Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2024. Том 32. № 2. С. 17–30

УДК 512.542

О РАЗРЕШИМОСТИ И ФАКТОРИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ π-РАЗРЕШИМЫХ НЕПРИВОДИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП ПРИМАРНОЙ СТЕПЕНИ. ЧАСТЬ IV

А. А. Ядченко

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
e-mail: yadchenko_56@mail.ru

Поступила: 19.11.2024 **Исправлена:** 25.11.2024 **Принята:** 12.12.2024

Ключевые слова: конечные группы, характеры, факторизация групп.

Аннотация. Работа является четвертой из серии статей, где для множества π, состоящего из нечетных простых чисел, исследуются конечные π-разрешимые неприводимые комплексные линейные группы степени $2|H|+1$, у которых холловы π-подгруппы H являются TI-подгруппами и не являются нормальными в группах. Цель серии – доказать разрешимость и определить условия факторизации таких групп.

ON SOLVABILITY AND FACTORIZATION OF SOME π-SOLVABLE IRREDUCIBLE LINEAR GROUPS OF PRIMARY DEGREE. PART IV

A. A. Yadchenko

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
e-mail: yadchenko_56@mail.ru

Received: 19.11.2024 **Revised:** 25.11.2024 **Accepted:** 12.12.2024

Keywords: finite groups, characters, factorizations of groups.

Abstract. The article is the fourth in a series of papers, where for a set π consisting of odd primes, finite π-solvable irreducible complex linear groups of degree $2|H|+1$ are investigated, for which Hall π-subgroups are TI-subgroups and are not normal in groups. The purpose of the series is to prove solvability and to determine the conditions for factorization of such groups.

1. Введение

Исследуются конечные π-разрешимые неприводимые комплексные линейные группы степени $n = 2|H|+1$, у которых холлова π-подгруппа H является TI-подгруппой.

В первой части работы [1] были доказаны некоторые предварительные результаты, а также получены некоторые свойства минимального контрпримера Γ к теореме $(*)$, которая является основой доказательства главной теоремы. Во второй [2] и в третьей [3] ее частях продолжено изучение свойств минимального контрпримера к теореме $(*)$.

Условие (*). Скажем, что для Γ, A, B, C, χ и n выполнено условие (*), если $\Gamma = BA$, где B – нормальная в Γ подгруппа, $(|B|,|A|) = 1$, A – группа нечетного порядка, большего 3, которая не является нормальной в группе Γ, $C_B(a) = C_B(A) = C$ для каждого элемента $a \in A^{\#}$, и B имеет точный неприводимый характер χ степени n, который является a-инвариантным хотя бы для одного элемента $a \in A^{\#}$.

Теорема (*). *Пусть для* Γ, A, B, C, χ *и* $n = 2|A|+1$ *выполнено условие (*). Тогда группа* Γ *разрешима,* n *является степенью простого числа* q, *подгруппа* $C_{2'}$ *абелева и, если подгруппа* C *не абелева, то в обозначениях леммы* 2.7 *[1] характер* $\chi_C = \beta + |A|\beta_1$, *где* $\beta(1) = |A|+1$ *и* $\beta_1(1) = 1$ *либо* $\beta(1) = 1$ *и* $\beta_1(1) = 2$. *Также, если* $|\pi| > 1$ *и при* $|\pi| = 1$ *характер* $\widehat{\chi}$ *примитивный, то* $G = O_q(B)C$.

Условие 1. Пусть π – множество нечетных простых чисел и G – конечная не π-замкнутая π-разрешимая группа с π-холловой TI-подгруппой H, имеющая точный неприводимый характер степени n.

Теорема. *Пусть группа G удовлетворяет условию* 1 *и* $n = 2|H| + 1 > 7$. *Тогда n – степень простого числа q, группа G разрешима и, если при* $|\pi| = 1$ *характер* χ *примитивный, то* $G = N_G(H)O_q(G)$.

2. Некоторые определения, обозначения и предварительные результаты

$\mathbf{Z}_+$ – множество целых неотрицательных чисел; $i = \overline{1,n} = 1,2,...n$; если ψ – характер некоторой подгруппы $X \subseteq G$, то $\mathrm{Irr}(\psi)$ обозначает множество всех неприводимых компонент характера ψ; $\pi = \pi(H)$; $\pi' = \pi(X) \setminus \pi$; $X_{\pi'}$ – холлова π'-подгруппа группы X. Если $X \lhd G$ и φ – неприводимый характер подгруппы X, то условие, что φ – g-инвариантен для некоторого элемента $g \in G \setminus X$, запишем для краткости в виде $I_G(\varphi) \neq X$. Все остальные обозначения и определения обычны и их можно найти, например, в [4] или [5]. Всюду под характером группы будем понимать комплексный характер, а под группой – конечную группу.

Пусть $\Gamma = AB$ – группа с подгруппами A и B, где $B \lhd \Gamma$, $(|A|,|B|) = 1$ и $|A|$ нечетен (*A – группа копростых автоморфизмов группы B*). Тогда она удовлетворяет условию теоремы 13.1 [5]. Согласно этой теореме существует взаимно-однозначное соответствие $\pi(B,A) : \mathrm{Irr}_A(B) \longrightarrow \mathrm{Irr}(C_B(A))$ между множеством всех A-инвариантных неприводимых характеров группы B и множеством всех неприводимых характеров подгруппы $C_B(A)$, которое обладает рядом свойств, зависящих, в частности, от свойств подгруппы A. Пусть $\chi \in \mathrm{Irr}_A(B)$. Тогда, по лемме 13.3 [5], существует такой единственный неприводимый характер $\widehat{\chi}$ группы Γ, что $\widehat{\chi}_B = \chi$ и $A \subseteq \ker(\det\widehat{\chi})$. Он называется *каноническим продолжением характера* χ *на группу* Γ. В дальнейшем под $\widehat{\chi}$ будем понимать именно такой характер.

3. Основная часть

Продолжим нумерацию формулировок лемм, начатую в первой части работы [1]. В ней, напомним, мы получили некоторые предварительные результаты, показали, что неприводимый характер $\widehat{\chi}$ точный и что $\widehat{\chi}(1) = q^\alpha$ для некоторого нечетного простого числа q и $\alpha \in \mathbf{N}$, а также начали изучать свойства минимального контрпримера к теореме (*). Во второй части [2] мы продолжили изучение минимального контрпримера к теореме (*) и доказали свойства подгруппы C и ее характера χ_C.

Напомним, что $N = N_\Gamma(B_q)$, где $\widehat{\chi}(1) = q^\alpha$ и B_q – A-инвариантная подгруппа, т. е. $A \subseteq N$. В третьей части [3] работы мы установили, что $N \neq \Gamma$ (лемма 3.13) и что $N^{(q_1)} = N_\Gamma(B_{q_1}) \neq \Gamma$ для $q \neq q_1 \in \pi'$ (лемма 3.14).

Лемма 3.15. *Характер* $\widehat{\chi}_N$ *неприводим.*

Доказательство.

Предположим, что характер $\widehat{\chi}_N$ не является неприводимым. Так как $[B_q, A] \nsubseteq C$ по лемме 3.3 [2], то $A \ntriangleleft N$. Следовательно, мы можем применить лемму 3.2 [1]. Положим в ней, что $\Gamma_1 = N$. Тогда в обозначениях указанной леммы $\widehat{\chi}_N = \eta + \theta$.

Допустим, что $\eta = 0$. Тогда $\theta = \theta_1 + \theta_2$, где θ_1 и θ_2 – неприводимые характеры подгруппы N степеней $|A|$ и $|A| + 1$ соответственно. Мы можем применить утверждения 2 леммы 3.2 [1]. По ее утверждению (2_i) $|A| + 1$ – степень 2 и $|\pi| > 1$. Поскольку $(|A|, q) = 1$ и $(|A| + 1, q) = 1$, то применяя теорему Клиффорда к характерам $(\theta_1)_{B_q}$ и $(\theta_2)_{B_q}$, мы убеждаемся в том, что все неприводимые компоненты характера $\widehat{\chi}_{B_q}$ являются линейными. Стало быть, подгруппа B_q абелева.

Предположим, что $B_q \nsubseteq (N_{\pi'})'$. Тогда из теоремы 7.4.4 [4] вытекает, что $|B : B'|$ делится на q. Следовательно, $O^q(B) \neq B$. Заметим, что подгруппа $O^q(B)$ не является абелевой, ибо в противном случае B содержит нормальное абелево q-дополнение. Это противоречит лемме 3.14 [3]. Поэтому характер $\widehat{\chi}_{O^q(B)}$ не содержит линейных неприводимых компонент. Поскольку все они по теореме Клиффорда имеют одинаковую степень, делящую $\widehat{\chi}(1)$, то либо характер $\widehat{\chi}_{O^q(B)}$ неприводим, либо $\psi(1) = q^{\alpha_1}$, $\alpha_1 < \alpha$, для некоторой его нелинейной неприводимой компоненты ψ. Тогда нетрудно видеть, что все неприводимые компоненты характера $\widehat{\chi}_{AO^q(B)}$ имеют степень, делящуюся на $\psi(1)$. Поэтому ни одна из этих степеней не может быть равна ни одному из чисел из леммы 2.10 [1].

Следовательно, факторгруппы группы $AO^q(B)$ по их ядрам имеют нормальные холловы π-подгруппы. И так как все эти ядра имеют тривиальное пересечение, то мы замечаем, что $A \lhd AO^q(B)$. Это означает, что $O^q(B) \subseteq C$. Отсюда вытекает, что $|B:C|$ – степень простого числа q. По лемме 2.9 [1] $B = O_q(B)C$. В этом случае теорема $(*)$ верна, что противоречит выбору группы Γ.

Поэтому мы заключаем, что $B_q \subseteq (N_{\pi'})'$. Но $(N_{\pi'})' \subseteq \ker\theta_1$ по утверждению (2_{ii}) леммы 3.2 [1]. Стало быть, $B_q \subseteq \ker\theta_1$. Отсюда вытекает, что $(\theta_1)_{B_q} = \theta_1(1)1_{B_q}$ и, значит,

$$(\widehat{\chi}_{B_q}, 1_{B_q})_{B_q} = ((\theta_1+\theta_2)_{B_q}, 1_{B_q})_{B_q} \geq \theta_1(1) = |A|.$$

С другой стороны, по теореме 3.13 [5]

$$\widehat{\chi}(1) = 2|A|+1 = q^\alpha = |\Gamma : Z(\Gamma)|_q.$$

Так как $B_q \cap Z(\Gamma) \subseteq \ker\theta_1$ и характер $\widehat{\chi}$ точный, то мы заключаем, что $B_q \cap Z(\Gamma) = 1$. Значит, $\widehat{\chi}(1) = |B_q|$ и из теорем 4.3.1 и 4.2.7 [4] вытекает, что $\widehat{\chi}_{B_q} = \rho_{B_q}$ – регулярный характер подгруппы B_q. Поэтому из леммы 2.11 [5] вытекает, что

$$(\widehat{\chi}_{B_q}, 1_{B_q})_{B_q} = 1_{B_q}(1) = 1,$$

что противоречит выше выделенному равенству.

Мы показали, что $\eta \neq 0$.

3.15.1. *Выполняется:* 1) $|\pi| = 1$, *характер* $\widehat{\chi}$ *примитивный и* $L \subseteq Z(\Gamma)$ *для абелевой и нормальной в* Γ *подгруппы* L;

2) $|N| = 2|A||B_q|; |B_q| = q$ *или* $|A| = 11^2 = 121$ *и* $|B_q| = 3^5$;

3) $N = (A \times N_2)B_q$ *и группа* B *простая.*

Убедимся вначале в том, что $|N| = 2|AB_q| = 2|A||B_q|$, $|B_q| = q$ или $|A| = 11^2 = 121$ и $|B_q| = 3^5$, $N = (A \times N_2)B_q$, а затем в том, что группа B простая.

Пусть $\theta(1) \neq |A|$, $\theta(1) \neq 2|A|$ и $\theta(1) \neq 2|A|-1$. По лемме 3.2 [1]

$$N_{\pi'} = O_2(N_{\pi'})C_{N_{\pi'}}(A),$$

т. е. $B_q \subseteq C$, что не так, ибо $[B_q, A] \nsubseteq C$.

Пусть теперь $\theta(1) = 2|A|-1 \neq 17$. Тогда по этой же лемме мы получаем, что $\theta(1) = 2|A|-1$ – степень простого числа $q_1 \in \pi'$, $q_1 \neq q$, и

$$N_{\pi'} = O_{q_1}(N_{\pi'})C_{N_{\pi'}}(A),$$

т. е. тоже $B_q \subseteq C$. Противоречие.

Рассмотрим случай, когда $\theta(1) = 2|A|-1 = 17$. Значит, $|A| = 3^2 = 9$,

$$\widehat{\chi}(1) = q^\alpha = 2|A|+1 = (2|A|-1)+2 = 19.$$

Тогда $\alpha = 1$, $q = 19$ и $\eta(1) = \widehat{\chi}(1) - \theta(1) = 2$. Поскольку $B_{19} \lhd N$ и $A\ker\eta \lhd N$, то

$$(A\ker\eta)_{19} = B_{19} \cap A\ker\eta \lhd B_{19}.$$

Поэтому

$$(A\ker\eta)_{19} \cap Z(B_{19}) \neq 1.$$

Следовательно, существует элемент

$$1 \neq z \in (A\ker\eta)_{19} \cap Z(B_{19}), \quad o(z) = 19,$$

и поэтому $(\widehat{\chi}(1), |Cl(z)|) = 1$. Отсюда и из теоремы 3.8 [5] вытекает, что $z \in Z(\widehat{\chi})$ либо $\widehat{\chi}(z) = 0$. Поскольку характер $\widehat{\chi}$ точный, то $z \notin \ker\widehat{\chi}$. Поэтому мы получаем, что $\widehat{\chi}(z) = -19$ либо $\widehat{\chi}(z) = 0$.

Если $\widehat{\chi}(z) = 0$, то $\widehat{\chi}_{<z>} = \rho_{<z>}$ – регулярный характер подгруппы $<z>$, ибо $\widehat{\chi}(1) = o(z) = 19$. Следовательно,

$$(\widehat{\chi}_{<z>}, 1_{<z>})_{<z>} = (\rho_{<z>}, 1_{<z>})_{<z>} = 1.$$

Однако мы видим, что $z \in \ker\eta$, т. е. $\eta_{<z>} = \eta(1)1_{<z>} = 2 \cdot 1_{<z>}$. Поэтому

$$(\widehat{\chi}_{<z>}, 1_{<z>})_{<z>} = ((\eta+\theta)_{<z>}, 1_{<z>})_{<z>} = 2 + (\theta_{<z>}, 1_{<z>})_{<z>} \geqslant 2.$$

Противоречие.

Пусть $\widehat{\chi}(z) = -19$. Тогда
$$(\widehat{\chi}_{<z>}, 1_{<z>})_{<z>} = 0,$$
и мы вновь получили противоречие с выражением выше.

Случай, когда $\theta(1) = 2|A| - 1 = 17$ невозможен.

Допустим теперь, что $\theta(1) = |A|$. В рассматриваемом случае $\eta(1) = |A| + 1$. Как и в случае $\theta(1) = 2|A| - 1 = 17$ убеждаемся в том, что существует такой элемент $1 \neq z \in Z(B_q) \cap \ker\eta$, что $\widehat{\chi}(z) = 0$. Применим лемму 3 [6]. По ней
$$\widehat{\chi}(z) = 0 = \alpha_{\widehat{\chi}} - \beta_{\widehat{\chi}},$$
где
$$\alpha_{\widehat{\chi}} = (\widehat{\chi}_{<z>}, 1_{<z>})_{<z>}$$
и
$$\beta_{\widehat{\chi}} = (\widehat{\chi}_{<z>}, \lambda_{<z>})_{<z>},$$
$1_{<z>} \neq \lambda \in \mathrm{Irr}(< z >)$. При этом
$$\widehat{\chi}(1) = \alpha_{\widehat{\chi}} + \beta_{\widehat{\chi}}(q-1) = \alpha_{\widehat{\chi}} q.$$
Здесь мы учли, что $\alpha_{\widehat{\chi}} = \beta_{\widehat{\chi}}$. Из того, что $z \in \ker\eta$ вытекает, что $\alpha_{\widehat{\chi}} \geqslant |A| + 1$. Значит,
$$2|A| + 1 = \widehat{\chi}(1) \geqslant (|A| + 1)q.$$
Поскольку $q > 2$, то мы получили неверное утверждение. Поэтому $\theta(1) \neq |A|$.

Предположим теперь, что $\theta(1) = 2|A|$. Тогда $\eta(1) = 1$ и $N' \subseteq \ker\eta$.

Допустим, что характер θ не является неприводимым.

По утверждению (1_{vi}) леммы 3.2 [1] $\theta_1 + \theta_2$ с $\theta_1(1) = \theta_2(1) = |A|$ и все неприводимые компоненты характера $\widehat{\chi}_{N_{\pi'}}$ линейные, т. е. подгруппа $N_{\pi'}$ абелева. По теореме Бернсайда подгруппа B содержит нормальное q-дополнение R. Так как $R \lhd \Gamma$ и $(\widehat{\chi}(1) = q^{\alpha}, |R|) = 1$, то с применением теоремы Клиффорда мы убеждаемся в том, что все неприводимые компоненты точного характера $\widehat{\chi}_R$ являются линейными. Тогда $R' \subseteq \ker\widehat{\chi}_R = 1$, т. е. подгруппа R абелева.

Если $R \neq 1$, то это противоречит лемме 3.14 [2].

Если же $R = 1$, то подгруппа $B = B_q$ абелева, что противоречит тому, что она имеет нелинейный неприводимый характер χ.

Поэтому мы заключаем, что характер θ неприводим. Поскольку $\eta(1) = 1$ и $\theta(1) = 2|A|$ не делятся на простое число q, то из теоремы Клиффорда вытекает, что все неприводимые компоненты характера θ_{B_q} линейные. Следовательно, все неприводимые компоненты характера $\widehat{\chi}_{B_q}$ линейные. Поскольку характер $\widehat{\chi}_{B_q}$ точный, то подгруппа B_q абелева. Тогда из теоремы 3.13 [5] следует, что $\widehat{\chi}(1) = |B_q/(Z(\Gamma))_q|$.

Допустим, что $(Z(\Gamma))_q \neq 1$. Из теоремы 7.4.4 [4] следует, что $|\Gamma : \Gamma'|$ делится на степень простого числа q. Тогда $A \subseteq O^q(\Gamma)$ и $\Gamma = O^q(\Gamma)B_q$.

Если $A \lhd O^q(\Gamma)$, то $(O^q(\Gamma))_{\pi'} \subseteq C$. Стало быть, $|B : C|$ – степень простого числа q и $B = O_q(B)C$ по лемме 2.9 [1]. По лемме 3.11 [2] подгруппа C разрешима и содержит абелеву холлову подгруппу $C_{2'}$. Отсюда и из леммы 3.5 [2] вытекает, что теорема (*) верна. Но это противоречит выбору группы Γ.

Пусть теперь $A \ntriangleleft O^q(\Gamma)$. Рассмотрев характер $\widehat{\chi}_{O^q(\Gamma)}$, мы с помощью теоремы Клиффорда убеждаемся в том, что он неприводим. Поскольку $|O^q(\Gamma)| < |\Gamma|$, то мы можем применить индукцию. По ней
$$(O^q(\Gamma))_{\pi'} = O_q((O^q(\Gamma))_{\pi'})C_{(O^q(\Gamma))_{\pi'}}(A).$$
Тогда нетрудно видеть, что $|B : C|$ – степень простого числа q. Мы вновь придем к противоречию с выбором группы Γ.

Поэтому $(Z(\Gamma))_q = 1$ и, значит, $\widehat{\chi}(1) = |B_q|$ и $B_q \subseteq N'$, что вытекает из теоремы 7.4.4 [4]. Также из теорем 8.17 [5] и 4.2.7 [4] вытекает, что $\widehat{\chi}_{B_q} = \rho_{B_q}$ – регулярный характер подгруппы B_q.

Пусть B_0 – такая минимальная A-инвариантная нормальная подгруппа из B_q, что $B_0 \not\subseteq C$. Так как A – TI-подгруппа, то $|B_0/C_{B_0}(A)| = k|A| + 1$ для некоторого $k \in \mathbf{Z}_+$. Но $|B_q| = \widehat{\chi}(1) = 2|A| + 1$.

Поскольку $B_0 \subseteq B_q$, то $k \leqslant 2$. Поскольку $|A|$ и B_0 являются нечетными числами, то $k \neq 1$. Так как $k \neq 0$, то $k = 2$. Поэтому $|B_0/C_{B_0}(A)| = |B_q|$, $C_{B_0}(A) = 1$ и $B_0 = B_q$. Следовательно, подгруппа B_q минимальная нормальная в AB_q и элементарная абелева.

По теореме Клиффорда

$$\theta_{N_{\pi'}} = \sum_{a \in A} \beta^a,$$

где β – неприводимый характер степени 2 подгруппы $N_{\pi'}$.

Предположим, что неприводимая компонента β характера $\theta_{N_{\pi'}}$ подгруппы $N_{\pi'}$ примитивна. Так как подгруппа $B_q \triangleleft N_{\pi'}$ нормальна в N и $(2,q) = 1$, то $B_q \subseteq Z(\beta^a)$ для каждого элемента $a \in A$. Поскольку $B_q \subseteq Z(\eta_{N_{\pi'}})$, то по лемме 5 [7] $B_q \subseteq Z(N_{\pi'})$. По теореме Бернсайда группа B содержит нормальное q-дополнение R. Рассматривая характер χ_R с помощью теоремы Клиффорда, мы убеждаемся в том, что $R' \subseteq \ker\chi_R = 1$. Это означает, что подгруппа R абелева. Если $R \neq 1$, то мы получим противоречие с леммой 3.14 [3]. Если $R = 1$, то $B = B_q$. Но в нашем случае подгруппа B_q абелева и, значит, она не может иметь нелинейный неприводимый характер χ. Стало быть, характер β не может быть примитивным.

Предположим теперь, что характер β не является примитивным, т. е. $\beta = \lambda^{N_{\pi'}}$ для линейного характера λ подгруппы $X \subseteq N_{\pi'}$, $|N_{(\pi')} : X| = 2$. Тогда $\theta = \lambda^N$.

Мы замечаем, что $(N_{\pi'})' \subseteq X$ и поэтому $(N_{\pi'})'' \subseteq X'$. Но $(N_{\pi'})'' \triangleleft N$, ибо

$$(N_{\pi'})'' \mathrm{char} (N_{\pi'})' \mathrm{char} N_{\pi'} \mathrm{char} N.$$

Далее, $X' \subseteq \ker\lambda$ и

$$\ker\theta = \cap_{g \in N \setminus X} (\ker\lambda^g).$$

Поэтому $(N_{\pi'})'' \subseteq \ker\theta$. Поскольку $(N_{\pi'})'' \subseteq (N_{\pi'})' \subseteq \ker\eta$ и

$$\ker\eta \cap \ker\theta = \ker\widehat{\chi} = 1,$$

то $(N_{\pi'})'' = 1$. Поэтому подгруппа $(N_{\pi'})'$ абелева и подгруппа $N_{\pi'}$ разрешима.

Далее, по лемме 2.2 [1] $N_{\pi'} = [N_{\pi'}, A] C_{N_{\pi'}}(A)$. Поскольку факторгруппа $\Gamma/\ker\eta$ циклическая, то

$$A \ker\eta / \ker\eta \triangleleft \Gamma / \ker\eta$$

и по лемме 3 [7] $[N_{\pi'}, A] \subseteq \ker\eta$.

Предположим вначале, что $[N_{\pi'}, A] \subseteq X$. Тогда $\lambda_{[N_{\pi'},A]} \in \mathrm{Irr}(\theta_{[N_{\pi'},A]})$ и так как $[N_{\pi'}, A] \triangleleft N$, то с помощью теоремы Клиффорда мы убеждаемся в том, что все неприводимые компоненты характера $\theta_{[N_{\pi'},A]}$ и, следовательно, все неприводимые компоненты характера $\widehat{\chi}_{[N_{\pi'},A]}$ линейные. Стало быть, подгруппа $[N_{\pi'}, A]$ абелева. Поэтому

$$[N_{\pi'}, A] = [[N_{\pi'}, A], A] \times C_{[N_{\pi'},A]}(A).$$

Отсюда, из того, что $[[N_{\pi'}, A], A] = [N_{\pi'}, A]$ и из ранее установленного вытекает, что

$$N_{\pi'} = [N_{\pi'}, A] \times C_{N_{\pi'}}(A); \quad [N_{\pi'}, A] \subseteq Z(N_{\pi'}).$$

Поскольку $B_q \not\subseteq C$, то $B_q \cap [N_{\pi'}, A] \neq 1$. Следовательно, подгруппа $[N_{\pi'}, A]_q \neq 1$ и A-инвариантна. Так как B_q – минимальная нормальная в AB_q, то $[N_{\pi'}, A]_q = B_q$. Значит, $B_q \subseteq Z(N_{\pi'})$. Отсюда и из теоремы Бернсайда вытекает, что группа B содержит нормальное q-дополнение R. Чуть ранее мы показали, что это невозможно.

Пусть теперь $[N_{\pi'}, A] \not\subseteq X$. Поскольку $|N_{\pi'} : X| = 2$, то $N_{\pi'} = [N_{\pi'}, A]$.

Допустим, что $|\pi| \neq 1$. Поскольку подгруппа $N_{\pi'}$ разрешима, то $[N_{\pi'}, A] \subseteq F(N_{\pi'})$ по теореме 6 [8], т. е. подгруппа $N_{\pi'}$ нильпотентна. Это означает, что $B_q \subseteq Z(N_{\pi'})$. По теореме Бернсайда группа B содержит инвариантное q-дополнение R, которое будет абелевым, что легко следует из того, что все неприводимые компоненты характера χ_R линейные. Мы получили противоречие с леммой 3.14 [3].

Здесь мы замечаем, что в случае, когда $|\pi| > 1$, лемма 3.15 доказана.

Поэтому в дальнейшем в данной работе мы считаем, что $|\pi| = 1$, т. е. $2p^m + 1 = q^\alpha$. Применим лемму 2.8 [1]. По ней могут быть три возможности:

1) $m = 1$ и, значит, $|A| = p$ – простое число;

2) $\alpha = 1$;

3) $p = 11$, $m = 2$, $q = 3$ и $\alpha = 5$.

По условию теоремы в данном случае характер $\widehat{\chi}$ примитивный. Пусть подгруппа $L \lhd \Gamma$ и абелева. Тогда по следствию 6.13 [5] $L \subseteq Z(\Gamma)$.

Пусть K – такая A-инвариантная максимальная нормальная подгруппа в $N_{\pi'}$, что $(N_{\pi'})' \subseteq \subseteq K \subseteq N_{\pi'}$ и $N_{\pi'}/K$ – главный фактор группы N. Поскольку $(N_{\pi'})' \subseteq X$ и $|N_{\pi'} : X| = 2$, то мы можем положить, что $K \subseteq X$ и $K = O^2(N)$.

Тогда $\lambda_K \in \mathrm{Irr}(\theta_K)$. Поэтому из теоремы Клиффорда вытекает, что все неприводимые компоненты характера θ_K линейные. Поскольку $\eta_K(1) = 1$, то все неприводимые компоненты характера $\widehat{\chi}_K$ линейные. Следовательно, $K' \subseteq \ker\widehat{\chi}_K = 1$, т. е. подгруппа K абелева. Поскольку $K \lhd N$, то любая холлова подгруппа из K нормальна в N. Очевидно также, что $B_q \subseteq K$ и что $K = F(N)$.

Предположим, что $K_{q'} \neq 1$. Применим теорему D [9], по которой рациональное число

$$m = \frac{|K_{q'}||\Gamma : N|\theta(1)}{\widehat{\chi}(1)\lambda_K(1)} = \frac{|K_{q'}||\Gamma : N|2|A|}{q}$$

является целым числом. Однако простое число q не делит числитель, ибо $B_q \subseteq N$. Противоречие.

Поэтому $K_{q'} = 1$ и, значит, $K = B_q = F(N)$ и, так как $N_{\pi'}/K \cong N_2$ является главным фактором разрешимой группы N, то подгруппа N_2 является элементарной абелевой 2-группой и минимальной нормальной в AN_2. Мы видим также, что $(N_{\pi'})' \subseteq B_q$. Учитывая, что подгруппа B_q минимальная нормальная в AB_q, мы заключаем, что $(N_{\pi'})' = B_q$ порядка, напомним, $\widehat{\chi}(1) = q^\alpha$. Поскольку $C_N(B_q) \lhd N$, то из рассуждений выше вытекает, что $C_N(B_q) = B_q$. Следовательно, $N/B_q \cong AN_2$ и изоморфна подгруппе из $Aut(B_q)$.

1. Предположим вначале, что $m = 1$. Значит, $\widetilde{\chi}(1) = 2p + 1$. По теореме [10] группа Γ разрешима.

Заметим, что мы рассматриваем случай, когда $\eta(1) = 1$ и $\theta(1) = 2|A|$ и, значит, можем применять сведения, полученные в нем.

Пусть $M \lhd \Gamma$ – такая подгруппа, что B/M является главным фактором группы Γ. Так как B – разрешима, то $|B/M|$ – степень некоторого простого числа q_1.

Поскольку $M \lhd \Gamma$ и характер $\widehat{\chi}$ примитивен, то $\widehat{\chi}_M = e\chi_1$ для натурального числа e, делящего $|\Gamma : M|$ и неприводимого характера χ_1 степени $q_1^{\alpha_1}$, $\alpha_1 \in \mathbf{N}$, подгруппы M.

Допустим вначале, что $q_1 \neq q$. Тогда $B_q \subseteq M$, $e = 1$ и характер $\widehat{\chi}_M$ неприводим. Поэтому характер $\widehat{\chi}_{AM}$ также неприводим. Нетрудно убедиться в том, что к нему и подгруппе AM мы можем применить индукцию. По ней $M = O_q(M)C_M(A)$. Следовательно, $O_q(M) \lhd \Gamma$. При этом подгруппа $O_q(M)$ абелева, ибо B_q абелева. Так как характер $\widehat{\chi}$ примитивен, то $O_q(M) \subseteq Z(\Gamma)$. Следовательно, $M \subseteq C$, т. е. $B_q \subseteq C$, что противоречит лемме 3.5 [2].

Пусть теперь $q_1 = q$. Поскольку $B_q \cap M$ – q-силовская A-инвариантная подгруппа и B_q – минимальная нормальная подгруппа в AB_q, то $B_q \cap M = 1$. Следовательно, $B = MB_q$ и M – q'-группа. Следовательно, подгруппа M абелева и $M \subseteq Z(\Gamma)$. Мы получаем, что подгруппа B является абелевой, что не так.

2. Предположим теперь, что в лемме 2.8 [1] $\alpha = 1$. Тогда $|B_q| = q$ и $Aut(B_q)$ является циклической порядка $q - 1 = 2|A|$. Поэтому $AN_2 = A \times N_2$, $|N_2| = 2$ и $N = (A \times N_2)B_q$. Также мы замечаем, что N и $N_{\pi'}$ являются группами Фробениуса с ядром B_q.

3. Пусть теперь в лемме 2.8 [1] $\alpha \neq 1$. Тогда $m = 1$ или $q = 3$, $\alpha = 5$, $p = 11$ и $m = 2$.

Предположим, что $q = 3$, $\alpha = 5$, $p = 11$ и $m = 2$. Значит, B_3 – элементарная абелева 3-группа порядка 3^5 и AN_2 изоморфна некоторой подгруппе из $GL(5;3)$. Так как

$$|GL(5;3)| = \prod_{i=0}^{i=4}(3^5 - 3^i) = (3^5 - 3^1)(3^5 - 3^2)(3^5 - 3^3)(3^5 - 3^4) =$$

$$= 3^{1+2+3+4}(3^5-1)(3^4-1)(3^3-1)(3^2-1)(3-1) =$$

$$= 2^{1+4+1+3+1}\cdot 3^{10}\cdot 5\cdot 13\cdot 11^2 = 2^{10}\cdot 3^{10}\cdot 5\cdot 13\cdot 11^2.$$

Мы видим, что $|N_2| \leqslant 2^{10}$. Так как $N_2 \lhd AN_2$ и A – TI-подгруппа, то из леммы 1 [11] следует, что $|N_2/C_{N_2}(A)| \equiv 1(\mathrm{mod}|A|)$, т. е. $2^k \equiv 1(\mathrm{mod}|121|)$ для некоторого $0 \leqslant k \leqslant 10$. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что только $2^0 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 121)$. Это означает, что $AN_2 = A \times N_2$. Поскольку подгруппа N_2 – минимальная нормальная в AN_2, то $|N_2| = 2$. Мы вновь замечаем, что и в этом случае N и $N_{\pi'}$ – группы Фробениуса с ядром B_3 порядка 3^5.

Итак, мы видим, что

$$|N_2| = 2, |N| = 2|AB_q| = 2|A||B_q|, \quad N = (A \times N_2)B_q,$$

где $|B_q| = q \neq 3$ или $|B_q| = 3^5$. Убедимся в том, что группа B простая.

Мы отмечали, что N является группой Фробениуса с ядром B_q, т. е. B_q – F-подгруппа в группе Γ [12, с. 8]. Также подгруппа $N_{\pi'} = N_B(B_q)$ является группой Фробениуса с ядром B_q и $|N_{\pi'} : B_q| = 2$. Поскольку B_q – F-подгруппа в группе B и $q \neq 2$, то множество S всех неприводимых характеров подгруппы $N_{\pi'}$, индуцируемых неглавными неприводимыми характерами подгруппы B_q, по теореме 1.5 [12] является τ-когерентным.

Допустим, что группа B не является простой. Тогда по лемме 4.2 [12] существует собственная подгруппа $1 \neq R \lhd B$, и для нее выполняется одно из двух утверждений: $B_q \subseteq R$ или $R \cap N_{\pi'} = 1$.

Пусть выполняется первое утверждение. Тогда $B = N_B(B_q)R = N_{\pi'}R$.

Поэтому фактор группа

$$B/R = N_{\pi'}R/R \cong N_{\pi'}/(N_{\pi'} \cap R = B_q)$$

циклическая индекса 2. Следовательно, характер χ_R неприводим. Легко видеть, что характер $\widehat{\chi}_{AR}$ неприводим. Несложно убедиться в том, что для AR, A, R, $C_R(A)$, χ_R и n выполняются условия $(^*)$. Так как $|AR| < |\Gamma|$, то по индукции $R = O_q(R)C_R(A)$ и для подгруппы $C_R(A)$ и ее характера χ_R выполняются утверждения теоремы $(^*)$. Поскольку $N_2 \subseteq C$, что отмечалось ранее, то $B = O_q(B)C$ и теорема верна. Мы получили противоречие с выбором группы Γ.

Пусть теперь $R \cap N_{\pi'} = 1$. Поскольку $(\chi(1), |R|) = 1$, то с помощью теоремы Клиффорда мы устанавливаем, что все неприводимые компоненты характера χ_R линейные. Поэтому подгруппа R абелева.

Пусть $\lambda_1 \in \mathrm{Irr}(\chi_R)$ и пусть $I_{\pi'} = I_B(\lambda_1)$. По теореме 6.11 [5] $\chi = ((\lambda_1)')^B$ для такого неприводимого характера $(\lambda_1)'$ подгруппы $I_{\pi'}$, что

$$e = (((\lambda_1)')_R, \lambda_1)_R = (\chi_R, \lambda_1)_R.$$

Отсюда вытекает, что

$$q^\alpha = \chi(1) = |B : I_{\pi'}|(\lambda_1)'(1).$$

Мы видим, что $|B : I_{\pi'}|$ – степень q и, значит, $B = B_q I_{\pi'}$.

Предположим вначале, что $|B : I_{\pi'}| = q^\alpha \neq 1$, т. е. $B \neq I_{\pi'}$. Поскольку $2|A| = |B_q| - 1$ не делит $|I_{\pi'}|$, то мы можем применить теорему 9.6 [12] по которой группа B имеет нормальное нильпотентное дополнение R_0 к $N_{\pi'}$. Это означает, что $B = N_{\pi'}R_0$, $R_0 \subseteq F(B)$ и $N_{\pi'} \cap R_0 = 1$. Так как $F(B) \lhd \Gamma$ и $B_q \cap F(B) = 1$, то подгруппа $F(B)$ абелева. Следовательно, $F(B) \subseteq Z(\Gamma)$. Поскольку $N_2 \subseteq C$, то мы видим, что $B = B_q C$, что противоречит выбору группы Γ, ибо по лемме 2.9 [1] $B = O_q(B)C$.

Пусть теперь $B = I_{\pi'}$. Тогда $\chi_R = \chi(1)\lambda_1$, т. е. $R \subseteq Z(B) = Z(\Gamma) \subseteq N_{\pi'}$. Противоречие.

Итак, группа B простая.

Утверждение 3.15.1 доказано.

Рассмотрим теперь случай, когда группа B простая. Из ранее приведенных рассуждений вытекает, что $\pi = \{p\}$ – простое число, $|A| \neq p$, $|B_q| = q$ – нечетное простое число или $|A| = 11^2$, $|B_q| = 3^5$ и подгруппа B_3 элементарна абелева. В обоих случаях $|N_{\pi'}| = 2|B_q|$, $N_2 \subseteq C$ и подгруппа B_q – минимальная нормальная в AB_q.

Пусть $B \supset Y$ – произвольная A-инвариантная подгруппа такая, что $Y \not\subseteq C$ и $\Gamma_1 = AY$. Тогда $A \subseteq \Gamma_1 \subset \Gamma$ и $A \ntriangleleft \Gamma_1$. К группе Γ_1 и ее характеру $\widehat{\chi}_{\Gamma_1}$ мы можем применить лемму 3.2 [1]. Пусть η' и θ' – компоненты характера $\widehat{\chi}_{\Gamma_1}$, которые соответствуют характерам η и θ из этой леммы.

3.15.2. *Выполняется: для любой A-инвариантной подгруппы $Y \subset B$ компонента θ' характера $(\widehat{\chi})_{\Gamma_1}$ такая, что $A\ker\theta'/\ker\theta' \ntriangleleft \Gamma_1/\ker\theta'$ может иметь только степени* $\theta'(1) = |A|$ *или* $\theta'(1) = 2|A|$.

Рассмотрим все различные значения характеров η' и θ' из указанной леммы.

Заметим, что при $\Gamma_1 \neq \Gamma$ характер $\widehat{\chi}_{\Gamma_1}$ не может быть неприводимым. В самом деле. Если это не так и $\widehat{\chi}_{\Gamma_1} = \theta'$ – неприводимый характер, то нам нетрудно убедиться в том, что для Γ_1, A, Y, $C_Y(A)$, $(\theta')_Y = \chi_Y$ и n выполнено условие $(^*)$. Поскольку $|\Gamma_1| < |\Gamma|$, то по индукции

$$Y = O_q(Y)C_Y(A)$$

и для подгруппы $C_Y(A)$ справедливы все утверждения доказываемой теоремы. Однако мы замечаем, что $O_q(Y) = B_q$ и, так как эта подгруппа абелева, то по теореме 6.15 [5] $\theta'(1)$ делит $|Y : B_q| = |Y|_{q'}$, что не так.

Рассмотрим вначале случай, когда $\eta' \neq 0$ в лемме 3.2 [1]. По этой лемме $A\ker\eta' \triangleleft \Gamma_1$, а по ее утверждению (1_i) характер $\theta'_{A\ker\eta'}$ точен степени $\theta'(1) = |A|-1$, $|A|$, $|A|+1$, $2(|A|-1)$, $2|A|-1$ или $2|A|$ и $\theta'(1)$ – степень некоторого простого числа r за исключением случая, когда $\theta'(1) = 2|A|$. При этом с учетом леммы 3 [7]

$$Y = (\ker\eta')_{\pi'}C_Y(A), \quad [Y,A] \subseteq \ker(\ker\eta')_{\pi'}.$$

Также по утверждению (1_{ii}) леммы 3.2 [1] при $\theta'(1) \neq 2(|A|-1)$ и при $\theta'(1) \neq 2|A|$ характер $\theta'_{A\ker\eta'}$ неприводим.

Предположим, что $\theta'(1) = |A|-1$ или $\theta'(1) = 2(|A|-1)$. Тогда $2^d = p^m - 1$ для $d,m \in \mathbf{N}$, т. е. $p^m = 2^d + 1$. Следовательно, $|A| = p$ или $|A| = 9$. Случай $|A| = p$ нами рассмотрен ранее. Поэтому $|A| = 9$, т. е. $\pi = \{3\}$. Этот случай мы рассмотрим чуть ниже.

Предположим теперь, что $\theta'(1) = |A|+1 = 2^d$. Тогда

$$q^\alpha = \widehat{\chi}(1) = 2|A|+1 = 2(|A|+1)-1 = 2^{d+1}-1 = q$$

– простое число Мерсенна. Понятно, что в этом случае $d = 2d_1$ – четное число, $d_1 \in \mathbf{N}$, и $q \neq 3$. Убедимся в том, что на 3 делится

$$|A| = (q-1)/2 = (2^{2d_1+1}-2)/2 = 2^{2d_1}-1.$$

В самом деле. Пусть $d_1 = 1$. Тогда $|A| = 2^2 - 1 = 3$. Предположим, что на 3 делится натуральное число $2^{2k}-1$ для натурального числа k. Так как $2^{2(k+1)} - 1 = (2^{k+1}-1)(2^{k+1}+1)$ и 2^{k+1} не делится на 3, то на 3 делится один из сомножителей в скобках. Поэтому $|A| = 2^{2(k+1)}-1$ делится на 3, т. е. $\pi = \{3\}$.

Рассмотрим случай, когда $\pi = \{3\}$. Тогда B – простая $3'$-группа. Такой может быть только группа Судзуки $Sz(d)$, $d = 2^{2m+1}$, $m \in \mathbf{N}$, порядка

$$d^2(d-1)(d^2+1) = d^2(d-1)(d+2r+1)(d-2r+1), \quad r = 2^m.$$

Согласно [13] группа B может иметь только следующие максимальные подгруппы:

$H(d)$ – группа Фробениуса порядка $d^2(d-1)$;

группа диэдра порядка $2(d-1)$;

группа Фробениуса $[a]b$, где $a^{d+2r+1} = b^4 = 1, r = 2^m$;

группа Фробениуса $[a]b$, где $a^{d-2r+1} = b^4 = 1, r = 2^m$;

$Sz(s)$, где $s^t = q$, t – простой делитель числа $2m+1$.

Учитывая, что A – TI-подгруппа в группе Γ и подгруппы порядков $d-1$, $d+2r+1$ и $d-2r+$ $+1$ являются холловыми в B и циклическими (теоремы XI.3.9 и XI.3.10 [13]), то мы дословным повторением леммы 2 [14] убеждаемся в том, что в группе Γ существуют подгруппы $AY_{2'}$ порядков $|A|(d-1)$; $|A|(d+2r+1)$ и $|A|(d-2r+1)$ и, следовательно, существуют подгруппы AY порядков $2|A|(d-1)$; $4|A|(d+2r+1)$ и $4|A|(d-2r+1)$. Поскольку мы рассматриваем случаи, когда $\theta'(1) \in$

$\in \{|A|-1;|A|+1;2(|A|-1)\}$, то по утверждению (1_{iii}) леммы 3.2 [1] $Y_{2'} \subseteq C$ для каждой из указанных подгрупп. Тогда мы замечаем, что $|B:C|$ – степень 2. Из леммы 2.9 [1] вытекает, что $B = O_2(B)C$. Это противоречит простоте группы B.

Теперь следует заметить, что случай, когда $\eta' = 0$ невозможен. В самом деле, ибо в противном случае $\theta' = \theta_1 + \theta_2$, где по лемме 3.2 [1] θ_1 и θ_2 – неприводимые характеры степеней $|A|$ и $|A|+1$ соответственно. При этом $|A|+1$ – степень 2 и по утверждению 2_i этой леммы $|\pi > 1|$, что не так.

Предположим теперь, что $\theta'(1) = 2|A|-1$ и $2|A|-1 = r^{\alpha_1}$, где r – некоторое простое число и $\alpha_1 \in \mathbf{N}$.

В этом случае мы имеем три последовательные натуральные числа: $2|A|-1 = r^{\alpha_1}$; $2|A| = 2p^m$ и $2|A|+1 = q^{\alpha}$, которые делят $|\Gamma|$. Одно из них делится на 3. Если 3 делит $|A|$, т. е. $p = 3$, то B – простая $3'$-группа. Чуть ранее мы показали, что этот случай невозможен. Поэтому считаем, что $r = 3$ или $q = 3$, т. е. $B_3 = 3^5$.

Рассмотрим случай, когда $2|A|+1 = |B_3| = 3^5 = 243$. Тогда $|A| = 11^2$ и $2|A|-1 = r^{\alpha_1} = 241$ – простое число. По теореме 1 [15] $B = O_{241}(B)C$. Это противоречит тому, что группа B простая.

Остается случай, когда $r = 3$. Значит, $2|A|-1 = 3^{\alpha_1}$, т. е.

$$2|A|-1 = 2p^m - 1 = 3^{\alpha_1}.$$

Из теоремы [16] вытекает, что либо $m = 1$, либо $m = \alpha_1 = 2$. Поскольку мы рассматриваем случай, когда $m > 1$, то остается случай, когда $m = \alpha_1 = 2$. Значит, $2p^2 - 1 = 3^2 = 9$, т. е. $2p^2 = 10$. Отсюда получаем, что $p^2 = 5$, что не так.

Следовательно, $\theta'(1) \neq 2|A|-1$.

Утверждение 3.15.2 доказано.

3.15.3. *Выполняется: если* $\theta'(1) = |A|$, *то* $B_q \not\subseteq Y$.

Допустим, что $\theta'(1) = |A|$. Тогда $\eta'(1) = |A|+1$ и по утверждению (1_{iv}) леммы 3.2 [1]

$$Y = [Y,A] \times C_Y(A), \quad [Y,A] \subseteq Z(Y).$$

Отсюда следует, что

$$\Gamma_1 = AY = A[Y,A] \times C_Y(A).$$

Предположим, что простое число q делит $|Y|$. Тогда существует подгруппа AY_q, $Y_q \subseteq B_q$. Поскольку подгруппа B_q минимальная нормальная в AB_q, то мы замечаем, что $Y_q = B_q$ и $B_q \subseteq C_Y(A)$ или $B_q \subseteq [Y,A] \subseteq Z(Y)$. В первом случае мы получаем противоречие с леммой 3.3 [1], а во втором – $B_q \lhd \Gamma_1$, т. е. $\Gamma_1 \subseteq N$. Так как $N_{\pi'} \subseteq Y$, то $N_{\pi'} = Y = B_q \times C_Y(A)$, т. е. $B_q \subseteq Z(N_{\pi'})$. По теореме Бернсайда группа B содержит нормальное q-дополнение. Это противоречит ее простоте. Наше предположение о том, что q делит $|Y|$ неверно.

Следовательно, Y – q'-группа.

Утверждение 3.15.3 доказано.

3.15.4. *Выполняется: если* $\theta'(1) = 2|A|$, *то* $Y = N_{\pi'}$, *т. е.* $|Y| = 2|B_q|$.

Предположим, что $\theta'(1) = 2|A|$. Тогда $\eta'(1) = 1$ и $N' \subseteq \ker\eta'$.

Допустим, что характер θ' не является неприводимым. Как и в случае, когда $\theta(1) = 2|A|$ в доказательстве утверждения 3.15.1, мы убеждаемся в том, что подгруппа Y абелева. Но $N_{\pi'} \subseteq$ $\subseteq Y$. Следовательно, подгруппа B содержит нормальное q-дополнение. Это противоречит тому, что она простая.

Поэтому характер θ' неприводим.

По теореме Клиффорда

$$(\theta')_Y = \sum_{a \in A} (\beta')^a,$$

где β' – неприводимый характер степени 2 подгруппы Y.

Предположим, что неприводимая компонента β' характера $(\theta')_Y$ подгруппы Y примитивна.

Тогда из теоремы 14.23 [5] вытекает, что

$$|Y : Z(\beta')| = 2^2 \cdot 3; \quad 2^3 \cdot 3; \quad 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Отсюда следует, что для $5 < r \in \pi(B)$ подгруппа $B_r \subseteq Z(\beta')$. Поскольку подгруппа B_r – A-инвариантна, то $B_r = (B_r)^a \subseteq (Z(\beta'))^a$ для каждого элемента $a \in A$. Поэтому

$$B_r \subseteq \cap_{a\in A}((Z(\beta'))^a).$$

Но $B_r \subseteq Z(\eta')$, ибо $\eta'(1) = 1$. Поэтому

$$B_r \subseteq Z(\widehat{\chi}_Y) = Z(Y)$$

по лемме 5 [7]. Следовательно, $B_r \subseteq Z(N^{(r)})_{\pi'}$, и поэтому группа B содержит нормальное r-дополнение, что не так. Поэтому $\pi(Y) = \{2;3;5\}$.

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае $B_q \not\subseteq Y$, если $|B_q| = q$.

Поэтому $q = 3$, $Y_3 = B_3 = 3^5$ и $B_3 \cap Z(\beta') = 3^4$.

Рассмотрим этот случай. Поскольку $(\beta')_{Z(\beta')} = 2\xi$ для линейного характера ξ подгруппы $Z(\beta')$, то из разложения характера $(\theta')_Y$ выше вытекает, что для каждого неединичного элемента $b \in Z(\beta')$ мы получаем, что

$$(\theta')_Y(b) = \sum_{a\in A}(\beta')^a(b) = 2\sum_{a\in A}\xi^a(b).$$

Поскольку $B_3 \subseteq N'$, что вытекает из теоремы 7.4.4 [4], то $\eta'(b) = 1$. Далее, $\widehat{\chi}(b) = 0$, ибо характер $\widehat{\chi}_{B_q}$ регулярный. Поэтому $\theta'(b) = \widehat{\chi}(b) - \eta'(b) = -1$. Следовательно,

$$2\sum_{a\in A}\xi^a(b) = -1.$$

Отсюда мы получаем, что

$$\sum_{a\in A}\xi^a(b) = -1/2.$$

Это противоречит тому, что алгебраическое рациональное число является целым числом (см. следствие 3.6 и лемму 3.2 [5]).

Предположим теперь, что неприводимая компонента β' характера $(\theta')_Y$ подгруппы Y импримитивна.

Тогда $\beta' = \lambda^Y$ для линейного характера λ подгруппы $X \subseteq Y$, $|Y:X| = 2$, и $\theta' = \lambda^{\Gamma_1}$, $\Gamma_1 = AY$.

Как в аналогичном случае в доказательстве утверждения 3.15.1 мы доказали, что подгруппа $N_{\pi'}$ разрешима, убеждаемся в том, что подгруппа Y разрешима.

Пусть $S = Y_{2'}$. Поскольку фактор группа $\Gamma_1/\ker\eta'$ циклическая, то $S\ker\eta'/\ker\eta'$ также циклическая и нормальна в $\Gamma_1/\ker\eta'$. А по утверждениям 2 и 2_i теоремы [17] факторгруппа $S\ker\theta'/\ker\theta'$ абелева и нормальна в $\Gamma_1/\ker\theta'$. Поскольку $\ker\eta' \cap \ker\theta' = 1$, то группа Γ_1 изоморфна некоторой подгруппе из прямого произведения факторгрупп $\Gamma_1/\ker\eta'$ и $\Gamma_1/\ker\theta'$ с абелевыми и нормальными холловыми подгруппами нечетного порядка. Тогда мы видим, что подгруппа $S \lhd \Gamma_1$ и также абелева. Следовательно, $S \lhd Y$ и $|Y:S|$ – степень 2. Понятно, что $B_q \subseteq S$ и что $B_q \lhd Y$, т. е. $Y \subseteq N_{\pi'}$. Так как по утверждению 3.15.1 $|N_{\pi'}| = 2|B_q|$, то $Y = N_{\pi'}$. Мы делаем вывод, что в случае $\theta'(1) = 2|A|$ максимальная A-инвариантная подгруппа $Y \subseteq B$ имеет порядок

$$|Y| = 2|B_q|.$$

Утверждение 3.15.4 доказано.

3.15.5. *Выполняется: если* $\theta'(1) = |A|$, *то* $B = Y^{(r)}B_q$ *для простого числа* $q \neq r \in \pi(B)$.

Продолжим исследование случая, когда $\theta'(1) = |A|$.

Из теоремы 4.21 [5] и из второй выделенной формулы в доказательстве утверждения 3.15.3 вытекает, что

$$\theta' = (\theta')_{A[Y,A]} \times \mu$$

для некоторого линейного характера μ подгруппы $C_Y(A)$. Ранее отмечено, что характер θ' неприводим. Поэтому и характер $(\theta')_{A[Y,A]}$ неприводим.

Аналогично,

$$\eta' = \varepsilon \times (\eta')_{C_Y(A)}$$

для некоторого линейного характера ε подгруппы $A[Y,A]$.

Поскольку $C_{[Y,A]}(A)=1$, то из условия (*) вытекает, что $C_{[Y,A]}(a)=1$ для каждого элемента $a\in A$. Тогда $A[Y,A]$ – группа Фробениуса с ядром $[Y,A]$. Любой ее линейный характер в своем ядре содержит подгруппу $[Y,A]$. Поэтому $[Y,A]\subseteq \ker\varepsilon$.

Далее, по следствию 13.4 [5] характер $\widehat{\chi}_A$ является рационально значным. Поскольку

$$\widehat{\chi}_A=(\eta')_A+(\theta')_A=\eta'(1)\varepsilon_A+(\theta')_A$$

и $(\theta')_A=\rho_A$ – регулярный характер подгруппы A, то характер ε_A – также рационально значен. Так как $2\notin\pi$ и $\varepsilon(1)=1$, то мы замечаем, что $A\subseteq\ker\varepsilon$. Поэтому $\varepsilon=1_{A[Y,A]}$.

Отсюда и из леммы 2.6 [1] в ее обозначениях нетрудно заметить, что

$$\widehat{\chi}_A=k\rho_A+\varepsilon\beta(1)1_A=(\theta')_A+\eta'(1)\varepsilon_A=\rho_A+(|A|+1)1_A,$$

т. е. $k=\varepsilon=1$ и $\beta(1)=|A|+1$.

Поскольку $\eta'(1)=|A|+1=\beta(1)$, β – неприводимый характер подгруппы C и $C_Y(A)\subseteq C$, то $(\eta')_{C_Y(A)}=\beta_{C_Y(A)}$.

Следовательно,

$$\eta'=1_{A[Y,A]}\times\beta_{C_Y(A)}.$$

Напомним, что $B\supset Y$ – такая любая A-инвариантная подгруппа, что $Y\not\subseteq C$, в том числе и максимальная. Это означает, что $B_r,(N^{(r)})_{\pi'}\subseteq Y^{(r)}$ для $r\in\pi(B)$.

Поэтому два выделенных равенства в доказательстве утверждения 3.15.3 мы можем записать для каждого простого числа $q\neq r\in\pi(B)$, $Y^{(r)}\not\subseteq C$, в виде

$$Y^{(r)}=[Y^{(r)},A]\times C_{Y^{(r)}}(A),\quad [Y^{(r)},A]\subseteq Z(Y^{(r)})$$

и

$$AY^{(r)}=A[Y^{(r)},A]\times C_{Y^{(r)}}(A).$$

Поскольку $Y^{(r)}\not\subseteq C$, то $[Y^{(r)},A]\neq 1$ для таких простых чисел r.

Покажем, что $C\subseteq Y^{(r)}$.

Пусть

$$1\neq M=[Y^{(r)},A]\cap([(Y^{(r)}),A]^c=[(Y^{(r)})^c,A])$$

для некоторого элемента $c\in C\setminus C_{Y^{(r)}}(A)$. Из формулы выше и из теоремы 6.2.2 [4] вытекает, что

$$(Y^{(r)})^c=[(Y^{(r)})^c,A]\times C_{(Y^{(r)})^c}(A).$$

Так как $M\subseteq Z(Y^{(r)})$ и $M\subseteq Z((Y^{(r)})^c)$, то подгруппа

$$L=\langle Y^{(r)},(Y^{(r)})^c\rangle\subseteq C_B(M).$$

Поскольку подгруппа $Y^{(r)}$ максимальна в группе B, то могут быть две возможности: $L=B$ или $L=Y^{(r)}$.

Если $L=B$, то $1\neq M\subseteq Z(B)$, что противоречит простоте группы B.

Если $L=Y^{(r)}$, то мы получаем, что $(Y^{(r)})^c=Y^{(r)}$ для элемента $c\in C$. Это означает, что $c\in N_B(Y^{(r)})$. Так как подгруппа $N_B(Y^{(r)})$ A-инвариантна и отлична от B, то $N_B(Y^{(r)})=Y^{(r)}$ в силу максимальности подгруппы $Y^{(r)}$. Это означает, что $c\in Y^{(r)}$, т. е. $c\in C_{Y^{(r)}}(A)$. Мы получили противоречие с выбором элемента c. Значит, в случае, когда $M\neq 1$ выполняется утверждение $C\setminus C_Y(A)=\varnothing$. Это означает, что $C=C_{Y^{(r)}}(A)$.

Пусть теперь $M=1$ для некоторого элемента $c\in C\setminus C_{Y^{(r)}}(A)$. Из ранее приведенных рассуждений вытекает, что

$$\widehat{\chi}_{A[Y^{(r)},A]}=(\eta')_{A[Y^{(r)},A]}+(\theta')_{A[Y^{(r)},A]}=$$
$$=(|A|+1)1_{A[Y^{(r)},A]}+(\theta')_{A[Y^{(r)},A]}.$$

Понятно, что имеет место и такая формула:

$$\widehat{\chi}_{A[(Y^{(r)})^c,A]}=(|A|+1)1_{A[(Y^{(r)})^c,A]}+(\theta')_{A[(Y^{(r)})^c,A]}$$

для таких элементов c.

Мы тогда видим, что

$$(\widehat{\chi}_{A[Y^{(r)},A]},1_{A[Y^{(r)},A]})_{A[Y^{(r)},A]}+(\widehat{\chi}_{A[(Y^{(r)})^c,A]},1_{A[(Y^{(r)})^c,A]})_{A[(Y^{(r)})^c,A]}=2(|A|+1)>$$
$$>(\widehat{\chi}_{A[Y^{(r)},A]\cap A[(Y^{(r)})^c,A]},1_{A[Y^{(r)},A]\cap A[(Y^{(r)})^c,A]})_{A[Y^{(r)},A]\cap A[(Y^{(r)})^c,A]}=(\widehat{\chi}_A,1_A)_A=|A|+2.$$

Применим теорему 5.19 [5], по которой подгруппа

$$L=\langle A[Y^{(r)},A],A[(Y^{(r)})^c,A]\rangle$$

собственная.

Пусть $L_{\pi'}\subseteq Y^{(L_{\pi'})}$ – максимальная A-инвариантная подгруппа. Нетрудно видеть, что $A\subseteq L$, $L_{\pi'}\nsubseteq C$ и что компонента θ' характера $\widehat{\chi}_{AY^{(L_{\pi'})}}$ может иметь только степень, равную $|A|$. Тогда

$$Y^{(L_{\pi'})}=[Y^{(L_{\pi'})},A]\times C_{Y^{(L_{\pi'})}}(A),\quad [Y^{(L_{\pi'})},A]\subseteq Z(Y^{(L_{\pi'})}).$$

Так как

$$[Y^{(r)},A],[(Y^{(r)})^c,A]\subseteq L_{\pi'}\subseteq Y^{(L_{\pi'})},$$

то

$$Y^{(r)}\subseteq N_B([Y^{(r)},A])\subseteq Y^{(L_{\pi'})}$$

и

$$(Y^{(r)})^c\subseteq N_B([(Y^{(r)})^c,A])\subseteq Y^{(L_{\pi'})}.$$

Поскольку подгруппы $Y^{(r)}$ и $(Y^{(r)})^c$ максимальные A-инвариантные, то

$$Y^{(L_{\pi'})}=Y^{(r)}=(Y^{(r)})^c.$$

Это означает, что $c\in N_B(Y^{(r)})$. Но $N_B(Y^{(r)})=Y^{(r)}$, ввиду того, что подгруппа $Y^{(r)}$ максимальная A-инвариантная. Поэтому $c\in Y^{(r)}$, т. е. $c\in C_{Y^{(r)}}(A)$. Это противоречит выбору элемента c. Стало быть, и в этом случае $C\setminus C_{Y^{(r)}}(A)=\varnothing$, т. е. $C=C_{Y^{(r)}}(A)$.

Как видим, в обоих случаях $C=C_{Y^{(r)}}(A)$ и, значит,

$$Y^{(r)}=[Y^{(r)},A]\times C,\quad [Y^{(r)},A]\subseteq Z(Y^{(r)}).$$

Пусть $q,r\neq r_i\in\pi(|B|)$, $i=\overline{3,|\pi(|B|)|}$. Понятно, что

$$Y^{(r_i)}=[Y^{(r_i)},A]\times C,\quad [Y^{(r_i)},A]\subseteq Z(Y^{(r_i)})$$

для каждого i.

Обозначим также

$$M=[Y^{(r)},A]\cap[Y^{r_i},A]$$

и таким же образом исследуем случаи, когда $M\neq 1$ и когда $M=1$. Мы также получим, что $Y^{(r)}=$ $=Y^{r_i}$ для каждого $i=\overline{3,|\pi(|B|)|}$. Это означает, что $|B:Y^{(r)}|=|B_q|$. Тогда $B=Y^{(r)}B_q$ и $\Gamma=\Gamma_1B_q$, где $\Gamma_1=AY^{(r)}$.

Утверждение 3.15.5 доказано.

Рассмотрим характер $\psi=(1_{\Gamma_1})^{\Gamma}$ степени $|\Gamma:\Gamma_1|=|B_q|=2|A|+1$. Поскольку $(\psi_\Gamma,1_\Gamma)_\Gamma=1$, то для каждой неприводимой компоненты ν характера ψ получаем, что $\nu(1)\leqslant 2|A|$. Так как $A\ntrianglelefteq\Gamma$, то мы можем считать, что $A\ker\nu/\ker\nu\ntrianglelefteq\Gamma/\ker\nu$. Тогда по лемме 2.10 [1]

$$\nu(1)\in\{|A|-1;|A|;|A|+1;2(|A|-1);2|A|-1\}.$$

По теореме 1 [15] при всех указанных случаях, за исключением значений $\nu(1)=|A|$, $\nu(1)=$ $=2|A|-1=17$ и $\nu(1)=2|A|$ группа $B=O_r(B)C$, где $\nu(1)=r^{\alpha_1}$, $\alpha_1\in\mathbf{N}$. Это противоречит тому, что группа B простая.

Если $\nu(1)=|A|$, то из теоремы 2 [15] вытекает, что $B=[B,A]\times C_B(A)$. Мы видим, что группа B не является простой.

Если $\nu(1)=2|A|-1=17$, то $|A|=3^2$. Тогда B – простая $3'$-группа. Ранее мы убедились, что это невозможно.

Остался случай, когда $\nu(1) = 2|A|$. Если характер ν приводим, то группа B абелева, ибо все неприводимые компоненты характера $\widehat{\chi}_B$ линейные. Поэтому остается случай, когда характер ν имеет степень, равную $2|A|$ и неприводим. Применим теорему [17]. Из нее мы узнаем, что группа B разрешима, если неприводимая компонента β^* степени 2 характера ν_B импримитивна. Поэтому предположим, что β^* является примитивным характером. Применим теорему 14.23 [5]. По ней

$$|B : Z(\beta^*)| = 2^2 \cdot 3; 2^3 \cdot 3; 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Но $Z(\beta^*) \lhd B$, что противоречит тому, что группа B простая. Поэтому $|B| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Так как $\widehat{\chi}(1) = |B_q| = 2|A| + 1 > 7$ делит $|B|$, то мы видим, что $B \subseteq C$, т. е. $A \lhd \Gamma$. Это противоречит условию $(^*)$.

Лемма 3.15 доказана. □

Литература

1. *Ядченко А. А.* О разрешимости и факторизации некоторых П-разрешимых неприводимых линейных групп примарной степени. Часть I // Труды Института математики. 2022. Т. 30, № 1–2. С. 84–98.

2. *Ядченко А. А.* О разрешимости и факторизации некоторых П-разрешимых неприводимых линейных групп примарной степени. Часть II // Труды Института математики. 2023. Т. 31, № 1. С. 77–89.

3. *Ядченко А. А.* О разрешимости и факторизации некоторых П-разрешимых неприводимых линейных групп примарной степени. Часть III // Труды Института математики. 2023. Т. 31, № 2. С. 91–102.

4. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Harper and Row, 1968. 527 p.

5. *Isaacs I. M.* Character theory of finite groups. New York: Academic Press, 1976. 303 p.

6. *Ядченко А. А., Романовский А. В.* К проблемме Айзекса о конечных p-разрешимых линейных группах // Математические заметки. 2001. Т. 69, Вып. 1. С. 144–152.

7. *Ядченко А. А.* О П-разрешимых неприводимых линейных группах с холловой TI-подгруппой нечетного порядка I // Труды Института математики. 2008. Т. 16, № 2. С. 118–130.

8. *Glauberman G.* Correspodences of characters for relatively prime operator groups // Canad. J. Math. 1968. N 20. P. 1465–1488.

9. *Isaacs I. M., Robinson G. R.* The Number of Distinct Eigenvalues of Elements in Finite Linear Constituents of certain Characrer Restrictions Groups // Proc. American Math. Soc. 1998. Vol. 126, N 9. P. 2615–2617.

10. *Winter D. L.* On the Structure of Certain p-Solvable Linear Groups II // J. of Algebra. 1975. Vol. 33. P. 170–190.

11. *Ядченко А. А.* О П-разрешимых неприводимых линейных группах с холловой TI-подгруппой нечетного порядка II // Труды Института математики. 2009. Т. 17, № 2. С. 94–104.

12. *Романовский А. В.* Исключительные характеры конечных групп. Минск: Наука и техника, 1985. 148 с.

13. *Huppert B., Blackburn N.* Finite Groups III. Berlin, New York, Heidelberg: Academic Press, 1982. 454 p.

14. *Ядченко А. А.* Автоморфизмы и нормальные подгруппы линейных групп // Математические заметки. 2007. Т. 82, Вып. 3. С. 469–476.

15. *Ядченко А. А.* О факторизации некоторых П-разрешимых неприводимых линейных групп // Труды Института математики. 2019. Т. 27, № 1–2. С. 79–107.

16. *Crescenzo P.* A Diophantine equation which arises in the theory of finite groups // Advances in Mathematics. 1975. Vol. 17, N 1. P. 25–29.

17. *Ядченко А. А.* О нормальных подгруппах и факторизации некоторых π-разрешимых неприводимых линейных групп // Труды Института математики. 2021. Т. 29, № 1–2. С. 149–164.

References

1. Yadchenko A. A. On the solvability and factorization of some π-solvable irreducible linear groups of primary degree. Part I. *Proceedings of the Institute of Mathematics,* 2022, vol. 30, no. 1–2, pp. 84–98 (in Russian).

2. Yadchenko A. A. On the solvability and factorization of some π-solvable irreducible linear groups of primary degree. Part II. *Proceedings of the Institute of Mathematics,* 2023, vol. 31, no. 1, pp. 77–89 (in Russian).

3. Yadchenko A. A. On the solvability and factorization of some π-solvable irreducible linear groups of primary degree. Part III. *Proceedings of the Institute of Mathematics,* 2023, vol. 31, no. 2, pp. 91–102 (in Russian).

4. Gorenstein D. *Finite groups*. New York, Harper and Row, 1968, 527 p.

5. Isaacs I. M. *Character theory of finite groups*. New York, Academic Press, 1976, 303 p.

6. Yadchenko A. A., Romanovskii A. V. On the Isaacs problem concerning finite p-solvable linear groups. *Math. Notes*, 2001, vol. 69, no. 1, pp. 144–152 (in Russian).

7. Yadchenko A. A. On the π-solvable irreducible linear groups with Hall TI-subgrops of odd order I. *Proceedings of the Institute of Mathematics,* 2008, vol. 16, no. 2, pp. 118–130 (in Russian).

8. Glauberman G. Correspodences of characters for relatively prime operator groups. *Canad. J. Math.,* 1968, no. 20, pp. 1465–1488.

9. Isaacs I. M., Robinson G. R. The Number of Distinct Eigenvalues of Elements in Finite Linear Constituents of certain Characrer Restrictions Groups *Proc. American Math. Soc.,* 1998, vol. 126, no. 9, pp. 2615–2617.

10. Winter D. L. On the Structure of Certain p-Solvable Linear Groups II. *J. of Algebra,* 1975, vol. 33, pp. 170–190.

11. Yadchenko A. A. On the π-solvable irreducible linear groups with Hall TI-subgrops of odd order II. *Proceedings of the Institute of Mathematics,* 2009, vol. 17, no. 2, pp. 94–104 (in Russian).

12. Romanovskii A. V. *Exceptional characters of finite grops.* Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1985, 148 p. (in Russian).

13. Huppert B., Blackburn N. *Finite Groups III.* Berlin, New York, Heidelberg, Academic Press, 1982, 454 p.

14. Yadchenko A. A. Automorphisms and normal subgroups of linear groups. *Math. Notes*, 2007, vol. 82, no. 3, pp. 469–476 (in Russian).

15. Yadchenko A. A. On the factorization some π-solvable irreducible linear groups. *Proceedings of the Institute of Mathematics,* 2019, vol. 27, no. 1–2, pp. 79–107 (in Russian).

16. Crescenzo P. A Diophantine equation which arises in the theory of finite groups. *Advances in Mathematics,* 1975, vol. 17, no. 1, pp. 25–29.

17. Yadchenko A. A. On the normal subgroups and factorization some π-solvable irreducible linear groups. *Proceedings of the Institute of Mathematics,* 2021, vol. 29, no. 1–2, pp. 149–164 (in Russian).