Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2024. Том 32. № 2. С. 69–72

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMIC SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

УДК 517.962.2+517.929.2

ЛИНЕЙНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЫПУКЛЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ С НЕПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ РЕШЕНИЯМИ

А. С. Войделевич

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
e-mail: aliaksei.vaidzelevich@gmail.com

Поступила: 24.07.2024 **Исправлена:** 02.10.2024 **Принята:** 12.12.2024

Ключевые слова: линейные рекуррентные уравнения, выпуклые многоугольники.

Аннотация. Получено необходимое и достаточное условие на матрицу коэффициентов линейного рекуррентного уравнения в пространстве выпуклых многоугольников, любые два различных решения которого не пересекаются, т. е. значения решений при каждом аргументе различны.

LINEAR RECURRENCE EQUATIONS IN THE SPACE OF CONVEX POLYGONS WITH NON-INTERSECTING SOLUTIONS

A. S. Vaidzelevich

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
e-mail: aliaksei.vaidzelevich@gmail.com

Received: 24.07.2024 **Revised:** 02.10.2024 **Accepted:** 12.12.2024

Keywords: linear recurrence equations, convex polygons.

Abstract. A necessary and sufficient condition is obtained for the coefficient matrix of a linear recurrence equation in the space of convex polygons, any two different solutions of which do not intersect, i. e. the values of the solutions for each argument are different.

В работе рассматривается частный случай линейных рекуррентных уравнений в пространстве выпуклых компактов [1], решения которых представляют собой последовательности выпуклых многоугольников. Прежде чем сформулировать полученный результат, введем необходимые обозначения и приведем определения.

Суммой Минковского $Z = X + Y$ двух непустых множеств $X, Y \subset \mathbb{R}^2$ на плоскости называется множество $Z \stackrel{\text{def}}{=} \{x+y\colon x \in X,\, y \in Y\}$. Для действительной (2×2)-матрицы A и множества $X \subset \mathbb{R}^2$ через AX обозначим множество $\{Ax\colon x \in X\}$. В том частном случае, когда $A = \operatorname{diag}[\alpha, \alpha]$, вместо AX пишем αX. Непосредственно из определения следует, что для произвольных множеств X, $Y \subset \mathbb{R}^2$ и (2×2)-матриц A верно равенство $A(X+Y) = AX + AY$. Отметим, что для произвольных действительных (2×2)-матриц A, B и множества $X \subset \mathbb{R}^2$, вообще говоря, $(A+B)X \neq AX + BX$. В то же время если числа α и β одного знака, то для любого выпуклого множества X выполнено равенство $(\alpha+\beta)X = \alpha X + \beta X$.

Через $\mathcal{P}_2$ обозначим множество всех выпуклых многоугольников на плоскости, где под выпуклым многоугольником будем понимать выпуклую оболочку конечного множества точек.

В частности, точки и отрезки также считаем выпуклыми многоугольниками. Будем говорить, что два многоугольника P и Q различные, если они отличаются как множества точек на плоскости, а не в том смысле, что не существует движения плоскости, переводящего многоугольник P в многоугольник Q. Нетрудно видеть, что семейство $\mathcal{P}_2$ замкнуто относительно операции сложения по Минковскому и умножения на матрицу, а значит, мы можем рассмотреть линейное рекуррентное уравнение

$$X(t+1) = X(t) + AX(t), \quad X(t) \in \mathcal{P}_2, \quad t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{1}$$

где A – действительная (2×2)-матрица коэффициентов. Два решения $X_1(\cdot)$ и $X_2(\cdot)$ уравнения (1) называются *непересекающимися*, если $X_1(t) \neq X_2(t)$ при всех $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Уравнение (1) является дискретным аналогом однородного линейного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = ax, \quad x(t) \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где $a \in \mathbb{R}$. Действительно, дискретизируя уравнение (1), получаем $x_{t+1} - x_t = ax_t$, т. е. $x_{t+1} = x_t + ax_t$. Хорошо известно, что графики любых двух различных решений уравнения (2) не пересекаются. Возникает естественный вопрос о том, обладает ли уравнение (1) аналогичным свойством. В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный. Действительно, если $A = -E$, где E – единичная матрица, то для любого выпуклого многоугольника $M \in \mathcal{P}_2$ решения $X_1(\cdot)$ и $X_2(\cdot)$ такие, что $X_1(0) = M$ и $X_2(0) = -M$, принимают одно и тоже значение $M + (-M)$ при $t = 1$. В работе доказано следующее утверждение.

Теорема. *Любые два решения уравнения* (1) *либо совпадают, либо принимают различные значения при всех* $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *если и только если среди собственных значений матрицы* A *нет корней натуральной степени из* -1.

Для доказательства сформулированной теоремы установим справедливость нескольких вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть хотя бы одно из собственных значений матрицы* A *равно корню натуральной степени из* -1. *Тогда найдутся два различных выпуклых многоугольника* P *и* Q, *удовлетворяющих равенству*

$$P + AP = Q + AQ. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть n – наименьшее натуральное число такое, что у матрицы A^n одно из собственных значений равно -1. Пусть v – собственный вектор матрицы A^n, соответствующий собственному значению -1, т. е. $A^n v = -v$ и $v \neq 0$. Через m обозначим наименьшее натуральное число такое, что $A^m v = v$. Тогда $A^i v \neq A^j v$ для любых целых $0 \leqslant i \leqslant j < m$ (в противном случае было бы верно равенство $A^{m-j+i} v = v$, но $m - j + i < m$). Так как $A^{2n} v = v$, то $2n$ делится на m, при этом $n < m$, а значит, $m = 2n$. Положим

$$P = \operatorname{conv}\{v, A^2 v, \ldots, A^{2n-2} v\} \quad \text{и} \quad Q = \operatorname{conv}\{Av, A^3 v, \ldots, A^{2n-1} v\}.$$

Выпуклые многоугольники P и Q различные и выполнены равенства $AP = Q$, $AQ = P$, а значит, $P + AP = P + Q = Q + AQ$. □

Определение. *Опорной функцией* произвольного множества $X \subset \mathbb{R}^2$ называется функция $s(X, \cdot)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, определяемая равенством $s(X, v) \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{x \in X} v^\top x$, $v \in \mathbb{R}^2$.

Если множество X представимо в виде выпуклой оболочки конечного числа точек $p_1, p_2, \ldots, p_n$, т. е. является выпуклым многоугольником, то $s(X, v) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} v^\top p_i$, $v \in \mathbb{R}^2$.

Из определений опорной функции и суммы Минковского следует, что для любых двух множеств $X, Y \subset \mathbb{R}^2$ выполнено равенство $s(X+Y, \cdot) \equiv s(X, \cdot) + s(Y, \cdot)$. Из равенства $P + AP = Q + AQ$ следует, что $s(P + AP, v) = s(Q + AQ, v)$ для любого $v \in \mathbb{R}^2$, а значит,

$$s(P, v) + s(AP, v) = s(Q, v) + s(AQ, v). \tag{4}$$

Если $X \subset Y$, то $s(X, v) \leqslant s(Y, v)$ для любого $v \in \mathbb{R}^2$. Обратно, если Y – выпуклое компактное множество и $s(X, v) \leqslant s(Y, v)$ при всех $v \in \mathbb{R}^2$, то из теоремы об отделимости выпуклых множеств следует, что $X \subset Y$. Таким образом, два выпуклых компактных множества X и Y совпадают, если и только если равны их опорные функции $s(X,\cdot) \equiv s(Y,\cdot)$. В частности, выпуклые компактные множества X, Y и Z удовлетворяют равенству $X+Z = Y+Z$ тогда и только тогда, когда $X = Y$.

Лемма 2. *Если два выпуклых многоугольника P и Q удовлетворяют равенству* (3), *то для любого $n \in \mathbb{N}$ также выполнены равенства*

$$P + A^{2n+1}P = Q + A^{2n+1}Q \quad \text{и} \quad P + A^{2n}Q = Q + A^{2n}P. \tag{5}$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что верно равенство $P+A^{2n-1}P = Q+A^{2n-1}Q$, тогда для любого вектора $v \in \mathbb{R}^2$ имеем

$$s(P,v) + s(A^{2n-1}P,v) = s(Q,v) + s(A^{2n-1}Q,v). \tag{6}$$

Подставляя $A^\top v$ вместо v в равенство (6) и пользуясь тем, что $s(X, A^\top v) = s(AX, v)$ для любого подмножества $X \subset \mathbb{R}^2$, получаем

$$s(AP,v) + s(A^{2n}P,v) = s(AQ,v) + s(A^{2n}Q,v). \tag{7}$$

Вычитая из равенства (4) равенство (7), получаем $s(P,v) - s(A^{2n}P,v) = s(Q,v) - s(A^{2n}Q,v)$, т. е. $s(P+A^{2n}Q,v) = s(Q+A^{2n}P,v)$, а значит, $P+A^{2n}Q = Q+A^{2n}P$.

Предположим теперь, что верно равенство $P+A^{2n}Q = Q+A^{2n}P$. Поступая аналогично, получаем, что для любого вектора $v \in \mathbb{R}^2$ выполнено равенство

$$s(AP,v) + s(A^{2n+1}Q,v) = s(AQ,v) + s(A^{2n+1}P,v). \tag{8}$$

Вычитая из равенства (4) равенство (8), получаем

$$s(P,v) - s(A^{2n+1}Q,v) = s(Q,v) - s(A^{2n+1}P,v),$$

т. е. $s(P+A^{2n+1}P,v) = s(Q+A^{2n+1}Q,v)$, а значит, $P+A^{2n+1}P = Q+A^{2n+1}Q$. □

Лемма 3. *Различные выпуклые многоугольники P и Q удовлетворяют равенству* (3), *тогда при некотором $k \in \mathbb{N}$ хотя бы одно из собственных значений матрицы A^k равно* 1.

Доказательство. Через $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и $q_1, q_2, \ldots, q_m$ обозначим вершины многоугольников P и Q соответственно. Без нарушения общности будем считать, что $P \setminus Q \neq \varnothing$. Выберем вершину p_{i_0}, не принадлежащую многоугольнику Q. Для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется индекс $i_1 = i_1(k)$ такой, что $p_{i_0} + A^{2k+1}p_{i_1}$ – вершина многоугольника $P+A^{2k+1}P$. Из леммы 2 следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ найдутся индексы $j_0 = j_0(k)$ и $j_1 = j_1(k)$ такие, что $p_{i_0} + A^{2k+1}p_{i_1} = q_{j_0} + A^{2k+1}q_{j_1}$. Так как существует лишь конечное число способов выбрать тройку индексов (i_1, j_0, j_1), то для некоторых $k_1 < k_2 \in \mathbb{N}$ будут выбраны одни и те же индексы, т. е. $p_{i_0} + A^{2k_1+1}p_{i_1} = q_{j_0} + A^{2k_1+1}q_{j_1}$ и $p_{i_0} + A^{2k_2+1}p_{i_1} = q_{j_0} + A^{2k_2+1}q_{j_1}$. Поэтому

$$p_{i_0} - q_{j_0} = A^{2k_2+1}(q_{j_1} - p_{i_1}) = A^{2(k_2-k_1)}A^{2k_1+1}(q_{j_1} - p_{i_1}) = A^{2(k_2-k_1)}(p_{i_0} - q_{j_0}).$$

Так как $p_{i_0} \neq q_{j_0}$, то $(p_{i_0} - q_{j_0})$ – собственный вектор матрицы $A^{2(k_2-k_1)}$, соответствующий собственному значению 1. □

Лемма 4. *Пусть $A = \operatorname{diag}[\lambda, 1]$, где $\lambda \neq -1$. Тогда если выпуклые многоугольники P и Q удовлетворяют равенству* (3), *то они совпадают.*

Доказательство. Если $\lambda = 1$, то из равенства (3) получаем, что $P+P = Q+Q$, т. е. $2P = 2Q$, а значит, $P = Q$.

Если $\lambda = 0$, то умножим обе части равенства (3) на A. Так как $A^2 = A$, то получаем, что $AP+AP = AQ+AQ$, т. е. $AP = AQ$, а значит, из равенства (3) следует, что $P = Q$.

Предположим, что $\lambda \in (-1,1)$. Согласно лемме 1 при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнены равенства (5). Следовательно, $s(P,v) + s(A^{2n+1}P,v) = s(Q,v) + s(A^{2n+1}Q,v)$ при всех $v \in \mathbb{R}^2$. Так как $s(A^{2n+1}P,v) = s\big(P, (A^{2n+1})^\top v\big) \to s(P, \operatorname{diag}[0,1]v) = s(\operatorname{diag}[0,1]P, v)$ при $n \to \infty$. Аналогично, $s(A^{2n+1}Q,v) \to s(\operatorname{diag}[0,1]Q,v)$ при $n \to \infty$. Поэтому

$$P + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P = Q + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q,$$

а значит, как доказано выше, $P = Q$.

Наконец, если $|\lambda| > 1$, то домножение обеих частей равенства (3) на A^{-1} сводит этот случай к уже рассмотренному, так как $\lambda^{-1} \in (-1,1)$. □

Лемма 5. *Пусть* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Тогда если выпуклые многоугольники* P *и* Q *удовлетворяют равенству* (3), *то они совпадают.*

Доказательство. Методом математической индукции доказывается, что $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Для любых векторов u, $v \in \mathbb{R}^2$ функция $f(t) = v^\top \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u$ линейная по t, а значит, найдется такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что либо $v^\top A^k u \leqslant 0$ при всех целых $k \geqslant k_0$, либо $v^\top A^k u \geqslant 0$ при всех целых $k \geqslant k_0$.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – вершины многоугольника P, а $q_1, q_2, \ldots, q_m$ – вершины многоугольника Q. Так как матрица A невырожденная, то $A^k p_1, A^k p_2, \ldots, A^k p_n$ – различные вершины многоугольника $A^k P$, $k \in \mathbb{N}$. Аналогично, $A^k q_1$, $A^k q_2$, $\ldots$, $A^k q_m$ – различные вершины многоугольника $A^k Q$, $k \in \mathbb{N}$.

Произвольным образом выберем вершину p_{i_0}. Через $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ обозначим множество векторов v таких, что $v^\top p_{i_0} > v^\top p_i$ при всех $i \neq i_0$. Так как множество $\mathcal{V}$ имеет мощность континуум, то найдется вектор $v \in \mathcal{V}$, неортогональный ни одному из векторов вида $q_{j_2} - q_{j_1}$, $A^k(p_{i_2} - p_{i_1})$, $A^k(q_{j_2} - q_{j_1})$ при всех $i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$, $k \in \mathbb{N}$. Однозначно определены индексы

$$j_0 = \arg\max_{1 \leqslant j \leqslant m} v^\top q_j, \quad i_1 = \arg\max_{1 \leqslant i \leqslant n} v^\top A^k p_i \quad \text{и} \quad j_1 = \arg\max_{1 \leqslant j \leqslant m} v^\top A^k p_j$$

(при всех достаточно больших k индексы i_1 и j_1 одни и те же). Из леммы 2 следует, что

$$p_{i_0} + A^{2k+1} p_{i_1} = q_{j_0} + A^{2k+1} q_{j_1}, \quad p_{i_0} + A^{2k} q_{i_1} = q_{i_0} + A^{2k} p_{i_1}.$$

Умножим второе равенство на A и сложим с первым. После приведения подобных слагаемых, получаем, что $(A+E)p_{i_0} = (A+E)q_{j_0}$, а значит, $p_{i_0} = q_{i_0}$. Так как вершина p_{i_0} выбрана произвольным образом, то $P \subset Q$. Аналогично, получаем, что $Q \subset P$, а значит, многоугольники P и Q совпадают. □

Доказательство теоремы. Предположим, что хотя бы одно из собственных значений матрицы A равно корню натуральной степени из -1. Согласно лемме 1 найдутся два выпуклых многоугольника $P \neq Q$, удовлетворяющих равенству (3). Рассмотрим два решения $X_1(\cdot) \neq X_2(\cdot)$ уравнения (1) такие, что $X_1(0) = P$ и $X_2(0) = Q$. Тогда

$$X_1(1) = P + AP = Q + AQ = X_2(1).$$

Пусть теперь два решения $X_1(\cdot) \neq X_2(\cdot)$ приняли одно и тоже значение. Выберем наибольшее $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такое, что $X_1(t) \neq X_2(t)$. Обозначим $P = X_1(t)$ и $Q = X_2(t)$. Так как $X_1(t+1) = X_2(t+1)$, то для выпуклых многоугольников P и Q выполнено равенство (3). Согласно лемме 3 одно из собственных значений λ матрицы A равно корню степени $m \in \mathbb{N}$ из 1. Без нарушения общности будем считать, что λ – примитивный корень из 1 порядка m. Если m четно, т. е. $m = 2n$, то $\lambda^n = -1$. Если же m нечетно, т. е. $m = 2n+1$, то рассмотрим доказанное в лемме (1) равенство $P + A^{2n+1}P = Q + A^{2n+1}Q$. Оба собственных значения матрицы A^{2n+1} действительные. Пусть $J = S^{-1}A^{2n+1}S$ – жорданова нормальная форма матрицы A^{2n+1}, где S – действительная обратимая матрица. Без нарушения общности будем считать, что в правом нижнем углу матрицы J стоит 1. Выпуклые многоугольники $P' = S^{-1}PS$ и $Q' = S^{-1}QS$ различные и удовлетворяют равенству $P' + JP' = Q' + JQ'$. Из лемм 4 и 5 следует, что это может быть лишь только в одном случае, а именно, когда $J = \mathrm{diag}[-1, 1]$. □

Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси по заданию 1.2.01 «Развитие конструктивных и асимптотических методов исследования сложных управляемых дифференциальных и дискретных систем» ГПНИ «Конвергенция–2025» (подпрограмма «Математические модели и методы»).

Литература

1. *Войделевич А. С.* Линейные рекуррентные уравнения в пространстве выпуклых компактов и диаметры их решений // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 8. С. 1084–1088.

References

1. Voidelevich A. S. Linear Recurrent Equations in the Space of Convex Compact Sets and the Diameters of Their Solutions *Differential Equations*, 2023, vol. 59, pp. 1090–1094.