

УДК 512.542

О КЛАССАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ СИСТЕМАМИ ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

В. И. Мурашко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь
e-mail: mvimath@yandex.ru

Поступила: 18.03.2024

Исправлена: 05.04.2024

Принята: 18.06.2024

Ключевые слова: конечная группа, $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа, насыщенная формация, формация Фиттинга.

Аннотация. В работе построены локальные экраны классов групп, определяемых системами обобщенно субнормальных подгрупп в случае, когда эти классы локальны. Найдены условия, при которых класс групп, определяемый системой обобщенно субнормальных подгрупп, является формацией Фиттинга.

ON THE CLASSES OF FINITE GROUPS DEFINED BY THE SYSTEMS OF GENERALIZED SUBNORMAL SUBGROUPS

V. I. Murashka

Francisk Skoryna Gomel State University, Gomel, Belarus
e-mail: mvimath@yandex.ru

Received: 18.03.2024

Revised: 05.04.2024

Accepted: 18.06.2024

Keywords: finite group, $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroup, saturated formation, Fitting formation.

Abstract. The canonical local definitions of the classes of groups defined by the systems of generalized subnormal subgroups in the case when these classes are local are constructed in the paper. Conditions are found under which a class of groups defined by a system of generalized subnormal subgroups is a Fitting formation.

Введение. Рассматриваются только конечные группы. Хорошо известно, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда все ее силовские (или циклические примарные, или максимальные) подгруппы субнормальны. Напомним [1], что подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$ -субнормальной, если $H = G$ или найдется цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $1 \leq i \leq n$. Известную теорему Хупперта можно переформулировать следующим образом: группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы $\mathbb{P}$ -субнормальны. Однако $\mathbb{P}$ -субнормальность всех силовских [1] или циклических примарных [2] подгрупп не приводит к сверхразрешимости группы. Тем не менее, оба этих случая приводят к классам групп, близким по свойствам к сверхразрешимым. Одним из важнейших обобщений понятия субнормальной подгруппы является понятие $\mathfrak{F}$ -субнормальной подгруппы, разработанное Т. О. Хоуксом [3] и Л. А. Шеметковым [4, с. 90].

Определение 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$ -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G$ такая, что $H_i / \text{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для $i = 1, \dots, n$. Обозначается $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$.

Отметим, что в случае, когда $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, слово «максимальная» может быть опущено в предыдущем определении. Если G – разрешимая группа, то подгруппа является субнормальной (соотв. $\mathbb{P}$ -субнормальной) тогда и только тогда, когда она $\mathfrak{N}$ -субнормальна ($\mathfrak{U}$ -субнормальна, см. [1, лемма 1.4]). Теория $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп изложена в монографиях [5; 6].

В настоящее время активно изучаются классы и структура групп, определяемые системами обобщенно субнормальных подгрупп [1; 2; 7–14]. В работе [14] автором было предложено в качестве такой системы рассматривать все подгруппы из данного насыщенного гомоморфа. Ряд ситуаций из указанных работ является частным случаем данного подхода.

Определение 2 [14, определение 1.2]. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп и $\mathfrak{H}$ – насыщенный гомоморф. Через $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$ будем обозначать класс групп, у которых все $\mathfrak{H}$ -подгруппы $\mathfrak{F}$ -субнормальны.

Данный подход тесно связан с методом экстремальных классов, появившимся в работах Р. Картера, Б. Фишера и Т. Хоукса [15] для разрешимых групп, и распространенного на неразрешимые группы в работах В. Н. Семенчука [16] и А. Ф. Васильева [17]. Напомним [4, определение 25.1], что класс групп $\mathfrak{X}$ называется экстремальным, если он является насыщенным гомоморфом и из $G/N \in \mathfrak{X}$, где N – единственная минимальная нормальная подгруппа G , следует, что $G \in \mathfrak{X}$. Напомним также [4, определение 25.2], что через $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ обозначается класс групп, у которых все $\mathfrak{X}$ -подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$. В работах [15–17] исследовался локальный экран (при его наличии) класса $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$, где $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация и $\mathfrak{X}$ – экстремальный класс групп.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{H}$ – насыщенный гомоморф и $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация. Тогда $\mathfrak{F} \subseteq f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}^{\mathfrak{H}}$. Причем, если $\mathfrak{H}$ – экстремальный класс групп, то $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}^{\mathfrak{H}}$.

В [14] было установлено, что если $\mathfrak{H}$ – насыщенный гомоморф и $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, то класс $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$ является наследственной насыщенной формацией. По теореме Гашюца–Любизедер–Шмида он является и локальной формацией. Важной характеристикой локальной формации, кодирующей информацию о структуре групп из этой формации, является ее (максимальный внутренний) локальный экран. Ниже мы его и вычисляем.

Теорема 4. Пусть $\mathfrak{H}$ – насыщенный гомоморф и F – максимальный внутренний локальный экран наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$. Тогда T – максимальный внутренний локальный экран формации $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$, где $T(p) = f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F}) \cap F(p)^{\mathfrak{H}}$ для любого $p \in \mathbb{P}$.

В работе [12] изучался класс $w_{\pi}\mathfrak{F}$ групп с $\mathfrak{F}$ -субнормальными силовскими π -подгруппами и единичной группой для наследственной формации $\mathfrak{F}$. Заметим, что в этом случае не только силовские π -подгруппы, но и все примарные π -подгруппы будут $\mathfrak{F}$ -субнормальными. С другой стороны, $\mathfrak{F}$ -субнормальность всех примарных π -подгрупп влечет и $\mathfrak{F}$ -субнормальность всех силовских π -подгрупп. Итак, $w_{\pi}\mathfrak{F} = f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{H}$ – класс всех примарных π -групп. Тогда из теоремы 4 напрямую вытекает

Следствие 4.1 [12, теорема 3.6]. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, h – ее максимальный внутренний локальный экран, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и

$$h_{\pi}^*(p) = (G \mid 1 \mathfrak{F}\text{-sn } G, Q \mathfrak{F}\text{-sn } G \text{ и } Q \in h(p) \text{ для любой } Q \in \text{Syl}_q(G) \text{ и } q \in \pi \cap \pi(G)).$$

Тогда $w_{\pi}\mathfrak{F} = LF(f)$, где f – максимальный внутренний локальный экран формации $w_{\pi}\mathfrak{F}$ такой, что

$$f(p) = \begin{cases} h_{\pi}^*(p), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{F}), \\ \emptyset, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

В работе [13] изучался класс $v_{\pi}\mathfrak{F}$ групп с $\mathfrak{F}$ -субнормальными циклическими примарными π -подгруппами (здесь мы считаем 1 циклической примарной группой) для наследственной формации $\mathfrak{F}$. Заметим, что $v_{\pi}\mathfrak{F} = f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{H}$ – класс всех циклических примарных π -групп. Тогда из теоремы 4 напрямую вытекает

Следствие 4.2 [13, теорема D]. Пусть $\mathfrak{F} = LF(F)$ – наследственная локальная формация и F – ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда $v_{\pi}\mathfrak{F} = LF(H)$ – локальная формация, где H – ее максимальный внутренний локальный экран и $H(p) = (G \mid \text{все циклические примарные } \pi\text{-подгруппы } G \text{ принадлежат } F(p) \text{ и } \mathfrak{F}\text{-субнормальны в } G) \text{ для любого } p \in \mathbb{P}$.

В работе [18, теорема 2.6] были описаны все наследственные насыщенные формации Фиттинга разрешимых групп $\mathfrak{F} = w\mathfrak{F}$. Естественным является вопрос: когда класс $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$ является формацией Фиттинга? Используя теорему 4, мы даем ответ на этот вопрос для наследственных насыщенных формаций разрешимых групп $\mathfrak{F}$ и насыщенных гомоморфов $\mathfrak{H}$, состоящих из примарных групп.

Теорема 5. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация разрешимых групп и $\mathfrak{H}$ – насыщенный гомоморф, состоящий из примарных групп. Тогда и только тогда, $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$ является формацией Фиттинга, когда $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{\pi(F(p))} \subseteq F(p)$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$, где F – максимальный внутренний локальный экран $\mathfrak{F}$.

Следствие 5.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация разрешимых групп и F – максимальный внутренний локальный экран. Тогда и только тогда $v\mathfrak{F}$ – формация Фиттинга, когда $F(p)$ содержит все абелевы $\pi(F(p))$ -группы для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$.

Следствие 5.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация разрешимых групп и F – максимальный внутренний локальный экран. Тогда и только тогда $w\mathfrak{F}$ – формация Фиттинга, когда $F(p)$ содержит все нильпотентные $\pi(F(p))$ -группы для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$.

Предварительные результаты. Используются стандартные обозначения и терминология, которые можно найти в [4; 5]. Напомним некоторые понятия и обозначения, существенные в данной работе. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G ; $\pi(\mathfrak{F})$ – множество всех простых делителей порядков групп из класса $\mathfrak{F}$; группа G называется π -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$; Z_p – циклическая группа простого порядка p ; если H – подгруппа G , то через $\text{Core}_G(H)$ обозначается наибольшая нормальная подгруппа G , содержащаяся в H ; $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G ; $O_\pi(G)$ – наибольшая нормальная π -подгруппа G для $\pi \subseteq \mathbb{P}$; $\text{Soc}(G)$ – цокль G , т. е. произведение всех минимальных нормальных подгрупп G ; $A \text{ wr } B$ – регулярное сплетение групп A и B ; $G = N \rtimes M$ – полупрямое произведение подгрупп M и N ($N \trianglelefteq G$ и $N \cap M = 1$); $\mathfrak{G}_\pi$ ($\mathfrak{N}_\pi$) – класс всех (нильпотентных) π -групп, где $\pi \subseteq \mathbb{P}$.

Класс групп $\mathfrak{H}$ называется *гомоморфом*, если каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{H}$ принадлежит $\mathfrak{H}$. Гомоморф $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если из $H/A \in \mathfrak{F}$, $H/B \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $H/A \cap B \in \mathfrak{F}$. Класс групп $\mathfrak{H}$ называется *насыщенным*, если из $G/N \in \mathfrak{H}$ и $N \leq \Phi(G)$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{H}$. Класс групп $\mathfrak{X}$ называется (соотв. *нормально*) *наследственным*, если $\mathfrak{X}$ вместе с каждой группой содержит всякую ее (соотв. нормальную) подгруппу. *Классом Фиттинга* называется нормально наследственный класс групп $\mathfrak{X}$, содержащий группы, представленные в виде произведения нормальных $\mathfrak{X}$ -подгрупп.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G , т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G , для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{K}$ – формации. Если $\mathfrak{K} = \emptyset$, то положим $\mathfrak{F}\mathfrak{K} = \emptyset$. Если $\mathfrak{K} \neq \emptyset$, то обозначим через $\mathfrak{F}\mathfrak{K}$ класс всех тех групп G , для которых $G^{\mathfrak{K}} \in \mathfrak{F}$. Известно [2, с. 11], что класс $\mathfrak{F}\mathfrak{K}$ является формацией.

Всякая функция $f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации}\}$ называется *локальным экраном*. Формация $\mathfrak{F}$ называется *локальной*, если существует локальный экран f такой, что $\mathfrak{F}$ совпадает с классом групп G таких, что $G/C_G(H/K) \in f(p)$ для любого главного фактора H/K группы G и $p \in \pi(H/K)$. Обозначается $\mathfrak{F} = LF(f)$. Всякая локальная формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный экран F такой, что $F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N}_p F(p) = F(p)$, называемый *максимальным внутренним локальным экраном*.

При доказательствах нам потребуется следующий ряд лемм.

Лемма 6 [14, теорема 3.2, следствие 3.2]. Пусть $\mathfrak{H}$ – насыщенный гомоморф и $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация. Тогда $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$ – наследственная насыщенная формация такая, что всякая $\mathfrak{H}$ -подгруппа $f_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$ -группы принадлежит $\mathfrak{F}$.

Лемма 7 [4, теорема 4.7]. Пусть F – максимальный внутренний локальный экран локальной формации $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $F(p)$ – наследственная формация для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$, когда $\mathfrak{F}$ – наследственная формация.

Напомним [4, определение 7.5], что через $\tilde{F}(G)$ обозначается подгруппа группы G такая, что $\Phi(G) \subseteq \tilde{F}(G)$ и $\tilde{F}(G)/\Phi(G) = \text{Soc}(G/\Phi(G))$. Напомним также, что группа $G \notin \mathfrak{F}$ называется *минимальной не $\mathfrak{F}$ -группой*, если все ее собственные подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$.

Лемма 8 [16]. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная формация, G – минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа и $\Phi(G) = 1$.

- (1) G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $N = \tilde{F}(G)$.
- (2) Если N абелева, то $G = N \rtimes M$, где N – p -группа, для $p \in \mathbb{P}$, и $N = C_G(N) = O_{p',p}(G)$; кроме того, M является максимальной подгруппой в G .
- (3) Если N неабелева, то $C_G(N) = 1$.

Лемма 9 [5, лемма 3.1.3]. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, H и R – подгруппы группы G и $N \trianglelefteq G$.

- (1) Если $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$, то $HN/N \mathfrak{F}\text{-sn } G/N$.
- (2) Если $H/N \mathfrak{F}\text{-sn } G/N$, то $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$.
- (3) Если $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$, то $HN \mathfrak{F}\text{-sn } G$.
- (4) Если $H \mathfrak{F}\text{-sn } R$ и $R \mathfrak{F}\text{-sn } G$, то $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$.

Лемма 10 [5, лемма 3.1.3]. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, H и R – подгруппы группы G .

- (1) Если $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$, то $(H \cap R) \mathfrak{F}\text{-sn } R$.
- (2) Если $H \mathfrak{F}\text{-sn } G$ и $R \mathfrak{F}\text{-sn } G$, то $(H \cap R) \mathfrak{F}\text{-sn } G$.

Лемма 11 [13, лемма 2.7]. Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация и группа $G = H\tilde{F}(G)$, где H – $\mathfrak{F}$ -субнормальная $\mathfrak{F}$ -подгруппа в G . Тогда $G \in \mathfrak{F}$.

Доказательства основных результатов.

Доказательство теоремы 3. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то всякая подгруппа $\mathfrak{F}$ -группы $\mathfrak{F}$ -субнормальна в ней. Значит, $\mathfrak{F} \subseteq f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$. Согласно лемме 6 верно включение $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}^{\mathfrak{F}}$. Предположим теперь, что $\mathfrak{H}$ – экстремальный класс групп, $\mathfrak{F}^{\mathfrak{F}} \setminus f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$ и G – группа минимального порядка из этого класса групп. Из того, что $\mathfrak{F}^{\mathfrak{F}}$ и $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$ – формации, и нашего предположения следует, что в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N . Из того, что $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$ – насыщенная формация по лемме 6, следует, что $\Phi(G) = 1$. Пусть H – $\mathfrak{H}$ -подгруппа группы G . Предположим, что $HN < G$. Тогда $HN/N \simeq H/(H \cap N) \in \mathfrak{H}$. Из $G/N \in f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$ следует, что $HN/N \mathfrak{F}$ -sn G/N . Значит, $HN \mathfrak{F}$ -sn G по (2) леммы 9. Из наследственности формации $\mathfrak{F}^{\mathfrak{F}}$ и наших предположений следует, что $HN \in f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$. Тогда $H \mathfrak{F}$ -sn HN . Итак, $H \mathfrak{F}$ -sn G по (4) леммы 9. Значит, если $HN < G$ для любой $\mathfrak{H}$ -подгруппы H группы G , то $G \in f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$. Следовательно, найдется $\mathfrak{H}$ -подгруппа H группы G такая, что $G = HN$. Тогда, из $G/N \simeq H/(H \cap N) \in \mathfrak{H}$ следует, что $G \in \mathfrak{H}$ по определению экстремального класса групп. Следовательно, $G \in \mathfrak{F} \subseteq f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$, противоречие. Итак, $\mathfrak{F}^{\mathfrak{F}} = f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$. $\square$

Доказательство теоремы 4. По лемме 6 класс $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$ является наследственной насыщенной формацией. Пусть $\mathfrak{K} = LF(T)$, где T – локальный экран такой, что $T(p) = f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}) \cap F(p)^{\mathfrak{F}}$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Из наследственности формаций $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$ и $F(p)^{\mathfrak{F}}$ следует, что $T(p)$ – наследственная формация для любого простого p . Согласно лемме 7 $\mathfrak{K}$ – наследственная формация. Так как $F(p) \subseteq T(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{K}$.

Предположим, что $\mathfrak{K} \setminus f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$. Выберем группу G наименьшего порядка из $\mathfrak{K} \setminus f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$. Так как обе формации $\mathfrak{K}$ и $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$ насыщены и наследственны, то $\Phi(G) = 1$ и G – минимальная не $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$ -группа. По (1) леммы 8 в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N .

Если N неабелева, то по (3) леммы 8 $C_G(N) = 1$. Из $G \in \mathfrak{K}$ следует, что $G/C_G(N) \simeq G \in T(p) \subseteq f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$. Противоречие.

Если N абелева, то по (2) леммы 8 $N = C_G(N)$ – элементарная абелева p -подгруппа и найдется максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = N \rtimes M$. Предположим, что $NH < G$ для любой $\mathfrak{H}$ -подгруппы H группы G . Из выбора G следует, что $H \mathfrak{F}$ -sn HN и $HN/N \mathfrak{F}$ -sn G/N . По лемме 9 $H \mathfrak{F}$ -sn G . Следовательно, $G \in f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$. Противоречие. Пусть $G = NH$ для некоторой $\mathfrak{H}$ -подгруппы H группы G . Значит, $M \simeq H/(H \cap N)$ – $\mathfrak{H}$ -подгруппа G . Так как $G/C_G(N) = G/N \simeq M \in T(p)$, то $M \in F(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, N – $\mathfrak{F}$ -центральный главный фактор G . Значит, $G \in \mathfrak{F} \subseteq f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{K} \subseteq f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$.

Предположим теперь, что $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}) \setminus \mathfrak{K} \neq \emptyset$. Выберем группу G наименьшего порядка из $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}) \setminus \mathfrak{K}$. Тогда $\Phi(G) = 1$ и G – минимальная не $\mathfrak{K}$ -группа. По (1) леммы 8 в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N и $N = \tilde{F}(G)$. Если $G \in \mathfrak{H}$, то $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 6. Из $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{K}$ получаем противоречие. Итак, $G \notin \mathfrak{H}$. Предположим, что в G найдется такая $\mathfrak{H}$ -подгруппа H , что $NH = G$. Заметим, что $H \in \mathfrak{F}$ по лемме 6. Тогда из $G \in f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$ и леммы 11 следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Будем считать, что $NH < G$ для любой $\mathfrak{H}$ -подгруппы H .

Предположим, что N – абелева подгруппа. Тогда по лемме 8 N – элементарная абелева p -подгруппа, $p \in \mathbb{P}$, $C_G(N) = N$ и найдется максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = N \rtimes M$. Заметим, что $M \notin \mathfrak{H}$ и $M \in f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$. Пусть H – $\mathfrak{H}$ -подгруппа M . Тогда $H \in \mathfrak{F}$ по лемме 6. Заметим, что $H \mathfrak{F}$ -sn HN по лемме 10. Тогда $HN \in \mathfrak{F}$ по лемме 11. Из $C_G(N) = N$ следует, что $O_{p'}(HN) = 1$. Тогда $H \simeq HN/O_{p'}(HN) \in F(p)$ по [19, IV, теорема 3.7]. Итак, $M \in T(p)$ по определению экрана T . В этом случае, $G \in \mathfrak{K}$ по определению локальной формации, противоречие.

Пусть N – неабелева минимальная нормальная подгруппа G . Тогда $C_G(N) = 1$. Пусть H – произвольная $\mathfrak{H}$ -подгруппа G . Так как $NH < G$, то $NH \in \mathfrak{K}$. Согласно [19, А, лемма 4.14] $N = N_1 \times \dots \times N_k$ – прямое произведение минимальных нормальных подгрупп N_i группы NH . Заметим, что $\cap_{i=1}^k C_{NH}(N_i) = C_{NH}(N) = 1$. Тогда $NH/C_{NH}(N_i) \in T(p)$ для любого $p \in \pi(N_i) = \pi(N)$. Так как $T(p)$ – формация, $NH/(\cap_{i=1}^k C_{NH}(N_i)) \simeq NH \in T(p)$ для любого $p \in \pi(N)$. Значит, $H \in F(p)$ для любого $p \in \pi(N)$ по определению экрана T . Итак, $G \in T(p)$ по определению экрана T . В этом случае, $G \in \mathfrak{K}$, противоречие.

Значит, $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{K}$. Таким образом, $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{K}$.

Докажем, что T – максимальный внутренний локальный экран $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$. Из определения экрана T следует, что он является внутренним экраном формации $f_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$. Покажем, что $\mathfrak{K}_p T(p) = T(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Если $F(p) = \emptyset$, то $T(p) = \emptyset$ и утверждение доказано. Предположим, что $F(p) \neq \emptyset$.

Пусть $G/N \in T(p)$ и N – p -группа. Тогда $G \in \mathfrak{N}_p T(p)$. Так как T – внутренний экран формации $f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$, то по [4, лемма 3.11] $\mathfrak{N}_p T(p) \subseteq f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$. Тогда $G \in f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$. Пусть H – $\mathfrak{S}$ -подгруппа группы G . Тогда $HN/N \simeq H/(H \cap N)$ – $\mathfrak{S}$ -подгруппа группы G/N . Значит, $H/(H \cap N) \in F(p)$ по определению экрана T . Тогда $H \in \mathfrak{N}_p F(p) = F(p)$. Значит, $G \in F(p)^{\mathfrak{S}}$. Итак, $G \in f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F}) \cap F(p)^{\mathfrak{S}} = T(p)$. Следовательно, T – максимальный внутренний локальный экран $f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$. $\square$

Доказательство теоремы 5. Предположим, что $f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$ – формация Фиттинга, но найдется $p \in \pi(\mathfrak{F})$ такое, что $\mathfrak{S}_p = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{G}_{\pi(F(p))} \not\subseteq F(p)$. Выберем группу G наименьшего порядка из $\mathfrak{S}_p \setminus F(p)$. Из $\pi(\mathfrak{S}_p) \subseteq \pi(F(p))$ следует, что G – q -группа для некоторого $q \in \pi(F(p))$. Так как $F(p)$ – наследственная формация по лемме 7, $Z_q \in F(p)$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда $N \in F(p)$. По нашему предположению, $G/N \in F(p)$. Пусть $H = N \text{ wr } (G/N)$ – регулярное сплетение и B – его база. Итак, $H = B(G/N)$ – произведение субнормальных подгрупп B и G/N . Пусть T – максимальный внутренний локальный экран формации $f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$. Тогда из $\mathfrak{F} \subseteq f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$ следует, что $F(p) \subseteq T(p)$. Заметим, что $B, G/N \in F(p) \subseteq T(p)$. Из того, что $f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$ – формация Фиттинга следует, что $T(p)$ – формация Фиттинга по [4, теоремы 4.7 и 4.10]. Итак, $H \in T(p)$. По [19, А, теорема 18.9] G изоморфна подгруппе H . Итак, по теореме 4, $G \in F(p)$, противоречие. Следовательно, если $f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$ – формация Фиттинга, то $\mathfrak{S}_p = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{G}_{\pi(F(p))} \subseteq F(p)$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{S}_p = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{G}_{\pi(F(p))} \subseteq F(p)$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $F(p)^{\mathfrak{S}} = \mathfrak{G}_{\pi(F(p)) \cup \pi(\mathfrak{S})'}$. Пусть T – максимальный внутренний локальный экран формации $f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$. Тогда $T(p) = F(p)^{\mathfrak{S}} \cap f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\pi(F(p)) \cup \pi(\mathfrak{S})'} \cap f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$.

Предположим, что в этом случае формация $f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$ не является формацией Фиттинга. Так как эта формация наследственна, то найдется группа $G = AB \notin f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$, где A, B – нормальные $f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$ -подгруппы G . Не теряя общности рассуждений, можно считать, что группа G – группа минимального порядка с такими свойствами. Из насыщенности формации $f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$ следует, что $\Phi(G) = 1$ и в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N и $N = C_G(N)$. Заметим, что $G/N = G/C_G(N) = (AC_G(N)/C_G(N))(BC_G(N)/C_G(N))$ – произведение нормальных $f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$ -подгрупп. Из $|G/C_G(N)| < |G|$ следует, что $G/C_G(N) \in f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$. Заметим, что $AC_G(N)/C_G(N) \simeq A/C_A(N) \in \mathfrak{N}_p T(p) = T(p)$ по [20, лемма 1]. Аналогично, $BC_G(N)/C_G(N) \in T(p)$. Итак, $G/C_G(N) \in f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{G}_{\pi(F(p)) \cup \pi(\mathfrak{S})'} = T(p)$. Следовательно, $N - f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$ -центральный главный фактор G . Значит, $G \in f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{F})$, противоречие. $\square$

Благодарность. Автор выражает признательность рецензенту за внимательное прочтение работы и полезные замечания по улучшению ее качества.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования для докторантов, аспирантов, студентов (№ 20240567).

Литература

1. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.
2. Monakhov V. S., Kniahina V. N. Finite groups with $\mathbb{P}$ -subnormal subgroups // Ricerche mat. 2013. Vol. 62. P. 307–322.
3. Hawkes T. O. On formation subgroups of a finite soluble group // J. London Math. Soc. 1969. Vol. 4. P. 243–250.
4. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. – 272 с.
5. Каморников С. Ф., Селькин М. В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Беларуская навука, 2003. 254 с.
6. Ballester-Bollinches A., Ezquerro L. M. Classes of Finite Groups: vol. 584 of Math. Appl. Netherlands: Springer, 2006. 385 p.
7. Васильев А. Ф., Васильева Т. И. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами // Проблемы физики, математики и техники. 2011. Т. 4. С. 86–91.
8. Семенчук В. Н., Шевчук С. Н. Характеризация классов конечных групп с помощью обобщенно субнормальных силовских подгрупп // Матем. заметки. 2011. Т. 89, № 1. С. 104–108.
9. Васильева Т. И., Коранчук А. Г. Конечные группы с субнормальными корадикалами силовских нормализаторов // Сиб. матем. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 805–813.
10. Monakhov V. S., Sokhor I. L. On groups with formational subnormal Sylow subgroups // J. Group Theory. 2018. Vol. 21. P. 273–287.
11. Guo W., Skiba A. N. Finite groups whose n -maximal subgroups are σ -subnormal // Sci. China Math. 2019. Vol. 62, N 7. P. 1355–1372.

12. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Вегера А. С. Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 259–275.
13. Мурашко В. И. Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1353–1367.
14. Murashka V. I. Finite groups with given sets of F-subnormal subgroups // Asian-European J. Math. 2020. Vol. 13, N 1. Art. 2050073 (13 p.)
15. Carter R., Fischer B., Hawkes T. Extreme classes of finite soluble groups // J. Algebra. 1969. Vol. 9. P. 285–313.
16. Семенчук В. Н. Минимальные не- $\mathcal{F}$ -группы // Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 3. С. 348–382.
17. Васильев А. Ф. Одна задача теории формаций конечных групп // Матем. заметки. 1997. Т. 62, № 1. С. 52–58.
18. Балычев С. В., Вегера А. С. Разрешимые насыщенные формации со свойством $\mathcal{P}_2$ для конечных групп // Проблемы физики, математики и техники. 2020. Т. 42. С. 74–80.
19. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
20. Васильев А. Ф., Васильева Т. И. О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами // Изв. вузов. Математика. 1997. Т. 11. С. 10–14.

References

1. Vasil'ev A. F., Vasil'eva T. I., Tyutyaynov V. N. On the finite groups of supersoluble type. *Sib. Math. J.*, 2010, vol. 51, no. 6, pp. 1004–1012.
2. Monakhov V. S., Kniagina V. N. Finite groups with $\mathbb{P}$ -subnormal subgroups. *Ricerche mat.* 2013, vol. 62, pp. 307–322.
3. Hawkes T. O. On formation subgroups of a finite soluble group. *J. London Math. Soc.*, 1969, vol. 4, pp. 243–250.
4. Shemetkov L. A. *Formations of finite groups*. Moscow, Nauka, 1978. 272 p. (in Russian).
5. Kamornikov S. F., Selkin M. V. *Subgroups functors and classes of finite groups*. Minsk, Belaruskaya nauka, 2003. 254 p. (in Russian).
6. Ballester-Bollinches A., Ezquerro L. M. *Classes of Finite Groups*. Netherlands, Springer, vol. 584 of Math. Appl., 2006. 385 p.
7. Vasil'ev A. F., Vasilyeva T. I. On finite groups with generally subnormal Sylow subgroups. *Probl. Fiz. Mat. Tekh.*, 2011, no. 4(9), pp. 86–91 (in Russian).
8. Semenchuk V. N., Shevchuk, S. N. Characterization of classes of finite groups with the use of generalized subnormal Sylow subgroups. *Math. Notes*, 2011, vol. 89, no. 1, pp. 117–120.
9. Vasil'eva T. I., Koranchuk, A. G. Finite Groups with Subnormal Residuals of Sylow Normalizers. *Sib. Math. J.*, 2022, vol. 63, no. 4, pp. 670–676.
10. Monakhov V. S., Sokhor I. L. On groups with formational subnormal Sylow subgroups. *J. Group Theory*, 2018, vol. 21, pp. 273–287.
11. Guo W., Skiba A. N. Finite groups whose n -maximal subgroups are σ -subnormal. *Sci. China Math.*, 2019, vol. 62, no. 7, pp. 1355–1372.
12. Vasil'ev A. F., Vasil'eva T. I., Vegera A. S. Finite groups with generalized subnormal embedding of Sylow subgroups. *Sib. Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 2, pp. 200–212.
13. Murashka V. I. Classes of finite groups with generalized subnormal cyclic primary subgroups. *Sib. Math. J.*, 2014, vol. 55, no. 6, pp. 1105–1115.
14. Murashka V. I. Finite groups with given sets of $\mathcal{F}$ -subnormal subgroups. *Asian-European J. Math.*, 2020, vol. 13, no. 1, art. 2050073 (13 p.)
15. Carter R., Fischer B., Hawkes T. Extreme classes of finite soluble groups. *J. Algebra*, 1969, vol. 9, pp. 285–313.
16. Semenchuk V. N. Minimal non- $\mathcal{F}$ -groups. *Algebra Logika*, 1979, vol. 18, no. 3, pp. 348–382 (in Russian).
17. Vasil'ev A. F. A problem in the theory of formations of finite groups. *Math. Notes*, 1997, vol. 62, no. 1, pp. 44–49.
18. Balychev S. V., Vegera A. S. Soluble saturated formations with the $\mathcal{P}_2$ property for finite groups. *Probl. Fiz. Mat. Tekh.*, 2020, no. 1(42), pp. 74–80 (in Russian).
19. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups*. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
20. Vasil'ev A. F., Vasilyeva T. I. On finite groups whose principal factors are simple groups. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1997, vol. 41, no. 11, pp. 8–12.