Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2024. Том 32. № 2. С. 93–96

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
BRIEF COMMUNICATIONS

УДК 511.643

АЛЬТЕРНАТИВНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

С. М. Агеев, Е. С. Агеева

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: ageev_sergei@inbox.ru

Поступила: 05.07.2024 **Исправлена:** 05.09.2024 **Принята:** 12.12.2024

Ключевые слова: теорема о равноправности, мультипликативное свойство определителя, обобщенная теорема Лапласа, теорема Бине–Коши.

Аннотация. Непосредственно, без привлечения четностей перестановок и приведения матриц к ступенчатому виду, устанавливается эквивалентность разложения определителя по любой строчке и любому столбцу. С помощью этого существенно упрощается оставшаяся часть теории определителей: мультипликативное свойство определителя, обобщенная теорема Лапласа, теорема Бине–Коши и др.

ALTERNATIVE CONSTRUCTION OF THE DETERMINANT THEORY

S. M. Ageev, H. S. Ageeva

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: ageev_sergei@inbox.ru

Received: 05.07.2024 **Revised:** 05.09.2024 **Accepted:** 12.12.2024

Keywords: the equality theorem, the multiplicative property of determinants, the generalized Laplace expansion and Cauchy–Binet formula.

Abstract. We establish in a direct way, without involving the sigh function of permutations and matrice reducing to echelon form, the equivalence of the expansion of determinant along any row and any column. On base of this the rest of the theory of determinants is significantly simplified: determinant multiplicativity, the generalized Laplace expansion and Cauchy–Binet formula and so on.

1. Введение

Определитель матрицы входит в число основных инструментов современной математики. Несмотря на то что он представляет собой всего лишь замысловатую[1] формулу от элементов матрицы, язык теории определителей оказался весьма гибким и удобным, в его терминах выражаются многие другие важные понятия и результаты.

С момента возникновения понятия определителя матрицы A было разработано несколько подходов к его обоснованию. Однако каждый из них, строгий и последовательный, доставляет большие трудности для изучающего предмет впервые.

Самое устоявшееся (хотя далеко не самое простое) определение $\det(A)$ состоит в использовании формулы полного развертывания. В качестве основного инструмента здесь выступают *подстановки* и их *четности* – понятия, стоящие несколько в стороне от теории матриц. Кроме того, при обосновании их свойств легко увязнуть в многочисленных деталях.

[1]Удивительно то, что похожая (но более простая) формула для перманента матрицы играет существенно менее значимую роль в математике.

В двух других часто используемых подходах – аксиоматическом и индуктивном, главный акцент делается на приведение матриц к ступенчатому виду. Мало того, что это вновь приводит к рассуждениям технического характера (что в целом затуманивает суть дела), при этом не удается доказать важное мультипликативное свойство для определителей над произвольными коммутативными кольцами.

Вниманию читателя предлагается иное построение теории определителей. С одной стороны, это позволит коротко и прозрачно обосновать все свойства определителей[2]. С другой стороны, удается избежать использования четности перестановок[3] и приведения матриц к ступенчатому виду (что хорошо, по крайней мере, на первых порах). Ключевыми здесь являются следующие два факта:

1) теорема о равноправности, утверждающая, что в некотором естественном смысле разложения D_i и D^j определителя по i-й строчке и по j-му столбцу, соответственно, коммутируют. Этот факт (в пределах одной страницы) непосредственно устанавливает равносильность разложения определителя по любой строчке и любому столбцу;

2) доказательство теоремы о мультипликативном свойстве определителя $|AB| = |A||B|$, сводящее его к случаю, когда один из сомножителей совпадает с матрицей, получающейся перестановкой строчек единичной матрицы. Мало того, что оно кажется проще имеющихся доказательств, фактически теми же самыми рассуждениями можно установить классические теоремы Лапласа и Бине–Коши (последнюю, ввиду ее трудоемкости, обычно изучают факультативно).

После получения этих двух ключевых фактов доказательство всех стандартных свойств определителей становится простым и кратким. Отметим, что при нашем подходе четность подстановки и ее свойства (а также формула полного развертывания определителей) играют второстепенную роль (и могут быть изложены в любой подходящий момент после теоремы об определителе произведения матриц).

2. Теорема о равноправности

Определитель $\det(B)$ матрицы $B = \|b\|$ порядка 1 равен элементу b. Если уже введено понятие определителя $\det(B)$ для всех матриц порядка $k, k < n$, то определитель $\det(A)$ матрицы A порядка $n \geqslant 2$ вводится индуктивно, следующим образом:

Определение 2.1. Определителем $\det(A)$ называется одна из знакочередующихся сумм

$$D_i(A) = \sum_{\beta=1}^{n} (-1)^{i+\beta} a_{i\beta} \det(M_{i\beta}) \text{ или } D^j(A) = \sum_{\alpha=1}^{n} (-1)^{\alpha+j} a_{\alpha j} \det(M_{\alpha j}),$$

(которые назовем *разложением* $\det A$ *по i-й строчке* и *разложением* $\det A$ *по j-му столбцу* соответственно). Здесь через M_{ij} обозначена матрица порядка $n-1$, получающаяся из A вычеркиванием ее i-строчки и j-столбца; M_{ij} называется *дополнительным минором элемента a_{ij} матрицы A* (или кратко, *минором A*).

Для установления корректности определения 2.1 достаточно проверить следующее утверждение

Теорема 2.2. *Для любой квадратной матрицы A порядка n и для любой i-й строчки и любого j-го столбца справедливо равенство $D_i(A) = D^j(A)$.*

Отсюда следует центральный результат о равноправности: вычислить определитель $\det(A)$ можно, разлагая его по любой строчке или столбцу.

Доказательство. Для $n = 2$ проверка теоремы осуществляется непосредственно, поэтому далее предполагаем, что $n \geqslant 3$.

Поскольку $D_i(A)$ и $D^j(A)$ содержат общее слагаемое $(-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij})$, то все сводится к проверке равенства $D'_i(A) = {}'D^j(A)$, где

$$D'_i(A) = D_i(A) - (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij}) = \sum_{\beta \neq j}^{n} (-1)^{i+\beta} a_{i\beta} \det(M_{i\beta}) \text{ и } \tag{2.1}$$

[2]Недавним примером того, как классический результат получает существенное упрощение, служит теорема Жордана о разложении линейного оператора, см. [1] и [2].

[3]Наоборот, свойства четности будут легко выведены из мультипликативного свойства.

$$'D^j(A) = D^j(A) - (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij}) = \sum_{\alpha \neq i}^{n} (-1)^{\alpha+j} a_{\alpha j} \det(M_{\alpha j}). \tag{2.2}$$

Для того чтобы разложить определитель $\det(M_{i\beta})$ минора[4] $M_{i\beta}$ порядка $n-1$ из (2.1) по его j-му столбцу, введем следующее обозначение: если $a \neq b \in \bar{n} = \{1,2,\dots,n\}$, то $[a \mid b\rangle$ есть порядковый номер числа b в $\bar{n}$ после удаления из него a. Почти очевидно, что

(*) если целые числа $k \neq l$ взяты из $\bar{n}$, то число $k + l + [k \mid l\rangle + [l \mid k\rangle$ нечетно.

Теперь определитель $\det(M_{i\beta}), \beta \neq j$, из (2.1) разложим[5] по **j-му столбцу** $M_{i\beta}$:

$$\det(M_{i\beta}) = \sum_{\alpha \neq i}^{n} (-1)^{[i|\alpha\rangle + [\beta|j\rangle}\, a_{\alpha j} \det(M_{i\alpha;j\beta}). \tag{2.3}$$

Здесь через $M_{i\alpha;j\beta}$ обозначен минор порядка $n-2 \geqslant 1$, получающийся из A вычеркиванием ее строчек с номерами i и α, а также ее j-го и β-го столбцов; показатель степени в формуле (2.3) есть сумма номера строчки и номера столбца элемента $a_{\alpha j}$ в $M_{i\beta}$, т. е. $[i \mid \alpha\rangle + [\beta \mid j\rangle$.

После подстановки $\det(M_{i\beta})$ из (2.3) в $D_i'(A)$ получим

$$D_i'(A) = \sum_{\beta \neq j}^{n} \Big(\sum_{\alpha \neq i}^{n} (-1)^{i+\beta+[i|\alpha\rangle+[\beta|j\rangle} a_{i\beta} a_{\alpha j} \det(M_{i\alpha;\beta j}) \Big). \tag{2.4}$$

Аналогично определитель $\det(M_{\alpha j}), \alpha \neq i$, из (2.2) разложим **по i-й строчке**[6] $M_{\alpha j}$:

$$\det(M_{\alpha j}) = \sum_{\beta \neq j}^{n} (-1)^{[\alpha|i\rangle+[j|\beta\rangle} a_{i\beta} \det(M_{i\alpha;\beta j}). \tag{2.5}$$

При подстановке $\det(M_{\alpha j})$ из формулы (2.5) в $'D^j(A)$ получим

$$'D^j(A) = \sum_{\alpha \neq i}^{n} \Big(\sum_{\beta \neq j}^{n} (-1)^{\alpha+j+[\alpha|i\rangle+[j|\beta\rangle}\, a_{\alpha j} a_{i\beta} \det(M_{i\alpha;\beta j}) \Big). \tag{2.6}$$

Наконец, непосредственно сравним формулы (2.4) и (2.6), предварительно воспользовавшись заменой порядка суммирования в (2.6). Из свойства (*) легко следует, что

$$\big(\alpha + j + [\alpha \mid i\rangle + [j \mid \beta\rangle\big) + \big(i + \beta + [i \mid \alpha\rangle + [\beta \mid j\rangle\big) = \big(\alpha + i + [\alpha \mid i\rangle + [i \mid \alpha\rangle\big) + \big(j + \beta + [j \mid \beta\rangle + [\beta \mid j\rangle\big)$$

есть число четное. Поэтому $(-1)^{\alpha+j+[\alpha|i\rangle+[j|\beta\rangle} = (-1)^{i+\beta+[i|\alpha\rangle+[\beta|j\rangle}$ и все соответствующие слагаемые в формулах для $'D^j(A)$ и $D_i'(A)$ совпадают – $D_i'(A) = {'D^j(A)}$. □

3. Мультипликативное свойство определителя

Теорема 3.1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ *для квадратных матриц A и B порядка n.*

Доказательство. Фиксируем B и рассмотрим множество $\mathcal{A} = \mathcal{A}_B$ всех матриц A, для которых теорема верна. Ясно, что

(**) $\mathcal{A}$ содержит любую матрицу с нулевой строчкой или с двумя равными строчками; матрица A при перестановке местами двух ее строчек или при умножении какой-либо ее строчки на скаляр $\alpha \neq 0$ продолжает принадлежать (или не принадлежать) семейству $\mathcal{A}$.

Проведем доказательство теоремы индукцией по числу $\sharp A \geqslant 0$ ненулевых элементов матрицы A. Если $\sharp A < n$, то одна строчка A нулевая и поэтому в силу (**) $A \in \mathcal{A}$.

Если $\sharp A > n$, то возьмем строчку A (например, 1-ю), в которой $\geqslant$2 ненулевых элементов. Ясно, что существуют такие матрицы A' и A'', совпадающие с A вне 1-й строчки, что для их 1-х строчек справедливо равенство $(A_1) = (A_1') + (A_1'')$ и при этом $\sharp A', \sharp A'' < \sharp A$. В силу индуктивного предположения $A', A'' \in \mathcal{A}$. Из линейного свойства определителя следует, что и $A \in \mathcal{A}$.

[4]Так как порядок $n-1 < n$, то понятие определителя для минора $M_{i\beta}$ введено корректным образом.

[5]Так как порядок $n-2 < n$, то понятие определителя для минора $M_{i\alpha;j\beta}$ тоже введено корректным образом.

[6]По-видимому, в этом состоит ключевой прием доказательства – в попеременном разложении определителей по строчке и столбцу.

Наконец, рассмотрим **основной случай** $\sharp A = n$. В силу (**) можно считать, что на каждой строчке матрицы A лежит ровно по одному ненулевому элементу, равному 1, а любые 2 строчки A различны. Поэтому A получается из единичной матрицы E при помощи конечного числа, скажем s, попарных перестановок ее строчек – $|A| = (-1)^s|E| = (-1)^s$.

Но легко видеть, AB получается из матрицы B при помощи тех же самых попарных s перестановок строчек. Поэтому $|AB| = (-1)^s|B|$, что легко влечет $A \in \mathcal{A}$. □

Литература

1. *Botha J. D.* Alternative proofs of the rational canonical form theorem // Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 1994. Vol. 25, № 5. P. 745–749.

2. *Филиппов А. Ф.* Краткое доказательство теоремы о приведении матрицы к жордановой форме // Вестн. МГУ. Сер. матем. 1971. Т. 26, N 1–2. С. 70–71.

References

1. Botha J. D. Alternative proofs of the rational canonical form theorem. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 1994, vol. 25, no. 5, pp. 745–749.

2. Filippov A. F. A short proof of the theorem on the reduction of a matrix to Jordan form. *Mosc. Univ. Math. Bull.,* 1971, vol. 26, no. 1–2, pp. 70–71.