Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Том 33. № 1. С. 34–43

УДК 519.16, 512.64:(004.85+538.9)

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ ВАРИАНТОВ CUT-НОРМЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ

П. Н. Шведков[1], К. В. Лыков[2]

[1]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*
[2]*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*
e-mail: shvedkovpavel@gmail.com, alkv@list.ru

Поступила: 09.04.2025 **Исправлена:** 23.05.2025 **Принята:** 23.05.2025

Ключевые слова: cut-норма, матричная норма, полилинейные формы, эквивалентность норм, теория графов, комбинаторная оптимизация, квантовые вычисления, ограниченная машина Больцмана, многомерный массив, тензор.

Аннотация. В работе доказана эквивалентность двух специальных матричных норм. Обе нормы возникают в моделях, формулируемых в терминах взаимодействия бинарных переменных. При этом одна норма связана со взаимодействием этих переменных внутри одной группы, а другая – со взаимодействием переменных из разных групп. Утверждение позволяет легко переносить содержательные результаты со второго (более простого) случая на первый.

ALGEBRAIC PROOF OF THE EQUIVALENCE OF TWO VARIANTS OF THE CUT-NORM FOR MULTIDIMENSIONAL SYMMETRIC MATRICES

P. N. Shvedkov[1], K. V. Lykov[2]

[1]*Belarusian State University, Minsk, Belarus*
[2] *Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
e-mail: shvedkovpavel@gmail.com, alkv@list.ru

Received: 09.04.2025 **Revised:** 23.05.2025 **Accepted:** 23.05.2025

Keywords: cut-norm, matrix norm, multilinear forms, equivalence of norms, graph theory, combinatorial optimization, quantum computing, restricted Boltzmann machine, multidimensional array, tensor.

Abstract. The paper proves the equivalence of two special matrix norms. Both norms arise in models formulated in terms of interactions between binary variables. One norm is associated with the interaction of these variables within a single group, while the other is related to the interaction of variables from different groups. The statement allows for an easy transfer of meaningful results from the second (simpler) case to the first.

1. Введение

Известно, что некоторые NP-трудные задачи (например, задачи коммивояжера, о раскраске графа, о покрытии множества и др.) могут быть эффективно решены с помощью квантовых компьютеров. Один из вариантов квантовых компьютеров основан на принципе квантового отжига [1; 2]. Такой квантовый компьютер называется адиабатическим, а наиболее известными вариантами исполнения являются компьютеры канадской компании D-Wave. Опуская тонкости, отметим, что в итоге решение вышеупомянутых задач сводится к минимизации гамильтониана Изинга [3]

$$-\sum_{i<j} J_{ij} s_i s_j - \sum_j h_j s_j,$$

где $s_{i,j} \in \{-1, 1\}$ – значения проекций спинов частиц (кубитов); J_{ij} – энергия взаимодействия частицы i с частицей j, а h_j – воздействие внешнего поля на частицу j, и нахождению минимизирующих этот гамильтониан значений бинарных переменных s_i. Возникающее взаимодействие и динамика соответствующих процессов частично описываются математическими моделями спиновых стекол [4; 5]. Несколько более простая ситуация возникает, когда частицы разделены на две группы, и взаимодействий внутри групп нет. В таком случае и при отсутствии внешнего поля минимизируется билинейная форма (вместо квадратичной)

$$-\sum_{i,j} J_{ij} s_i s'_j,$$

где переменные s_i и s'_j независимы, т. е. представляют спины из разных групп частиц.

Аналогично, в нейросетевых моделях ассоциативной памяти, основанных идейно на теории Хебба [6], сети Хопфилда [7] и ограниченной машине Больцмана [8], минимизируются, соответственно, бинарная квадратичная форма

$$Q(x) := \sum_{i<j} w_{ij} x_i x_j, \quad x_i \in \{0,1\},\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

и бинарная билинейная форма

$$B(y,y') := \sum_{i,j} w_{ij} y_i y'_j, \quad y_i, y'_j \in \{0,1\},\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n),\ y' = (y'_1, y'_2, \ldots, y'_m).$$

В других задачах (например, в задачах из геометрии банаховых пространств [9]) оцениваются распределения абсолютных значений $|S|$ бинарных квадратичных и/или билинейных форм:

$$S(t) := \sum_{i<j} w_{ij} r_i(t) r_j(t) \quad \text{или} \quad S(t,s) := \sum_{i,j} w_{ij} r_i(t) r_j(s), \quad t \in [0,1],$$

где

$$r_i(t) := (-1)^{[2^i t]}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

– функции Радемахера (конкретная реализация последовательности независимых симметричных бернуллиевских случайных величин в виде функций на отрезке $[0,1]$ с мерой Лебега в роли вероятности). При этом для многих задач распределения S и $|S|$ достаточно уметь оценивать лишь с точностью до фиксированных растяжений области значений. При такой постановке задачу минимизации последней формы $S(t,s)$ можно рассматривать как задачу нахождения так называемой cut-нормы матрицы $W = (w_{ij})_{i \in \overline{[1,n]}, j \in \overline{[1,m]}}$, используемой в аппроксимационных алгоритмах комбинаторной оптимизации [10]:

$$\|W\|_{\text{cut}} := \max\left\{\Big|\sum_{i \in I, j \in J} w_{ij}\Big| : I \subset \overline{[1,n]}, J \subset \overline{[1,m]}\right\},$$

где через $\overline{[1,n]}$ здесь и далее обозначен отрезок $\{1, 2, \ldots, n\}$ натурального ряда. Как отмечено в [10],

$$\|W\|_{\text{cut}} \leqslant -\min_{t,s \in [0,1]} S(t,s) = \max_{t,s \in [0,1]} |S(t,s)| \leqslant 4\|W\|_{\text{cut}}.$$

Легко видеть также, что для введенной выше формы $B(y,y')$, отличающейся от $S(s,t)$ условием $y_i, y'_j \in \{0,1\}$, имеет место точное равенство

$$\max_{y \in \{0,1\}^n, y' \in \{0,1\}^m} |B(y,y')| = \|W\|_{\text{cut}}.$$

Хотя задача точного вычисления cut-нормы является NP-трудной, равно как и задача хорошей аппроксимации [11], существуют эффективные алгоритмы вычисления этой нормы с точностью до некоторого фиксированного множителя [12].

Что касается квадратичных форм $S(t)$ и $Q(x)$, то для них, как легко видеть, справедливы соотношения

$$\|W^s\|_{\square} = \max_{x \in \{0,1\}^n} |Q(x)| \leqslant \max_{t \in [0,1]} |S(t)| \leqslant 5\|W^s\|_{\square},$$

где матрица W^s определяется своими элементами

$$(W^s)_{i,j} := \begin{cases} w_{ij}/2, & \text{при } i < j \\ 0\ , & \text{при } i = j \\ w_{ji}/2, & \text{при } i > j \end{cases},$$

а

$$\|W\|_{\square} := \max\Big\{\Big|\sum_{i,j\in I} w_{ij}\Big| : I \subset \overline{[1,n]}\Big\}$$

– симметричный вариант cut-нормы. Несложно показать также, что

$$\|W^s\|_{\square} \leqslant \|W^s\|_{\mathrm{cut}} \leqslant 4\|W^s\|_{\square}.$$

Соотношения, аналогичные приведенным, имеют место и в многомерном случае. В частности, для многомерной симметричной внедиагональной матрицы A справедливы неравенства (точные определения норм и класса рассматриваемых матриц см. далее)

$$\|A\|_{\square} \leqslant \|A\|_{\mathrm{cut}} \leqslant C_d\|A\|_{\square}, \tag{1}$$

где константа C_d зависит от порядка (кратности) d матрицы A, но не зависит ни от размерности этой матрицы (длины одномерных строк, столбцов и т. д.), ни от значений элементов матрицы. Это соотношение не только связывает оценки максимумов абсолютных значений полиномиальных и полилинейных форм, но позволяет решать и другие задачи, связанные с разделением переменных. В работе [13] с помощью соотношения (1) осуществлен переход от многодольных гиперграфов к полным гиперграфам в задаче о разбросе. Однако доказательство правого неравенства в (1) для многомерного случая, по-видимому, не сводится к простым алгебраическим преобразованиям, как это имеет место в двумерном случае, и требует более тонкого анализа. В [13] это неравенство доказывается с помощью обращения к сильному инструменту – известной теореме о декаплинге случайных величин (см. [14, теорема 3.1.1]). В настоящей работе мы даем прямое доказательство неравенства (1), без обращения к теореме о декаплинге.

2. Определения и формулировка основного результата

Через $\overline{[1,n]}$, $n \in \mathbb{N}$, будем обозначать множество $\{1,2,\ldots,n\}$, состоящее из первых n натуральных чисел. Через $\pi(d)$ будем обозначать множество всех перестановок множества $\overline{[1,d]} = \{1,2,\ldots,d\}$, $d \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим кубическую матрицу $A = (a_{i_1,\ldots i_d})_{i_1\in I\ldots i_d\in I}$, $I = \overline{[1,n]}$, порядка d с вещественными или комплексными элементами, и определим для нее две полунормы:

$$\|A\|_{\mathrm{cut}} := \max\Big\{\Big|\sum_{i_1\in I_1}\sum_{i_2\in I_2}\cdots\sum_{i_d\in I_d} a_{i_1i_2\ldots i_d}\Big| : I_k \subset \overline{[1,n]}, k = 1,2,\ldots,d\Big\}$$

и

$$\|A\|_{\square} := \max\Big\{\Big|\sum_{i_1\in I}\sum_{i_2\in I}\cdots\sum_{i_d\in I} a_{i_1i_2\ldots i_d}\Big| : I \subset \overline{[1,n]}\Big\}.$$

Будем называть кубическую матрицу A порядка d *симметричной*, если для ее элементов выполняются следующие условия:

$$a_{i_1i_2\ldots i_d} = a_{i_{\sigma(1)}i_{\sigma(2)}\ldots i_{\sigma(d)}}$$

для произвольной перестановки $\sigma \in \pi(d)$, и, кроме этого, $a_{i_1i_2\ldots i_d} = 0$ при совпадении хотя бы двух индексов $i_k = i_l$, $1 \leqslant k < l \leqslant d$.

Оказывается, что для таких матриц справедлива следующая теорема, являющаяся основным результатом настоящей работы.

Теорема 2.1. *Для каждого натурального $d \geqslant 2$ существует константа C_d такая, что для любой кубической симметричной матрицы A порядка d выполняются неравенства*

$$\|A\|_{\square} \leqslant \|A\|_{\mathrm{cut}} \leqslant C_d\|A\|_{\square}.$$

Перед доказательством теоремы сформулируем и докажем два следствия. Как отмечалось во введении, для квадратичной формы $Q(x)$ и билинейной формы $B(y,y')$ выполняются следующие равенства

$$\max_{x\in\{0,1\}^n} |Q(x)| = \|W^s\|_{\square}$$

и

$$\max_{y\in\{0,1\}^n, y'\in\{0,1\}^m} |B(y,y')| = \|W\|_{\mathrm{cut}}.$$

Аналогично для полилинейной формы $T(x_1,\ldots,x_d)$ и полиномиальной формы $P(x) = T(x,\ldots,x)$ с кубической матрицей A порядка d верно

$$\max_{x_j\in\{0,1\}^n, j=\overline{1,d}} |T(x_1,\ldots,x_d)| = \|A\|_{\mathrm{cut}}$$

и

$$\max_{x\in\{0,1\}^n} |P(x)| = \|A\|_{\Box}.$$

Тогда из теоремы 2.1 прямо вытекают следующие утверждения (с той же константой C_d, что и в теореме 2.1).

Следствие 2.2. *Для полиномиальных форм $P(x)$ и полилинейных форм $T(x_1,\ldots,x_d)$ с матрицами, как в формулировке теоремы* 2.1, *выполняются неравенства*

$$\max_{x\in\{0,1\}^n} |P(x)| \leqslant \max_{x_j\in\{0,1\}^n, j=\overline{1,d}} |T(x_1,\ldots,x_d)| \leqslant C_d \max_{x\in\{0,1\}^n} |P(x)|.$$

Доказательство. Прямо следует из теоремы, если принять во внимание приведенные выше равенства для норм. □

Следствие 2.3. *Для полиномиальных форм $P(x)$ и полилинейных форм $T(x_1,\ldots,x_d)$ с матрицами, как в формулировке теоремы* 2.1, *выполняются неравенства*

$$\max_{x\in\{-1,1\}^n} |P(x)| \leqslant \max_{x_j\in\{-1,1\}^n, j=\overline{1,d}} |T(x_1,\ldots,x_d)| \leqslant 2^d C_d \max_{x\in\{-1,1\}^n} |P(x)|.$$

Доказательство. Первое неравенство очевидно, докажем второе.

Пусть $\max_{x_j\in\{-1,1\}^n, j\in[\overline{1,d}]} |T(x_1,\ldots,x_d)|$ достигается на наборе $x'_1,\ldots,x'_d$. Тогда

$$\max_{x_j\in\{-1,1\}^n, j\in[\overline{1,d}]} |T(x_1,\ldots,x_d)| = \left|\sum_{i_1=0}^{n}\cdots\sum_{i_d=0}^{n} a_{i_1\ldots i_d} x'_{1i_1}\ldots x'_{di_d}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{d} \sum_{S\subset[\overline{1,d}],|S|=k} \left| \sum_{\substack{i_s\,:\,x'_{si_s}=+1,\\ i_t\,:\,x'_{ti_t}=-1\\ s\in S, t\in[\overline{1,d}]\setminus S}} a_{i_1\ldots i_d}\right| \leqslant 2^d\|A\|_{\mathrm{cut}}.$$

Из теоремы 2.1 $\|A\|_{\mathrm{cut}} \leqslant C_d\|A\|_{\Box}$. Остается показать, что

$$\|A\|_{\Box} = \max_{x\in\{0,1\}^n} |P(x)| \leqslant \max_{x\in\{-1,1\}^n} |P(x)|.$$

Здесь справедлива следующая цепочка рассуждений. Полиномиальная форма $P(x)$ линейна по каждому аргументу, так как элементы матрицы A с совпадающими индексами равны нулю. Тогда, если рассматривать ее на кубе $[-1,1]^n$, то максимум ее модуля достигается в крайних точках. Отсюда и получаем, что $\max_{x\in\{0,1\}^n} |P(x)| \leqslant \max_{x\in\{-1,1\}^n} |P(x)|$. Окончательно имеем

$$\max_{x_j\in\{-1,1\}^n, j\in[\overline{1,d}]} |T(x_1,\ldots,x_d)| \leqslant 2^d\|A\|_{\mathrm{cut}} \leqslant 2^d C_d\|A\|_{\Box} \leqslant 2^d C_d \max_{x\in\{-1,1\}^n} |P(x)|.$$

□

Вернемся к обсуждению теоремы 2.1. Константа в правом неравенстве теоремы 2.1, конечно, зависит от *порядка (кратности) d* матрицы A. Важно, что эта константа не зависит от *размерности n* этой матрицы, а также от значений $a_{i_1i_2\ldots i_d}$ элементов этой матрицы. Например, $C_2 = 4$, как это уже отмечалось во введении, и эта константа подходит для обычной (в наших обозначениях, имеющей порядок 2) симметричной внедиагональной матрицы с произвольными значениями элементов a_{ij} при $i > j$. Утверждение теоремы 2.1 для $d = 2$ легко следует из алгебраической формулы

$$2XY = (X+Y)^2 - X^2 - Y^2,$$

примененной специальным (но достаточно очевидным) способом к алгебре всех формальных сумм декартовых произведений вида

$$A_1 \times B_1 + A_2 \times B_2 + \ldots + A_k \times B_k,$$

где A_i и B_i – подмножества множества $I = \overline{[1,n]}$. Мы называем такую систему алгеброй в теоретико-множественном смысле *алгебры подмножеств* множества $I \times I$, так как эту систему можно рассматривать как часть системы $2^{I\times I}$, состоящей из всех подмножеств $I \times I$. Однако прямое применение подобного подхода к случаю $d = 3$ приводит к формуле

$$3(X^2Y + Y^2X) = (X+Y)^3 - X^3 - Y^3,$$

в которой слагаемые X^2Y и Y^2X, различные даже при условии коммутативности $XY = YX$, не разделены. Тем не менее, в настоящей работе мы приводим элементарное доказательство теоремы 2.1. В следующем разделе проводится подготовительная работа перед доказательством основного утверждения.

3. Вспомогательные утверждения

В этом разделе мы докажем несколько утверждений, которые будем использовать при доказательстве теоремы 2.1. Первый результат можно назвать комбинаторно-алгебраическим. Мы предполагаем, что он известен и следует из более общих конструкций алгебры или комбинаторики. Однако, не найдя этого утверждения в известных и доступных нам учебниках, монографиях и справочниках, мы решили привести здесь его с полным доказательством.

Лемма 3.1. *В любом коммутативном кольце справедливо тождество*

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_d) := \sum_{k=1}^{d}(-1)^{d-k} \sum_{S\subset\overline{[1,d]}:\,|S|=k} \Big(\sum_{i\in S} x_i\Big)^d = d!\cdot x_1x_2\ldots x_d.$$

Доказательство.

Для доказательства заметим, что

$$\sum_{S\subset\overline{[1,d]}:\,|S|=k} \Big(\sum_{i\in S} x_i\Big)^d \Bigg|_{x_1=0} = \sum_{S\subset\overline{[2,d]}:\,|S|=k-1} \Big(\sum_{i\in S} x_i\Big)^d + \sum_{S\subset\overline{[2,d]}:\,|S|=k} \Big(\sum_{i\in S} x_i\Big)^d.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f(0,x_2,\ldots,x_d) &= \sum_{k=1}^{d}(-1)^{d-k}\Bigg(\sum_{S\subset\overline{[2,d]}:\,|S|=k-1} \Big(\sum_{i\in S} x_i\Big)^d + \sum_{S\subset\overline{[2,d]}:\,|S|=k} \Big(\sum_{i\in S} x_i\Big)^d \Bigg) = \\ &= \sum_{k=0}^{d-1}(-1)^{d-k-1} \sum_{S\subset\overline{[2,d]}:\,|S|=k} \Big(\sum_{i\in S} x_i\Big)^d + \sum_{k=1}^{d}(-1)^{d-k} \sum_{S\subset\overline{[2,d]}:\,|S|=k} \Big(\sum_{i\in S} x_i\Big)^d = 0. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что

$$\sum_{S\subset\overline{[2,d]}:\,|S|=d} \Big(\sum_{i\in S} x_i\Big)^d = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{S\subset\overline{[2,d]}:\,|S|=0} \Big(\sum_{i\in S} x_i\Big)^d = 0.$$

Ясно, что доказываемое тождество достаточно проверить только в кольце целых чисел (так как в этом кольце различные полиномы являются разными функциями). Если в разложении однородного полинома $f(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ степени d в сумму мономов $x_1^{d_1}x_2^{d_2}\ldots x_d^{d_d}$, $d_1+d_2+\ldots+d_d = d$, найдется моном $m = x_2^{d_2}\ldots x_d^{d_d}$ с $d_1 = 0$, то при подстановке $x_1 = 0$ в равенство

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_d) = cx_2^{d_2}\ldots x_d^{d_d} + \ldots, \quad c \neq 0,$$

получится противоречие. Значит, таких мономов в разложении $f(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ нет. Аналогично, не будет и мономов без переменной x_2, без переменной x_3 и т. д. Получается, что

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_d) = ax_1x_2\ldots x_d.$$

Так как слагаемые $x_1x_2\ldots x_d$ могут появиться в выражении

$$\Big(\sum_{i\in S} x_i\Big)^d$$

лишь при $|S| = d$, коэффициент a совпадает с аналогичным коэффициентом у многочлена $(x_1 + x_2 + + \ldots + x_d)^d$, и тогда $a = d!$ $\square$

Приведем пояснение, как применить лемму 3.1 к подмножествам $X_k \subset \overline{[1,n]}$ индексов симметричной матрицы вместо элементов x_k коммутативного кольца.

Напомним, что *мультимножеством* $\mathcal{A}$ с основанием Ω называется подмножество $A \subset \Omega$, в котором каждый элемент a представлен с некоторой кратностью $c(a) \in \mathbb{N}$. На мультимножествах естественным образом определена операция сложения $+$, при которой кратности элементов складываются. Разрешая кратности элементов принимать произвольные целые значения, мы очевидным образом превращаем систему всех мультимножеств с основанием Ω в модуль над кольцом целых чисел, который мы обозначим через $Mod(\Omega)$. Применяя стандартную конструкцию тензорного произведения модулей, превратим все мультимножества с основанием

$$\widetilde{\Omega} := \Omega \cup \Omega^2 \cup \ldots \cup \Omega^k \cup \ldots$$

в кольцо с операциями $+$ (сложение мультимножеств) и $\times$ (тензорное произведение $\otimes$ мультимножеств как элементов модуля $Mod(\widetilde{\Omega})$) в качестве сложения и умножения. Мы считаем, что если мультимножества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют основаниями Ω^k и Ω^m соответственно, то $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ – это мультимножество с основанием Ω^{k+m}, поэтому введенная операция умножения действует в пределах $Mod(\widetilde{\Omega})$. Если мы теперь применим к элементам из Ω^k и к полученному кольцу функтор забывания порядка умножения (декартова для Ω^k и тензорного для кольца), в частности, отождествим мультимножества $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$, то новое кольцо, которое мы обозначим через K, будет коммутативным. По смыслу элементы кольца K – это мультимножества с основанием из множества всех неупорядоченных конечных наборов $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ разной длины, $x_i \in \Omega$, а операции $+$ и $\times$ соответствуют объединению (с учетом кратности) и коммутативному варианту тензорного произведения. При таком подходе $[x] + [x] = 2[x] \neq [x,x]$, $\{[x],[y]\} = [x] + [y] = [y] + [x] \neq [x,y] = [y,x]$ (мы опускаем фигурные скобки для мультимножеств с одноточечным основанием). Для большей ясности рассмотрим пример. Пусть

$$\mathcal{A} = \{[x,y],[x,y],[x]\} \quad \text{и} \quad \mathcal{B} = \{[x,x,y],[x,y],[x,y,x],[y]\}, \quad x,y \in \Omega.$$

Тогда в кольце K будут справедливы равенства

$$\mathcal{A} = 2[x,y] + [x], \quad \mathcal{B} = 2[x,x,y] + [x,y] + [y], \quad \mathcal{A} + \mathcal{B} = \{[x],[y],3[x,y],2[x,x,y]\}$$

и

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{[x,y],2[x,y,y],[x,x,y],2[x,x,y,y],2[x,x,x,y],4[x,x,x,y,y]\}.$$

Следствие 3.2. *Предположим, что множества $X_1, X_2, \ldots, X_d \subset \Omega$ попарно не пересекаются. Тогда в кольце K справедливо равенство*

$$d! \cdot (X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_d) = \sum_{k=1}^{d} (-1)^{d-k} \sum_{S \subset \overline{[1,d]}:\,|S|=k} \Big(\bigsqcup_{i\in S} X_i\Big)^{\times d}.$$

В следствии 3.2, доказательство которого является прямым и очевидным применением леммы 3.1 к кольцу K, мы использовали знак $\sqcup$ для объединения попарно непересекающихся множеств, как это принято, например, в теории меры.

Далее рассмотрим кубическую симметричную матрицу $A = (a_{i_1,\ldots i_d})_{i_1\in I \ldots i_d \in I}$, $I = \overline{[1,n]}$, порядка d, размерности $\underbrace{n \times \ldots \times n}_{d}$. Для произвольного мультимножества $\mathcal{M}$, состоящего из элементов $i = (i_1, i_2 \ldots i_d)$, $i_j \in I$ с кратностями $c(i)$ определим «интеграл»

$$A(\mathcal{M}) := \sum_{i\in\mathcal{M}} c(i) a_{i\in\mathcal{M}}.$$

Этот «интеграл» обладает на множествах из $I^{\times d}$ свойством аддитивности по отношению к операции $+$ в кольце K. Поэтому из следствия 3.2 вытекает

Следствие 3.3. *Для произвольного набора попарно непересекающихся множеств $X_1, X_2, \ldots, X_d \subset I = \overline{[1,n]}$ и произвольной симметричной матрицы $A = (a_{i_1,\ldots i_d})_{i_1 \in I \ldots i_d \in I}$ порядка d справедливо равенство*

$$\sum_{i_1 \in X_1} \cdots \sum_{i_d \in X_d} a_{i_1 \ldots i_d} = \frac{1}{d!} \sum_{k=1}^{d} (-1)^{d-k} \sum_{S \subset \overline{[1,d]} :\, |S| = k} \Big(\sum_{i_1 \in \bigsqcup_{j \in S} X_j} \cdots \sum_{i_d \in \bigsqcup_{j \in S} X_j} a_{i_1 \ldots i_d} \Big).$$

Еще одно утверждение, которое нам понадобится, по смыслу носит аналитический характер, но доказывается снова обращением к алгебраическому тождеству.

Будем называть матрицу $B = (b_{i_1 \ldots i_k})_{i_1,\ldots,i_k \in \overline{[1,m]}}$ порядка k *внедиагональной*, если $b_{i_1 i_2 \ldots i_k} = 0$ при совпадении хотя бы двух индексов $i_s = i_t$, $1 \leqslant s < t \leqslant k$. В частности, любая симметричная матрица порядка k в наших определениях будет и внедиагональной.

Лемма 3.4. *Предположим, что внедиагональная матрица $B = (b_{i_1 \ldots i_k})_{i_1,\ldots,i_k \in \overline{[1,m]}}$ порядка k и размерности $m \times \ldots \times m$ обладает следующим свойством: для любого разбиения $X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_k = \overline{[1,m]}$ верно*

$$\Big| \sum_{i_1 \in X_1} \cdots \sum_{i_k \in X_k} b_{i_1 \ldots i_k} \Big| \leqslant c.$$

Тогда

$$\Big| \sum_{i_1,\ldots,i_k \in \overline{[1,m]}} b_{i_1 \ldots i_k} \Big| \leqslant k^k c.$$

Доказательство. Из легко проверяемого (простым подсчетом количества вхождений элементов в суммы) равенства

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k \in \overline{[1,m]}} b_{i_1 \ldots i_k} = k^{k-m} \sum_{\substack{X_1, X_2, \ldots X_k : \\ X_1 \sqcup X_2 \sqcup \ldots \sqcup X_k = \overline{[1,m]}}} \sum_{i_1 \in X_1} \cdots \sum_{i_k \in X_k} b_{i_1 \ldots i_k},$$

получим

$$\Big| \sum_{i_1,\ldots,i_k \in \overline{[1,m]}} b_{i_1 \ldots i_k} \Big| \leqslant k^{k-m} \sum_{\substack{X_1, X_2, \ldots X_k : \\ X_1 \sqcup X_2 \sqcup \ldots \sqcup X_k = \overline{[1,m]}}} \Big| \sum_{i_1 \in X_1} \cdots \sum_{i_k \in X_k} b_{i_1 \ldots i_k} \Big| \leqslant k^{k-m} k^m c = k^k c. \qquad \square$$

4. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 2.1. Пусть матрица A порядка d имеет размерность $\underbrace{n \times \ldots \times n}_{d}$ и $\|A\|_{\square} = M$. В таком случае для любого множества $X \subset \overline{[1,n]}$

$$\Big| \sum_{i_1 \in X} \sum_{i_2 \in X} \ldots \sum_{i_d \in X} a_{i_1 i_2 \ldots i_d} \Big| \leqslant M,$$

и далее мы будем этим пользоваться без специальных оговорок и ссылок.

Левое неравенство в теореме очевидно. В доказательстве нуждается только правое неравенство, для доказательства которого нам нужно оценить абсолютные значения сумм вида

$$\sum_{i_1 \in Y_1} \cdots \sum_{i_d \in Y_d} a_{i_1 \ldots i_d}, \quad Y_1, Y_2, \ldots Y_d \subset I = \overline{[1,n]}, \tag{2}$$

сверху через M.

Обозначим

$$Y_j^0 := \overline{[1,n]} \setminus Y_j, \quad Y_j^1 := Y_j, \quad j \in \overline{[1,n]},$$

и для каждого двоичного слова $b = b_1 \ldots b_d$, где $b_1, \ldots, b_d \in \{0,1\}$,

$$I_b = I_{b_1 \ldots b_d} := \bigcap_{j=1}^{d} Y_j^{b_j}.$$

Тогда все возможные 2^d множеств $I_{b_1 \ldots b_d}$, $b_1, \ldots, b_d \in \{0,1\}$ (или, что равносильно, $I_b, b \in \{0, \ldots, 2^d - 1\}$), попарно не пересекаются, и для каждого j множество Y_j является объединением

2^{d-1} подмножеств такого вида:

$$Y_j = \bigcup_{\substack{b_1,\ldots,b_d \in \{0,1\} \\ b_j=1}} I_{b_1\ldots b_d}.$$

Значит сумму

$$\sum_{i_1\in Y_1}\cdots\sum_{i_d\in Y_d} a_{i_1\ldots i_d}$$

можно разбить на $(2^{d-1})^d$ слагаемых вида

$$\sum_{i_1\in I_{b^1}}\cdots\sum_{i_d\in I_{b^d}} a_{i_1\ldots i_d}, \tag{3}$$

где $b^j = b^j_1\ldots b^j_d$, $b^j_1,\ldots,b^j_d\in\{0,1\}$. В каждом таком слагаемом любые два множества из соответствующей этому слагаемому системы множеств $\{I_{b^1},\ldots,I_{b^d}\}$ либо совпадают, либо не пересекаются.

Если любые два множества из системы $\{I_{b^1},\ldots,I_{b^d}\}$ не пересекаются, то, в силу симметричности матрицы A,

$$\sum_{i_1\in I_{b^1}}\cdots\sum_{i_d\in I_{b^d}} a_{i_1\ldots i_d} = \frac{1}{d!}\Big(\sum_{\sigma\in\pi(d)}\sum_{i_1\in I_{b^{\sigma(1)}}}\sum_{i_2\in I_{b^{\sigma(2)}}}\cdots\sum_{i_d\in I_{b^{\sigma(d)}}} a_{i_1 i_2\ldots i_d}\Big),$$

и, согласно следствию 3.3,

$$\sum_{i_1\in I_{b^1}}\cdots\sum_{i_d\in I_{b^d}} a_{i_1\ldots i_d} = \frac{1}{d!}\sum_{k=1}^{d}(-1)^{d-k}\sum_{S\subset\overline{[1,d]}:\,|S|=k}\Big(\sum_{i_1\in\bigsqcup_{j\in S}I_{b^j}}\cdots\sum_{i_d\in\bigsqcup_{j\in S}I_{b^j}} a_{i_1\ldots i_d}\Big).$$

Значит, для попарно непересекающихся множеств $I_{b^1}\ldots I_{b^d}$

$$\Big|\sum_{i_1\in I_{b^1}}\cdots\sum_{i_d\in I_{b^d}} a_{i_1\ldots i_d}\Big| = \frac{1}{d!}\Big|\sum_{k=1}^{d}(-1)^{d-k}\sum_{S\subset\overline{[1,d]}:\,|S|=k}\Big(\sum_{i_1\in\bigsqcup_{j\in S}I_{b^j}}\cdots\sum_{i_d\in\bigsqcup_{j\in S}I_{b^j}} a_{i_1\ldots i_d}\Big)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{d!}\sum_{k=1}^{d}\sum_{S\subset\overline{[1,d]}:\,|S|=k}\Big|\sum_{i_1\in\bigsqcup_{j\in S}I_{b^j}}\cdots\sum_{i_d\in\bigsqcup_{j\in S}I_{b^j}} a_{i_1\ldots i_d}\Big| \leqslant \frac{1}{d!}\sum_{k=1}^{d}\sum_{S\subset\overline{[1,d]}:\,|S|=k} M = \frac{2^d-1}{d!}M. \tag{4}$$

Осталось рассмотреть случай, когда среди множеств $I_{b^1},\ldots,I_{b^d}$ есть повторяющиеся. В силу симметричности матрицы можно перегруппировать слагаемые так, чтобы повторяющиеся множества шли подряд:

$$\sum_{i_1\in I_{b^1}}\cdots\sum_{i_d\in I_{b^d}} a_{i_1\ldots i_d} = \sum_{i_1\in J_1}\cdots\sum_{i_{d_1}\in J_1}\cdots\sum_{i_{d_{l-1}+1}\in J_l}\cdots\sum_{i_{d_l}\in J_l} a_{i_1\ldots i_{d_l}}.$$

Здесь J_k попарно не пересекаются и $1\leqslant d_1<d_2<\ldots<d_l=d$. Рассмотрим теперь матрицу B порядка d_1 и размерности $\underbrace{|J_1|\times\ldots\times|J_1|}_{d_1}$ с элементами

$$b_{i_1\ldots i_{d_1}} = \sum_{\substack{i_{d_r+t}\in J_{r+1} \\ r=1,\ldots,l-1 \\ t=1,\ldots,d_{r+1}-d_r}} a_{i_1\ldots i_{d_1} i_{d_1+1}\ldots i_d}.$$

По лемме 3.4

$$\Big|\sum_{i_1\in I_{b^1}}\cdots\sum_{i_d\in I_{b^d}} a_{i_1\ldots i_d}\Big| = \Big|\sum_{i_1,\ldots,i_{d_1}\in J_1} b_{i_1\ldots i_{d_1}}\Big| \leqslant d_1^{d_1}\max_{F_1,\ldots,F_{d_1}}\Big|\sum_{i_k\in F_k,\,k=\overline{1,d_1}} b_{i_1\ldots i_{d_1}}\Big|,$$

где максимум взят по всем попарно непересекающимся системам подмножеств F_k множества J_1. Аналогично, разбивая множества $J_2,\ldots,J_l$, получим

$$\Big|\sum_{i_1\in I_{b^1}}\cdots\sum_{i_d\in I_{b^d}} a_{i_1\ldots i_d}\Big| \leqslant d_1^{d_1}(d_2-d_1)^{d_2-d_1}\ldots(d_l-d_{l-1})^{d_l-d_{l-1}}\max_{X_1,\ldots,X_d}\Big|\sum_{i_k\in X_k,\,k=\overline{1,d}} a_{i_1\ldots i_d}\Big|,$$

где максимум взят по всем попарно непересекающимся системам подмножеств X_k множества $\overline{[1,n]}$.

В силу оценки для попарно непересекающихся множеств (4) и неравенства

$$d_1^{d_1}(d_2-d_1)^{d_2-d_1}\dots(d_l-d_{l-1})^{d_l-d_{l-1}} \leqslant$$

$$\leqslant (d_1+(d_2-d_1)+\dots+(d_l-d_{l-1}))^{d_1+(d_2-d_1)+\dots+(d_l-d_{l-1})} = d^d$$

имеем

$$\Big|\sum_{i_1\in I_{b^1}}\cdots\sum_{i_d\in I_{b^d}} a_{i_1\dots i_d}\Big| \leqslant d^d\frac{2^d-1}{d!}M, \tag{5}$$

где $I_{b^i}\cap I_{b^j}=\varnothing$ или $I_{b^i}=I_{b^j}$ для всех пар i,j. Применяя теперь разложение суммы (2) на слагаемые вида (3) и доказанное неравенство (5), получим

$$\Big|\sum_{i_1\in Y_1}^{n}\cdots\sum_{i_d\in Y_d}^{n} a_{i_1\dots i_d}\Big| \leqslant 2^{d(d-1)}d^d\frac{2^d-1}{d!}M \leqslant \frac{(d2^d)^d}{d!}M \leqslant (2^de)^dM = (2^de)^d\|A\|_\square,$$

что завершает доказательство. □

Работа К. В. Лыкова поддержана Институтом математики НАН Беларуси в рамках государственной программы «Конвергенция–2025» (задание 1.3.05).

Литература

1. *McGeoch C. C.* Adiabatic Quantum Computation and Quantum Annealing. Springer Nature Switzerland AG, 2014.

2. What is Quantum Annealing? [Electronic resourse]. – Mode of access: https://docs.dwavesys.com/docs/latest/c_gs_2.html.

3. *Lucas A.* Ising formulations of many NP problems // Front. in Phys. 2014. Vol. 2. Art. 5. doi.org/10.3389/fphy.2014.00005

4. *Talagrand M.* Mean field models for spin glasses. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011.

5. *Talagrand M.* Spin Glasses: A Challenge for Mathematicians. Cavity and Mean Field Models. Berlin, Heidelberg: Springer, 2003.

6. *Hebb D. O.* The Organization of Behavior. New York: Wiley & Sons, 1949.

7. *Hopfield J. J.* Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1982. Vol. 79, iss. 8. P. 2554–2558. DOI: 10.1073/pnas.79.8.2554

8. *Salakhutdinov R., Hinton G.* Deep Boltzmann Machine // Proceedings of the Twelfth International Conference on Artificial Intelligence and Statistics. PMLR. 2009. Vol. 5. P. 448–455.

9. *Асташкин С. В., Лыков К. В.* О безусловности дробного хаоса Радемахера в симметричных пространствах // Изв. РАН. Сер. матем. 2024. Т. 88, № 1. С. 3–20. doi.org/10.4213/im9406

10. *Frieze A., Kannan R.* Quick Approximation to Matrices and Applications // Combinatorica. 1999. Vol. 19. P. 175–220. DOI: https://doi.org/10.1007/s004930050052

11. *Håstad J.* Some Optimal Inapproximability Results // J. Assoc. Comput. Machinery. 2001. P. 798–859. DOI: 10.1145/502090.502098

12. *Alon N., Naor. A* Approximating the cut-norm via grothendieck's inequality // STOC'04: Proceedings of the thirty-sixth annual ACM symposium on Theory of computing. June 13–16, 2004. New York, USA, 2004. P. 72–80. doi.org/10.1145/1007352.1007371

13. *Astashkin S., Lykov K.* Random unconditional convergence of Rademacher chaos in L_∞ and sharp estimates for discrepancy of weighted graphs and hypergraphs, Ver. 1 released 28.12.2024 [Electronic resourse]. – Mode of access: https://arxiv.org/abs/2412.20107.

14. *De la Peña V. H. and Giné E.* Decoupling: from dependence to independence. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.

References

1. McGeoch C. C. *Adiabatic Quantum Computation and Quantum Annealing.* Springer Nature Switzerland AG, 2014.

2. *What is Quantum Annealing?* [Electronic resourse]. – Mode of access: https://docs.dwavesys.com/docs/latest/c_gs_2.html.

3. Lucas A. Ising formulations of many NP problems. *Front. in Phys.*, 2014, vol. 2, art. 5. doi.org/10.3389/fphy.2014.00005

4. Talagrand M. *Mean field models for spin glasses.* Berlin, Heidelberg, Springer, 2011.

5. Talagrand M. *Spin Glasses: A Challenge for Mathematicians. Cavity and Mean Field Models.* Berlin, Heidelberg, Springer, 2003.

6. Hebb D. O. *The Organization of Behavior.* New York, Wiley & Sons, 1949.

7. Hopfield J. J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA,* 1982, vol. 79, iss. 8, pp. 2554–2558. DOI: 10.1073/pnas.79.8.2554

8. Salakhutdinov R., Hinton G. Deep Boltzmann Machine. *Proceedings of the Twelfth International Conference on Artificial Intelligence and Statistics,* PMLR, 2009, vol. 5, pp. 448–455.

9. Astashkin S., Lykov K. On the unconditionality of Rademacher's fractional chaos in symmetric spaces. *Izvestiya: Mathematics,* 2024, vol. 88, no. 1, pp. 3–20 (in Russian). doi.org/10.4213/im9406

10. Frieze A., Kannan R. Quick Approximation to Matrices and Applications. *Combinatorica,* 1999. vol. 19, pp. 175–220. DOI: https://doi.org/10.1007/s004930050052

11. Håstad J. Some Optimal Inapproximability Results. *J. Assoc. Comput. Machinery,* 2001, pp. 798–859. DOI: 10.1145/502090.502098

12. Alon N., Naor. A Approximating the cut-norm via grothendieck's inequality. *STOC'04: Proceedings of the thirty-sixth annual ACM symposium on Theory of computing (June 13–16, 2004, New York).* New York, 2004, pp. 72–80. doi.org/10.1145/1007352.1007371

13. Astashkin S., Lykov K. *Random unconditional convergence of Rademacher chaos in* L_∞ *and sharp estimates for discrepancy of weighted graphs and hypergraphs*, Ver. 1 released 28.12.2024 [Electronic resourse]. – Mode of access: https://arxiv.org/abs/2412.20107

14. De la Peña V. H., Giné E. *Decoupling: from dependence to independence.* New York, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1999.