

УДК 511.2

О РАЗРЕШИМОСТИ И ФАКТОРИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ π -РАЗРЕШИМЫХ НЕПРИВОДИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП ПРИМАРНОЙ СТЕПЕНИ. ЧАСТЬ V

А. А. Ядченко

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
e-mail: yadchenko_56@mail.ru

Поступила: 23.04.2025

Исправлена: 08.05.2025

Принята: 23.05.2025

Ключевые слова: конечные группы, характеры, факторизация групп.

Аннотация. Работа является пятой и заключительной из серии статей, где для множества π , состоящего из нечетных простых чисел, исследуются конечные π -разрешимые неприводимые комплексные линейные группы степени $2|H| + 1$, у которых холловы π -подгруппы H являются TI -подгруппами и не являются нормальными в группах. Цель серии – доказать разрешимость и определить условия факторизации таких групп.

ON THE SOLVABILITY AND FACTORIZATION OF SOME π -SOLVABLE IRREDUCIBLE LINEAR GROUPS OF PRIMARY DEGREE. PART V

A. A. Yadchenko

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
e-mail: yadchenko_56@mail.ru

Received: 23.04.2025

Revised: 08.05.2025

Accepted: 23.05.2025

Keywords: finite groups, characters, factorizations of groups.

Abstract. The work is the fifth and final one in a series of articles, where for a set π consisting of odd primes, finite π -solvable irreducible complex linear groups of degree $2|H| + 1$ are investigated, for which Hall π -subgroups are TI -subgroups and are not normal in groups. The purpose of the series is to prove solvability and to determine the conditions for factorization of such groups.

1. Введение

Исследуются конечные π -разрешимые неприводимые комплексные линейные группы степени $n = 2|H| + 1$, у которых холлова π -подгруппа H является TI -подгруппой.

В первой части работы [1] были доказаны некоторые предварительные результаты, а также получены некоторые свойства минимального контрпримера Γ к теореме (*), которая является основой доказательства главной теоремы. Во второй [2], третьей [3] и четвертой [4] ее частях продолжено изучение свойств минимального контрпримера к теореме (*).

Условие (*). Скажем, что для Γ , A , B , C , χ и n выполнено условие (*), если $\Gamma = BA$, где B – нормальная в Γ подгруппа, $(|B|, |A|) = 1$, A – группа нечетного порядка, большего 3, которая не является нормальной в группе Γ , $C_B(a) = C_B(A) = C$ для каждого элемента $a \in A^\#$, и B имеет точный неприводимый характер χ степени n , который является a -инвариантным хотя бы для одного элемента $a \in A^\#$.

Теорема (*). Пусть для Γ , A , B , C , χ и $n = 2|A| + 1$ выполнено условие (*). Тогда группа Γ разрешима, n является степенью простого числа q , подгруппа $C_{2'}$ абелева и, если подгруппа C не абелева, то в обозначениях леммы 2.7 [1] характер $\chi_C = \beta + |A|\beta_1$, где $\beta(1) = |A| + 1$ и $\beta_1(1) = 1$ либо $\beta(1) = 1$ и $\beta_1(1) = 2$. Также, если $|\pi| > 1$ и при $|\pi| = 1$ характер $\hat{\chi}$ примитивный, то $B = O_q(B)C$.

Условие 1. Пусть π – множество нечетных простых чисел и G – конечная не π -замкнутая π -разрешимая группа с π -холловой TI -подгруппой H , имеющая точный неприводимый характер степени n .

Теорема. Пусть группа G удовлетворяет условию 1 и $n = 2|H| + 1 > 7$. Тогда n – степень простого числа q , группа G разрешима и, если при $|\pi| = 1$ характер χ примитивный, то $G = N_G(H)O_q(G)$.

2. Некоторые определения, обозначения и предварительные результаты

$\mathbf{Z}_+$ – множество целых неотрицательных чисел; $i = \overline{1, n} = 1, 2, \dots, n$; если ψ – характер некоторой подгруппы $X \subseteq G$, то $\text{Irr}(\psi)$ обозначает множество всех неприводимых компонент характера ψ ; $\pi = \pi(H)$; $\pi' = \pi(X) \setminus \pi$; $X_{\pi'}$ – холлова π' -подгруппа группы X . Если $X \triangleleft G$ и φ – неприводимый характер подгруппы X , то условие, что φ – g -инвариантен для некоторого элемента $g \in G \setminus X$, запишем для краткости в виде $I_G(\varphi) \neq X$. Все остальные обозначения и определения обычны и их можно найти, например, в [5] или [6]. Всюду под характером группы будем понимать комплексный характер, а под группой – конечную группу.

Пусть $\Gamma = AB$ – группа с подгруппами A и B , где $B \triangleleft \Gamma$, $(|A|, |B|) = 1$ и $|A|$ нечетен (A – группа простых автоморфизмов группы B). Тогда она удовлетворяет условию теоремы 13.1 [6]. Согласно этой теореме существует взаимно-однозначное соответствие $\pi(B, A) : \text{Irr}_A(B) \longrightarrow \text{Irr}(C_B(A))$ между множеством всех A -инвариантных неприводимых характеров группы B и множеством всех неприводимых характеров подгруппы $C_B(A)$, которое обладает рядом свойств, зависящих, в частности, от свойств подгруппы A . Пусть $\chi \in \text{Irr}_A(B)$. Тогда, по лемме 13.3 [6], существует такой единственный неприводимый характер $\hat{\chi}$ группы Γ , что $\hat{\chi}_B = \chi$ и $A \subseteq \ker(\det \hat{\chi})$. Он называется каноническим продолжением характера χ на группу Γ . В дальнейшем под $\hat{\chi}$ будем понимать именно такой характер.

3. Основная часть

Продолжим нумерацию формулировок лемм, начатую в первой части [1] работы. В ней, напомним, мы получили некоторые предварительные результаты, показали, что неприводимый характер $\hat{\chi}$ точный и что $\hat{\chi}(1) = q^\alpha$ для некоторого нечетного простого числа q и $\alpha \in \mathbf{N}$, а также начали изучать свойства минимального контрпримера к теореме (*). Во второй части [2] мы продолжили изучение минимального контрпримера к теореме (*) и доказали свойства подгруппы C и ее характера χ_C .

Напомним, что $N = N_\Gamma(B_q)$, где $\hat{\chi}(1) = q^\alpha$ и B_q – A -инвариантная силовская q -подгруппа, т. е. $A \subseteq N$. В третьей части [3] мы установили, что $N \neq \Gamma$ (лемма 3.13) и что $N^{(q_1)} = N_\Gamma(B_{q_1}) \neq \Gamma$ для $q \neq q_1 \in \pi'$ (лемма 3.14). В лемме 3.15 [4] показано, что характер $\hat{\chi}_N$ неприводим. С применением теоремы Клиффорда легко убедиться в том, что характер $\hat{\chi}_{B_q}$ тоже неприводим. Следовательно, $1 \neq Z(B_q) \subseteq Z(\Gamma)$ и ограничение характера $\hat{\chi}$ на любую подгруппу, содержащую B_q , также является неприводимым характером.

Пусть $B \supset Y^{(q)}$ – такая собственная максимальная A -инвариантная подгруппа, что $N_{\pi'} \subseteq Y^{(q)}$. Так как $B_q \not\subseteq C$, что вытекает из леммы 3.3 [2], то $Y^{(q)} \not\subseteq C$. Обозначим $\Gamma_1 = AY^{(q)}$. Очевидно, $Z(B_q) \subseteq \Gamma_1$.

Дальше мы предполагаем, что $q \neq q_1 \in \pi(|B : C|)$. Пусть для таких простых чисел q_1 подгруппа $Y^{(q_1)} \subseteq B$ является собственной A -инвариантной и такой, что $B_{q_1} \subseteq Y^{(q_1)}$. Так как подгруппа $(N^{(q_1)})_{\pi'}$ также является A -инвариантной, то мы также при необходимости можем считать, что $(N^{(q_1)})_{\pi'} \subseteq Y^{(q_1)}$, и что подгруппа $Y^{(q_1)}$ является максимальной A -инвариантной в группе B . Мы замечаем, что $Y^{(q_1)} \not\subseteq C$. Обозначим $\Gamma^{(q_1)} = AY^{(q_1)}$. Также очевидно, что $Z(B_q) \subseteq \Gamma^{(q_1)}$.

Лемма 3.16. (1) Характер $\hat{\chi}_{\Gamma_1}$ неприводим и $Y^{(q)} = O_q(Y^{(q)})C_{Y^{(q)}}(A)$;

(2) если подгруппа $C_{Y^{(q)}}(A)$ не является абелевой, то

$$\chi_{C_{Y^{(q)}}(A)} = (\chi_C)_{C_{Y^{(q)}}(A)} = \beta_{C_{Y^{(q)}}(A)} + |A|(\beta_1)_{C_{Y^{(q)}}(A)}$$

с неприводимыми характерами $\beta_{C_{Y^{(q)}}(A)}$ и $(\beta_1)_{C_{Y^{(q)}}(A)}$, где $\beta(1) = |A| + 1$ и $\beta_1(1) = 1$ или $\beta(1) = 1$ и $\beta_1(1) = 2$;

(3) если подгруппа C не является абелевой, то и подгруппа $C_{Y^{(q)}}(A)$ также не является абелевой.

Доказательство. По лемме 3.15 [4] характер $\hat{\chi}_N$ неприводим. Так как $N \subseteq \Gamma_1$, то характер $\hat{\chi}_{\Gamma_1}$ также неприводим, и легко убеждаемся в том, что для Γ_1 , A , $Y^{(q)}$, $C_{Y^{(q)}}(A)$, $\chi_{Y^{(q)}}$ и n выполнено условие (*). Поскольку $|\Gamma_1| < |\Gamma|$, то по индукции $Y^{(q)} = O_q(Y^{(q)})C_{Y^{(q)}}(A)$ и подгруппа $C_{Y^{(q)}}(A)$ удовлетворяет заключениям теоремы (*) – утверждение (1).

Предположим, что подгруппа $C_{Y(q)}(A)$ не является абелевой. Тогда подгруппа C не является абелевой и по утверждению (1) леммы 3.5 [2] может выполняться только одно из двух утверждений леммы 2.7 [1]: $\chi_C = \beta + |A|\beta_1$, где $\beta(1) = |A| + 1$ и $\beta_1(1) = 1$ – утверждение (1) или $\beta(1) = 1$ и $\beta_1(1) = 2$ – утверждение (2). Здесь β и β_1 – неприводимые характеры подгруппы C . Поскольку характер $\hat{\chi}_{\Gamma_1}$ неприводим, то из утверждения (2) леммы 3.5 [2] вытекает, что, если подгруппа $C_{Y(q)}(A)$ не является абелевой, то

$$\chi_{C_{Y(q)}(A)} = (\chi_C)_{C_{Y(q)}(A)} = \beta_{C_{Y(q)}(A)} + |A|(\beta_1)_{C_{Y(q)}(A)}$$

с неприводимыми характерами $\beta_{C_{Y(q)}(A)}$ и $(\beta_1)_{C_{Y(q)}(A)}$, для которых выполняется одно из указанных свойств – утверждение (2).

Из утверждения (2) вытекает, что, если подгруппа C неабелева, то и подгруппа $C_{Y(q)}(A)$ также неабелева – утверждение (3).

Лемма 3.17. *Выполняется: (1) $Z(\Gamma) = Z(B) = Z(B_q)$ и факторгруппа $\bar{B} = B/Z(B)$ простая; (2) если в лемме 3.16 $\beta(1) \neq |A| + 1$, то $\pi((C_{Y(q)}(A))_{q'}) \subseteq \{2; 3\}$.*

Доказательство. Покажем вначале, что $Z(\Gamma) = Z(B) = Z(B_q)$. Поскольку $A \not\triangleleft \Gamma$ и $C_B(a) = C_B(A)$ для каждого элемента $a \in A^\#$ по условию (*), то $Z(\Gamma) \cap A = 1$. Значит, $Z(\Gamma) \subseteq B$. Так как $Z(B_q) \subseteq Z(\Gamma)$, то нам достаточно показать, что $Z(\Gamma) \subseteq B_q$.

Предположим, что существует простое число $q \neq q' \in \pi(Z(\Gamma))$. Так как q' не делит $\hat{\chi}(1)$ и q' не делит $|\ker \hat{\chi} \cap \Gamma'|$, ибо $\ker \hat{\chi} = 1$, то по лемме 9 [7] число q' не делит $|Z(\hat{\chi}) \cap \Gamma'|$. Поскольку $Z(\hat{\chi}) = Z(\Gamma)$, то q' не делит $|Z(\Gamma) \cap \Gamma'|$. Поэтому q' делит $|\Gamma/\Gamma'|$. Следовательно, $A \subseteq O^{q'}(\Gamma) \neq \Gamma$. Так как $B_q \subseteq O^{q'}(\Gamma)$, то характер $\hat{\chi}_{O^{q'}(\Gamma)}$ неприводим. Поскольку $A \not\triangleleft O^{q'}(\Gamma)$, то по индукции

$$(O^{q'}(\Gamma))_{\pi'} = O_q((O^{q'}(\Gamma))_{\pi'})C_{(O^{q'}(\Gamma))_{\pi'}}(A).$$

Но $\Gamma = O^{q'}(\Gamma)N_\Gamma(A)$ и $N_\Gamma(A) = AN_B(A) = AC$. Поэтому

$$B = \Gamma_{\pi'} = O_q((O^{q'}(\Gamma))_{\pi'})C = O_q(B)C,$$

что доказывает теорему. Это противоречит выбору группы Γ .

Итак, $\pi(Z(\Gamma)) = \{q\}$, т. е. $Z(\Gamma) \subseteq B_q$. Тогда, очевидно, $Z(\Gamma) \subseteq Z(B_q)$. Так как справедливо обратное утверждение, то $Z(\Gamma) = Z(B_q)$.

Убедимся теперь в том, что $Z(B_q)$ является максимальной нормальной в Γ подгруппой.

Пусть $B \triangleright X$ – собственная максимальная A -инвариантная подгруппа. Покажем, что $X \subseteq Z(B_q)$.

Очевидно, что $X \triangleleft \Gamma$ и что B/X – главный фактор группы Γ . С применением теоремы Клиффорда рассмотрим характер

$$\hat{\chi}_X = e \sum_{t \in T} \varphi^t,$$

где φ – неприводимый характер подгруппы X ; T – множество представителей всех смежных классов группы Γ по подгруппе $I = I_\Gamma(\varphi)$ – инерции характера φ в группе Γ , взятых по одному из каждого класса и

$$\hat{\chi}(1) = e|T|\varphi(1).$$

Так как $\hat{\chi}(1) = q^\alpha$, то e , $|T|$ и $\varphi(1)$ также являются степенями простого числа q . Также мы замечаем, что $A \subseteq I$ и по теореме 6.11 [6] $\hat{\chi} = (\varphi')^\Gamma$ для такого неприводимого характера φ' подгруппы I , что $(\varphi')_X = e\varphi$.

Допустим, что $X \subseteq C$. Мы замечаем, что, с одной стороны, ограничение характера χ_X подчиняется закону Клиффорда выше, а с другой – для характера $\chi_X = (\chi_C)_X$ выполняется одно из утверждений леммы 2.7 [1]. И мы видим, что такие утверждения, как

$$\chi_X = e \sum_{t \in T} \varphi^t = \beta_X + |A|(\beta_1)_X; \chi_X = e \sum_{t \in T} \varphi^t = \beta_X + |A|(\beta_1 + \beta_2)_X,$$

где β , β_1 и β_2 – различные неприводимые характеры группы C , неверны, потому что

$$(\chi_X, \varphi^t)_X = e \neq (\chi_X, (\beta_1))_X = |A|.$$

Нетрудно заметить, что может выполняться только утверждение (12) этой леммы –

$$\chi_X = (\chi_C)_X = (2|A| + 1)\beta_X, \quad \beta(1) = 1$$

или только утверждение (15) –

$$\chi_X = (\chi_C)_X = \beta_X, \quad \beta(1) = \chi(1) = 2|A| + 1.$$

Предположим, что выполняется утверждение (15) указанной леммы, т. е. $\chi_X = \beta_X$, $\beta(1) = \chi(1)$. Тогда из леммы 2.6 [1] следует, что $\hat{\chi}_A = \beta(1)1_A$. Отсюда вытекает, что $A \subseteq \ker \hat{\chi}$. Это противоречит лемме 3.1 [1].

Следовательно, выполняется утверждение (12) леммы 2.7 [1], т. е. $\chi_X = (2|A| + 1)\beta_X$, $\beta(1) = 1$. Тогда

$$X \subseteq Z(\chi) = Z(\hat{\chi}) = Z(\Gamma) = Z(B_q).$$

При $X \subseteq C$ мы получили требуемое утверждение.

Пусть $X \not\subseteq C$.

Предположим, что $|T| = 1$. Тогда $\hat{\chi}(1) = e\varphi(1)$.

Допустим при этом, что $e = 1$. Значит, характер $\hat{\chi}_X = \varphi$ неприводим. Следовательно, неприводим и характер $\hat{\varphi} = \hat{\chi}_{AX}$, который существует по лемме 2.5 [1]. Легко убедиться в том, что для AX , A , X , $C_X(A)$, φ и n выполнено условие (*). Так как $|AX| < |\Gamma|$, то по индукции

$$X = O_q(X)C_X(A).$$

Понятно, что

$$O_q(X) \subseteq O_q(B) \subseteq B_q$$

и, так как $O_q(B) \subseteq X$, ввиду максимальности последней подгруппы, то $O_q(X) = O_q(B)$. Так как $X \not\subseteq C$, то $O_q(B) \not\subseteq C$. Поэтому $A \not\triangleleft O_q(B)$ и характер $\hat{\chi}_{AO_q(B)}$ неприводим.

В самом деле. Из предпоследней выделенной формулы вытекает, что

$$AO_q(B) \triangleleft AX$$

и, значит, характер

$$\hat{\chi}_{AO_q(B)} = \hat{\varphi}_{AO_q(B)} = e_1 \sum_{t_1 \in T_1} \psi^{t_1}$$

подчиняется формуле Клиффорда. Здесь обозначения e_1 , t_1 , T_1 и ψ соответствуют обозначениям из приведенной выше формулы Клиффорда.

Предположим, что $\psi(1) \neq \hat{\varphi}(1)$. Тогда

$$\psi^{t_1}(1) \leq (2|A| + 1)/q < |A| - 1$$

для каждого элемента $t_1 \in T_1$, и из леммы 2.10 [6] вытекает, что

$$A/\ker \psi^{t_1} \triangleleft AO_q(B)/\ker \psi^{t_1}.$$

Поскольку $\bigcap_{t_1 \in T_1} \ker \psi^{t_1} = 1$, то подгруппа $AO_q(B)$ изоморфна некоторой подгруппе из прямого произведения

$$\prod_{t_1 \in T_1} AO_q(B)/\ker \psi^{t_1}$$

π -замкнутых факторгрупп. Следовательно, $A \triangleleft AO_q(B)$, т. е. $O_q(B) \subseteq C$. Из выделенной ранее формулы вытекает, что $X \subseteq C$, что не так.

Итак, характер $\hat{\chi}_{AO_q(B)}$ неприводим. Следовательно, неприводим и характер $\hat{\chi}_{AB_{q_1}O_q(B)}$ для каждого простого числа $q_1 \in \pi(|B : C|)$.

Допустим, что $AB_{q_1}O_q(B) \neq \Gamma$. Тогда по индукции $B_{q_1} \subseteq C$, что не так.

Поэтому $A(B_{q_1}O_q(B) = B) = \Gamma$. Следовательно, $B_q = O_q(B) \triangleleft \Gamma$. Мы получили противоречие с тем, что $\Gamma^{(q)} \neq \Gamma$.

Пусть теперь $e \neq 1$. Поскольку $\varphi \in \text{Irr}_A(X)$, то для характера $\hat{\varphi}$ справедливо выражение

$$\hat{\varphi}(1) = \hat{\chi}(1)/e < |A| - 1.$$

Так как характер φ точный в рассматриваемом случае, то $\ker \hat{\varphi} \subseteq A$. Если $\ker \hat{\varphi} \neq 1$, то поскольку $\ker \hat{\varphi} \triangleleft AX$, мы получаем, что $X \subseteq C_B(\ker \hat{\varphi})$. Тогда по условию (*) $X \subseteq C$. Если же $\ker \hat{\varphi} = 1$, то из леммы 2.10 [1] вытекает, что $A \triangleleft AX$. Мы вновь получаем, что $X \subseteq C$. Этот случай рассмотрен.

Пусть теперь $|T| = |\Gamma : I| \neq 1$. Тогда характер $\hat{\chi}$ непримитивный и по лемме 3.4 [2] мы можем считать, что $\varphi'(1) = 1$ и что

$$|\Gamma : I| = \hat{\chi}(1) = q^\alpha = 2|A| + 1.$$

Следовательно, $\varphi(1) = (\varphi')_X(1) = 1$. Мы видим, что все неприводимые компоненты φ^t , $t \in T$, характера $\hat{\chi}_X$ линейные. Поэтому $X' \subseteq \ker \hat{\chi}_X = 1$ и, значит, подгруппа X абелева.

Допустим, что группа $\Gamma^* = AB_qX = \Gamma$. Тогда подгруппа $B = B_qX$ разрешима.

Предположим при этом, что $|\pi| > 1$. По лемме 2.9 [1] $B = F(B)C$. Так как $X \subseteq F(B)$, то мы видим, что

$$F(B) = (((F(B))_q = F(B) \cap B_q))X,$$

т. е. $(F(B))_q \subseteq C_\Gamma(X) \triangleleft \Gamma$. Поскольку подгруппа X максимальная нормальная в Γ , то мы получаем, что $C_\Gamma(X) = X$, т. е. $(F(B))_q = 1$ или $C_\Gamma(X) = \Gamma$, т. е. $X \subseteq Z(\Gamma) = Z(B_q)$.

Поскольку второе утверждение доказывает лемму, то мы полагаем, что $(F(B))_q = 1$. Получаем, что $B_q \subseteq C$, что противоречит лемме 3.3 [2].

Пусть теперь $|\pi| = 1$. Тогда по условию (*) характер $\hat{\chi}$ примитивный. Следовательно, $X \subseteq Z(\Gamma) = Z(B_q)$.

Желаемое утверждение установлено.

Допустим теперь, что группа $\Gamma^* \neq \Gamma$. Поскольку характер $\hat{\chi}_{\Gamma^*}$ неприводим, то мы легко замечаем, что к нему и группе Γ^* мы можем применить индукцию. По ней

$$B_qX = O_q(B_qX)C_{B_qX}(A).$$

Отсюда мы видим, что $X \subseteq C_{B_qX}(A) \subseteq C$. Это противоречит рассматриваемому случаю. Мы доказали, что $X = Z(B_q)$.

Так как X максимальная нормальная в B и A -инвариантная подгруппа и $X = Z(B_q)$, то факторгруппа $B/Z(B_q)$ простая – утверждение (1).

Докажем утверждение (2).

Пусть элемент $c \in C_{Y(q)}(A)$ имеет простой порядок $o(c) = q_1 \neq q$. Согласно утверждению (1) доказываемой леммы $c \notin Z(\Gamma)$. Тогда $c \notin C_\Gamma(B_q)$ и поэтому $\varphi = \hat{\chi}_{B_q} \in \text{Irr}_{<c>}(B_q)$. Обозначим $\hat{\varphi} = \hat{\chi}_{<c>B_q}$. По следствию 13.4 [6] $\hat{\varphi}(c) \in \mathbf{Q}$. Так как $c \notin Z(\Gamma)$ и $c \in C$, то характер $\chi_{<c>} = \hat{\varphi}_{<c>}$ содержит не менее двух различных неприводимых компонент. Поскольку $\beta(1) \neq |A| + 1$, то согласно лемме 2.7 [1] это компоненты $\beta_{<c>}$, $\beta(1) = 1$ и $\beta_1(<c>)$, $\beta_1(1) = 2$. Третьей компонентой характера $\chi_{<c>}$ может быть характер $\beta_2(<c>)$ степени 1. При этом, если $\beta_1(1) = 2$, то

$$\chi_{<c>} = \beta(<c>) + |A|\beta_1(<c>)$$

– утверждение (2) леммы 2.7 [1].

Применим лемму 1 [8] в обозначениях которой $\text{Spec}(\chi_{<c>})$ – это множество всех различных неприводимых компонент характера $\chi_{<c>}$ без учета их кратности. Это множество называется спектром характера χ на элементе c . Понятно, что

$$|\text{Spec}(\chi_{<c>})| \leq o(c) = q_1,$$

а из предпоследнего выделенного выражения также следует, что

$$|\text{Spec}(\chi_{<c>})| \leq \beta(1) + \beta_1(1).$$

Так как $q_1 \neq q$ не делит $\chi(1) = q^\alpha$, то по утверждению 2) указанной леммы справедливо одно из следующих утверждений:

а) $q_1 = 2$ и $c \in Z(\chi)$;

б) $|Spec(\chi_{<c>})| = q_1 - 1$ и $q_1 - 1$ делит $\chi(1)$;

в) $|Spec(\chi_{<c>})| = q_1$.

Поскольку $Z(\chi) = Z(B_q)$ и $c \notin B_q$, то не может выполняться утверждение 1), т. е. $q_1 \neq 2$. Тогда $q_1 > 2$ и $q_1 - 1$ – четное число и оно не делит $\chi(1)$. Значит, может выполняться только утверждение в), т. е. $|Spec(\chi_{<c>})| = q_1$. Так как $\beta_1(1) = 2$,

$$Spec(\chi_{<c>}) = Spec(\beta_{<c>}) \cup Spec((\beta_1)_{<c>})$$

и $\beta(1) + \beta_1(1) = 3$, то $|Spec(\chi_{<c>})| = o(c) \leq 3$.

Итак, $o(c) \in \{2; 3\}$.

Лемма 3.17 доказана.

Так как $A \not\triangleleft \Gamma^{(q_1)}$, то к подгруппе $\Gamma^{(q_1)}$ и к ее характеру $\widehat{\chi}_{\Gamma^{(q_1)}}$ применима лемма 3.2 [1]. По ней $\widehat{\chi}_{\Gamma^{(q_1)}} = \eta + \theta$, где η – такой характер наибольшей степени, что $A \ker \eta / \ker \eta \triangleleft \Gamma^{(q_1)} / \ker \eta$ и θ – такой характер наибольшей степени, что $A \ker \theta / \ker \theta \not\triangleleft \Gamma^{(q_1)} / \ker \theta$.

Лемма 3.18. *Выполняется: характер $\eta \neq 0$ и характер θ неприводим одной из степеней: $\theta(1) = |A|$ или $\theta(1) = 2|A|$.*

Доказательство. Предположим, что $\eta = 0$. Тогда $\theta(1) = 2|A| + 1$. Допустим также, что характер θ неприводим. Поскольку $\Gamma^{(q_1)} \neq \Gamma$, то мы можем применить индукцию, по которой

$$Y^{(q_1)} = O_q(Y^{(q_1)})C_{Y^{(q_1)}}(A).$$

Отсюда вытекает, что $B_{q_1} \subseteq C_{Y^{(q_1)}}(A) \subseteq C$. Это противоречит выбору простого числа q_1 .

Итак, $\eta = 0$ и характер θ приводим. Тогда из леммы 2.10 [1] вытекает, что он является суммой неприводимых компонент θ_1 и θ_2 степеней $|A|$ и $|A| + 1$ соответственно и $|A| + 1 = 2^{\alpha_1}$, $\alpha_1 \in \mathbb{N}$. По лемме 3.2 [1]

$$Y^{(q_1)} = O_2(Y^{(q_1)})C_{Y^{(q_1)}}(A).$$

Отсюда вытекает, что $B_{q_1} \subseteq C_{Y^{(q_1)}}(A)$, если $q_1 \neq 2$. Противоречие с выбором простого числа q_1 .

Поэтому мы делаем вывод, что $q_1 = 2$.

Продолжим исследовать этот случай. Очевидно,

$$q^\alpha = 2|A| + 1 = 2(|A| + 1) - 1 = 2 \cdot 2^{\alpha_1} - 1 = 2^{\alpha_1+1} - 1.$$

Значит, $\alpha = 1$ и $\widehat{\chi}(1) = q$ – простое число Мерсенна. Следовательно, $\alpha_1 + 1$ – нечетное число. Поэтому α_1 – четное число. Значит,

$$|A| = (2^{\alpha_1} - 1) = (2^{\alpha_1/2} - 1)(2^{\alpha_1/2} + 1)$$

делится на 3. Следовательно, $\overline{B}$ – простая $3'$ -группа. Такой может быть только группа Судзуки $Sz(d)$, $d = 2^{2m+1}$, $m \in \mathbb{N}$, порядка

$$d^2(d-1)(d^2+1) = d^2(d-1)(d+2r+1)(d-2r+1), \quad r = 2^m.$$

Как в доказательстве утверждения 3.15.2 [4] мы устанавливаем, что в этом случае $|\overline{B} : \overline{C}|$ – степень 2. Так как $\overline{B} = B/(Z(B_q) = Z(\Gamma))$ и $\overline{C} = C/Z(B_q)$, то мы видим, что $|B : C|$ степень 2. По лемме 2.9 [1] $B = O_2(B)C$. Это означает, что $B_q \subseteq C$ и противоречит лемме 3.3 [2]. Значит, характер θ не может быть и приводимым в случае, когда $\theta(1) = 2|A| + 1$.

Остался случай, когда $\theta(1) \neq 2|A| + 1$. Следовательно, $\eta \neq 0$.

По лемме 3.2 [1]

$$\theta(1) \in \{|A| - 1; |A|; |A| + 1; 2(|A| - 1); 2|A| - 1; 2|A|\}.$$

При этом

$$Y^{(q_1)} = (\ker \eta)_{\pi'} C_{Y^{(q_1)}}(A); \quad A \ker \eta \triangleleft \Gamma^{(q_1)}; \quad [Y^{(q_1)}, A] \subseteq (\ker \eta)_{\pi'},$$

характер $\theta_{A \ker \eta}$ точный и, если $\theta(1) \neq 2(|A| - 1)$ и $\theta(1) \neq 2|A|$, то неприводимый. Кроме всего этого, если $\theta(1) \neq |A|$ и $\theta(1) \neq 2|A|$, то $\theta(1)$ – степень некоторого простого числа r .

Исследуем эти значения.

Допустим, что $\theta(1) = |A| - 1$. По лемме 2.11 [1]

$$|A| - 1 = 2^k, \quad |A \ker \eta : Z(\theta_{A \ker \eta})| = |A| 2^{2k}, \quad k \in \mathbf{N},$$

и

$$(\ker \eta)_{\pi'} = O_2(A \ker \eta) Z(\theta_{A \ker \eta}), \quad (O_2(A \ker \eta))' \subseteq Z(\theta_{A \ker \eta}).$$

Очевидно, что $Z(\theta_{A \ker \eta}) \subseteq Z(\theta)$ и что $Z(\theta_{A \ker \eta}) \subseteq \ker \eta \subseteq Z(\eta)$. Стало быть, по лемме 5 [9]

$$Z(\theta_{A \ker \eta}) \subseteq Z(\theta) \cap Z(\eta) = Z(\Gamma^{(q_1)}).$$

Это означает, что

$$Z(\theta_{A \ker \eta}) \subseteq C_{Y^{(q_1)}}(A).$$

Поэтому

$$Y^{(q_1)} = O_2(A \ker \eta) C_{Y^{(q_1)}}(A)$$

и, значит, $|Y^{(q_1)} : C_{Y^{(q_1)}}(A)|$ является степенью 2. Поэтому простое число $r = 2$ может быть одним из выбранных, т. е. $r = q_1 = 2$. Из последнего выделенного равенства следует, что

$$AO_2(A \ker \eta) \triangleleft \Gamma^{(q_1)}.$$

Предположим, что $B_2 \not\subseteq C$. Отсюда, из теоремы Клиффорда, из того, что $A \not\triangleleft AO_2(A \ker \eta)$ и из леммы 2.10 [1] вытекает, что характер $\theta_{AO_2(A \ker \eta)}$ неприводим. Тогда и характер $\theta_{O_2(A \ker \eta)}$ также неприводим. Следовательно, $(O_2(A \ker \eta))' \neq 1$.

Пусть инволюция $z \in (O_2(A \ker \eta))'$. Мы видим, что

$$\widehat{\chi}(z) = \eta(z) + \theta(z) = (|A| + 2) + (-(|A| - 1)) = 3,$$

ибо $z \in \ker \eta$,

$$\eta(1) = \widehat{\chi}(1) - \theta(1) = (2|A| + 1) - (|A| - 1) = |A| + 2$$

и характер $\widehat{\chi}$ точный. Однако, с другой стороны, $z \in Z(\Gamma^{(q_1)}) \subseteq C_{Y^{(q_1)}}(A) \subseteq C$. Поэтому

$$\widehat{\chi}(z) = (\chi_C)_{C_{Y^{(q_1)}}(A)}(z)$$

и мы можем воспользоваться леммой 2.7 [1]. Учитывая, что $\chi(1) = 2|A| + 1$, мы легко проверяем, что ни одно из утверждений леммы 2.7 не подходит.

Например, пусть выполняется утверждение (1) леммы 2.7, т. е. в ее обозначениях $\chi_C = \beta + |A|\beta_1$, $\beta(1) = |A| + 1$ и $\beta_1(1) = 1$. Тогда

$$\chi(z) = \beta(z) + |A|\beta_1(z) = \pm(|A| + 1) \mp |A| \neq 3.$$

Подобным образом мы проверяем оставшиеся утверждения леммы 2.7 [1]. Полученное противоречие указывает на то, что и $B_2 \subseteq C$ при $\theta(1) = |A| - 1$. Делаем вывод, что $\theta(1) \neq |A| - 1$.

Пусть $\theta(1) = |A| + 1$. Этот случай мы рассматривали чуть ранее.

Рассмотрим теперь случай, когда $\theta(1) = 2(|A| - 1)$. По утверждению (1_i) леммы 3.2 [1] $2(|A| - 1) = 2^{\alpha_1}$, $\alpha_1 \in \mathbf{N}$, и

$$(\ker \eta)_{\pi'} = O_2((\ker \eta)_{\pi'}) C_{(\ker \eta)_{\pi'}}(A).$$

Тогда $q_1 = 2$ и из выделенного выражения выше вытекает, что

$$Y^{(q_1)} = O_2((\ker \eta)_{\pi'}) C_{Y^{(q_1)}}(A).$$

Отсюда следует, что

$$AO_2((\ker \eta)_{\pi'}) \triangleleft \Gamma^{(q_1)}.$$

Поэтому из теоремы Клиффорда вытекает, что характер $\theta_{AO_2((\ker \eta)_{\pi'})}$ неприводим или имеет одну неприводимую компоненту ψ степени $|A| - 1$ или две сопряженные ψ и ψ^g , $g \in \Gamma^{(2)} \setminus AO_2((\ker \eta)_{\pi'})$, компоненты той же степени.

Если характер $\theta_{AO_2((\ker \eta)_{\pi'})}$ не является неприводимым, то как и в случае, когда $\theta(1) = |A| - 1$, мы придем к противоречию со значением $\chi(z)$ для инволюции $z \in Z(AO_2((\ker \eta)_{\pi'}))$.

Предположим, что характер $\theta_{AO_2((\ker \eta)_{\pi'})}$ неприводим. Тогда неприводим и характер $\theta_{O_2((\ker \eta)_{\pi'})}$. Поэтому

$$1 \neq Z(O_2((\ker \eta)_{\pi'})) = Z(\theta_{AO_2((\ker \eta)_{\pi'})}),$$

и существует инволюция $z \in Z(AO_2((\ker \eta)_{\pi'}))$. Тогда

$$\widehat{\chi}(z) = \eta(z) + \theta(z) = 3 + (-(2|A| - 2)) = -2|A| + 5.$$

Поскольку $z \in C$, то, с другой стороны,

$$\chi(z) = \beta(z) + |A|\beta_1(z),$$

если выполняется утверждение (1) или (2) леммы 2.7 [1].

Из двух последних выделенных выражений вытекает, что

$$\beta(z) + |A|\beta_1(z) = -2|A| + 5.$$

Значит,

$$|A|(\beta_1(z) + 2) = 5 - \beta(z)$$

– равенство двух целых рациональных чисел, ибо $o(z) = 2$.

Допустим, что выполняется утверждение (2) леммы 2.7 [1], т. е. $\beta(1) = 1$. Тогда $\beta(z) = \pm 1$ и, значит, $|A|$ делит $5 + 1 = 6$ или $5 - 1 = 4$. Так как $|A|$ – подгруппа нечетного порядка большего 3, то мы получили противоречие.

Допустим теперь, что выполняется утверждение (1) леммы 2.7 [1], т. е. $\beta(1) = |A| + 1$. Тогда из утверждения (1) леммы 2.6 [1] вытекает, что

$$\widehat{\chi}_A = \rho_A + (|A| + 1)1_A.$$

Следовательно,

$$\alpha_A = (\widehat{\chi}_A, 1_A)_A = |A| + 2.$$

С другой стороны,

$$\widehat{\chi}_A = (\widehat{\chi}_{\Gamma^{(2)}})_A = (\eta_{AO_2((\ker \eta)_{\pi'})})_A + (\theta_{AO_2((\ker \eta)_{\pi'})})_A.$$

Поскольку характер $\theta_{AO_2((\ker \eta)_{\pi'})}$ точный и неприводимый степени $2|A| - 2$, то мы можем применить лемму 12 [9], по которой группа $AO_2((\ker \eta)_{\pi'})$ имеет такой неприводимый характер $\widehat{\theta}$, что $\widehat{\theta}_A = 2\rho_A - 2 \cdot 1_A$. По утверждению (2) леммы 2.6 [1]

$$(\theta_{AO_2((\ker \eta)_{\pi'})})_A = (\widehat{\theta}_A)\lambda^{-1} = (2\rho_A - 2 \cdot 1_A)\lambda^{-1} = 2\rho_A - 2\lambda^{-1}$$

для некоторого линейного характера λ подгруппы A . Отсюда мы видим, что

$$\alpha^{(1)} = ((\theta_{AO_2((\ker \eta)_{\pi'})})_A, 1_A)_A = ((2\rho_A - 2\lambda^{-1})_A, 1_A)_A \leq 2.$$

Поскольку $\eta(1) = \widehat{\chi}(1) - \theta(1) = (2|A| + 1) - (2|A| - 2) = 3$, то

$$\alpha^{(2)} = ((\eta_{AO_2((\ker \eta)_{\pi'})})_A, 1_A)_A \leq 3.$$

Тогда мы видим, что $\alpha_A = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} = |A| + 2 \leq 5$. Отсюда следует, что $|A| \leq 3$, что противоречит условию (*).

Утверждения (1) и (2) леммы 2.7 [1] выполняться не могут.

Допустим, что выполняется ее утверждение (3), т. е.

$$\chi_C = \beta + 2|A|\beta_1,$$

$\beta(1) = \beta_1(1) = 1$. Так как $z \notin Z(\chi) = Z(\Gamma)$, то

$$\chi(z) = \beta(z) + 2|A|\beta_1(z) = \pm 2|A| \mp 1 \neq -2|A| + 5.$$

Аналогичным образом мы убеждаемся в том, что не могут выполняться утверждения (4), (5), (12) и (15) леммы 2.7 [1].

Мы доказали, что $\theta(1) \neq 2(|A| - 1)$.

Предположим, что $\theta(1) = 2|A| - 1 \neq 17$. По лемме 3.2 [1]

$$Y^{(q_1)} = O_{q_1}(Y^{(q_1)})C_{Y^{(q_1)}}(A), \quad 2|A| - 1 = (q_1)^{\alpha_1}, \alpha_1 \in \mathbf{N}.$$

Отсюда мы видим, что

$$AO_{q_1}(Y^{(q_1)}) \triangleleft \Gamma^{(q_1)}.$$

Так как мы рассматриваем случай, когда $Y^{(q_1)} \not\subseteq C$, то с применением теоремы Клиффорда и леммы 2.10 [1] мы убеждаемся в том, что характер $\theta_{AO_{q_1}(Y^{(q_1)})}$ неприводим. Тогда неприводим и характер $\theta_{O_{q_1}(Y^{(q_1)})}$ и поэтому существует элемент $1 \neq g \in Z(O_{q_1}(Y^{(q_1)}))$ простого порядка q_1 . Так как $Z(O_{q_1}(Y^{(q_1)})) \subseteq Z(\theta)$ и $g \in \ker \eta$, то с применением леммы 5 [9] мы убеждаемся в том, что $g \in Z(\Gamma^{(q_1)})$. Следовательно,

$$\widehat{\chi}(g) = \eta(g) + \theta(g) = 2 + (2|A| - 1)\xi, \quad \xi \neq 1,$$

и $\xi^{q_1} = 1$.

С другой стороны, поскольку $g \in C$, то мы можем применить лемму 2.7 [1]. Легко убедиться в том, что

$$\chi(g) \neq 2 + (2|A| - 1)\xi, \quad \xi \neq 1$$

для каждого такого ее утверждения, для которого $\chi(1) = 2|A| + 1$.

Предположим теперь, что $\theta(1) = 2|A| - 1 = 17$. Тогда $|A| = 9$, т. е. $\bar{B}$ – простая $3'$ -группа. Ранее мы показали, что это невозможно.

Лемма доказана.

Нам осталось рассмотреть случаи, когда $\theta(1) = |A|$ или $\theta(1) = 2|A|$ для любой такой A -инвариантной подгруппы $Y^{(q_1)} \subseteq B$, что $B_{q_1} \subseteq Y^{(q_1)}$ и $B_{q_1} \not\subseteq C$.

Лемма 3.19. *Выполняется: $\theta(1) \neq 2|A|$.*

Доказательство. Пусть для некоторого простого числа $q_1 \in \pi(|B : C|)$ и для максимальной подгруппы $Y^{(q_1)}$ выполняется утверждение, что $\theta(1) = 2|A|$. Тогда $\eta(1) = 1$ и из леммы 3.2 [1] вытекает, что

$$A \ker \eta \triangleleft \Gamma^{(q_1)}, \quad Y^{(q_1)} = (\ker \eta)_{\pi} C_{Y^{(q_1)}}(A)$$

и характер $\theta_{A \ker \eta}$ точный. Также по лемме 3 [9] $[Y^{(q_1)}, A] \subseteq \ker \eta$.

Допустим, что характер θ не является неприводимым. По утверждению (1_{vi}) леммы 3.2 [1] подгруппа $Y^{(q_1)}$ абелева. Так как $N^{(q_1)} \subseteq Y^{(q_1)}$, то мы можем применить теорему Бернсайда. По ней подгруппа B содержит нормальное q_1 -дополнение R . Тогда $Z(B_q) \subseteq R$ и $\bar{R} = R/Z(B_q) \triangleleft \bar{B}$, что противоречит тому, что $\bar{B}$ – простая группа.

Значит, характер θ неприводим.

По теореме Клиффорда

$$\theta_{Y^{(q_1)}} = \sum_{a \in A} (\beta)^a,$$

где β – неприводимый характер степени 2 подгруппы $Y^{(q_1)}$. Отсюда, из того, что $Y^{(q_1)} \subseteq Z(\eta)$, ибо $\eta(1) = 1$, а также из леммы 5 [9] и из леммы 5.11 [6] вытекает, что

$$Z(\theta_{Y^{(q_1)}}) = \cap_{a \in A} Z(\beta^a) = Z(Y^{(q_1)}); \quad \ker \theta = \cap_{a \in A} \ker \beta^a.$$

Так как $Z(\theta_{Y^{(q_1)}}) \subseteq Z(\theta)$ и $\ker \theta \subseteq Z(\theta) \subseteq Z(\eta)$, то по лемме 5 [9] $Z(\theta) = Z(\Gamma^{(q_1)})$. Поскольку $A \cap Z(\Gamma^{(q_1)}) = 1$, то мы можем записать, что

$$\ker \theta \subseteq Z(\theta) = Z(\Gamma^{(q_1)}) = Z(Y^{(q_1)}).$$

Так как по лемме 2.27(f) [6]

$$Z(\beta)/\ker \beta = Z(Y^{(q_1)}/\ker \beta),$$

то отсюда и из теоремы 14.23 [6] вытекает, что

$$|(Y^{(q_1)})^*| = |Y^{(q_1)}/Z(Y^{(q_1)}/\ker \beta)| = |Y^{(q_1)}/Z(\beta)| = 2^2 \cdot 3; \quad 2^3 \cdot 3; \quad 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Из выделенного выше выражения вытекает, что группа $Y^{(q_1)}$ изоморфна некоторой подгруппе из прямого произведения

$$\bar{Y}^{(q_1)} = Y^{(q_1)} / Z(Y^{(q_1)}) = \prod_{a \in A} Y^{(q_1)} / Z(\beta^a).$$

Отсюда следует, что, если простое число $q_1 \notin \pi(|(Y^{(q_1)})^*|)$, то подгруппа $B_{q_1} \subseteq Z(\beta)$. Поскольку подгруппа B_{q_1} – A -инвариантна, то $B_{q_1} = (B_{q_1})^a \subseteq (Z(\beta))^a$ для каждого элемента $a \in A$. Поэтому $B_{q_1} \subseteq Z(Y^{(q_1)})$ для $q_1 > 5$. Так как $(N^{(q_1)})_{\pi'} \subseteq Y^{(q_1)}$, то по теореме Бернсайда группа B содержит нормальное q_1 -дополнение R , что не так по лемме 3.17. Следовательно,

$$q_1 \in \pi(|(Y^{(q_1)})^*|)$$

и для всех простых делителей

$$r \in \pi' \setminus \pi(|(Y^{(q_1)})^*|) \cup q; \quad B_r \subseteq C.$$

Мы делаем вывод, что

$$q_1 \in \{2; 3; 5\}; \quad q_1 \neq q.$$

Понятно, что характер β может быть примитивным или импримитивным.

Предположим, что характер β примитивный.

Рассмотрим случай, когда факторгруппа $\Gamma^{(q_1)} / \ker \theta$ неразрешима. Тогда из утверждения (2.iii) [10] и из того, что $Z(\theta) = Z(Y^{(q_1)}) \subseteq Z(\beta^a)$, $a \in A$, вытекает, что факторгруппа

$$\bar{Y}^{(q_1)} = Y^{(q_1)} / Z(Y^{(q_1)}) \cong (PSL(2; 5))^{a_1=1} \times \dots \times (PSL(2; 5))^{a_{|A|}}$$

либо

$$\bar{Y}^{(q_1)} \cong C_{Y^{(q_1)}}(A) / C_{Y^{(q_1)}}(A) \cap Z(Y^{(q_1)}) \cong (PSL(2; 5)), \quad (Y^{(q_1)})_{\{2; 3; 5\}} \subseteq C_{Y^{(q_1)}}(A).$$

Мы видим, что при выполнении последнего утверждения получим, что $B_{q_1} \subseteq C$, что противоречит выбору простого числа q_1 .

Стало быть, может выполняться только первое утверждение и $|(Y^{(q_1)})^*| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, т. е.

$$(Y^{(q_1)})^* \cong PSL(2; 5)$$

и факторгруппа $\bar{Y}^{(q_1)}$ является прямым произведением $|A|$ копий группы $PSL(2; 5)$.

Предположим, что $C_{B_{q_1}}(A) = 1$ для каждого простого числа $q_1 \in \{2; 3; 5\}$. Тогда $C_{Y^{(q_1)}}(A) = C_{Y^{(q_1)}}(a) = 1$ для каждого элемента $a \in A$. Тогда подгруппа $Y^{(q_1)}$ является ядром группы Фробениуса $\Gamma^{(q_1)}$ и поэтому нильпотентна, что не так.

Значит, $C_{B_{q_1}}(A) \neq 1$ для некоторого простого числа $q_1 \in \{2; 3; 5\}$.

Допустим, что существует элемент $1 \neq c_1 \in C_{B_{q_1}}(A)$, $c_1 \notin Z(\beta)$ для некоторого простого числа $q_1 \in \{2; 3; 5\}$. Тогда $A \subseteq C_{(Y^{(q_1)})^*}(\langle c_1 \rangle Z(\beta) / Z(\beta))$. Следовательно,

$$\langle c_1 \rangle Z(\beta) / Z(\beta) = \langle c_1 \rangle Z(\beta) / Z(\beta)$$

для каждого элемента $a \in A$. Так как $\bigcap_{a \in A} \ker \beta^a = Z(Y^{(q_1)})$, то произведение

$$\bar{Y}^{(q_1)} = \prod_{a \in A} Y^{(q_1)} / Z(\beta^a) \cong \prod_{a \in A} (PSL(2; 5))^{a \in A}$$

не является прямым, ибо подгруппа

$$\langle c_1 \rangle Z(\beta) / Z(\beta) \subseteq (Y^{(q_1)} / Z(\beta^{a_i})) \cap (Y^{(q_1)} / Z(\beta^{a_j})), \quad i \neq j.$$

Это противоречит ранее доказанному утверждению о том, что группа $\bar{Y}^{(q_1)}$ является прямым произведением $|A|$ копий группы $PSL(2; 5)$.

Значит, $C_{B_{q_1}}(A) \subseteq Z(\beta)$ для каждого простого числа $q_1 \in \{2; 3; 5\}$.

Пусть $1 \neq c \in C_{B_{q_1}}(A)$. Тогда $aca^{-1} = c$ для каждого элемента $a \in A$ и, значит,

$$\theta(c) = \sum_{a \in A} \beta^a(c) = 2 \sum_{a \in A} \lambda^a(c) = 2 \sum_{a \in A} \lambda(aca^{-1}) = 2|A|\lambda(c), \quad \beta_{Z(\beta)} = 2\lambda, \quad \lambda(1) = 1.$$

Следовательно, $c \in Z(\theta)$. Поскольку c произвольный элемент $C_{B_{q_1}}(A)$ для произвольного простого числа q_1 , то

$$C_{Y^{(q_1)}}(A) \subseteq Z(\theta) = Z(\Gamma^{(q_1)}).$$

Из теоремы В [11] вытекает, что подгруппа $Y^{(q_1)}$ разрешима. Это противоречит рассматриваемому случаю, когда факторгруппа $\Gamma^{(q_1)}/\ker \theta$ и, значит, подгруппа $Y^{(q_1)}$ неразрешима.

Рассмотрим теперь случай, когда факторгруппа $\Gamma^{(q_1)}/\ker \theta$ разрешима. Тогда разрешима и подгруппа $Y^{(q_1)}$ и

$$(Y^{(q_1)})^* = Y^{(q_1)}/Z(\beta) \not\cong PSL(2; 5).$$

По утверждению (2_{ii}) теоремы [10] факторгруппа

$$(Y^{(q_1)})^* \cong S_4; \quad Y^{(q_1)} = (Y^{(q_1)})_{\{2;3\}} \times (Y^{(q_1)})_{\{2;3\}'}, \quad (Y^{(q_1)})_{\{2;3\}'} \subseteq Z((Y^{(q_1)}))$$

или

$$(Y^{(q_1)})^* \cong A_4; \quad Y^{(q_1)} = (Y^{(q_1)})_{\{3\}} F(Y^{(q_1)}), \quad (Y^{(q_1)})_{\{2;3\}'} \subseteq Z((Y^{(q_1)}))$$

с неабелевой подгруппой $F(Y^{(q_1)})_2$.

Допустим, что $q_1 > 3$. Как и чуть ранее убеждаемся в том, что группа B содержит нормальное q_1 -дополнение R , что не так.

Поэтому $q_1 \in \{2; 3\}$ и $B_r \subseteq C$ для всех $r \in \{\pi(B) \setminus \{2; 3; q\}\}$.

Следовательно, $(Y^{(q_1)})_{\{2;3\}'} \subseteq C$ и поэтому

$$\Gamma^{(q_1)} = A(Y^{(q_1)})_{\{2;3\}} \times (Y^{(q_1)})_{\{2;3\}'}, \quad (Y^{(q_1)})_{\{2;3\}'} \subseteq Z((\Gamma^{(q_1)})).$$

Так как группы S_4 и A_4 не являются нильпотентными, то $C_{B_{q_1}}(A) \neq 1$ для $q_1 = 2$ или для $q_1 = 3$. Ранее показано, что $C_{B_{q_1}}(A) \subseteq Z(\Gamma^{(q_1)})$.

Здесь следует заметить, что $C_{B_2}(A) \neq 1$. В самом деле, если это не так и подгруппа $C_2 = C_{B_2}(A) = 1$, то группа C имеет нечетный порядок. Тогда все ее неприводимые характеры имеют нечетную степень. Проанализировав утверждения леммы 2.7 [1], с учетом того, что $\chi(1) = 2|A| + 1$, мы убеждаемся в том, что все неприводимые компоненты характера χ_C линейные. Мы получаем, что подгруппа C абелева. По теореме В [11] группа B разрешима, что не так по лемме 3.17.

Так как $Y^{(q_1)} \subseteq N_B(C_{B_2}(A))$ и подгруппа $Y^{(q_1)}$ максимальная A -инвариантная в группе B , то $Y^{(q_1)} = N_B(C_{B_2}(A))$. Поскольку $C_{B_2}(A) \subseteq C \subseteq B$, то мы замечаем, что подгруппа $C_{B_2}(A) \subseteq Z(Y^{(q_1)})$. По теореме Бернсайда группа C содержит нормальное 2-дополнение $C_{2'}$ нечетного порядка. Как чуть ранее убеждаемся в том, что подгруппа $C_{2'}$ абелева. Понятно, что $(Y^{(q_1)})_{\{2;3\}'} \subseteq C_{2'}$.

Допустим, что $((Y^{(q_1)})_{\{2;3\}'})_{q'} \neq 1$. Тогда

$$L = \langle Y^{(q_1)}, C \rangle \subseteq C_B(((Y^{(q_1)})_{\{2;3\}'}))_{q'}.$$

Поскольку подгруппа L является A -инвариантной и подгруппа $Y^{(q_1)}$ максимальна в группе B , то $L = Y^{(q_1)}$ или $L = B$. В первом случае мы получаем, что подгруппа $C \subseteq Y^{(q_1)}$ и, значит, абелева, что приводит к противоречию с простотой группы B , во втором случае мы получаем, что

$$1 \neq ((Y^{(q_1)})_{\{2;3\}'})_{q'} \subseteq Z(B),$$

что противоречит лемме 3.17.

Следовательно, $((Y^{(q_1)})_{\{2;3\}'})_{q'} = 1$ и, значит, подгруппа

$$Y^{(q_1)} = (Y^{(q_1)})_{\{2;3\}} \times Z(B_q)$$

максимальна в B и разрешима.

Нетрудно видеть, что

$$|\bar{B}| = |\bar{Y}^{(q_1)}| |\bar{C}| |\bar{B}_q|,$$

где $\bar{Y}^{(q_1)} = Y^{(q_1)}/Z(B_q)$, $\bar{C} = C/Z(B_q)$ и $\bar{B}_q = B_q/Z(B_q)$. Так как $\bar{Y}^{(q_1)}$ – максимальная $\{2; 3\}$ -подгруппа в $\bar{B}$, подгруппа $\bar{C}_{2'}$ абелева и подгруппа $\bar{B}_q$ примарная, а также по лемме 3.16 $\bar{Y}^{(q)} = Y^{(q)}/Z(B_q)$ является максимальной разрешимой в подгруппе $\bar{B}$, то мы можем утверждать, что каждая максимальная

в $\bar{B}$ подгруппа разрешима. Это же мы можем сказать и о максимальных подгруппах группы B . По лемме 1 [12] группа B либо разрешима, либо группа $\bar{B}$ изоморфна одной из следующих групп:

- (1) $L_2(p)$, где p – простое число, $p > 3$ и $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{5}$;
- (2) $L_2(2^p)$, где p – нечетное простое число;
- (3) $L_2(3^p)$, где p – нечетное простое число;
- (4) $L_3(3)$;
- (5) $Sz(2^p)$, где p – нечетное простое число.

Допустим, что $\bar{B} \cong L_2(p)$, p – простое число. Так как все ее подгруппы Силова нечетного порядка циклические, то и подгруппа $\bar{B}_q = B_q/Z(B_q)$ также циклическая. Получаем, что подгруппа B_q абелева, что не так, ибо она имеет нелинейный неприводимый характер $\hat{\chi}_{B_q}$.

То же самое можем повторить в случае, когда $\bar{B} \cong L_2(2^p)$, p – нечетное простое число.

Если $\bar{B} \cong L_2(3^p)$, где p – нечетное простое число, то все ее $3'$ -подгруппы Силова нечетного порядка циклические. Поскольку $q \neq 3$, то мы видим, что и этот случай невозможен.

Пусть $\bar{B} \cong L_3(3)$. В этой группе единственная $3'$ -подгруппа Силова порядка 13, т. е. тоже циклическая. Поэтому $q \neq 13$. Этот случай тоже невозможен.

Случай, когда $\bar{B} \cong Sz(2^p)$, где p – нечетное простое число рассматривался в начале доказательства леммы 3.18.

Случай, когда группа B разрешима противоречит лемме 3.17.

Осталось рассмотреть случай, когда характер β импримитивный. По утверждению (2_i) [10] подгруппа $S = (Y^{(q_1)})_{2'} \triangleleft Y^{(q_1)}$ и абелева, а также $Y^{(q_1)} = (Y^{(q_1)})_2 F(Y^{(q_1)})$. К тому же подгруппа $F(Y^{(q_1)})$ абелева тогда и только тогда, когда $(Y^{(q_1)})_2 \not\subseteq F(Y^{(q_1)})$. Нетрудно видеть, что подгруппа $(Y^{(q_1)})_2$ неабелева и что характер $\theta_{A(Y^{(q_1)})_2}$ неприводим. Ранее установлено, что $Z(\theta) = Z(\Gamma^{(q_1)}) = Z(Y^{(q_1)})$. Понятно, что $1 \neq Z((Y^{(q_1)})_2) = C_{B_2}(A)$ и что $Y^{(q_1)} = N_B(C_{B_2}(A))$ в силу максимальности подгруппы $Y^{(q_1)}$. Как чуть ранее убеждаемся в том, что $S = 1$ и, значит, подгруппа $Y^{(q_1)} = B_2$ и максимальна в группе B .

Оставшаяся часть доказательства аналогична предыдущему случаю за исключением, может быть, случая, когда $\bar{B} \cong L_2(3^p)$, где p – нечетное простое число. Простое число q может быть равным 3. Однако в этом случае подгруппа $B_2 \cong \bar{B}_2 = B_2 Z(B_q)/Z(B_q)$ абелева и не может иметь неприводимый характер β степени 2.

Лемма 3.19 доказана.

Осталось рассмотреть только случай, когда $\theta(1) = |A|$.

Лемма 3.20. Если $\theta(1) = |A|$, то $B = Y^{(r)} B_q$ для простого числа $r \in \pi(B)$ и $\bar{B} = (Y^{(r)}/Z(B_q))\bar{B}_q$.

Доказательство проводится аналогично доказательству утверждения 3.15.5 из [4]. При этом неприводимый характер θ в этой работе играет роль характера θ' в той.

Лемма 3.21. Окончание доказательства теоремы (*).

Доказательство. Так как $\theta(1) = |A|$, то по лемме 3.2 [1]

$$Y^{(r)} = [Y^{(r)}, A] \times (C_{Y^{(r)}}(A) = C), \quad [Y^{(r)}, A] \subseteq Z(Y^{(r)}).$$

Тогда

$$\bar{B} = ([Y^{(r)}, A] \times (C_{Y^{(r)}}(A) = C))/Z(B_q) = [Y^{(r)}, A] \times C/Z(B_q).$$

Если $[Y^{(r)}, A] \neq 1$, то по теореме 3.9 [6] группа $\bar{B}$ непростая.

Если же $[Y^{(r)}, A] = 1$, то $B = B_q C$ и по лемме 2.9 [1] $B = O_q(B)C$, что доказывает теорему (*).

Теорема (*) доказана.

Доказательство теоремы

Пусть π – множество нечетных простых чисел и G – конечная не π -замкнутая π -разрешимая группа с π -холловой TI -подгруппой H , имеющая точный неприводимый характер χ степени n . Так как H является TI -подгруппой в G , то

$$O_{\pi', \pi}(G) = H O_{\pi'}(G).$$

Отсюда по лемме Чунихина

$$G = N_G(H) O_{\pi'}(G).$$

Поскольку $O_{\pi', \pi}(G) \triangleleft G$, то отсюда, из теоремы Клиффорда и леммы 2.10 [1] следует, что характер $\chi_{O_{\pi', \pi}(G)}$ неприводим. Очевидно, что и характер $\chi_{O_{\pi'}(G)}$ также неприводим и H -инвариантный. По лемме 2.5 [1] группа $O_{\pi', \pi}(G)$ имеет характер $\hat{\chi}$, который, легко видеть, точный. По лемме 2.1 [1] $C_{O_{\pi'}(G)}(h) = C_{O_{\pi'}(G)}(H) = C$ для каждого элемента $h \in H^\#$. Нетрудно заметить, что для $O_{\pi', \pi}(G)$, A , $O_{\pi'}(G)$, C , $\chi_{O_{\pi'}(G)}$ и n выполняется условие (*). Так как $n = q^\alpha = 2|H| + 1 > 7$, то $|H| > 3$. По теореме (*) $O_{\pi'}(G) = O_q(O_{\pi'}(G))C$. Тогда легко видеть, что $O_q(O_{\pi'}(G)) \subseteq O_q(G)$ и что

$$G = N_G(H)O_q(G).$$

Теорема доказана.

Литература

1. Ядченко А. А. О разрешимости и факторизации некоторых π -разрешимых неприводимых линейных групп примарной степени. Часть I // Труды Института математики. 2022. Т. 30, № 1–2. С. 84–98.
2. Ядченко А. А. О разрешимости и факторизации некоторых π -разрешимых неприводимых линейных групп примарной степени. Часть II // Труды Института математики. 2023. Т. 31, № 1. С. 77–89.
3. Ядченко А. А. О разрешимости и факторизации некоторых π -разрешимых неприводимых линейных групп примарной степени. Часть III // Труды Института математики. 2023. Т. 31, № 2. С. 91–102.
4. Ядченко А. А. О разрешимости и факторизации некоторых π -разрешимых неприводимых линейных групп примарной степени. Часть IV // Труды Института математики НАН Беларуси. 2024. Т. 32, № 2. С. 17–30.
5. Gorenstein D. Finite groups. New York: Harper and Row, 1968. 527 p.
6. Isaacs I. M. Character theory of finite groups. New York: Academic Press, 1976. 303 p.
7. Ядченко А. А. О конечных π -разрешимых линейных группах // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Минск: Наука и техника, 1986. С. 181–207.
8. Ядченко А. А. О спектрах p -элементов конечных комплексных p -разрешимых линейных групп // Математические заметки. 1991. Т. 50, № 3. С. 143–151.
9. Ядченко А. А. О π -разрешимых неприводимых линейных группах с холловой TI -подгруппой нечетного порядка I // Труды Института математики. 2008. Т. 16, № 2. С. 118–130.
10. Ядченко А. А. О нормальных подгруппах и факторизации некоторых π -разрешимых неприводимых линейных групп // Труды Института математики. 2021. Т. 29, № 1–2. С. 149–164.
11. Beltran A. Actions with nilpotent fixed point subgroup // Archiv der Mathematik. 1997. Vol. 69, N 3. P. 177–184.
12. Ведерников В. А. Конечные группы, в которых каждая неразрешимая максимальная подгруппа холлова // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 71–82.

References

1. Yadchenko A. A. On the solvability and factorization of some π -solvable irreducible linear groups of primary degree. Part I. *Trudy Instituta matematiki*, 2022, vol. 30, no. 1–2, pp. 84–98 (in Russian).
2. Yadchenko A. A. On the solvability and factorization of some π -solvable irreducible linear groups of primary degree. Part II. *Trudy Instituta matematiki*, 2023, vol. 31, no. 1, pp. 77–89 (in Russian).
3. Yadchenko A. A. On the solvability and factorization of some π -solvable irreducible linear groups of primary degree. Part III. *Trudy Instituta matematiki*, 2023, vol. 31, no. 2, pp. 91–102 (in Russian).
4. Yadchenko A. A. On the solvability and factorization of some π -solvable irreducible linear groups of primary degree. Part IV. *Proceedings of the Institute of Mathematics of the NAS of Belarus*, 2024, vol. 32, no. 2, pp. 17–30 (in Russian).
5. Gorenstein D. *Finite groups*. New York, Harper and Row, 1968, 527 p.

6. Isaacs I. M. *Character theory of finite groups*. New York, Academic Press, 1976, 303 p.
7. Yadchenko A. A. *On finite π -solvable linear groups in The Arithmetic end Subgroup Structure of Finite Groups*. Minsk, Nauka i Tekhnika, 1986, pp. 181–207.
8. Yadchenko A. A. Spectra of p -elements of finite p -solvable complex linear groups. *Math notes*, 1991, vol. 50, no. 3. pp. 143–151 (in Russian).
9. Yadchenko A. A. On the π -solvable irreducible linear groups with Hall TI -subgroups of odd order I. *Trudy Instituta matematiki*, 2008, vol. 16, no. 2, pp. 118–130 (in Russian).
10. Yadchenko A. A. On the normal subgroups and factorization some π -solvable irreducible linear groups. *Trudy Instituta matematiki*, 2021, vol. 29, no. 1–2, pp. 149–164 (in Russian).
11. Beltran A. Actions with nilpotent fixed point subgroup. *Archiv der Mathematik*, 1997, vol. 69, no. 3, pp. 177–184.
12. Vedernikov V. A. Finite groups in which every non-solvable maximal subgroup is a Hall subgroup. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN*, 2013, vol. 19, no. 3, pp. 71–82 (in Russian).