



УДК 519.63

**РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ
ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

Д. А. Шадинский

*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
e-mail: schadinskii@gmail.com*

Поступила: 23.10.2024

Исправлена: 02.12.2024

Принята: 12.12.2024

Ключевые слова: теоремы сравнения, разрушение решения, дискретные аналоги теорем сравнения, задача Неймана, нелинейные параболические уравнения.

Аннотация. На основе дискретного аналога теорем сравнения и неравенства Йенсена в статье получены условия разрушения решения и верхние оценки времени разрушения решения неявных разностных схем, которые аппроксимируют задачи Неймана для различных нелинейных параболических уравнений. Приводятся условия разрушения решения и верхняя оценка времени разрушения решения для аппроксимируемых дифференциальных задач, полученные на основе теорем сравнения и неравенства Йенсена.

**BLOW-UP IN DIFFERENCE SCHEMES THAT APPROXIMATE NEUMANN PROBLEMS FOR
NONLINEAR PARABOLIC EQUATIONS**

D. A. Schadinskii

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
e-mail: schadinskii@gmail.com*

Received: 23.10.2024

Revised: 02.12.2024

Accepted: 12.12.2024

Keywords: comparison theorems, blow-up, discrete analogue of comparison theorems, nonlinear parabolic equations.

Abstract. In this paper, based on the discrete analogue of comparison theorems and Jensen's inequality, blow-up conditions and upper bound of blow-up time of the solution of implicit finite-different problem which approximates Neumann problems for various nonlinear parabolic equations are obtained. Blow-up conditions and upper bound of blow-up time of approximated differential problems are given, which are obtained and based on comparison theorems and Jensen's inequality.

1. Введение

Теория разрушения решения имеет прикладное значение во многих областях науки. Примером может служить моделирование процессов, таких как безударное сжатие газа, самофокусировка световых пучков в нелинейных средах, термоядерное горение плазмы и других процессов в физике, химии и биологии. В области дифференциальных уравнений теории разрушения решения посвящено большое количество работ. Стоит отметить фундаментальные работы Н. Fujita [1] и Н. Levine [2]. Однако теория разрушения решения в разностных схемах является мало исследованной областью. Из существующих работ в области разностных схем можно выделить ключевые работы Т. Nakagawa [3], Y. Chen [4].

В данной статье приводится новый подход к изучению разрушения решения разностных схем. Он заключается в повторении шагов доказательства разрушения решения дифференциальной задачи, но с использованием дискретных аналогов дифференциальных законов. В пункте 2, для

задачи Неймана для параболического уравнения было приведено доказательство разрушения решения с использованием теоремы сравнения Чаплыгина и неравенство Йенсена. В пункте 3 для доказательства разрушения решения разностной схемы, аппроксимирующей задачу из пункта 2, была использована та же техника доказательства, но с применением дискретного аналога теоремы сравнения и неравенства Йенсена для дискретного случая. Стоит отметить, что при таком подходе к доказательствам условия разрушения одинаковы для дифференциального и разностного случаев. С аналогичным подходом в пунктах 4 и 5 были получены условия на разрушения решения задачи Неймана для уравнения с градиентной нелинейностью и для схемы ее аппроксимирующей.

2. Эффект разрушения решения в дифференциальных и разностных задачах

Для изучения разрушения решения рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{du}{dt} = g(t)f(u), \quad 0 \leq t < \infty, \quad u(0) = u_0, \quad (2.1)$$

где $g(t)$ – непрерывная положительная неубывающая функция для всех $t \in [0, \infty)$; $f(v)$ – непрерывно дифференцируемая положительная возрастающая функция при всех $v \in [u_0, \infty)$.

Определение 2.1. Будем говорить, что решение задачи (2.1) разрушается, если существует такое t_b , для которого

$$\lim_{t \rightarrow t_b - 0} u(t) = \infty.$$

В этом случае t_b называется временем разрушения решения.

Лемма 2.2. Для задачи (2.1) верны следующие равенства:

$$\Psi(u(t)) = \Phi(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (2.2)$$

где

$$\Psi(v) = \int_{u_0}^v \frac{dw}{f(w)}, \quad \Phi(t) = \int_0^t g(\zeta) d\zeta. \quad (2.3)$$

Доказательство. Для доказательства запишем задачу (2.2) в следующем виде:

$$\frac{du(t)}{f(u(t))} = g(t)dt, \quad t \in [0, \infty), \quad u(0) = u_0. \quad (2.4)$$

С учетом равенств (2.4) для $t \in [0, \infty)$ верна следующая цепочка равенств

$$\Psi(u(t)) = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{dw}{f(w)} = \int_0^t \frac{du(\zeta)}{f(u(\zeta))} = \int_0^t g(\zeta) dt = \Phi(t).$$

□

Предложение 2.3. Пусть для задачи (2.1) выполнено неравенство

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \Psi(v) = \Psi(\infty) < \infty.$$

Тогда решение задачи разрушается за конечное время t_b

$$t_b = \Phi^{-1}[\Psi(\infty)], \quad (2.5)$$

где $\Psi(v)$, $\Phi(t)$ определяются равенствами (2.3).

Доказательство. Так как $\Phi(t)$ – возрастающая неограниченная функция на $[0, \infty)$ и выполнены условия утверждения $\Psi(\infty) < \infty$, то существует $t_b < \infty$, для которого верно $\Psi(\infty) = \Phi(t_b)$. Тогда в силу строгой монотонности функций $\Psi(v)$, $\Phi(t)$ можно записать соотношение (2.5).

Теперь покажем что решение задачи (2.1) разрушается в точке t_b . Переходя к пределу $t \rightarrow t_b$ в равенстве (2.2), получим следующие соотношения $\Psi(\lim_{t \rightarrow t_b} u(t)) = \Phi(t_b)$, откуда следует, что

$$\Psi(\lim_{t \rightarrow t_b} u(t)) = \Psi(\infty), \quad \text{а значит} \quad \lim_{t \rightarrow t_b} u(t) = \infty. \quad \square$$

Введем общее определение разрушения решения. Рассмотрим нестационарную дифференциальную задачу \mathcal{A} в $\Omega \times [t_0, \infty)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Обозначим через $u(x, t)$ решение дифференциальной задачи \mathcal{A} . Пусть $\|\cdot\|_\Omega$ – некоторая норма в области Ω .

Определение 2.4. Решение $u(x, t)$ дифференциальной задачи \mathcal{A} разрушается в норме $\|\cdot\|_\Omega$, если существует T_b ($t_0 < T_b < \infty$), для которого верно следующее соотношение:

$$\lim_{t \rightarrow T_b - 0} \|u(t)\|_\Omega = \infty.$$

В этом случае T_b называется временем разрушения решения задачи \mathcal{A} .

Предложение 2.5. Предположим, что $w(t)$ – непрерывная функция, для которой верно следующее соотношение:

$$\lim_{t \rightarrow t_b - 0} w(t) = +\infty,$$

и также предположим, что для решения задачи \mathcal{A} выполнено неравенство

$$\|u(t)\|_\Omega \geq w(t), \quad t \geq t_0.$$

Тогда решение задачи \mathcal{A} разрушается в норме $\|\cdot\|_\Omega$, кроме того $T_b \leq t_b$.

В дальнейшем важную роль в изучении задач с разрушением решения будет играть следующее следствие из теоремы сравнения [5, с. 26].

Следствие 2.6. Пусть $\beta(t)$ верхнее решение задачи (2.1), удовлетворяющее соотношениям

$$\frac{d\beta}{dt} \geq g(t)f(\beta(t)), \quad t \in [0, T_e), \quad \beta(0) = u_0,$$

где $[0, T_e)$ – интервал существования функции $\beta(t)$.

Тогда верно неравенство

$$u(t) \leq \beta(t)$$

для всех t , принадлежащих их общему интервалу существования.

Доказательство. Доказательство следует из теоремы 4.1 [5, с. 26] и теоремы Пикара–Линделефа [5, с. 8]. \square

Стоит отметить важную роль при исследовании задач с разрушением решения, которая отводится неравенству Йенсена. Неравенство будет широко использоваться в дальнейшем в статье.

Теорема 2.7 (Неравенство Йенсена). Пусть функция $\varphi(v)$ выпуклая на произвольном интервале χ , тогда для произвольной функции $u(x)$, интегрируемой на χ , следующее неравенство выполнено

$$\varphi\left(\int_\chi u(x) dx\right) \leq \frac{1}{\text{mes}(\chi)} \int_\chi \varphi(\text{mes}(\chi)u(x)) dx. \quad (2.6)$$

2.1. Разрушения решения для разностных схем

Так как нельзя говорить о разрушении, основываясь на конечном наборе значений сеточной функции, то для определения разрушения решения понадобится последовательность узлов, на которой будет определено решение разностной схемы или сетка со счетным количеством узлов $\omega_\tau = \{t_n | t_{n+1} > t_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Предположим, что имеется разностная схема \mathcal{A}_h , которая аппроксимирует дифференциальную задачу \mathcal{A} и определена на сетке $\omega = \omega_\tau \times \omega_h$. Обозначим через y_n решение разностной схемы \mathcal{A}_h на сетке ω_h во временном узле t_n . Пусть $\|\cdot\|_{\omega_h}$ – некоторая сеточная норма по сетке ω_h .

Определение 2.8. Разностная схема \mathcal{A}_h , определенная на ω , допускает разрушение решения в норме $\|\cdot\|_{\omega_h}$, если существует такая сетка ω_τ , для которой последовательность $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ стремится к некоторому конечному числу, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = T_{hb} < \infty$, а решение \mathcal{A}_h стремится к бесконечности в данной норме, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\|_{\omega_h} = \infty.$$

Замечание 2.9. В отличие от разрушения решения для дифференциальной задачи в определении 2.8 разрушения решения для разностной схемы \mathcal{A}_h зависят от выбора сетки ω_τ . Всегда можно выбрать сетку ω_τ таким образом, чтобы $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ стремилось к некоторому конечному числу, а решение \mathcal{A}_h также стремилось к другому конечному числу. Таким образом, если одно решение разностной схемы разрушается, то найдется решение, которое не разрушается. Чтобы отразить эту особенность, будем писать, что разностная схема \mathcal{A}_h допускает разрушения решения.

Предложение 2.10. Предположим, что $w(t)$ – непрерывная функция, которая не ограничена на конечном интервале, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow t_b - 0} w(t) = +\infty,$$

и также предположим, что для любого решения задачи \mathcal{A}_h выполнено неравенство

$$\|y^n\|_{\omega_h} \geq w(t_n), \quad t_n \in \omega_\tau.$$

Тогда \mathcal{A}_h допускает разрушение решения в норме $\|\cdot\|_{\omega_h}$, кроме того $T_{hb} \leq t_b$.

Доказательство. Доказательство от противного. Предположим, что для любой сетки ω_τ , для которой последовательность $(t_n)_{n=0}^\infty$ стремится к пределу $T_{hb} \leq t_b$, решение задачи \mathcal{A}_h в некоторой норме стремится к константе. Построим сетку ω_τ , такую, что выполнено $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_b$. Тогда для решения \mathcal{A}_h на этой сетке верны следующие соотношения:

$$\infty \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \|y^n\|_{\omega_h} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} w(t_n) = \infty.$$

Противоречие. Следовательно утверждение доказано. \square

В дальнейшем важную роль для обнаружения эффекта разрушения решения в разностных схемах будет играть следующий дискретный аналог теорем сравнения [7].

Теорема 2.11. Пусть на сетке $\bar{\omega}_\tau = \{t_n \mid t_{n+1} = t_n + \tau_n, \tau_n > 0, n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, t_0 = 0, t_{N_0} = T\}$ сеточная функция $\beta_\tau^n \in [u_0, \infty)$, $n = 0, 1, \dots, N_0$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\beta_\tau^{n+1} - \beta_\tau^n}{\tau_n} \geq g(t_{n+1})f(\beta_\tau^{n+1}), \quad n = 0, \dots, N_0 - 1, \quad \beta_\tau^0 \geq u_0.$$

Тогда

$$\beta_\tau^m \geq u(t_m), \quad m = 0, 1, \dots, N_0.$$

Также стоит отметить важную роль при доказательстве разрушения решения разностных схем дискретного аналога неравенства Йенсена.

Теорема 2.12 (Неравенство Йенсена). Пусть функция $\varphi(v)$ выпуклая на произвольном интервале U и $\{q_i \mid q_i > 0, i \in \eta\}$ – множество точек, где $\eta \subseteq \mathbb{N}$ и $\sum_{i \in \eta} q_i = 1$, тогда для произвольного множества $\{v_i \mid v_i \in U, i \in \eta\}$ выполнено следующее неравенство:

$$\varphi\left(\sum_{i \in \eta} q_i v_i\right) \leq \sum_{i \in \eta} q_i \varphi(v_i).$$

3. Задача Неймана для параболического уравнения

Рассмотрим задачу Неймана для одномерного случая

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \quad (3.1)$$

$$k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad t \in (0, \infty), \quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.3)$$

где $\Omega = \{x : 0 < x < l\}$, $l = \text{const} > 0$. Функция k положительная в \mathbb{R}^+ и $k \in C^1(\mathbb{R}^+)$, функция f неотрицательная и $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$. Функция $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ и $u_0(x) > 0, x \in \Omega$.

Теорема 3.1. *Предположим, что следующие условия выполнены:*

1. *Функция $f(v)$ непрерывно-дифференцируемая, монотонно возрастающая и выпуклая при $v \geq v_0$, где*

$$v_0 = \frac{1}{l} \int_0^l u_0(x) dx.$$

2. *Существует $T_1 < \infty$, которое удовлетворяет следующему соотношению:*

$$T_1 = \int_{v_0}^{\infty} \frac{dw}{f(w)}.$$

Тогда решение задачи (3.1)–(3.3) разрушается за конечное время, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow T_b - 0} \sup_{0 \leq x \leq l} u(x, t) = \infty, \quad (3.4)$$

и, более того, $T_b \leq T_1$.

Доказательство. В соответствии с математическим аппаратом, приведенным в книге [6, с. 27], проинтегрируем уравнение (3.1) по $x \in [0, l]$

$$\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} dx = \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_0^l + \int_0^l f(u) dx, \quad (3.5)$$

и применим условие (3.2) к (3.5), имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^l u dx = \int_0^l f(u) dx.$$

Учитывая, что функция $f(v)$ выпуклая, используя неравенство Йенсена (2.6) получаем

$$\frac{dv}{dt} \geq f(v), \quad v(0) = v_0, \quad v(t) = \frac{1}{l} \int_0^l u(x, t) dx.$$

Тогда из следствия 2.6, следует неравенство

$$v(t) \geq w(t), \quad t \in [0, T_2], \quad (3.6)$$

где $w(t)$ – решение задачи (2.1), в которой функция $g = 1$ и $[0, T_2]$ – общий интервал существования функций $v(t)$ и $w(t)$.

Поскольку условие 2 теоремы выполнено, то из предложения 2.3 следует, что $\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} w(t) = \infty$. Следовательно, из (3.6) имеем

$$\lim_{t \rightarrow T_b - 0} v(t) = \infty,$$

более того, $T_b \leq T_1$. Тогда

$$\infty = \lim_{t \rightarrow T_b - 0} v(t) = \frac{1}{l} \lim_{t \rightarrow T_b - 0} \int_0^l u(x, t) dx \leq \lim_{t \rightarrow T_b - 0} \sup_{0 \leq x \leq l} u(x, t). \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует утверждение теоремы (3.4). □

4. Разностная схема для задачи Неймана для параболического уравнения

В этом пункте рассматривается неявная разностная схема и указываются условия, при которых решение разностной схемы допускает разрушение решения. Введем следующие сетки:

$$\omega_\tau = \{t_n | t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad \tau_n > 0, \quad n = \overline{0, N_0 - 1}, \quad t_0 = 0, \quad t_{N_0} = T\},$$

$$\omega_h = \{x_i = ih, \quad h = l/N, \quad i = \overline{1, N - 1}\},$$

$$\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \{0\} \cup \{l\}.$$

Рассмотрим теперь разностную схему

$$y_t = (ay_{\bar{x}})_x^{(\sigma)} + f(y^{n+1}), \quad (x, t) \in \omega, \quad \omega = \omega_h \times \omega_\tau, \quad (4.1)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \omega_h, \quad a_i^n = 0,5(k(y_{i-1}^n) + k(y_i^n)), \quad (x, t) \in \omega, \quad (4.2)$$

$$(a_{1y_{x,0}})^{(\sigma)} - \frac{h}{2}(y_{t,0} - f(y_0^{n+1})) = (a_{Ny_{\bar{x},N}})^{(\sigma)} + \frac{h}{2}(y_{t,N} - f(y_N^{n+1})) = 0, \quad (4.3)$$

которая аппроксимирует задачу (3.1)–(3.3) с порядком $O(h^2 + \tau)$, где $\sigma \in [0, 1]$ – значение весового оператора $\mu^{(\sigma)} = \frac{1}{2}(\sigma\mu^{n+1} + (1-\sigma)\mu^n)$.

Теорема 4.1. *Предположим, что следующие условия выполнены:*

1. *Функция $f(v)$ непрерывно-дифференцируемая, монотонно возрастающая и выпуклая при $v \geq v_h^0$, где*

$$v_h^0 = \frac{1}{l} \left(\frac{h}{2}y_0^0 + \sum_{i=1}^{N-1} hy_i^0 + \frac{h}{2}y_N^0 \right).$$

2. *Существует $T_1 < \infty$, которое удовлетворяет следующему соотношению:*

$$T_1 = \int_{v_h^0}^{\infty} \frac{dw}{f(w)}. \quad (4.4)$$

Тогда разностная схема (4.1)–(4.3) допускает разрушение решения, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\omega_h} y^n = \infty, \quad (4.5)$$

и кроме того, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = T_{hb} \leq T_1$.

Доказательство. Просуммируем (4.1) по ω_h

$$\sum_{i=1}^{N-1} y_t = \sum_{i=1}^{N-1} (ay_{\bar{x}})_x^{(\sigma)} + \sum_{i=1}^{N-1} f(y^{n+1}).$$

После упрощения равенство имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{N-1} y_t = \frac{1}{h} \left((a_{Ny_{\bar{x},N}})^{(\sigma)} - (a_{1y_{x,0}})^{(\sigma)} \right) + \sum_{i=1}^{N-1} f(y_i^{n+1}).$$

Используя краевые условия (4.3), умножая на h и деля на l , имеем

$$\frac{1}{l} \left(\frac{h}{2}y_{t,0} + \sum_{i=1}^{N-1} hy_t + \frac{h}{2}y_{t,N} \right) = \frac{1}{l} \left(\frac{h}{2}f(y_0^{n+1}) + \sum_{i=1}^{N-1} hf(y_i^{n+1}) + \frac{h}{2}f(y_N^{n+1}) \right).$$

Пусть $v_h^n = \frac{1}{l} \left(\frac{h}{2}y_0^n + \sum_{i=1}^{N-1} hy_i^n + \frac{h}{2}y_N^n \right)$ и применяя теорему 2.12 к правой части уравнения, получаем следующую задачу:

$$(v_h)_t \geq f(v_h^{n+1}),$$

$$v_h^0 = \frac{1}{l} \left(\frac{h}{2}y_0^0 + \sum_{i=1}^{N-1} hy_i^0 + \frac{h}{2}y_N^0 \right).$$

Из теоремы 2.11 следует неравенство

$$v_h^n \geq w(t_n), \quad t_n \in \omega_\tau. \quad (4.6)$$

Поскольку условие 2 теоремы выполнено, то $\lim_{t \rightarrow T_1} w(t) = \infty$. Следовательно, из предложения 2.10 задача (4.1)–(4.3) допускает разрушение решения, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_h^n = \infty,$$

более того, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = T_{hb} \leq T_1$. Следовательно

$$\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} v_h^n = \frac{1}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{h}{2} y_0^n + \sum_{i=1}^{N-1} h y_i^n + \frac{h}{2} y_N^n \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq i \leq N} y_i^n. \quad (4.7)$$

Из (4.5) следует утверждение теоремы (4.7). \square

Для вычислительного эксперимента рассматривалась следующая начально-краевая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u^2, \quad (x, t) \in \left(-\frac{L_s}{2}, \frac{L_s}{2} \right) \times (0, \infty),$$

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(-\frac{L_s}{2}, t \right) = \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{L_s}{2}, t \right) = 0, \quad t \in (0, \infty),$$

$$u_0(x) = \frac{4}{3} \cos^2 \frac{\pi x}{L_s} + 10^{-20}, \quad x \in \left(-\frac{L_s}{2}, \frac{L_s}{2} \right),$$

где $L_s = 2\sqrt{2}\pi$.

Для численного эксперимента использовалась консервативная разностная схема (4.1)–(4.3) при $\sigma = 0,5$. Для данной постановки разностной задачи величина $T_1 = \frac{3}{2}$ в соответствии с формулой (4.4). Тогда по теореме 4.1 решение схемы допускает разрушение решения и $T_{hb} < T_1$. Шаг выбирался автоматически из соображений сходимости метода простой итерации и устойчивости вычислительного процесса $\tau_n = \frac{0,03}{\max_{\omega_h} y^n}$. Критерием остановки вычислительного процесса было получение приближенного решения $\max_{\omega_h} y^N > 10^{150}$.

Проводились такие же вычислительные эксперименты при $\sigma = 0,5$ для аналогичной (4.1)–(4.3) разностной схемы, которая отличается лишь тем, что источник f аппроксимируется на нижнем слое вместо верхнего. Получили подтверждение общеизвестного факта, что в неявных схемах (схемы с опережением) время локализации наступает раньше $T_b \approx 1$, а в явных схемах (схема с запаздыванием) – позже.

Результаты вычислительного эксперимента:

Параметры аппроксимации	h	N	τ_N	y_N	t_N
Неявная	0,27	46211	$1,01 \cdot 10^{-152}$	$1,00 \cdot 10^{150}$	1,017597
Явная	0,27	45516	$1,00 \cdot 10^{-152}$	$1,01 \cdot 10^{150}$	0,976533

Из результатов вычислительного эксперимента видно, что решение неявной схемы стремится к бесконечности, что соответствует полученным ранее результатам. Приблизительное время разрушения решения, полученное для неявной разностной схемы, меньше T_1 , что соответствует полученной оценке (4.6). Так как $v_h^0 = v_0$ в этом вычислительном эксперименте, то время разрушения решения исходной дифференциальной задачи T_b должно быть меньше T_1 , что также выполнено.

5. Задача Неймана для уравнения с градиентной нелинейностью

В этом пункте изучается эффект разрушения решения следующей дифференциальной задачи:

$$\frac{\partial g(u)}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(p \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)^2 \right) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + k(t)f(u), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \quad (5.1)$$

$$(\bar{F}, \bar{n}) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \quad (5.2)$$

$$\bar{F} = \left(p \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 \right) \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, p \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_m} \right)^2 \right) \frac{\partial u}{\partial x_m} \right),$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (5.3)$$

где $\bar{\Omega}$ – ограниченное связное множество в \mathbb{R}^m с гладкой границей $\partial\Omega$. Функция $g \in C^1(\mathbb{R}^+)$ и $g'(s) > 0$ для всех $s > 0$, функция p положительная в \mathbb{R}^+ и $p \in C^1(\mathbb{R}^+)$, функция k положительная в \mathbb{R}^+ и $k \in C(\mathbb{R}^+)$, функция f неотрицательная и $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$, \bar{n} – внешняя единичная нормаль к границе области Ω . Функция $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ и $u_0(x) > 0, x \in \bar{\Omega}$.

Теорема 5.1. *Предположим, что следующие условия выполнены:*

1. Функция

$$\varphi(v) = \text{mes}\Omega f \left(g^{-1} \left(\frac{1}{\text{mes}\Omega} v \right) \right),$$

$\text{mes}\Omega$ – мера области Ω , непрерывно-дифференцируемая, монотонно возрастающая и выпуклая при $v \geq v_0$, где

$$v_0 = v(0) = \int_{\Omega} g(u(x, 0)) dx.$$

2. Существует $T_1 < \infty$, которое удовлетворяет уравнению

$$\int_{v_0}^{\infty} \frac{dw}{\varphi(w)} = \int_0^{T_1} k(t) dt.$$

Тогда решение задачи (5.1)–(5.3) разрушается за конечное время, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow T_b - 0} \sup_{x \in \Omega} u(x, t) = \infty,$$

и, более того, $T_b \leq T_1$.

Доказательство. Проинтегрируем (5.1) по $x \in \Omega$ и применим формулу Гаусса–Остроградского

$$\int_{\Omega} \frac{\partial g(u)}{\partial t} dx = (\bar{F}, \bar{n}) \Big|_{\partial\Omega} + k(t) \int_{\Omega} f(u) dx, \quad t \in (0, T], \quad (5.4)$$

и применим условие (5.2) к (5.4), имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} g(u) dx = k(t) \int_{\Omega} f(u) dx, \quad t \in (0, T].$$

Заметим, что можно записать функцию в виде $f(u) = f(g^{-1}(g(u)))$, следовательно имеет место уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} g(u) dx = k(t) \int_{\Omega} f(g^{-1}(g(u))) dx, \quad t \in (0, T]. \quad (5.5)$$

Учитывая, что функция $\varphi(v)$ выпуклая, приведем правую часть уравнения (5.5) к виду, удобному для применения неравенства Йенсена (2.6), и применим его

$$\begin{aligned} \text{mes}\Omega \frac{1}{\text{mes}\Omega} k(t) \int_{\Omega} f \left(g^{-1} \left(\frac{1}{\text{mes}\Omega} g(u) \right) \right) dx &= \\ &= \frac{1}{\text{mes}\Omega} k(t) \int_{\Omega} \varphi(\text{mes}\Omega g(u)) dx \geq k(t) \varphi \left(\int_{\Omega} g(u) dx \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Тогда из (5.5) при учете (5.3) и неравенства (5.6) можно получить следующую задачу:

$$\frac{dv}{dt} \geq k(t) \varphi(v), \quad v(0) = v_0, \quad v(t) = \int_{\Omega} g(u) dx. \quad (5.7)$$

Тогда из следствия 2.6, следует неравенство

$$v(t) \geq w(t), \quad t \in [0, T_2), \quad (5.8)$$

где $w(t)$ – решение задачи (2.1), в которой функция $g = k$ и $f = \varphi$ из (5.7) и $[0, T_2)$ – общий интервал существования функций $v(t)$ и $w(t)$.

Поскольку условие 2 теоремы выполнено, то из предложения 2.3 следует, что $\lim_{t \rightarrow T_1} w(t) = \infty$. Следовательно, из (5.8) имеем

$$\lim_{t \rightarrow T_b-0} v(t) = \infty,$$

более того, $T_b \leq T_1$. Тогда в силу того, что функция $g(u)$ непрерывная и возрастающая, получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \infty &= \lim_{t \rightarrow T_b-0} v(t) = \lim_{t \rightarrow T_b-0} \int_{\Omega} g(u(x, t)) dx \leq \\ &\leq \text{mes} \Omega \lim_{t \rightarrow T_b-0} \sup_{\Omega} g(u(x, t)) = \text{mes} \Omega \lim_{t \rightarrow T_b-0} g(\sup_{\Omega} u(x, t)). \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство

$$\lim_{t \rightarrow T_b-0} \sup_{\Omega} u(x, t) = \infty.$$

□

6. Разностная схема для задачи Неймана для уравнения с градиентной нелинейностью

В этом пункте рассматривается неявная разностная схема и указывается условие, при котором решение разностной схемы допускает разрушение решения.

Предполагается, что Ω является областью с гладкой границей, которая достаточно близка к m -мерному параллелепипеду $[0, l_1] \times \dots \times [0, l_m]$, чтобы не влиять существенно на погрешность решения, не менять порядок погрешности аппроксимации разностной схемы и начальной функции в граничных точках сетки при использовании равномерной прямоугольной сетки. В таком случае считаем, что углы между внешней нормалью к поверхности в точках соприкасающихся граней параллелепипеда и положительными направлениями оси равны $\pm \frac{\pi}{4}$ для правой границы и $\pm \frac{3\pi}{4}$ для левой границы.

Примером такой области с гладкой границей может быть следующая двумерная область с крайне малой величиной параметра ε :

$$z_1(x_1) \leq x_2(x_1) \leq z_2(x_1) \quad x_1 \in [0, l_1], \quad (6.1)$$

где

$$z_1(x_1) = \begin{cases} \varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - (x_1 - \varepsilon)^2}, & x_1 \in [0, \varepsilon]; \\ 0, & x_1 \in (\varepsilon, l_1 - \varepsilon); \\ \varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - (x_1 - l_1 + \varepsilon)^2}, & x_1 \in [l_1 - \varepsilon, l_1]; \end{cases}$$

$$z_2(x_1) = \begin{cases} l_2 - \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - (x_1 - \varepsilon)^2}, & x_1 \in [0, \varepsilon]; \\ l_2, & x_1 \in (\varepsilon, l_1 - \varepsilon); \\ l_2 - \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - (x_1 - l_1 + \varepsilon)^2}, & x_1 \in [l_1 - \varepsilon, l_1]. \end{cases}$$

Определение 6.1. Многомерную область, построенную по примеру области (6.1), будем называть ε -сглаженной прямоугольной областью $[0, l_1] \times \dots \times [0, l_m]$.

На основе множества Ω вводим сетку

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau, \quad \omega = \omega_h \times \omega_\tau, \quad \gamma_h = \bar{\omega}_h / \omega_h, \quad \bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{0\},$$

где

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_n | t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad \tau_n > 0, \quad n = \overline{0, N_0 - 1}, \quad t_{N_0} = T\},$$

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_h &= \left\{ x_i = \left(x_1^{(i_1)}, \dots, x_m^{(i_m)} \right) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, m} \right\}, \\ \omega_h &= \left\{ x_i = \left(x_1^{(i_1)}, \dots, x_m^{(i_m)} \right) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}, \quad \alpha = \overline{1, m} \right\}, \\ \gamma_\alpha^0 &= \left\{ x_i = \left(x_1^{(i_1)}, \dots, x_m^{(i_m)} \right) \mid x \in \bar{\omega}, \quad x_\alpha^{(i_\alpha)} = 0 \right\}, \\ \gamma_\alpha^N &= \left\{ x_i = \left(x_1^{(i_1)}, \dots, x_m^{(i_m)} \right) \mid x \in \bar{\omega}, \quad x_\alpha^{(i_\alpha)} = (N_\alpha - 1)h_\alpha \right\},\end{aligned}$$

с постоянными шагами по пространству h_1, h_2, \dots, h_m ($h_\alpha = \frac{l_\alpha}{N_\alpha}$) и адаптивным шагом по времени τ_n .

Мера множества $mes\Omega = \prod_{\alpha=1}^m l_\alpha$.

Рассмотрим разностную схему, которая аппроксимирует задачу (5.1)–(5.3)

$$g(y)_t = \sum_{\alpha=1}^m A_\alpha(y) + k(t_{n+1})f(y^{n+1}), \quad (x, t) \in \bar{\omega}_h \times \omega_\tau, \quad (6.2)$$

$$A_\alpha(y) = \begin{cases} \frac{2}{h_\alpha} D(y_{x_\alpha}^{n+1}), & x \in \gamma_\alpha^0; \\ D(y_{x_\alpha}^{n+1})_{\bar{x}_\alpha}, & x \in \omega_h; \\ -\frac{2}{h_\alpha} D(y_{x_\alpha}^{n+1}), & x \in \gamma_\alpha^N; \end{cases} \quad \alpha = \overline{1, m}, \quad (6.3)$$

$$y^0 = y_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (6.4)$$

где

$$D(u) = p(u^2)u.$$

Теорема 6.2. *Предположим, что следующие условия выполнены:*

1. *Функция*

$$\varphi(v) = mes\Omega f \left(g^{-1} \left(\frac{1}{mes\Omega} v \right) \right)$$

непрерывно-дифференцируемая, монотонно возрастающая и выпуклая при $v \geq v_h^0$, где

$$v_h^0 = s \sum_{\omega_h} g(y_0) + s \frac{1}{2} \sum_{\gamma_h} g(y_0), \quad s = \prod_{\alpha=1}^m h_\alpha.$$

2. *Существует $T_1 < \infty$, которая удовлетворяет уравнению*

$$\int_{v_h^0}^{\infty} \frac{dw}{\varphi(w)} = \int_0^{T_1} k(t) dt.$$

Тогда разностная схема (6.2)–(6.4) допускает разрушение решения, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\omega_h} y^n = \infty,$$

и кроме того, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = T_{hb} \leq T_1$.

Доказательство. Просуммируем (6.2) по ω_h

$$\sum_{\omega_h} g(y)_t = \sum_{\omega_h} \sum_{\alpha=1}^m A_\alpha(y) + k(t_{n+1}) \sum_{\omega_h} f(y^{n+1}).$$

Используя (6.3), для случая $x \in \gamma_h$ получаем

$$\sum_{\omega_h} g(y)_t + \frac{1}{2} \sum_{\gamma_h} g(y)_t = k(t_{n+1}) \left(\sum_{\omega_h} f(y^{n+1}) + \frac{1}{2} \sum_{\gamma_h} f(y^{n+1}) \right).$$

Умножив на $s = \prod_{\alpha=1}^m h_\alpha$ и введя оператор $\Lambda = \sum_{\omega_h} + \frac{1}{2} \sum_{\gamma_h}$, имеем

$$s \Lambda g(y)_t = mes\Omega k(t_{n+1}) \Lambda \frac{s}{mes\Omega} f \left(g^{-1} \left(g(y^{n+1}) \right) \right).$$

Пусть $v_h^n = s \Lambda g(y^n)$ и применяя теорему 2.12 к уравнению, получаем следующую задачу:

$$(v_h)_t \geq k(t_{n+1})\varphi(v^{n+1}),$$

$$v_h^0 = s \Lambda g(y_0) = s \sum_{\omega_h} g(y_0) + s \frac{1}{2} \sum_{\gamma_h} g(y_0).$$

Из теоремы 2.11 следует неравенство

$$v_h^n \geq w(t_n), \quad t_n \in \omega_\tau.$$

Поскольку условие 2 теоремы выполнено, то $\lim_{t \rightarrow T_1} w(t) = \infty$. Следовательно, из предложения 2.10 задача (6.2)–(6.4) допускает разрушение решения, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_h^n = \infty,$$

более того, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = T_{hb} \leq T_1$. Следовательно, в силу того, что $g(u)$ непрерывная возрастающая, имеем следующее равенство:

$$\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} v_h^n = \lim_{n \rightarrow \infty} s \Lambda g(y^n) \leq \text{mes} \Omega \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\bar{\omega}_h} g(y^n) = \text{mes} \Omega \lim_{n \rightarrow \infty} g \left(\max_{\bar{\omega}_h} y^n \right).$$

Отсюда следует равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\bar{\omega}_h} y^n = \infty.$$

□

6.1. Вычислительный эксперимент

Для вычислительного эксперимента использовалась задача (5.1)–(5.3) при $g(u) = u$, $p(v) = v$, $f(u) = u^5$, $k(t) = 1$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)^3 \right) + f(u), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty),$$

$$(\bar{F}, \bar{n}) = 0, \quad (x, t) \in \partial \Omega \times (0, \infty), \quad \bar{F} = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^3, \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^3 \right),$$

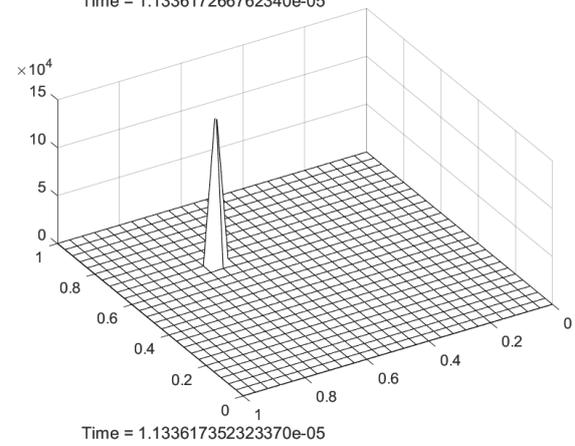
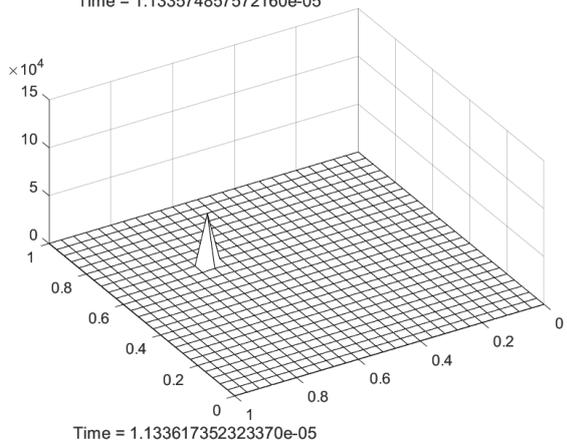
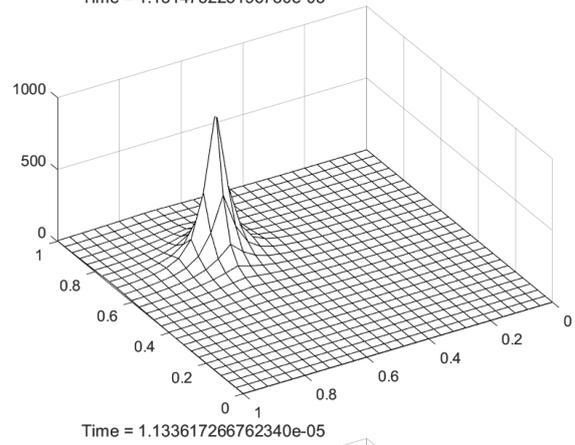
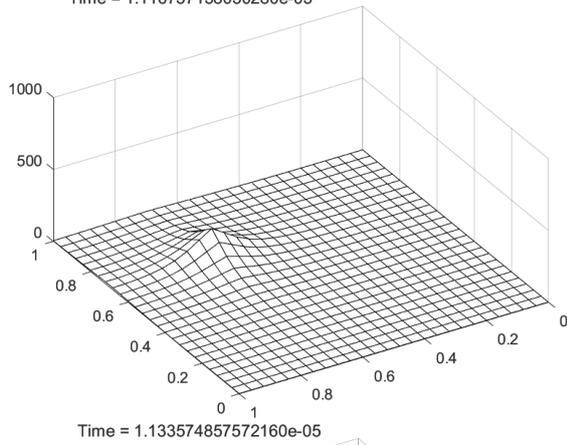
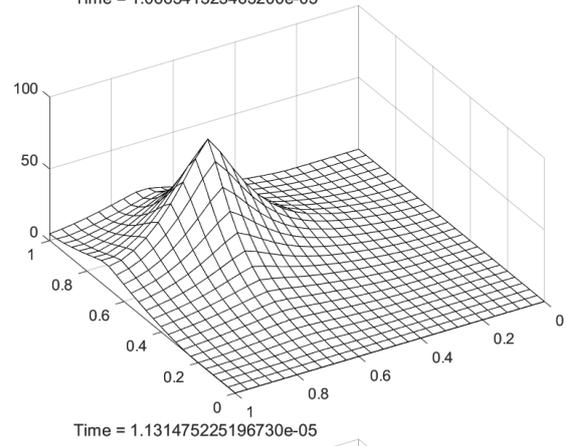
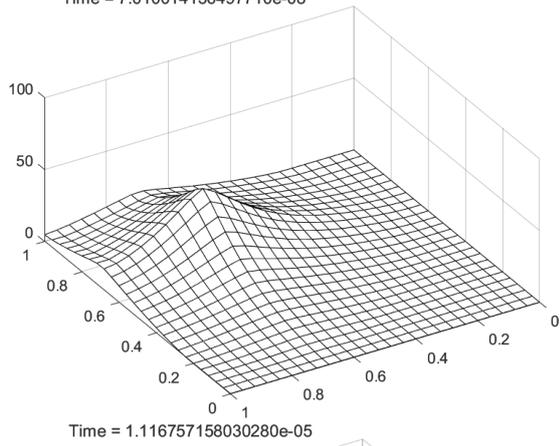
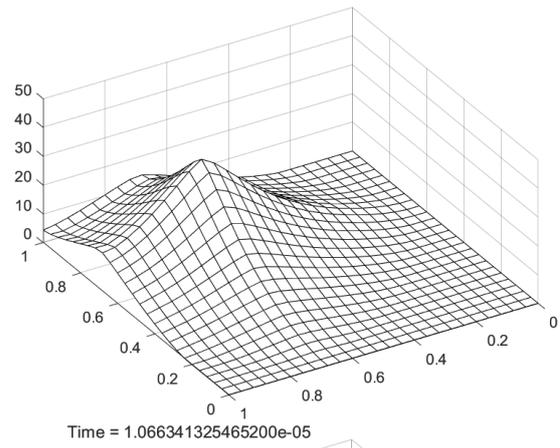
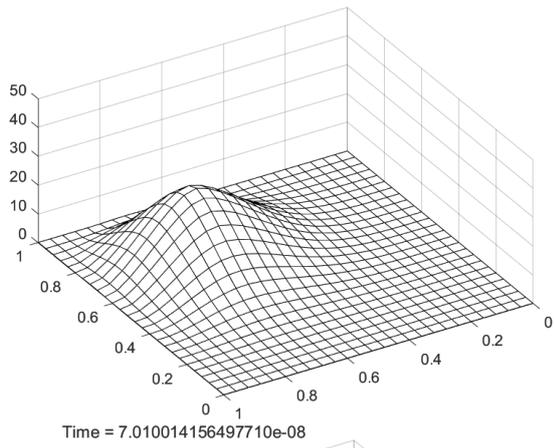
$$u_0(x) = \frac{25}{4} (\cos(-\pi + 2\pi x_1^2) + 1) (\cos(-\pi + 2\pi x_2^2) + 1) + 10^{-20}, \quad x \in \Omega,$$

где $\bar{\Omega}$ является ε -сглаженной прямоугольной областью $[0, 1] \times [0, 1]$ со значением $\varepsilon = 10^{-20}$.

Для аппроксимации использовалась разностная схема (6.2)–(6.4). Численно было найдено время разрушения решения $T_b \approx 1,13361735232337 \cdot 10^{-5}$. Из теоремы 6.2 получим время $T_1 = \int_{v_0}^{\infty} \frac{dw}{\varphi(w)} = 1,53755 \cdot 10^{-3}$, которое оценивает время разрушения T_b сверху. Графики решения при некоторых фиксированных t приведены на рисунке. Заметим, что разница во времени между слоями на последних двух графиках меньше, чем 10^{-20} .

Таким образом, решение задачи разрушается, что соответствует теоремам 5.1, 6.2 и время $T_1 = 1,53755 \cdot 10^{-3}$ оценивает сверху время разрушения $T_b \approx 1,13361735232337 \cdot 10^{-5}$.

Данный эксперимент проводился на сетке размером 101 на 101 узел. Условием окончания вычислительного эксперимента было достижения нормы (max-норма) по пространству решения значения, большего 10^9 . Программа использовала параллельные алгоритмы для решения задачи на восьмиядерном Ryzen 7 5700x. Программа решила свою задачу за 1 час 16 минут. Были вычислены решения на более чем 900000 временных слоев. Время выполнения программы может быть значительно уменьшено за счет выбора более совершенного алгоритма численного поиска минимума функции.



Численное решение на разных временных слоях

7. Заключение

В статье был продемонстрирован новый подход к получению условий разрушения решения в разностных схемах, который может быть альтернативой для представленных в научных трудах методов изучения разрушения решения разностных схем. Основным элементом доказательства является дискретный аналог теорем сравнения Чаплыгина, использование которого позволяет доказывать разрушение решения в разностных схемах подходами, более характерными для доказательства разрушения решения дифференциальных задач. Это было продемонстрировано в статье на примере двух задач Неймана для нелинейных параболических уравнений. Как результат, были получены условия разрушения решения и верхние оценки времени разрушения решения рассмотренных разностных схем, которые согласуются с соответствующими условиями и оценками аппроксимируемых дифференциальных задач.

Работа поддержана Институтом математики НАН Беларуси в рамках государственной программы «Конвергенция–2025» (проект 2021025).

Литература

1. Fujita H. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ // J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I. 1966. Vol. 13. P. 109–124.
2. Levine H. A. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + \mathfrak{F}(u)$ // Arch. Ration. Mech. Anal. 1973. Vol. 51. P. 371–386.
3. Nakagawa T. Blowing up of a finite difference solution to $u_t = u_{xx} + u^2$ // Appl. Math. Optim. 1976. Vol. 2. P. 337–350.
4. Chen Y. Asymptotic behaviours of blowing-up solutions for finite difference analogue of $u_t = u_{xx} + u^{1+\alpha}$ // J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A. 1986. Vol. 33. P. 541–574.
5. Hartman P. Ordinary differential equations. New York; London; Sydney: John Wiley and Sons, Inc. 1964. 612 p.
6. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Москва: Наука, 1987. 480 с.
7. Матус П. П., Парадинска А., Щадинский Д. А. Дискретные аналоги теорем сравнения и их применение // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2013. Т. 57, № 4. С. 16–20.

References

1. Fujita H. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I.*, 1966, vol. 13, pp. 109–124.
2. Levine H. A. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + \mathfrak{F}(u)$. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1973, vol. 51, pp. 371–386.
3. Nakagawa T. Blowing up of a finite difference solution to $u_t = u_{xx} + u^2$. *Appl. Math. Optim.*, 1976, vol. 2, pp. 337–350.
4. Chen Y. Asymptotic behaviours of blowing-up solutions for finite difference analogue of $u_t = u_{xx} + u^{1+\alpha}$. *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A.*, 1986, vol. 33, pp. 541–574.
5. Hartman P. *Ordinary differential equations*. New York, London, Sydney, John Wiley and Sons, Inc. 1964, 612 p.
6. Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., Mikhailov A. P. *Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations*. Berlin, New York, De Gruyter, 1995, 554 p.
7. Matus P. P., Paradzinska A., Schadinsky D. A. Discrete analogs of the theorems comparison and their applications. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2013, vol. 57, no. 4, pp. 16–20. (in Russian).