$, такая, что

$$L_m \supset L_{m+1},\ L = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} L_m. \tag{1}$$

На таких пространствах обычно нет топологии, согласованной со структурой векторного пространства, и к ним не может быть применена теория топологических векторных пространств.

Градуированные векторные пространства возникают при построении асимптотических разложений, исследовании уравнений с малым параметром [2; 3], в теории так называемых новых обобщенных функций (мнемофункций) [4] и других вопросах. При исследовании таких пространств обычно используется на только градуировка, но и более богатая структура *векторного пространства с градуированной топологией* – градуированного векторного пространства, в котором на каждом из выделенных подпространств L_m задана своя топология, согласованная с алгебраическими операциями.

Аналогично, в ряде вопросов возникают градуированные группы. Коммутативную группу L будем называть *градуированной*, если задана двусторонняя последовательность подгрупп L_m, $m \in \mathbb{Z}$, такая, что выполнено (1). В частности, градуированные векторные пространства являются градуированными группами.

В связи с появлением пространств с такой структурой в разных вопросах естественно провести систематическое исследование градуированных групп и градуированных пространств с целью приложений этой теории к решению конкретных задач.

В первой части данной работы предложен способ задания неархимедовой метрики на градуированных группах. Такой способ задания метрики на одной из алгебр мнемофункций был использован в [5] и, следуя терминологии из [5], будем называть введенные метрики sharp-метриками. Описано пополнение градуированной группы относительно введенной метрики. Показано, что в градуированных векторных пространствах операция умножения на число является разрывной в sharp-метрике.

Во второй части приведены примеры классических утверждений из анализа, в которых обычно не подчеркивается, что в них использована структура градуированного пространства, но они являются частыми случаями общих утверждений о градуированных группах или пространствах. Также отмечены классические утверждения, которые используют не только градуировку, но и структуру пространства с градуированной топологией.

1. НЕАРХИМЕДОВЫ МЕТРИКИ НА ГРАДУИРОВАННЫХ ГРУППАХ

1.1. Sharp-метрики на пространствах последовательностей. Множество H будем называть *градуированным*, если в нем выделена последовательность подмножеств H_m, $m \in \mathbb{Z}$, такая, что

$$H_m \supset H_{m+1},\ H = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} H_m.$$

Градуировка на множестве определяет некоторую иерархию элементов множества, похожую на отношение порядка – считается, что элемент из H_m в некотором смысле меньше элементов из $H \setminus H_m$.

Выделим градуированные множества специального вида. Пусть задана двусторонняя последовательность множеств $E_k, k \in \mathbb{Z}$, каждое из которых содержит не менее двух точек, и в каждом выделена отмеченная точка, которую будем обозначать через 0. Декартово произведение

$$\widehat{H} = \prod_{k\in\mathbb{Z}} E_k, \tag{2}$$

есть множество двусторонних последовательностей ξ вида

$$\xi = (\ldots, \xi_{k-1}, \xi_k, \xi_{k+1}, \ldots),\ \xi_k \in E_k.$$

Декартово произведение счетного семейства множеств $H_m = \prod\limits_{k\geqslant m} E_k$ будем рассматривать как подмножество в $\widehat{H}$, отождествляя его с множеством последовательностей ξ, у которых $\xi_k = 0$ при $k < m$, т. е. вида

$$\xi = (0, \ldots, 0, \xi_m, \xi_{m+1}, \ldots),\ \xi_k \in E_k, \tag{3}$$

Элементы ξ_k последовательности (3) будем называть координатами точки ξ. Последовательность, все члены которой есть отмеченная точка 0, будем обозначать через 0.

Интересующее нас градуированное множество, построенное с помощью заданной последовательности множеств E_k, есть

$$H = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} H_m \subset \widehat{H}. \tag{4}$$

Заметим, что здесь для градуировки выполнено условие

$$\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} H_m = \{0\}.$$

Специальный вид рассматривамого градуированного множества проявляется в том, что здесь не только $H_k \supset H_{k+1}$, но имеется и более сильная связь этих множеств:

$$H_k = E_k \times H_{k+1} \tag{5}$$

и вложение $H_{k+1} \to H_k$ действует по формуле

$$H_{k+1} \ni \xi \to (0,\xi) \in E_k \times H_{k+1}.$$

Порядком отличия элемента $\xi \in H$ с координатами ξ_k от элемента η с координатами η_k будем называть число

$$\nu(\xi,\eta) = \begin{cases} \min\{k : \xi_k \neq \eta_k\}, & \xi \neq \eta; \\ +\infty, & \xi = \eta. \end{cases}$$

Теорема 1.1. *Пусть H есть градуированное множество вида* (4).

1. *Формула*

$$\rho(\xi,\eta) = 2^{-\nu(\xi,\eta)} \tag{6}$$

задает sharp-метрику на H, для которой выполнено усиленное неравенство треугольника:

$$\rho(\xi,\eta) \leqslant \max\{\rho(\xi,\zeta),\rho(\zeta,\eta)\}\ \forall \xi,\eta,\zeta. \tag{7}$$

2. *Пространство H с метрикой* (6) *является полным. Для любой последовательности*

$$\xi = (0,\dots,0,\xi_m,\xi_{m+1},\dots) \in H$$

последовательность из финитных последовательностей

$$\xi^n = (0,\dots,0,\xi_m,\xi_{m+1},\dots,\xi_n,0,\dots) \tag{8}$$

сходится к ξ.

3. *Замкнутый шар $B[0,2^{-m}]$ совпадает с H_m и такие подмножества образуют базу окрестностей точки 0 в заданной топологии.*

Доказательство. 1. Равенство $\rho(\xi,\eta) = 0$ выпонено только при $\xi = \eta$.

Пусть $\nu(\xi,\eta) = m,\ \nu(\eta,\zeta) = n$. Это означает, что $\xi_k = \eta_k$ при $k < m$ и $\eta_k = \zeta_k$ при $k < n$. Поэтому $\xi_k = \zeta_k$ при $k < \min\{m,n\}$, откуда получаем, что

$$\nu(\xi,\eta) \geqslant \min\{m,n\} = \min\{\nu(\xi,\eta),\nu(\eta,\zeta)\}.$$

Переходя к отрицательным степеням двойки, получаем (7).

2. Пусть $\xi^n = (0,\dots,\xi^n_k,\xi^n_{k+1},...)$ есть последовательность Коши в пространстве H. Тогда для любого $\varepsilon = 2^{-m}$ существует такое N, что при $n \geqslant N, j \geqslant N$ выполнено $\rho(\xi^n,\xi^j) \leqslant 2^{-m}$. Согласно определению метрики получаем, что при $k < m$ соответствующие координаты совпадают: $\xi^n_k = \xi^j_k := x^0_k$. Тем самым определена последовательность $\xi^0_k \in H$, которая и является пределом последовательности ξ^n.

3. Непосредственно следует из определений. □

Замечание 1. *Топология, порожденная заданной метрикой, на каждом H_m совпадает с топологией декартова произведения E_k, $k \geqslant m$, как топологических пространств с дискретной топологией. В частности, каждое E_k естественным образом вкладывается в H и метрика* (6) *порождает на E_k дискретную топологию.*

При этом на всем пространстве H топология τ_{sh}, порожденная метрикой (6), сильнее топологии, индуцированной топологией декартова произведения (2) пространств с дискретной топологией. Действительно, в каждом E_k выберем точку $e_k \neq 0$ и зададим последовательность

$$\xi_k^n = \begin{cases} e_{-n}, & k = -n, \\ 0, & k \neq -n \end{cases}.$$

Эта последовательность сходится к 0 в топологии декартова произведения $\widehat{H}$ множеств с дискретной топологией, но не сходится в заданной метрике.

Замечание 2. *При любом $p > 1$ формула $\rho_p(\xi,\eta) = p^{-\nu(\xi,\eta)}$ также задает неархимедову метрику на H, свойства этих метрик при разных p аналогичны.*

Метрика, для которой выполнено неравенство (7), называется *неархимедовой* или *ультраметрикой*. Как известно ([6;7]), геометрия пространств с неархимедевой метрикой обладает свойствами, нетипичными для евклидовых пространств. Для примера отметим следующие.

Любая точка шара в пространстве с неархимедовой метрикой является его центром.

Каждый шар в пространстве с неархимедовой метрикой распадается на непересекающиеся шары заданного меньшего радиуса.

1.2. Градуированные группы и sharp-метрики на них. Покажем, что градуировка на множествах с алгебраической структурой позволяет задать на них sharp-метрику.

Напомним некоторые известные факты и обозначения.

Пусть задана последовательность коммутативных групп G_k, $k \in \mathbb{Z}$. Через $\prod\limits_{k\in\mathbb{Z}} G_k$ обозначается *прямое декартово произведение* групп G_k, т. е. множество последовательностей $\{g_k\}, g_k \in G_k$, с операцией покоординатного сложения.

Прямой суммой групп G_k называется множество $\bigoplus G_k$, состоящее из последовательностей $\{g_k\}, g_k \in G_k$, у которых только конечное множество элементов g_k отлично от нуля. Это множество является подгруппой в $\prod\limits_{k\in\mathbb{Z}} G_k$.

Пусть G – коммутативная группа и G_0 – ее подгруппа. *Классом смежности* элемента $x \in G$ называется множество

$$[x] = \{y = x + x_0 : x_0 \in G_0\}.$$

На множестве классов смежности корректно определена операция сложения, это множество называется факторгруппой G по G_0 и обозначается G/G_0.

Фундаментальной областью при действии G_0 на G называется подмножество $E \subset G$, содержащее по одному элементу из каждого класса эквивалентности.

По определению фундаментальной области, отображение

$$E \ni x \to [x] \in G/G_0$$

является биекцией, пусть $\varphi : G/G_0 \to E$ есть обратное отображение. Зададим биекцию

$$G \ni x \to (\varphi([x]), x - \varphi([x])) \in E \times G_0$$

и разложение $x = \varphi([x]) + \{x - \varphi([x])\}$.

Отметим, что эта биекция зависит от выбора фундаментальной области и в общем случае не является изоморфизмом групп.

В особом случае, когда в G существует подгруппа E, изоморфная G/G_0, эта подгруппа является фундаментальной областью и при таком выборе фундаментальной области сложение в G переходит в покоординатное сложение в прямой сумме.

Перейдем к рассмотрению градуированных групп. Как было сказано выше, коммутативную группу L будем называть *градуированной группой*, если задана двусторонняя последовательность подгрупп $L_m, m \in \mathbb{Z}$, такая, что $L_m \supset L_{m+1}$ и $L = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}} L_m$.

Выделим случай, когда выполнено условие

$$L_\infty := \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} L_m = \{0\}. \tag{9}$$

Как было отмечено выше, в случае градуированной группы существуют биекции $L_m \sim \sim L_m/L_{m+1} \times L_{m+1}$, т. е. выполнено условие (5) и на ней определен порядок отличия элементов $\nu(x,y)$, который не зависит от выбора биекции и может быть введен непосредственно с использованием алгебраической структуры по формуле

$$\nu(x,y) = \min\{m : x-y \in L_m\} = \nu(x-y,0).$$

При этом считаем, что $\nu(x,y) = +\infty$, если

$$x-y \in L_\infty = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} L_m.$$

В частности, $\nu(x,x) = +\infty$.

Поэтому при выполнении условия (9) формула

$$\rho_L(x,y) = p^{-\nu(x-y,0)} \tag{10}$$

задает метрику на L и структура группы приводит к появлению дополнительных свойств sharp-метрики.

Функция $q : L \to \mathbb{R}^+$ на группе L, удовлетворяющая условиям

$$q(x+y) \leqslant q(x)+q(y);\ q(0) = 0 \leftrightsquigarrow x = 0;$$

называется *нормированием.* Чтобы подчеркнуть аналогию с нормой, иногда используют обозначение $\|x\| := q(x)$. Однако отметим, что, в случае, когда L является также векторным пространством, нормирование не является нормой.

В случае градуированной группы функция

$$q(x) = \rho_L(x,0) = p^{-\nu(x,0)}$$

является нормированием, для которого выполняется *усиленное неравенство треугольника*:

$$q(x+y) \leqslant \max\{q(x),q(y)\}.$$

Из общих свойств нормирования следует

Лемма 1. *В градуированной группе L операции сложения и вычитания непрерывны в топологии, порожденной sharp-метрикой.*

Подгруппы L_m образуют базу окрестностей точки 0, а множества вида $x+L_m$ образуют базу окрестностей точки x.

1.3. Разложение элементов градуированной группы в ряды. Градуированная группа L с введенной метрикой в общем случае является неполным метрическим пространством. Пополнение этого пространства также является градуированной группой, получим описание такого пополнения.

Для каждого k выберем фундаментальную область $E_k \subset L_k$ при действии L_{k+1} на L_k.

Пусть H есть градуированное множество, построенное по последовательности фундаментальных областей E_k по описанному выше правилу, т. е. $H = \bigcup\limits_m H_m$, где H_m есть множество всех последовательностей вида

$$\xi = (0,\dots,0,\eta_m,\eta_{m+1},\dots),\ \ \eta_k \in E_k.$$

На этом множестве определена sharp-метрика ρ_H, относительно которой H является полным метрическим пространством. Все элементы последовательности ξ принадлежат группе L, что позволяет отождествить последовательность из H с (формальным) рядом из элементов группы L и считать, что

$$\xi = \sum_m^\infty \eta_k,\ \ \eta_k \in E_k \subset L_k \subset L.$$

При этом финитным последовательностям вида (8) соответствуют частичные суммы

$$S_n = \sum_m^n \eta_k$$

ряда, являющиеся элементами из L. Согласно теореме 1.1 любой формальный ряд такого вида сходится в H с sharp-метрикой.

Пусть $\varphi_k : L_k/L_{k+1} \to E_k$ есть биекция, определяемая выбором фундаментальной области. Напомним, что с ее помощью строится биекция $\psi_k : L_k \to E_k \times L_{k+1}$, действующая на $x \in L_k$ по формуле

$$\psi_k(x) = (\varphi_k([x]_k), l_{k+1}(x)),$$

где $l_{k+1}(x) = x - \varphi_k([x]_k) \in L_{k+1}$.

Если $x \in L$, то $x \in L_m$ при некотором m, и тогда биекция ψ_m ставит в соответствие элементу $x \in L_m$ пару $(\varphi_m([x]_m), l_{m+1}(x))$, где $[x]_m \in G_m$, $\varphi_m([x]_m) \in E_m$, $l_{m+1}(x) = x - \varphi_m([x]_m) \in L_{m+1}$.

Далее, биекция ψ_{m+1} между L_{m+1} и декартовым произведением $E_{m+1} \times L_{m+2}$ ставит в соответствие элементу $l_{m+1}(x)$ пару $(\varphi_{m+1}([l_{m+1}(x)]_{m+1}), l_{m+2}(x))$, где $l_{m+2}(x) = l_{m+1}(x) - \varphi_{m+1}([l_{m+1}(x)]_{m+1}) \in L_{m+2}$. Продолжая описанный процесс, получаем последовательность $\pi(x) := (0, \ldots, 0, x_m, x_{m+1}, \ldots)$, $x_k \in E_k$, принадлежащую H_m.

Согласно сказанному выше, при $x \in L_m$ будем отождествлять последовательность $\pi(x)$ с рядом из элементов группы L и считать, что

$$\pi(x) = \sum_m^\infty x_k, \quad x_k \in E_k \subset L_k \subset L. \tag{11}$$

Теорема 1.2. *Пусть L есть градуированная группа, в которой выполнено условие* (9) *и задана sharp-метрика ρ_L. Тогда множество H всех рядов вида* (11) *с sharp-метрикой ρ_H есть пополнение L как топологической группы.*

Доказательство. То, что множество H всех рядов вида (11) с sharp-метрикой ρ_H является полным метрическим пространством и в нем любой ряд вида (11) сходится следует из теоремы 1.1.

Покажем, что построенное отображение $\pi : L \to H$ является изометрическим вложением и образ $\pi(L)$ есть всюду плотное подмножество в H, т. е. H есть пополнение L как метрического пространства. Если $\pi(x) = \pi(y)$, то $x - y \in L_k$ при всех k, т. е. $x - y \in L_\infty$. Поэтому в силу условия (9) отображение π инъективно, т. е. является вложением.

Согласно построению, если $x \in L_m \setminus L_{m+1}$, то при представлении (11) получаем, что $x_m \neq 0$. Отсюда следует, что

$$\rho_L(x, y) = \rho_H(\pi(x), \pi(y)),$$

т. е. вложение π является изометрическим.

Множество конечных сумм

$$x = \sum_m^N \eta_k, \eta_k \in E_k \subset L_k \subset L,$$

принадлежит L и всюду плотно в H. Для таких x по построению получаем, что $\pi(x) = x$, откуда следует, что образ $\pi(L)$ всюду плотен в H.

Опишем операцию сложения $\widehat{+}$ на множестве H, порожденную сложением в L, при которой построенное отображение $\pi : L \to H$ является непрерывным изометрическим гомоморфизмом групп. Пусть

$$\xi = \sum_{k=m}^\infty x_k \in H, \eta = \sum_{k=m}^\infty y_k \in H. \tag{12}$$

На подмножестве $\pi(L)$ операция сложения рядов $\widehat{+}$ определяется исходя из равенства

$$\pi(x) \,\widehat{+}\, \psi(y) := \pi(x + y).$$

Покажем, что эта операция продолжается до операции сложения рядов из H.

Заметим, что частичные суммы этих рядов

$$X^n = \sum_{k=m}^n x_k, \; Y^n = \sum_{k=m}^n y_k$$

являются элементами из L.

Если x и y из L и $\pi(x)=\xi, \pi(y)=\eta$, в силу непрерывности сложения получаем, что

$$\xi \widehat{+} \eta = \lim_{n\to\infty} \pi(X^n + Y^n). \tag{13}$$

Суммы в правой части (13) определены в случае произвольных рядов из H, поскольку частичные суммы рядов являются элементами из L. Покажем, что предел в правой части (13) существует при всех ξ и η из H и эта формула задает операцию сложения $\widehat{+}$ в H.

Результат почленного сложения

$$S_n := X^n + Y^n = \sum_{k=m}^{n} (x_k + y_k)$$

не является элементом из H, так как может оказаться, что $x_k + y_k \notin E_k$.

Поэтому, чтобы получить явное описание операции $\widehat{+}$ на конечных суммах, нужно найти $\pi(S_n)$, т. е. построить разложение

$$S^n = \sum_k z_k^n, \;\; z_k^n \in E_k.$$

Элемент $x_m + y_m$ принадлежит L_m и представляется в виде $x_m + y_m = \eta_m + l_{m+1}$, где $\eta_m \in E_m$, $l_{m+1} \in L_{m+1}$. Полагаем $z_m^n = \eta_m$, а слагаемое l_{m+1} переносим в следующий разряд.

Сумма $x_{m+1} + y_{m+1} + l_{m+1} \in L_{m+1}$ представляется в виде $x_{m+1} + y_{m+1} + l_{m+1} = \eta_{m+1} + l_{m+2}$, где $\eta_{m+1} \in E_{m+1}$, $l_{m+2} \in L_{m+2}$. Полагаем $z_{m+1}^n = \eta_{m+1}$, а слагаемое l_{m+2} переносим в следующий разряд.

Далее сумма $x_{m+2} + y_{m+2} + l_{m+2} \in L_{m+2}$ представляется в виде $x_{m+2} + y_{m+2} + l_{m+2} = \eta_{m+2} + l_{m+3}$, где $\eta_{m+2} \in E_{m+2}$, $l_{m+3} \in L_{m+3}$. Полагаем $z_{m+2}^n = \eta_{m+2}$, а слагаемое l_{m+3} переносим в следующий разряд. В результате получаем представление

$$S_n = \sum_{k=m}^{\infty} z_k^n, \qquad z_k^n \in E_k.$$

Аналогично получаем, что

$$S_{n+j} = \sum_{k=m}^{\infty} z_k^{n+j}, \qquad z_k^{n+j} \in E_k.$$

Поскольку

$$S_{n+j} - S_n = \sum_{n+1}^{n+j} (x_k + y_k) \in L_{n+1},$$

при переходе от S_n к S_{n+j} в полученном представлении изменяются только слагаемые с номерами $k > n$, т. е. $z_k^{n+j} = z_k^n := z_k$ при $n \geqslant k$. Тем самым определена последовательность $z_k \in E_k$ и из сказанного следует, что при $n \to \infty$ последовательность $\pi(S_n)$ сходится в смысле sharp-метрики к ряду $z = \sum_m^\infty z_k$, т. е. $\xi \widehat{+} \eta = z \in H_m$. Таким образом операция $\widehat{+}$ задана корректно, множества H_m являются подгруппами в H при введенной операции и, следовательно, H является градуированной группой. □

Замечание 3. *Ввиду биекции между E_k и $G_k = L_k/L_{k+1}$ иногда вместо последовательности, элементы которой принадлежат E_k, удобнее использовать последовательность из соответствующих элементов факторгрупп G_k. При такой реализации множества H на нем определена операция покоординатного сложения, относительно которой H является группой, однако в общем случае при отображении π сложение в L не переходит в покоординатное сложение.*

Особым является случай, когда при всех k группа L_k разлагается в прямую сумму своих подгрупп: $L_k = E_k \oplus L_{k+1}$. Тогда подгруппа E_k является фундаментальной областью и при таком выборе фундаментальных областей сложение $\widehat{+}$ совпадает с покоординатным сложением в H.

Замечание 4. *Если $L_\infty \neq \{0\}$, то фактор-группа L/L_∞ градуирована последовательностью факторгрупп L_m/L_∞, для такой градуировки выполнено условие вида* (9) *и для факторгруппы выполнены утверждения, полученные с использованием этого условия.*

Если $L_\infty \neq \{0\}$, то формула (10) задает полуметрику на L и при отображении π из равенств $\pi(x) = \pi(y)$ следует, что $x - y \in L_\infty$. Аналогично, в группе L остальные равенства также выполняются «с точностью до элемента из L_∞». В частности, у последовательности частичных сумм заданного ряда существует много разных пределов и разность двух таких пределов принадлежит L_∞.

В ряде примеров используются группы, градуированные односторонней последовательностью подгрупп, т. е. имеющие вид

$$L = \bigcup_{0}^{+\infty} L_m,$$

где $L_m \supset L_{m+1}$ и $L = L_0$. Очевидно, что полученные утверждения с соответствующей корректировкой справедливы и в такой ситуации.

1.4. Sharp-метрики на градуированных кольцах и векторных пространствах. Пусть L – кольцо, аддитивная группа которого градуирована последовательностью подгрупп L_m, и пусть $q(x)$ есть нормирование, порожденное такой градуировкай.

Кольцо L называется *градуированнным последовательностью подгрупп* L_m, если выполнено условие

$$q(xy) \leqslant q(x)q(y).$$

Из этого условия следует, что операция умножения в L непрерывна относительно sharp-метрики.

Кроме того, если $x, y \in L_m$, то произведение xy попадает в подгруппу L_{2m}. При $m \geqslant 0$ имеем $L_{2m} \subset L_m$ и подгруппа L_m является подкольцом в L. А при отрицательном m подгруппа L_{2m} шире чем L_m и L_m не является подкольцом.

Аналогично случаю операции сложения, операция умножения в L порождает операцию умножения в H, действующую на элементы (12) по формуле

$$\xi \mathbin{\widehat{\times}} \eta = \lim_{n\to\infty} \pi(X^n Y^n).$$

Как и в случае сложения, для получения более явного описания этой операции следует найти $\pi(X^n Y^n)$, т. е. построить разложение произведения

$$X^n Y^n = \sum_k z_k^n, \;\; z_k^n \in E_k.$$

Поскольку

$$X^n Y^n = \sum x_k \sum y_j = \sum_{l=2m}^{2n} \Big(\sum_{k+j=l} x_k y_j \Big), x_k y_j \in L_l,$$

аналогично случаю сложения получаем правило вычисления элементов z_k^n, причем при фиксированном k с ростом n также происходит стабилизация элементов z_k^n. В результате получаем утверждение.

Теорема 1.3. *Если L есть градуированное кольцо, то операция умножения в L порождает операцию умножения $\widehat{\times}$ на градуированной группе H, это множество является топологическим кольцом относительно введенных операций $\widehat{+}$ и $\widehat{\times}$ и является пополнением исходного градуированного кольца L.*

Векторное пространство L над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ называется градуированным, если задана двусторонняя последовательность подпространств L_m, $m \in \mathbb{Z}$, таких, что $L_m \supset L_{m+1}$ и $L = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}} L_m$.

Такое векторное пространство является коммутативной группой по сложению и к нему применимы описанные конструкции и выполнены полученные выше утверждения. В частности, определен порядок $\nu(x,y)$ отличия элементов x и y и формула $\rho_L(x,y) = p^{-\nu(x,y)}$ задает sharp-метрику или полуметрику на L. Здесь появляется дополнительное свойство этой метрики: если число $\lambda \neq 0$, то $\rho_L(\lambda x, \lambda y) = \rho_L(x,y)$.

Как показано выше, задание для каждой фактор-группы $G_k = L_k/L_{k+1}$ биекций с подмножеством E_k в L_k позволяет построить вложение градуированной группы в соответствующее пространство H, для которого выполнены утверждения из теоремы 1.2. В случае векторных пространств факторгруппа $G_k = L_k/L_{k+1}$ является векторным пространством, которое может быть линейно вложено в L_k как векторное подпространство E_k, дополнительное к L_k. При таком вложении имеет место разложение $L_k \sim E_k \oplus L_{k+1}$ в прямую сумму векторных подпространств, что приводит к выполнению дополнительных свойств вложения π.

Теорема 1.4. *Пусть L есть градуированное векторное пространство, выполнено условие* (9)*, для каждого L_k задано разложение векторных пространств $L_k = E_k \oplus L_{k+1}$ в прямую суммы*

векторных пространств и H есть векторное пространство, состоящее из всех (формальных) рядов вида (11), *с операциями почленного сложения и умножения на число.*

1. *Пространство H является градуированным векторным пространством, полным относительно соответствующей sharp-метрики, в котором операция сложения непрерывна.*

2. *Произведение λx непрерывно зависит от x при фиксированном λ, но нет непрерывной зависимости этого произведения от λ и, следовательно, градуированное векторное пространство H с sharp-топологией не является топологическим векторным пространством.*

3. *Построенное выше отображение $\pi : L \to \widehat{H}$ является линейным вложением, сохраняющим соответствующие sharp-метрики, что позволяет отождествлять L с векторным подпространством $\pi(L)$, всюду плотным в H, и следовательно, H есть пополнение L.*

Доказательство. 1. Это общее свойство пространств H.

2. Пусть $x^n \to x^0$ в H. Если $\lambda \neq 0$, то $\rho_H(\lambda x^n, \lambda x^0) = \rho_H(x^n, x^0) \to 0$. Если $\lambda = 0$, то сходимость очевидна.

Пусть $\lambda_n \to \lambda_0, \lambda_n \neq \lambda_0$ и $x \neq 0$. Тогда

$$\rho_H(\lambda_n x, \lambda_0 x) = \rho_H((\lambda_n - \lambda_0)x, 0) = \rho_H(x, 0) \not\to 0.$$

3. Линейность отображения π возникает ввиду того, что при разложении векторного пространства в прямую сумму проекции на обе составляющие являются линейными отображениями. □

2. ПРИМЕРЫ ИЗ АНАЛИЗА

2.1. Кольцо p-адических чисел. Наиболее известный пример градуированного множества и неархимедовой метрики, порожденной градуировкой, встречается в p-адическом анализе (см. [8; 9]).

Покажем, что каждое положительное целое число $p \geqslant 2$ порождает градуировку кольца $\mathbb{Q}$ и общая конструкция, описанная в первой части, приводит к построению p-адических чисел.

Для рационального числа $x \neq 0$ однозначно определено целое $\nu = \nu(x)$, такое, что имеется представление в виде $x = p^{\nu}\frac{t_1}{t_2}$, где t_1 и t_2 есть целые числа, такие, что t_1 не делится на p, а t_2 взаимно просто с p.

Очевидно представление $x = p^k \frac{s_1}{s_2}$, где s_1 и s_2 не делятся на p, которое в случае простого p и есть требуемое. В случае составного p требуемый вид получаем с помощью умножения числителя и знаменателя на такой множитель, что знаменатель делится на p. Например, при $p = 10$ получаем

$$\frac{15}{14} = \frac{15 \cdot 5}{14 \cdot 5} = \frac{1}{10} \cdot \frac{75}{7}.$$

Пусть

$$x = p^m \frac{t_1}{t_2},\ y = p^k \frac{s_1}{s_2},$$

где $k \geqslant m$, есть соответствующие представления двух рациональных чисел. Тогда

$$x + y = p^m\ \frac{t_1 s_2 + t_2 s_1 p^{k-m}}{t_2 s_2}$$

и в полученной дроби знаменатель взаимно прост с p. При этом может оказаться, что числитель делится на p и тогда в полученном представлении числа $x + y$ степень p не меньше, чем m, т. е.

$$\nu(x + y) \geqslant min\{\nu(x), \nu(y)\}.$$

Для каждого $m \in \mathbb{Z}$ зададим множество рациональных чисел

$$L_m = \{x \in \mathbb{Q} : \nu(x) \geqslant m\}.$$

Из полученного неравенства следует, что L_m является подгруппой в $\mathbf{Q}$.

Если $x \neq 0$ и $m > \nu(x)$, то $x \notin L_m$, откуда следует, что $\bigcap\limits_m L_m = \{0\}$.

Таким образом, каждому p соответствует своя градуировка группы $\mathbb{Q}$, для которой выполнено условие (9).

Согласно общему подходу, на $\mathbb{Q}$ определено нормирование, заданное формулой $q(x) = p^{-\nu(x)}$, для него выполнено неравенство

$$q(x+y) \leqslant \max\{q(x), q(y)\}.$$

Для такого нормирования выполнено

$$q(xy) \leqslant q(x)q(y)$$

и, следовательно, $\mathbb{Q}$ с указанной градуировкой является градуированным кольцом.

Заметим, что при простом p имеется равенство

$$q(xy) = q(x)q(y).$$

При составном p в представлении

$$xy = p^{m+k}\frac{t_1 s_1}{t_2 s_2}$$

может оказаться, что число $t_1 s_2$ делится на p, за счет чего получается строгое неравенство.

Теорема 1.3 содержит явное описание пополнения градуированного кольца в общем случае, применим эту теорему в рассматриваемом примере градуировки кольца $\mathbb{Q}$.

Пусть $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ есть кольцо вычетов по модулю p, будем отождествлять его с кольцом

$$\Gamma_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$$

с операциями сложения и умножения по модулю p. Для $n \in \mathbb{Z}$ через $\gamma(x) \in \Gamma_p$ обозначим вычет целого числа x по модулю p.

При составном p элемент $k \neq 0 \in \Gamma_p$ обратим, если k взаимно просто с p. В частности, если число p простое, то Γ_p является полем.

Лемма 2. *При заданной градуировке кольца $\mathbb{Q}$ все факторгруппы $G_k = L_k/L_{k+1}$ изоморфны группе Γ_p и являются кольцами.*

Доказательство. Числа вида

$$p^k\gamma, \gamma \in \Gamma_p \tag{14}$$

принадлежат разным классам эквивалентности, т. е. определено вложение $\Gamma_p \ni \gamma \to = [p^k\gamma] \in G_k$. В частности, L_{k+1} есть класс эквивалентности, соответствующий $\gamma = 0$.

Покажем, что если $x \in L_k \setminus L_{k+1}$, то класс $[x]$ содержит элемент вида (14).

Пусть $x = p^k\frac{t_1}{t_2}$ и $\gamma_1 = \gamma(t_1), \gamma_2 = \gamma(t_2)$. Поскольку t_2 взаимно просто с p, в кольце Γ_p существует обратный γ_3 к γ_2.

Тогда

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{t_1\gamma_3}{t_2\gamma_3} = \frac{\gamma_1\gamma_3 + pl_1}{1 + pl_2},\ l_1, l_2 \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому

$$x - p^k\gamma_1\gamma_3 = p^{k+1}\frac{l_1 + l_2}{1 + pl_2} \in L_{k+1}. \qquad \square$$

Согласно общему подходу, чтобы построить соответствующее градуированое кольцо H и требуемое вложение $\pi : \mathbb{Q} \to H$, нужно для каждого G_k задать подмножество $E_k \subset L_k$, содержащее по одному представителю из каждого класса эквивалентности.

Для факторгруппы G_k естественно взять множество из наиболее простых представителей вида (14), т. е. положить

$$E_k = \{0, p^k, 2p^k, \ldots, (p-1)p^k\} \subset L_k.$$

Тогда, согласно общей конструкции, искомое кольцо есть $H = \cup_{m\in\mathbb{Z}} H_m$, где H_m есть множество рядов вида

$$\xi = \sum_m^\infty a_k p^k, a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}. \tag{15}$$

Построенное множество H с введенными операциями сложения и умножения обозначается $\mathbb{Q}_p$ и называется *кольцом p-адических чисел*.

При вложении $\pi : \mathbb{Q} \to H$, построенном по общему правилу, получаем, что $\pi(x) = x$ для x, представимых в виде конечных сумм, в частности, это выполнено для положительных целых чисел. Остальным рациональным числам соответствуют бесконечные ряды, в частности, отрицательным целым числам соответствуют бесконечные ряды (с положительными коэффициентами). Например,

$$\pi(-1) = \sum_0^\infty (p-1)p^k.$$

Здесь общее правило задания сложения рядов из H становится наглядным. Например, при $p = 10$ в случае конечных сумм это обычное сложение десятичных разложений, которое осуществляется с помощью «переносов в старшие рязряды» и применимо к бесконечным суммам.

При $m \geqslant 0$ подгруппы H_m являются подкольцами. Кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ всюду плотно вкладывается в кольцо H_0, которое обозначается $\mathbb{Z}_p$ и называется *кольцом целых p-адических чисел*.

Таким образом, кольцо $\mathbb{Q}_p$ получаем как частный случай градуированных колец H, и из теоремы 1.3 получаем известные свойства $\mathbb{Q}_p$.

Предложение 2.1. *Множество $\mathbb{Q}_p$, состоящее из формальных рядов вида* (15)*, с введенными операциями сложения и умножения является кольцом. Если число p простое, то $\mathbb{Q}_p$ является полем.*

Кольцо $\mathbb{Q}_p$ с заданной неархимедовой sharp-метрикой является полным метрическим пространством, в котором алгебраические операции непрерывны и все формальные ряды (15) *сходятся.*

Отображение π есть изометрическое всюду плотное вложение кольца рациональных чисел $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{Q}_p$, откуда следует, что $\mathbb{Q}_p$ есть пополнение $\mathbb{Q}$ относительно заданной неархимедовой метрики. Кольцо $\mathbb{Q}_p$ может быть введено также как пополнение кольца конечных сумм вида (15).

Заметим, что в большинстве источников $\mathbb{Q}_p$ вводится именно как пополнение множества рациональных чисел, после чего строится представление p-адических чисел с помощью рядов.

2.2. Градуировки на $\mathbb{Z}$ и системы остаточных классов. На кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ существует много разных градуировок следующего вида. Пусть задана возрастающая последовательность натуральных чисел M_k, $M_0 = 1$, и L_k есть подкольцо, состоящее из чисел, кратных M_k. Вложение $L_k \subset L_{k-1}$ имеет место, если M_k делится на M_{k-1}. При таком условии получаем градуировку кольца $\mathbb{Z}$ односторонней последовательности подколец L_k, причем числа M_k представляются в виде произведения $M_k = p_1 p_2 \dots p_k$, где $p_j > 1$, и $\overline{p} = (p_1, p_2, \dots)$ есть произвольная последовательность натуральных чисел. Такие градуировки использовались, например, в [6].

При заданной градуировке рассматриваемого вида фактор-кольцо $G_k = L_{k-1}/L_k$ изоморфно кольцу Γ_{p_k}, наиболее естественной фундаментальной областью в L_{k-1} является подмножество

$$E_k = \{0, M_{k-1}, 2M_{k-1} \dots, (p_k - 1)M_{k-1}\}. \tag{16}$$

После такого выбора фундаментальных областей, согласно общей конструкции, определено вложение $\pi : \mathbb{Z} \to H_{\overline{p}}$, где соответствующее множество $H_{\overline{p}}$ состоит из формальных рядов вида

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k M_{k-1}, a_k \in \{0, 1, \dots, p_k - 1\} = \Gamma_{p_k}, \tag{17}$$

причем сложение и умножение в $\mathbb{Z}$ порождают соответствующие операции сложения $\widehat{+}$ и умножения $\widehat{\times}$ в $H_{\overline{p}}$.

Теорема 2.1. *Каждая градуировка кольца $\mathbb{Z}$ и выбор фундаментальных областей* (16) *порождает всюду плотное вложение кольца $\mathbb{Z}$ в кольцо $H_{\overline{p}}$, состоящее из рядов вида* (17)*, полное относительно соответствующей sharp-метрики.*

В частности, кольцо $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел получаем, если $p_j \equiv p$ и $M_k = p^k$.

Как было сказано в замечании 3, множество $H_{\overline{p}}$ естественным образом отождествляется с множеством последовательностей со значениями в кольцах Γ_{p_k}, причем множество таких по-

следовательностей является полным в смысле sharp-метрики и является кольцом с операциями покоординатного сложения и умножения.

Теорема 2.2. *Отображение* $\gamma : \mathbb{Z} \to H_{\overline{p}}$, *действующее по формуле*

$$\gamma : x \to (\gamma_1(x), \gamma_2(x), \ldots), \;\; \gamma_j(x) = x(\mathrm{mod}\ p_j) \in \Gamma_{p_j},$$

т. е. ставящее в соответствие числу x последовательность из остатков от деления на числа p_j, *задает вложение* $\mathbb{Z}$ *в* $H_{\overline{p}}$, *при котором операции в* $\mathbb{Z}$ *переходят в покоординатные операции в* $H_{\overline{p}}$.

Доказательство. То, что операции в $\mathbb{Z}$ переходят в покоординатные операции в $H_{\overline{p}}$ следует из свойств отображений γ_j. Отображение γ является вложением, так как при каждом заданном x последовательность $\gamma_j = x(\mathrm{mod} p_j) \in \Gamma_j = \{0, 1, \ldots, p_j - 1\}$ стабилизируется: если $p_j > x$, то $\gamma_j(x) = x$, откуда следует инъективность. □

Особый интерес представляет случай, когда числа p_j при рассматриваемой градуировке попарно взаимно простые. Особые свойства вложения γ вытекают из следующего известного утверждения.

Китайская теорема об остатках. *Если натуральные числа* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *попарно взаимно просты, то для любых целых* $r_1, r_2, \ldots, r_k$, *где* $0 \leqslant r_j < p_j$, *найдется число* $N \in \mathbb{Z}$, *которое при делении на* p_j *дает остаток* r_j.

Два числа $N_1 \in \mathbb{Z}$ *и* N_2 *дают при делении на числа* p_j *те же остатки* r_j *тогда и только тогда, когда разность* $N_1 - N_2$ *делится на произведение* $M_k = p_1 p_2 \ldots p_k$.

Эта теорема эквивалентна утверждению, что если числа $p_1, p_2, \ldots, p_k$ попарно взаимно просты и $M_k = p_1 p_2 \ldots p_k$, то кольцо Γ_{M_k} разлагается в прямую сумму

$$\Gamma_{M_k} = \bigoplus_1^k \Gamma_{p_j} \tag{18}$$

и такое разложение задается формулой

$$\Gamma_{M_k} \ni x \to (\gamma_1(x), \gamma_2(x), \ldots, \gamma_k(x)),$$

где $\gamma_j(x) = x(\mathrm{mod}\ p_j) \in \Gamma_{p_j}$. В частности,

$$\Gamma_{M_k} = \Gamma_{M_{k-1}} \bigoplus \Gamma_{p_k}$$

и переход от разложения $\Gamma_{M_{k-1}}$ к разложению Γ_{M_k} заключается в добавлении прямого слагаемого Γ_{p_k}.

Согласно китайской теореме об остатках, отображение, ставящее в соответствие числу x набор из k остатков

$$\{\gamma_1(x) = x(\mathrm{mod} p_1), \gamma_2(x) = x(\mathrm{mod} p_2), \ldots, \gamma_k(x) = x(\mathrm{mod} p_k)\}$$

определяет число с точностью до слагаемого, кратного M_k. Поэтому оно задает биекцию между такими последовательностями длины k и целыми числами x из заданного диапазона длины M_k, например, множество $\{x \in \mathbb{Z} : 0 \leqslant x < M_k\}$.

Такая биекция используется в так называемых *системах остаточных классов* [10].

Если числа x и y принадлежат заданному диапазону, то первые k остатков для чисел $x+y$ и xy вычисляются по формулам

$$\gamma_j(x+y) = \gamma_j(x) + \gamma_j(y), \; \gamma_j(xy) = \gamma_j(x)\gamma_j(y).$$

Если при этом сумма $x+y$ и произведение xy также принадлежат заданному диапазону, то числа $x+y$ и xy однозначно определяются по полученным k остаткам. Поскольку каждый из этих остатков вычисляется независимо, без переносов в следующие разряды, числа $\gamma_j(x+y)$ и $\gamma_j(xy)$ можно вычислять одновременно на разных устройствах. Такое распараллеливание операций позволяет существенно ускорить процесс вычислений и на этом свойстве системы остаточных классов основана работа некоторых вычислительных машин [10].

Недостатком такого подхода является то, что он применим только в случае, когда результаты всех действий лежат в заданном диапазоне. Поэтому вычисления с помощью системы остаточных классов используются в специализированных вычислительных машинах, ориентированных на

определенные классы задач, когда известен диапазон рассматриваемых величин и быстродействие имеет принципиальное значение.

Если число p простое, то множество чисел $p\mathbb{Z}$, делящихся на p, является максимальным идеалом в $\mathbb{Z}$ и факторкольцо $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ есть поле Γ_p. Верно и обратное – каждый максимальный идеал в $\mathbb{Z}$ есть множество чисел, делящихся на некоторое простое число. Поэтому можно отметить особый случай, когда все простые числа занумерованы в последовательность p_j. Тогда преобразование γ ставит в соответствие числу x функцию на пространстве максимальных идеалов, значение которой в точке p_j принадлежит полю Γ_{p_j}, причем γ является гомоморфизмом колец.

Описанное представление чисел с помощью остатков используется и в ряде других вопросов. Например, в криптографии последовательность остатков $x(\mathrm{mod}p_1), x(\mathrm{mod}p_2), \dots, x(\mathrm{mod}p_k)$ используется для шифрования чисел x из диапазона (p_k, M_k), так как эти остатки однозначно определяют число x, но его невозможно найти по остаткам, не зная чисел p_j.

Отметим также, что разложение (18) помогает исследовать строение колец $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{Z}_p$ при составных p. Например, разложение $\Gamma_6 = \Gamma_2 \bigoplus \Gamma_3$ приводит к тому, что кольцо $\mathbb{Q}_6$ является прямой суммой двух полей p-адических чисел:

$$\mathbb{Q}_6 = \mathbb{Q}_2 \bigoplus \mathbb{Q}_3.$$

Такие разложения были получены еще создателем теории p-адических чисел К. Гензелем [9].

2.3. Градуировка пространства гладких функций и формула Тейлора. Для пояснения постановки обсуждаемого ниже вопроса напомним, что, например, после введения понятия сходимости последовательности в курсе анализа следуют пояснения, что на рассматриваемом множестве имеется структура топологического пространства и понятие сходимости использует именно эту структуру. Но при этом обычно не обсуждается, какие структуры используются в формулировке утверждений о формуле Тейлора и рядах Тейлора.

Покажем, что в этих утверждениях также используются градуировка, sharp-метрика и конструкции, описанные в общем случае в первой части.

Напомним основные утверждения о формуле Тейлора, содержащиеся во всех учебниках по математическому анализу (например, [11]). Пусть F_0 есть пространство функций, определенных и бесконечно дифференцируемых на отрезке $[-1,1]$. Для функции $f \in F_0$ определен ряд Тейлора

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \text{где} \quad a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0). \tag{19}$$

Полином Тейлора $P_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ есть частичная сумма этого ряда, а функция $R_n(f;x) = f(x) - P_n(f;x)$ называется n-м остаточным членом.

Заметим, что ряд Тейлора может расходиться при всех $x \neq 0$, а в случае сходимости в некоторой окрестности нуля его сумма может не совпадать с $f(x)$. В частности, при заданном $x \neq 0$ остаточный член $R_n(f;x)$ может не стремиться к нулю при $n \to \infty$.

Основные утверждения о формуле Тейлора заключаются в следующем.

Утверждение 2.1. *Остаточный член $R_n(f;x)$ при $x \to 0$ есть бесконечно малая, порядок которой не меньше, чем $n+1$:*

$$R_n(f;x) = O(x^{n+1}).$$

При выполнении этого утверждения говорят, что ряд (19) сходится к f *асимптотически*.

Утверждение 2.2. *Для остаточного члена формулы Тейлора выполнена оценка*

$$|R_n(f;x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1},$$

где

$$M = \max_{-1 \leqslant t \leqslant 1} |f^{(n+1)}(t)|.$$

Естественная градуировка пространства F_0 задается последовательностью подпространств

$$F_m = \{f : f(x) = O(x^m) \ \text{ при } \ x \to 0\} = \{f(x) = x^m g(x) : g \in F_0\},$$

где m – неотрицательные целые числа. Здесь пересечение $F_\infty = \cap_{m\geqslant 0} F_m$ состоит из так называемых *плоских* функций, у которых все производные в точке 0 есть нули. Согласно теореме 1.4, градуировка позволяет поставить в соответствие функции f последовательность

$$\pi(f) = \{\hat{f} = (0, \dots, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots)\}, \text{ где } \xi_k \in F_k/F_{k+1},$$

состоящую из элементов фактор-пространств.

В рассматриваемом примере каждое фактор-пространство $G_k = F_k/F_{k+1}$ изоморфно $\mathbb{R}$ и его можно вложить в F_k как одномерное подпространство E_k, состоящее из наиболее простых представителей класса эквивалентности – функций вида $ax^k, a \in \mathbb{R}$. При таком выборе, согласно конструкции из теоремы 1.4, элемент $\psi(f)$, соответствующий функции $f \in F_0$, есть формальный ряд вида $\psi(f) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, где по построению получаем, что $R_m \in F_{m+1}$. Кроме того, здесь

$$a_k = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_{k-1}(x)}{x^k}.$$

Вычисляя предел по правилу Лопиталя, получаем, что $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Таким образом, в этом примере формальный ряд $\pi(f)$, построенный по общему правилу разложения, есть ряд Тейлора функции f.

В этом примере порядок функции f – число $\nu(f) = \min\{k : a_k \neq 0\}$, и это есть порядок стремления к нулю значений $f(x)$ при $x \to 0$, нормирование задается формулой $q(f) = 2^{-\nu(f)}$, и формула $\rho(f,g) = q(f-g)$ задает метрику на фактор-пространстве F_0/F_∞ и полуметрику на F_0. По построению $\rho(f, P_m(f)) \to 0$ при $m \to \infty$, т. е. утверждение 2.1 говорит о том, что формальный ряд Тейлора сходится к f в этой метрике.

Таким образом, конструкция ряда Тейлора и утверждение 2.1 есть частный случай общих построений и утверждений из первой части, причем асимптотическая сходимость ряда Тейлора есть сходимость в смысле sharp-полуметрики на градуированном пространстве F_0.

Отметим также известную теорему Бореля (см. [12]), которая утверждает, что для любой последовательности a_k (в том числе сколь угодно быстро возрастающей) существует такая бесконечно дифференцируемая функция f, что (19) есть ее ряд Тейлора. Отсюда получаем, что теорема Бореля эквивалентна утверждению, что фактор-пространство F_0/F_∞ с sharp-метрикой является полным метрическим пространством.

Как и в общем случае, в описанном способе разложения элементов и построения ряда есть произвол при выборе представителя из каждого класса экивалентности – элемента фактор-пространства $G_k = F_k/F_{k+1}$. При другом выборе представителей получаем разложение функции в асимптотический ряд по другой системе функций. Например, если $h(x)$ – гладкая функция, такая, что $h(0) = 0,\ h'(x) \neq 0$, то в качестве представителей можно выбрать функции вида $b[h(x)]^k$ и f разлагается в асимптотически сходящийся ряд

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k h(x)^k.$$

Если $t = h(x), x = g(t)$, где g есть функция, обратная к h, то такое разложение эквивалентно разложению в ряд по степеням t сложной функции $f(g(t))$. Заметим, что коэффициенты b_k вычисляются по известной формуле Фаа ди Брюно.

Рассмотрим теперь, какая структура использована в утверждении 2.2.

На каждом из пространств F_m определена своя норма, заданная формулой

$$||f||_m = \max_{|x|\leqslant 1} \frac{|f(x)|}{|x|^m},$$

т. е. F_0 является градуированным нормированным пространством. С помощью этих норм неравенство из утверждения 2.2 можно записать в виде

$$||R_m(f)||_{m+1} \leqslant \frac{1}{(m+1)!} \|f^{(m+1)}\|_0.$$

Таким образом, если утверждение 2.1 говорит, что остаточный член $R_m(f)$ принадлежит F_{m+1} и использует только градуировку, то в более сильном утверждении 2.2 используется норма на подпространстве F_{m+1} и указан шар в смысле соответствующей нормы, в котором лежит остаточный член.

Приведенные рассуждения можно перенести на более широкое пространство. Пусть F есть пространство функций, представимых при $x \neq 0$ в виде

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)},$$

где $h \in F_0, g \in F_0 \setminus F_\infty$, и $g(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. Естественная градуировка пространства F задается аналогичной двусторонней последовательностью подпространств

$$F_m = \{f : f(x) = O(x^m) \text{ при } x \to 0\},\ m \in \mathbb{Z}.$$

При отрицательных k, как и выше при положительных, фактор-пространство $G_k = F_k/F_{k+1}$ можно вложить в F_k как одномерное подпространство E_k, состоящее из наиболее простых представителей класса эквивалентности – функций вида $ax^k, a \in \mathbb{R}$. При таком выборе представителей, согласно конструкции из теоремы 1.4, элемент $\psi(f)$, соответствующий функции $f \in F_m$, есть ряд вида

$$\psi(f) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k x^k,$$

где по построению получаем, что $R_n(x) := f(x) - \sum\limits_{k=m}^{n} a_k x^k \in F_{n+1}$ и

$$a_k = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P_{k-1}(x)}{x^k}.$$

Таким образом, при отрицательных m формальный ряд $\pi(f)$, построенный по общему правилу разложения, описанному в первой части, есть ряд Лорана функции f, а включение $R_n \in F_{n+1}$ есть аналог утверждения 2.1 в случае рядов Лорана и равносильно сходимости в неархимедовой метрике, порожденной градуировкой пространства F.

Аналогичная ситуация возникает при анализе гладких функций нескольких переменных. Для примера рассмотрим пространство $F_0(D)$ гладких функций двух переменных, определенных в замкнутом круге $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| \leqslant 1\}$ на плоскости. На этом пространстве имеется аналогичная градуировка из подпространств

$$F_m = \{f : f(x) = O(||x||^m)\},$$

которая позволяет ввести sharp-метрику.

В отличие от предыдущего примера, здесь фактор-пространство $G_1 = F_1/F_2$ двумерно и вкладывается в F_1 в виде подпространства E_1, состоящего из линейных функций $a_1x_1 + a_2x_2$. Фактор-пространство $G_2 = F_2/F_3$ трехмерно и вкладывается в F_2 в виде подпространства E_2, состоящего из квадратичных форм

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{33}x_2^2.$$

Фактор-пространство $G_3 = F_3/F_4$ имеет размерность 10 и вкладывается в F_3 в виде подпространства E_3, состоящего из однородных полиномов третьей степени и т. д.

При такой конструкции формальный ряд $\psi(f)$, построенный согласно общей конструкции, есть ряд Тейлора гладкой функции двух переменных

$$\pi(f) = \sum_{k=0}^{\infty} d^k(x),$$

где слагаемые

$$d^k(x) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!} \frac{\partial^{|\alpha|} f(0)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_1} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2},\ \ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2),\ |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$$

есть дифференциалы функции f в точке 0.

Классическое утверждение об асимптотической сходимости частичных сумм такого ряда к f есть сходимость в смысле соответствующей sharp-метрики и является частным случаем общих утверждений.

Заключение. Приведенные примеры показывают, что структура градуированного пространства имеет весьма общий характер, так как фактически используется даже в классических конструкциях анализа. Это позволяет высказать предположение, что такая структура и утверждения, полученные в первой части работы, могут оказаться полезными при рассмотрении других задач. Более детальные исследования пространств с градуированной топологией и их использование при решении конкретных задач предполагается провести в последующих работах.

Отметим также, что разложения действительных чисел по заданному основанию p имеют вид

$$\sum_{m}^{+\infty} \frac{a_k}{p^k},\ a_k \in E := \{0,1,2,\ldots,p-1\},$$

и они внешне похожи на разложения (15) p-адических чисел. Однако такие разложения имеют принципиально другую природу, в частности, множество таких разложений устроено не так, как множество действительных чисел, поскольку имеются числа, которым соответствуют два разложения. Поэтому возникает вопрос о том, какую структуру имеет множество таких разложений.

Литература

1. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. М., 1959.
2. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 386 с.
3. *Васильева А. В., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973.
4. *Colombeau J. F.* New generalized functions and multiplication of distributions. Amsterdam: North-Holland, 1984. 374 p.
5. *Delcroix A., Scarpalezos D.* Sharp Topologies on (C,E,P)-Algebras // Nonlineal Theory of Generalized Function, Chaptman & Hall, Research Notes of Mathematics. 1999. Vol. 401. P. 165–174.
6. *Хренников А. Ю.* Неархимедов анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 216 с.
7. *Радына А. Я., Радына Я. М., Радына Я. В.* Пачаткі неархімедавага аналізу: дапам. для студентаў мех.-мат. фак. Мінск: БДУ, 2010. 111 с.
8. *Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И.* P-адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994. 352 с.
9. *Каток С. В.* P-адический анализ в сравнении с вещественным. М.: МЦНМО, 2004. 112 с.
10. *Акушский И. Я., Юдицкий Д. И.* Машинная арифметика в остаточных классах. М.: Советское радио, 1968. 439 с.
11. *Кротов В. Г.* Математический анализ: учеб. пособие. Минск: БГУ, 2017.
12. *Нарасимхан Р.* Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М.: Мир, 1971. 232 с.

References

1. Bourbaki N. *Topological Vector Spaces*. Moscow, 1959 (in Russian).
2. Olver F. *Introduction to Asymptotic Methods and Special Functions*. Moscow, Nauka, 1978 (in Russian).
3. Vasil'eva A. V., Butuzov V. F. *Asymptotic Expansions of Solutions of Singularly Perturbed Equations*. Moscow, 1973 (in Russian).
4. Colombeau J. F. *New Generalized Functions and Multiplication of Distributions*. Amsterdam, North-Holland, 1984, 374 p.
5. Delcroix A., Scarpalezos D. Sharp Topologies on (C,E,P)-Algebras. *Nonlinear Theory of Generalized Functions, Chapman & Hall, Research Notes in Mathematics,* 1999, vol. 401, pp. 165–174.

6. Khrennikov A. Y. *Non-Archimedean Analysis and Its Applications*. Moscow, Fizmatlit, 2003 (in Belarussian).

7. Radyina A. Y., Radyina Y. M., Radyina Y. V. *Introduction to Non-Archimedean Analysis: Textbook for Students of Mechanics and Mathematics Faculty*. Minsk, BSU, 2010, 111 p. (in Belarussian).

8. Vladimirov V. S., Volovich I. V., Zelenov E. I. *P-adic Analysis and Mathematical Physics*. Moscow, Nauka, 1994, 352 p. (in Russian).

9. Katok S. V. *P-adic Analysis in Comparison with Real Analysis*. Moscow, MCCME, 2004, 112 p. (in Russian).

10. Akushsky I. Y., Yuditsky D. I. *Computer Arithmetic in Residue Classes*. Moscow, Soviet Radio, 1968, 439 p. (in Russian).

11. Krotov V. G. *Mathematical Analysis: Textbook for BSU*. Minsk, 2017 (in Russian).

12. Narasimhan R. *Analysis on Real and Complex Manifolds*. Moscow, Mir, 1971 (in Russian).