



ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL
ANALYSIS



УДК 517.51; 517.53

ПРИМЕНЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА ХАРДИ–СОБОЛЕВА НА
ПРЯМОЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ НАИЛУЧШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ
ПРИБЛИЖЕНИЙ В L_p

Т. С. Мардвилко

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: mardvilko@gmail.com

Поступила: 08.08.2024

Исправлена: 25.10.2024

Принята: 12.12.2024

Ключевые слова: пространство Харди, пространство Соболева, пространство Харди–Соболева, рациональная аппроксимация, L_p -приближения, функции ограниченной вариации.

Аннотация. Данная работа посвящена разработке методов действительного пространства Харди–Соболева на прямой для нахождения наилучших рациональных приближений в пространстве L_p . В основе рассмотренных методов лежит представление функции данного пространства суммой простых функций и применение интеграла типа Коши. Получены достаточные условия принадлежности функции рассматриваемому пространству и доказаны неравенства для оценки соответствующей σ -нормы. С помощью полученных результатов найдены точные порядковые оценки наилучших рациональных приближений некоторых функций. В частности, из полученных результатов следует известная оценка наилучших рациональных приближений функции ограниченной вариации.

APPLICATION OF THE REAL HARDY–SOBOLEV SPACE ON THE LINE FOR FINDING THE
BEST RATIONAL APPROXIMATIONS IN L_p

T. S. Mardvilko

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: mardvilko@gmail.com

Received: 08.08.2024

Revised: 25.10.2024

Accepted: 12.12.2024

Keywords: Hardy space, Sobolev space, Hardy–Sobolev space, rational approximation, L_p -approximations, functions of bounded variation.

Abstract. This work is dedicated to developing methods of the real Hardy–Sobolev space on the line for finding the best rational approximations in the L_p space. The methods considered are based on representing a function of this space as a sum of simple functions and the application of a Cauchy-type integral. Sufficient conditions for a function's membership in the considered space have been obtained and inequalities for assessing the corresponding σ -norm have been proven. Using the obtained results, exact order estimates of the best rational approximations of certain functions have been found. In particular, from the obtained results, the well-known estimate of the best rational approximations of a function of bounded variation follows.

1. Введение

Пусть $I \neq \emptyset$ измеримое подмножество прямой $\mathbb{R}$. Через $L_p(I)$, $0 < p \leq \infty$, обозначим пространство Лебега измеримых функций $f: I \rightarrow \mathbb{C}$, суммируемых в p -й степени на I , т. е. для которых конечна норма при $1 \leq p \leq \infty$, а при $0 < p < 1$ p -норма

$$\|f\|_{L_p(I)} = \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(I)} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)| : x \in I\}, \quad p = \infty.$$

В случае отрезка $[a, b]$ будем писать $L_p[a, b]$ вместо $L_p([a, b])$.

Нам также понадобятся пространства Харди для верхней полуплоскости $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Аналитическая в Π функция f принадлежит пространству Харди H_p , $0 < p \leq \infty$, если

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{y>0} \|f(\cdot + iy)\|_{L_p(\mathbb{R})} < \infty.$$

Далее рассмотрим ядро Пуассона и сопряженное ядро Пуассона соответственно [1] для верхней полуплоскости

$$P_y(t) = \frac{y}{t^2 + y^2} \quad \text{и} \quad Q_y(t) = \frac{t}{t^2 + y^2}, \quad \text{где} \quad t \in \mathbb{R}, \quad y > 0.$$

Заметим, что при $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$,

$$P_y(x-t) + iQ_y(x-t) = \frac{-i}{t-z} \quad (1.1)$$

– ядро Коши.

Введем аналитическую в Π функцию, соответствующую действительной функции $g \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$,

$$f(z) = (Cg)(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)}{t-z} dt. \quad (1.2)$$

Как известно [1], f принадлежит пространству Харди H_p аналитических в Π функций. Следовательно, для почти всех $x \in \mathbb{R}$ существует $\lim_{y \rightarrow +0} f(x+iy) =: f(x+i0)$. Из (1.1), (1.2) и свойств интеграла Пуассона [1] получаем, что $\operatorname{Re} f(x+i0) = g(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}$. При этом справедливы неравенства

$$\|g\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{H_p} \leq c(p) \|g\|_{L_p(\mathbb{R})}.$$

Здесь левое неравенство очевидно, правое – составляет содержание теоремы М. Рисса (см. [1]).

Данная статья посвящена разработке методов действительного пространства Харди–Соболева на прямой для нахождения наилучших рациональных L_p -приближений. Удобство использования данного пространства для решения задач рациональной аппроксимации основано на представлении функций данного пространства суммой простых функций (см. п. 2 и п. 4), а также в виде интеграла типа Коши (см. п. 2 и п. 5).

2. Действительное пространство Харди–Соболева

Пусть $s \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$ и $\sigma = \left(s + \frac{1}{p}\right)^{-1}$, действительная функция $g \in L_p(\mathbb{R})$, а $f(z)$ соответствующая g функция вида (1.2). Тогда g принадлежит действительному пространству Харди–Соболева $\mathcal{H}_\sigma^s$, если f принадлежит комплексному пространству Харди–Соболева H_σ^s , т. е. $f^{(s)} \in H_\sigma$. При этом σ -норма функции g вводится следующим образом:

$$\|g\|_{\mathcal{H}_\sigma^s} = \left\| (Cg)^{(s)} \right\|_{H_\sigma} = \left\| f^{(s)} \right\|_{H_\sigma}.$$

Из данного определения и полноты пространства H_σ следует полнота пространства $\mathcal{H}_\sigma^s$ и σ -неравенство треугольника

$$\|g+h\|_{\mathcal{H}_\sigma^s}^\sigma \leq \|g\|_{\mathcal{H}_\sigma^s}^\sigma + \|h\|_{\mathcal{H}_\sigma^s}^\sigma, \quad g, h \in \mathcal{H}_\sigma^s.$$

Для пространства $\mathcal{H}_\sigma^s$ введем еще одну эквивалентную σ -норму. Пусть $I \neq \emptyset$ – связное подмножество $\mathbb{R}$. $C(I) = C^0(I)$ – множество функций непрерывных на I . Через $C^s(I)$, $s \in \mathbb{N}$, обозначим множество s раз непрерывно дифференцируемых функций $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Через $W_p^s(I)$ ($s \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$) обозначим пространство Соболева функций $f \in C^{s-1}(I)$, таких, что $f^{(s-1)}$ абсолютно непрерывна на I и $f, f^{(s)} \in L_p(I)$.

Действительную функцию $\varphi \in W_\infty^s(\mathbb{R})$ называем s -простой, если она финитна. С s -простой функцией φ будем ассоциировать отрезок $J = J(\varphi)$, называемый опорным, такой, что $\text{supp } \varphi \subset J$. Далее для s -простой функции введем характеристику

$$\mu_{s\sigma}(\varphi) = |J|^{\frac{1}{\sigma}} \|\varphi^{(s)}\|_{L_\infty(J)},$$

где $|J|$ – длина отрезка J .

Теорема 2.1. *Функция $g \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, принадлежит $\mathcal{H}_\sigma^s$, $s \in \mathbb{N}$, $\sigma = \left(s + \frac{1}{p}\right)^{-1}$, в том и только в том случае, если существует последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ s -простых функций, удовлетворяющих условиям*

$$\sum_{k=1}^\infty \mu_{s\sigma}(\varphi)^{\sigma} =: A < \infty, \quad (2.1)$$

$$\sum_{k=1}^\infty \varphi_k(x) = g(x), \quad (2.2)$$

где ряд (2.2) сходится по норме пространства $L_p(\mathbb{R})$. При этом $\|g\|_{\mathcal{H}_\sigma^s}^\# = \inf \left\{ A^{\frac{1}{\sigma}} : \text{выполняются (2.1) и (2.2)} \right\}$ является σ -нормой в $\mathcal{H}_\sigma^s$, эквивалентной $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\sigma^s}$.

Теорема 2.1 является следствием результата Р. Койфмана [2–4] об атомическом разложении функций класса $\text{Re } H_p$ при $p \leq 1$.

Из определения σ -норм $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\sigma^s}$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\sigma^s}^\#$ следует, что они при линейной замене $x = kt + b$, $k \neq 0$, аргумента функции ведут себя аналогично норме $\|\cdot\|_{L_p(\mathbb{R})}$, $1 < p < \infty$. Именно, справедливо

Утверждение 2.1. *Для любых $k, b \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, и $g \in \mathcal{H}_\sigma^s$ имеют место равенства*

$$\|g(k \cdot + b)\|_{\mathcal{H}_\sigma^s} = |k|^{-1/p} \|g\|_{\mathcal{H}_\sigma^s},$$

$$\|g(k \cdot + b)\|_{\mathcal{H}_\sigma^s}^\# = |k|^{-1/p} \|g\|_{\mathcal{H}_\sigma^s}^\#.$$

В силу эквивалентности σ -норм $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\sigma^s}$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\sigma^s}^\#$ далее будет использоваться обозначение $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\sigma^s}$. Из контекста будет видно, какая из σ -норм применяется.

3. Прямая и обратная теоремы рациональной аппроксимации для функций из действительного пространства Харди–Соболева

Пусть $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Через $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{R}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, обозначим соответственно множества алгебраических полиномов и рациональных функций степени не выше n с действительными коэффициентами.

Введем $R_n(f)_p = R_n(f; L_p(I))$ – наилучшее приближение функции $f \in L_p(I)$ посредством множества $\mathcal{R}_n$:

$$R_n(f)_p = R_n(f; L_p(I)) = \inf \left\{ \|f - r\|_{L_p(I)} : r \in \mathcal{R}_n \right\}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Для функций из пространства $\mathcal{H}_\sigma^s$ справедливы следующая прямая (теорема 3.1) и обратная (теорема 3.2) теоремы рациональной аппроксимации. Эти теоремы вытекают из их аналогов для пространства H_σ^s (см. Е. И. Стельмах [5]) и теоремы М. Рисса [1].

Через $c, c_1, c_2, \dots$ будем обозначать положительные величины (постоянные). В скобках будем указывать параметры, от которых зависят эти величины. Различные постоянные будем нумеровать различными индексами, которые будут меняться в рамках одного раздела.

Теорема 3.1. *Пусть $s \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$ и $\sigma = \left(s + \frac{1}{p}\right)^{-1}$. Если $g \in \mathcal{H}_\sigma^s$, то*

$$R_n(g)_p \leq \frac{c_1(s, p)}{n^s} \|g\|_{\mathcal{H}_\sigma^s}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3.2. *Пусть $s \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $\sigma = \left(s + \frac{1}{p}\right)^{-1}$ и $g \in L_p(\mathbb{R})$. Если*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} (n^s R_n(g)_p)^\sigma =: B < \infty,$$

то $g \in \mathcal{H}_\sigma^s$ и $\|g\|_{\mathcal{H}_\sigma^s} \leq c_2(s, p) B^{\frac{1}{\sigma}}$.

4. Применение простых функций

Для краткости будем полагать $\|f\|_l := \|f\|_{L_\infty(I)}$.

Ранее нами была доказана

Лемма 4.1 [6]. Пусть $-\infty < a < b < +\infty$, $s \in \mathbb{N}$, и $p \in \mathcal{P}_{2s-1}$. Тогда для $l = 0, 1, \dots, 2s-1$ выполняется неравенство

$$\|p^{(l)}\|_{[a,b]} \leq c_1(s) \sum_{j=0}^{s-1} (b-a)^{j-l} \left(|p^{(j)}(a)| + |p^{(j)}(b)| \right).$$

Следующая лемма аналогична лемме 2 из [6]. Здесь, в отличие от [6], функция ψ может иметь разрывы в точках a или b , а также рассматривается другая характеристика $\mu_{s\sigma}$ простых функций.

Лемма 4.2. Пусть $\psi \in L_\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \psi \subset [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, и $\psi|_{[a,b]} \in W_\infty^s$, $s \in \mathbb{N}$. Тогда при $p \in (1, +\infty)$ и $\frac{1}{\sigma} = s + \frac{1}{p}$ имеем $\psi \in \mathcal{H}_\sigma^s$ и

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}_\sigma^s} \leq c_2(p, s) \sum_{j=0}^s (b-a)^{j+\frac{1}{p}} \|\psi^{(j)}\|_{[a,b]}. \quad (4.1)$$

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $[a, b] = [0, 1]$. Для каждого $k \in \mathbb{N}_0$ найдем полиномы p_{k0} и p_{k1} степени не выше $2s-1$, являющиеся решением интерполяционной задачи Эрмита, а именно для $j = 0, 1, \dots, s-1$ выполнены равенства

$$p_{k0}^{(j)}(0) = \psi^{(j)}(+0), \quad p_{k0}^{(j)}(-2^{-k}) = 0;$$

$$p_{k1}^{(j)}(1) = \psi^{(j)}(1-0), \quad p_{k1}^{(j)}(1+2^{-k}) = 0.$$

Пусть $J_{k0} := [-2^{-k}, 0]$, $J_{k1} := [1, 1+2^{-k}]$ и функции

$$\psi_k(x) = \begin{cases} p_{k0}(x), & x \in J_{k0}, \\ p_{k1}(x), & x \in J_{k1}, \\ \psi(x), & x \in \mathbb{R} \setminus (J_{k0} \cup J_{k1}). \end{cases}$$

Согласно определению $\psi_k \in W_\infty^s(\mathbb{R})$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$.

Тогда ψ можно представить в виде

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^1 \varphi_{ki}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

где

$$\varphi_{ki}(x) = \begin{cases} \psi_{k+1}(x) - \psi_k(x), & x \in J_{ki}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus J_{ki}. \end{cases}$$

Если $\psi(0) = \psi(1) = 0$, то ряд (4.2) сходится равномерно на $\mathbb{R}$. Если же $\psi(0) \neq 0$ или $\psi(1) \neq 0$, то сходимость будет точечной на $\mathbb{R}$ из-за того, что $\psi(x)$ разрывна при $x = 0$ или $x = 1$.

Заметим, что ψ_0 и φ_{ki} являются s -простыми функциями с опорными интервалами

$$J(\psi_0) = [-1, 2] \quad \text{и} \quad J(\varphi_{ki}) = J_{ki}$$

соответственно.

Для ψ_0 имеем

$$\mu_{s\sigma}(\psi_0) = 3^{1/\sigma} \|\psi_0^{(s)}\|_{[-1,2]} = 3^{1/\sigma} \max \left\{ \|\psi_0^{(s)}\|_{[-1,0]}, \|\psi_0^{(s)}\|_{[0,1]}, \|\psi_0^{(s)}\|_{[1,2]} \right\}. \quad (4.3)$$

На $[-1, 0]$ функция ψ_0 является многочленом степени $2s-1$. С учетом условий

$$\psi_0^{(j)}(-1) = 0, \quad \psi_0^{(j)}(0) = \psi^{(j)}(+0), \quad j = 0, 1, \dots, s-1,$$

из леммы 4.1 получим

$$\left\| \psi_0^{(s)} \right\|_{[0,1]} \leq c_3(s) \sum_{j=0}^{s-1} \left| \psi_0^{(j)}(0) \right| \leq c_3(s) \sum_{j=0}^{s-1} \left\| \psi^{(j)} \right\|_{[0,1]}. \quad (4.4)$$

Рассуждая аналогично, имеем

$$\left\| \psi_0^{(s)} \right\|_{[1,2]} \leq c_4(s) \sum_{j=0}^{s-1} \left\| \psi^{(j)} \right\|_{[0,1]}. \quad (4.5)$$

Согласно соотношениям (4.3)–(4.5) справедлива оценка

$$\mu_{s\sigma}(\psi_0) \leq c_5(s) \sum_{j=0}^s \left\| \psi^{(j)} \right\|_{[0,1]}.$$

Покажем, что

$$\mu_{s\sigma}(\varphi_{ki}) \leq c_6(s) 2^{-k/p} \sum_{j=0}^s \left\| \psi^{(j)} \right\|_{[0,1]}.$$

Проведем рассуждения для $i = 0$.

Заметим, что на каждом из отрезков $[-2^{-k}, -2^{-k-1}]$ и $[-2^{-k-1}, 0]$ функция φ_{k0} является многочленом степени $2s - 1$, причем

$$\varphi_{k0}(x) = -\psi_k(x) \quad \text{при} \quad x \in [-2^{-k}, -2^{-k-1}].$$

Следовательно, согласно лемме 4.1, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \left\| \varphi_{k0}^{(j)} \right\|_{[-2^{-k}, -2^{-k-1}]} &= \left\| \psi_k^{(j)} \right\|_{[-2^{-k}, -2^{-k-1}]} \leq \left\| \psi_k^{(j)} \right\|_{[-2^{-k}, 0]} \leq \\ &\leq c_1(s) \sum_{m=0}^{s-1} 2^{-k(m-j)} \left| \psi^{(m)}(+0) \right| \leq c_1(s) \sum_{m=0}^{s-1} 2^{-k(m-j)} \left\| \psi^{(m)} \right\|_{[0,1]}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Учитывая, что

$$\psi_{k0}^{(j)}(0) = \psi_{k+1}^{(j)}(0) - \psi_k^{(j)}(0) = \psi^{(j)}(+0) - \psi^{(j)}(+0) = 0$$

для всех $j = 0, 1, \dots, s-1$, и неравенства (4.6), получим

$$\begin{aligned} \left\| \varphi_{k0}^{(s)} \right\|_{[-2^{-k-1}, 0]} &\leq c_7(s) \sum_{j=0}^{s-1} 2^{-k(j-s)} \left| \varphi_{k0}^{(j)}(-2^{-k-1}) \right| \leq \\ &\leq c_7(s) \sum_{j=0}^{s-1} 2^{-k(j-s)} \left\| \varphi_{k0}^{(j)} \right\|_{[-2^{-k}, -2^{-k-1}]} \leq c_8(s) \sum_{j=0}^{s-1} 2^{-k(j-s)} \left\| \psi^{(j)} \right\|_{[0,1]}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Применяя (4.6) с $j = s$ и (4.7), получим

$$\begin{aligned} \mu_{s\sigma}(\varphi_{k0}) &= 2^{-k/\sigma} \|\varphi^{(s)}\|_{[-2^{-k}, 0]} \leq 2^{-k/\sigma} \left(\|\varphi^{(s)}\|_{[-2^{-k}, -2^{-k-1}]} + \|\varphi^{(s)}\|_{[-2^{-k-1}, 0]} \right) \leq \\ &\leq 2^{-k/\sigma} c_9(s) \sum_{j=0}^{s-1} 2^{-k(j-s)} \left\| \psi^{(j)} \right\|_{[0,1]} \leq 2^{-k/p} c_6(s) \sum_{j=0}^{s-1} \left\| \psi^{(j)} \right\|_{[0,1]}. \end{aligned}$$

Согласно теореме 2.1

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{\mathcal{H}_0^\sigma}^\sigma &\leq \mu_{s\sigma}^\sigma(\psi_0) + \sum_{k=0}^\infty \sum_{i=0}^1 \mu_{s\sigma}^\sigma(\varphi_{ki}) \leq \\ &\leq \left(c_5(s) \sum_{i=0}^s \left\| \psi^{(i)} \right\|_{[0,1]} \right)^\sigma + \sum_{k=0}^\infty 2^{-(1-s\sigma)k} \left(2c_6(s) \left(\sum_{j=0}^{s-1} \left\| \psi^{(j)} \right\|_{[0,1]} \right) \right)^\sigma \leq \\ &\leq c_{10}(p, s) \left(\sum_{j=0}^s \left\| \psi^{(j)} \right\|_{[0,1]} \right)^\sigma. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили неравенство (4.1) для $[a, b] = [0, 1]$. Для произвольного отрезка $[a, b]$ лемма вытекает из доказанного случая с помощью замены $x = (b - a)t + a$, $t \in [0, 1]$, и утверждения 2.1. $\square$

Пример 4.1. Пусть $1 < p < \infty$, $\alpha > 0$ и

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{\frac{1}{p}} (\ln x)^{\frac{1}{p} + \alpha}} & \text{при } x \geq e, \\ 0 & \text{при } x < e. \end{cases}$$

Тогда

$$R_n(\lambda, L_p(\mathbb{R})) \asymp n^{-\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.8)$$

где постоянные, спрятанные символом $\asymp$, зависят лишь от α и p .

При получении верхней и нижней оценок из (4.8) нам понадобится следующее свойство функции $\lambda(x)$. Для любых $j \in \mathbb{N}_0$ и $x \geq e$ имеет место равенство

$$\lambda^{(j)}(x) = \frac{(-1)^j}{x^{\frac{1}{p} + j}} \sum_{l=0}^j \frac{A_{jl}}{(\ln x)^{\frac{1}{p} + \alpha + l}}, \quad (4.9)$$

где $A_{jl} > 0$ и зависят лишь от j, l, p и α .

Равенство (4.9) легко доказать методом математической индукции.

Доказательство верхней оценки из (4.8). Пусть $I_k = [e^k, e^{k+1}]$, $k \in \mathbb{N}$. Положим

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{\frac{1}{p}} (\ln x)^{\frac{1}{p} + \alpha}}, & x \in I_k, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus I_k. \end{cases}$$

Функции ψ_k удовлетворяют лемме 4.2 для любого $s \in \mathbb{N}$ и $\sigma = \left(s + \frac{1}{p}\right)^{-1}$. Возьмем $s = [\alpha] + 1$. Тогда

$$\|\psi_k\|_{\mathcal{H}_0^s} \leq c_{11}(p, s) \sum_{j=0}^s \exp\left(k \left(\frac{1}{p} + j\right)\right) \|\psi_k^{(j)}\|_{I_k}.$$

Применяя (4.9), находим

$$\|\psi_k^{(j)}\|_{I_k} \leq \frac{c_{12}(p, \alpha, j)}{k^{\frac{1}{p} + j}} \exp\left(-k \left(\frac{1}{p} + j\right)\right).$$

Таким образом, используя лемму 4.2, получим

$$\|\psi_k\|_{\mathcal{H}_0^s} \leq \frac{c_{13}(p, \alpha)}{k^{\frac{1}{p} + \alpha}}.$$

Далее рассмотрим функцию

$$\Lambda_n = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n.$$

Для выбранного выше $s \in \mathbb{N}$ и $\sigma = \left(s + \frac{1}{p}\right)^{-1}$ имеем $\Lambda_n \in \mathcal{H}_0^s$ и

$$\|\Lambda_n\|_{\mathcal{H}_0^s}^\sigma = \left\| \sum_{k=1}^n \psi_k \right\|_{\mathcal{H}_0^s}^\sigma \leq \sum_{k=1}^n \|\psi_k\|_{\mathcal{H}_0^s}^\sigma \leq \sum_{k=1}^n \frac{c_{14}(p, s)}{k^{\left(\frac{1}{p} + \alpha\right)\sigma}} \leq \frac{c_{15}(p, s)}{n^{\left(\frac{1}{p} + \alpha\right)\sigma - 1}}.$$

Итак, согласно теореме 3.1 получаем

$$R_n(\Lambda_n, L_p(\mathbb{R})) \leq \frac{c_{16}(p, s)}{n^s} \|\Lambda_n\|_{\mathcal{H}_0^s} \leq \frac{c_{17}(p, s)}{n^s} \frac{1}{n^{\frac{1}{p} + \alpha - \frac{1}{\sigma}}} = \frac{c_{18}(p, s)}{n^\alpha}.$$

Для доказательства верхней оценки осталось заметить, что

$$R_n(\lambda, L_p(\mathbb{R})) \leq R_n(\Lambda_n, L_p(\mathbb{R})) + \|\lambda - \Lambda_n\|_{L_p(\mathbb{R})}.$$

Последнее слагаемое, в свою очередь, легко вычисляется

$$\|\lambda - \Lambda_n\|_{L_p(\mathbb{R})} = \left(\int_{e^{n+1}}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{1+\alpha p}} \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(\alpha p)^{\frac{1}{p}} (n+1)^\alpha}. \quad \square$$

Для доказательства нижней оценки из (4.8) нам понадобится теорема 4.1. Введем необходимые обозначения.

Через $E_n(f)_p = E_n(f; L_p(I))$ обозначим наилучшее приближение функции $f \in L_p(I)$ множеством $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$:

$$E_n(f)_p = E_n(f; L_p(I)) = \inf \left\{ \|f - r\|_{L_p(I)} : r \in \mathcal{P}_n \right\}.$$

Пусть $\sigma = \left(s + \frac{1}{p}\right)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Модулем изменения функции $f \in L_p[a, b]$, $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$, порядка $s \in \mathbb{N}$ называется

$$\varkappa_{sp}(n, f) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n (E_{s-1}(f, L_p(I_k)))^\sigma \right\}^{1/\sigma},$$

где верхняя грань берется по всем наборам отрезков $I_1, I_2, \dots, I_n \subset [a, b]$, пересекающихся, разве лишь, по конечным точкам.

Теорема 4.1 [7; 8]. Пусть $1 < p \leq \infty$, $s, n \in \mathbb{N}$, $\sigma = \left(s + \frac{1}{p}\right)^{-1}$ и $f \in L_p[a, b]$, $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$. Тогда справедливо неравенство

$$\varkappa_{sp}(n, f) \leq c_{19}(s, p) \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (k^s R_k(f; L_p[a, b]))^\sigma \right\}^{1/\sigma}.$$

Теорема 4.1 была получена для отрезка $[-1, 1]$. Для произвольного отрезка $[a, b]$ она следует из этого случая с помощью линейной замены.

В свою очередь, для оценки модуля изменения функции мы воспользуемся следующей теоремой G. M. Phillips.

Теорема 4.2 [9; 10, р. 222]. Для каждой функции $f \in C^s[a, b]$, $s \in \mathbb{N}$, и $1 \leq p \leq \infty$ существует $\xi \in [a, b]$ такое, что

$$E_{s-1}(f, L_p[a, b]) = c_{20}(p, s)(b-a)^{s+\frac{1}{p}} \left| f^{(s)}(\xi) \right|.$$

Нам также понадобится следующая числовая лемма 4.3. Отметим, что подобные рассуждения, используемые при доказательстве этой леммы, применялись ранее в работе С. Б. Стечкина [11].

Лемма 4.3. Пусть $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ – положительные числа, причем $\beta > \alpha$, и $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$ – убывающая положительная числовая последовательность. Если при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

- (i) $\delta_n \leq an^{-\alpha}$,
- (ii) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (k^\beta \delta_k)^\gamma \geq bn^{\gamma(\beta-\alpha)}$,

то $\delta_n \geq cn^{-\alpha}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Здесь $c > 0$ и зависит лишь от $a, b, \alpha, \beta, \gamma$.

Доказательство. Ввиду условия (i) для каждого $n \geq 2$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} (k^\beta \delta_k)^\gamma \leq a^\gamma \sum_{k=1}^{n-1} k^{\gamma(\beta-\alpha)-1} \leq a^\gamma \int_0^n x^{\gamma(\beta-\alpha)-1} dx = \frac{a^\gamma}{\gamma(\beta-\alpha)} n^{\gamma(\beta-\alpha)}.$$

Следовательно, при $m > n$, с учетом (ii), получим

$$\sum_{k=n}^m \frac{1}{k} \left(k^\beta \delta_k \right)^\gamma \geq bm^{\gamma(\beta-\alpha)} - \frac{a^\gamma}{\gamma(\beta-\alpha)} n^{\gamma(\beta-\alpha)}.$$

Заметим, что

$$\sum_{k=n}^m \frac{1}{k} \left(k^\beta \delta_k \right)^\gamma \leq \delta_n^\gamma \sum_{k=n}^m k^{\beta\gamma-1} \leq \delta_n^\gamma \int_{n-1}^{m+1} x^{\beta\gamma-1} dx = \frac{\delta_n^\gamma}{\beta\gamma} \left[(m+1)^{\beta\gamma} - (n-1)^{\beta\gamma} \right].$$

Следовательно,

$$\delta_n^\gamma \geq \frac{\beta\gamma}{(m+1)^{\beta\gamma} - (n-1)^{\beta\gamma}} \left[bm^{\gamma(\beta-\alpha)} - \frac{a^\gamma}{\gamma(\beta-\alpha)} n^{\gamma(\beta-\alpha)} \right].$$

Остается положить здесь $m \in \mathbb{N}$ наименьшим, для которого выполняются неравенства $m \geq 2n$ и $bm^{\gamma(\beta-\alpha)} \geq \frac{2a^\gamma}{\gamma(\beta-\alpha)} n^{\gamma(\beta-\alpha)}$. $\square$

Доказательство нижней оценки из (4.8). Пусть $J_n = [e, e^{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$, а $I_k = [e^k, e^{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Заметим, что согласно (4.9)

$$|\lambda^{(s)}(x)| > \frac{1}{x^{\frac{1}{p}+s}} \frac{A_{s0}}{(\ln x)^{\frac{1}{p}+\alpha}} \quad \text{для всех } x \in J_n.$$

Пользуясь последним неравенством и теоремой 4.2, для каждого I_k получим

$$E_{s-1}(f, L_p(I_k)) \geq \frac{c_{21}(p, s)}{k^{\frac{1}{p}+\alpha}}.$$

Тогда, согласно определению модуля изменения f , для $s = [\alpha] + 1$, имеем

$$\varkappa_{sp}(n, f) \geq \left\{ \sum_{k=1}^n (E_{s-1}(f, L_p(I_k)))^\sigma \right\}^{1/\sigma} \geq c_{22}(p, \alpha) n^{s-\alpha}.$$

Таким образом, учитывая последнее неравенство, из теоремы 4.1 и леммы 4.3 следует, что для наилучших рациональных L_p приближений рассматриваемой функции справедлива оценка снизу

$$R_n(f; L_p(\mathbb{R})) \geq R_n(f; L_p(J_n)) \geq \frac{c_{23}(p, \alpha)}{n^\alpha}.$$

Тем самым асимптотика (4.8) доказана. $\square$

Пример 4.2. Пусть λ – функция из примера 4.1. Введем функции λ^+ и λ^- на $\mathbb{R}$. Именно,

$$\lambda^+(x) = \lambda(x+e) + \lambda(-x+e) \quad \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \lambda^+(0) = \lambda(e);$$

$$\lambda^-(x) = \lambda(x+e) - \lambda(-x+e), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Функция λ^+ – четная и непрерывная на $\mathbb{R}$, а λ^- – нечетная и в точке $x = 0$ имеет разрыв первого рода. При этом

$$R_n(\lambda^\pm; L_p(\mathbb{R})) \asymp n^{-\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.10)$$

Доказательство. Для $n \geq 2$ положим $m = [n/2]$. Поскольку $\lambda^\pm(x) = \lambda(x+e) \pm \lambda(-x+e)$ при $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то, используя верхнюю оценку из (4.8), получаем

$$R_n(\lambda^\pm)_p \leq R_m(\lambda(e+\cdot))_p + R_m(\lambda(e-\cdot))_p = 2R_m(\lambda)_p \leq c_{24}m^{-\alpha} \leq c_{25}n^{-\alpha}.$$

Для получения нижней оценки заметим, что

$$R_n(\lambda^\pm; L_p(\mathbb{R})) \geq R_n(\lambda^\pm; L_p([0, +\infty))) = R_n(\lambda; L_p([e, +\infty))).$$

Поскольку при получении оценки снизу для $R_n(\lambda; L_p(\mathbb{R}))$ (см. (4.8)) мы использовали лишь поведение λ на $[e, +\infty)$, то этим нижняя оценка из (4.10) доказана. $\square$

5. Применение интеграла типа Коши

Через $V = V[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, обозначим множество функций $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, имеющих ограниченное полное изменение, обозначаемое через $v = v(f, [a, b])$. Считаем, что $f \in V[a, b]$, непрерывна слева в точке b и справа в точке a . Если же $x_0 \in (a, b)$ и является точкой разрыва f , то полагаем $f(x_0) = (f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)) / 2$.

Лемма 5.1. Пусть $\psi \in L_\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \psi \subset [a, b]$, $\psi|_{[a, b]} \in V$, $p \in (1, \infty)$ и $\frac{1}{\sigma} = 1 + \frac{1}{p}$. Тогда $\psi \in \mathcal{H}_\sigma^1$ и

$$\|\psi\|_{\mathcal{H}_\sigma^1} \leq c_1(p)(b-a)^{\frac{1}{p}} (\|\psi\|_{[a, b]} + v(\psi, [a, b])).$$

Доказательство. Согласно утверждению 2.1 можем считать $\text{supp } \psi \subset [-h, h]$, где $h = (b-a)/2$. Тогда

$$(C\psi)(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-h}^h \frac{\psi(t) dt}{t-z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-h, h].$$

Следовательно,

$$(C\psi)'(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-h}^h \frac{\psi(t) dt}{(t-z)^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-h, h]. \quad (5.1)$$

Для $x \in \mathbb{R} \setminus [-2h, 2h]$ имеем

$$|(C\psi)'(x)| \leq \frac{1}{\pi} \|\psi\|_{[-h, h]} \int_{-h}^h \frac{dt}{(t-x)^2} \leq \frac{3h}{|x|^2} \|\psi\|_{[-h, h]}. \quad (5.2)$$

Выполнив интегрирование по частям, из (5.1) для $z \in \mathbb{C} \setminus [-h, h]$ получим

$$(C\psi)'(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-h}^h \psi(t) d\left(\frac{1}{z-t}\right) = \frac{1}{\pi i} \left[\frac{\psi(h)}{z-h} - \frac{\psi(-h)}{z+h} \right] + \frac{1}{\pi i} \int_{-h}^h \frac{d\psi(t)}{t-z}. \quad (5.3)$$

Из (5.1) видно, что функция $(C\psi)'(z)$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus [-h, h]$ и бесконечность для нее является нулем не ниже второго порядка. С учетом (5.3) и свойств интеграла Коши–Стилтьеса [12, р. 231] следует, что $(C\psi)'(z)$ принадлежит пространству Харди $H_q(\mathbb{C} \setminus [-h, h])$ при $1/2 < q < 1$. Следовательно, $(C\psi)'(z)$ принадлежит пространству $H_q(\Pi)$. Под $(C\psi)'(x)$ для $x \in [-h, h]$ будем подразумевать $\lim_{y \rightarrow +0} ((C\psi)'(x + iy))$. Указанный предел существует почти для всех $x \in [-h, h]$.

Для измеримой функции $\omega : [-c, c] \rightarrow [0, +\infty)$ через ω^* будем обозначать ее симметричную относительно точки 0, убывающую на $[0, c]$ перестановку.

Из свойств интеграла Коши–Стилтьеса [12] и (5.3) получаем, что

$$|(C\psi)'(x)|^* \leq \frac{c_2}{|x|} (\|\psi\|_{[-h, h]} + v(\psi, [-h, h])), \quad |x| < 2h. \quad (5.4)$$

Из (5.2) и (5.4) находим, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |(C\psi)'(x)|^\sigma dx &= \int_{\mathbb{R} \setminus [-2h, 2h]} |(C\psi)'(x)|^\sigma dx + 2 \int_0^{2h} \left(|(C\psi)'(x)|^* \right)^\sigma dx \leq \\ &\leq c_3(p)(2h)^{\frac{\sigma}{p}} (\|\psi\|_{[-h, h]} + v(\psi, [-h, h]))^\sigma. \end{aligned}$$

Этим лемма 5.1 доказана. $\square$

Следствие 5.2. Из леммы 5.1 и теоремы 3.1 следует, что для $f \in V[a, b]$ справедливо неравенство

$$R_n(f; L_p[a, b]) \leq c_4 \frac{(b-a)^{\frac{1}{p}}}{n} v(f, [a, b]).$$

Ранее этот результат был получен другим методом [13; 14].

В следующей теореме изучаются наилучшие рациональные приближения функции ограниченной вариации на полуоси. Поскольку любая функция ограниченной вариации представима в виде разности двух убывающих функций, то мы ограничимся рассмотрением убывающих функций.

Теорема 5.3. Пусть функция $f = 0$ при $x < e$ убывает на $[e, +\infty)$ и

$$0 \leq f(x) \leq \lambda(x), \quad \text{при } x \geq e,$$

где λ – функция из примера 4.1.

Тогда при $n \geq 2$

$$R_n(f)_p \leq \begin{cases} \frac{c_5}{n^\alpha}, & 0 < \alpha < 1; \\ c_6 \frac{(\ln n)^{1+\frac{1}{p}}}{n}, & \alpha = 1; \\ \frac{c_7}{n}, & \alpha > 1. \end{cases} \quad (5.5)$$

Доказательство. Пусть $I_k = [e^k, e^{k+1}]$, $k \in \mathbb{N}$. Положим

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & x \in I_k, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus I_k. \end{cases}$$

Функции f_k удовлетворяют условиям леммы 5.1. Следовательно,

$$\|f_k\|_{\mathcal{H}_0^1} \leq c_1 |I_k|^{1/p} (\|f_k\|_{I_k} + v(f_k, I_k)) \leq c_8 e^{\frac{k}{p}} \lambda(e^k) = \frac{c_9}{k^{\frac{1}{p}+\alpha}}.$$

Далее рассмотрим функцию

$$F_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n.$$

Применяя σ -неравенство треугольника, имеем

$$\|F_n\|_{\mathcal{H}_0^1}^\sigma \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{\mathcal{H}_0^1}^\sigma \leq c_{10} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{\sigma(\frac{1}{p}+\alpha)}} \leq \begin{cases} \frac{c_{11}}{n^{\sigma(\alpha-1)}}, & \alpha < 1; \\ c_{12} \ln(n+1), & \alpha = 1; \\ c_{13}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Согласно теореме 3.1, с учетом последнего неравенства имеем

$$R_n(F_n)_p \leq \frac{c_{14}}{n} \|F_n\|_{\mathcal{H}_0^1} \leq \begin{cases} \frac{c_{15}}{n^\alpha}, & \alpha < 1; \\ c_{16} \frac{(\ln(n+1))^{\frac{1}{\sigma}}}{n}, & \alpha = 1; \\ \frac{c_{17}}{n}, & \alpha > 1. \end{cases} \quad (5.6)$$

Из определения функций F_n и f следует, что

$$\|f - F_n\|_{L_p(\mathbb{R})} = \|f\|_{L_p([e^{n+1}, +\infty))} \leq \left(\int_{e^{n+1}}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{1+p\alpha}} \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(p\alpha)^{1/p} (n+1)^\alpha}. \quad (5.7)$$

Заметим далее, что

$$R_n(f)_p \leq R_n(f - F_n)_p + R_n(F_n)_p \leq \|f - F_n\|_{L_p(\mathbb{R})} + R_n(F_n)_p.$$

Отсюда и оценок (5.6) и (5.7) следует утверждение теоремы. $\square$

Отметим, что верхняя строка в (5.5) является точной в силу оценки (5.7), а точность нижней строки в (5.5) следует из известных результатов для наилучших рациональных приближений функций ограниченной вариации на отрезке [13; 14].

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция–2025».

Литература

1. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
2. Coifman R. R., Weiss G. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis // *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1977. Vol. 83, N 4. P. 569–645.
3. Grafakos L. *Modern Fourier analysis* // *Graduate Texts in Mathematics*. 2nd ed. New York: Springer, 2009.
4. Кротов В. Г. Дифференциальные свойства граничных функций из пространств Харди // *Mathematische Nachrichten*. 1986. Т. 126, № 1. С. 241–253.
5. Стельмах Е. И. Прямая и обратная теоремы рациональной аппроксимации для пространств Харди в полуплоскости // *Докл. НАН Беларуси*. 2008. Т. 52, № 6. С. 36–41.
6. Мардвилко Т. С., Пекарский А. А. Применение действительного пространства Харди–Соболева на прямой для исследования скорости равномерных рациональных приближений функций // *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2022. № 3. С. 16–36.
7. Пекарский А. А. Оценки производных рациональных функций в $L_p[-1, 1]$ // *Математические заметки*. 1986. Т. 39, № 3. С. 388–394.
8. Lorentz G. G., Golitschek M. V., Makovoz Y. *Constructive Approximation. Advanced Problems*. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1996.
9. Phillips G. M. Error estimates for best polynomial approximation // *Approximation theory*. London: Academic Press, 1979. P. 1–6.
10. DeVore R. A., Lorentz G. G. *Constructive Approximation: polynomials and splines approximation*. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1993.
11. Стечкин С. Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1951. Т. 15, № 3. С. 219–242.
12. King F. W. *Hilbert transform*. Volume 1. Cambridge: University Press, 2009.
13. Petrushev P. P., Popov V. A. *Rational approximation of real functions*. Cambridge: University Press, 1987.
14. Пекарский А. А. Рациональная аппроксимация сингулярных функций // *Изв. АН БССР, Сер. физ.-мат. наук*. 1980. № 3. С. 32–40.

References

1. Garnett J. B. *Bounded analytic function. Revised first edition*. New York: Springer, 2007, XIV.
2. Coifman R. R., Weiss G. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1977, vol. 83, no. 4, pp. 569–645.
3. Grafakos L. *Modern Fourier analysis. Graduate Texts in Mathematics*. 2nd ed. New York, Springer, 2009.
4. Krotov V. G. Differential properties of boundary functions of Hardy spaces. *Mathematische Nachrichten*, 1986, vol. 126, no. 1, pp. 241–253 (in Russian).
5. Stelmakh A. I. Direct and inverse theorems of rational approximation for Hardy spaces in the half-plane. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2008, vol. 52, no. 6, pp. 36–41 (in Russian).
6. Mardvilko T. S., Pekarskii A. A. Application of the real Hardy–Sobolev space on the line to study the order of uniform rational approximations of functions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2022, no. 3, pp. 16–36 (in Russian).
7. Pekarskii A. A. Estimates of the derivatives of rational functions in $L_p[-1, 1]$. *Math. Notes*, 1986, vol. 39, no. 3, pp. 388–394 (in Russian).

8. Lorentz G. G., Golitschek M. V., Makovoz Y. *Constructive Approximation. Advanced Problems*. New York, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1996.
9. Phillips G. M. Error estimates for best polynomial approximation. *Approximation theory*. London, Academic Press, 1979, pp. 1–6.
10. DeVore R. A., Lorentz G. G. *Constructive Approximation: polynomials and splines approximation*. New York, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1993.
11. Stechkin S. B. On the order of the best approximations of continuous functions. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1951, vol. 15, no. 3, pp. 219–242 (in Russian).
12. King F. W. *Hilbert transform*. Volume 1. Cambridge, University Press, 2009.
13. Petrushev P. P., Popov V. A. *Rational approximation of real functions*. Cambridge, University Press, 1987.
14. Pekarskii A. A. Rational approximation of singular functions. *Izv. NAS BSSR. Ser. fiz.-mat. nauk*, 1980, no. 3, pp. 32–40 (in Russian).