Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 2. С. 91–102

УДК 512.542

О РАЗРЕШИМОСТИ И ФАКТОРИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ π-РАЗРЕШИМЫХ НЕПРИВОДИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП ПРИМАРНОЙ СТЕПЕНИ. ЧАСТЬ III

А. А. Ядченко

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: yadchenko_56@mail.ru
Поступила 23.11.2023

Работа является третьей из серии статей, где для множества π, состоящего из нечетных простых чисел, исследуются конечные π-разрешимые неприводимые комплексные линейные группы степени $2|H|+1$, у которых холловы π-подгруппы H являются TI-подгруппами и не являются нормальными в группах. Цель серии – доказать разрешимость и определить условия факторизации таких групп. Продолжено доказательство теоремы. Установлены дальнейшие свойства минимального контрпримера к теореме.

1. Введение.
Исследуются конечные π-разрешимые неприводимые комплексные линейные группы степени $n=2|H|+1$, у которых холлова π-подгруппа H является TI-подгруппой. В первой части работы [1] были доказаны некоторые предварительные результаты, а также получены некоторые свойства минимального контрпримера Γ к теореме $(^*)$, которая является основой доказательства главной теоремы. Во второй [2] и в данной ее части продолжено изучение свойств минимального контрпримера к теореме $(^*)$.

Условие 1. Пусть π – множество нечетных простых чисел и G – конечная не π-замкнутая π-разрешимая группа с π-холловой TI-подгруппой H, имеющая точный неприводимый характер степени n.

Теорема. *Пусть группа G удовлетворяет условию 1 и $n=2|H|+1>7$. Тогда n – степень простого числа q, группа G разрешима и, если при $|\pi|=1$ характер χ примитивный, то $G=N_G(H)O_q(G)$.*

2. Некоторые определения, обозначения и предварительные результаты. Z_+ – множество целых неотрицательных чисел; если ψ – характер некоторой подгруппы $X\subseteq G$, то $\mathrm{Irr}\,(\psi)$ обозначает множество всех неприводимых компонент характера ψ; $\pi=\pi(H)$; $\pi'=\pi(X)\setminus\pi$; $X_{\pi'}$ – холлова π'-подгруппа группы X. Если $X\lhd G$ и φ – неприводимый характер подгруппы X, то условие, что φ – g-инвариантен для некоторого элемента $g\in G\setminus X$, запишем для краткости в виде $I_G(\varphi)\neq X$. Все остальные обозначения и определения обычны и их можно найти, например, в [3] или [4]. Всюду под характером группы будем понимать комплексный характер, а под группой – конечную группу.

Пусть $\Gamma=AB$ – группа с подгруппами A и B, где $B\lhd\Gamma$, $(|A|,|B|)=1$ и $|A|$ нечетен (A – *группа копростых автоморфизмов группы* B). Тогда она удовлетворяет условию теоремы 13.1 [4]. Согласно этой теореме существует взаимно-однозначное соответствие $\pi(B,A):\mathrm{Irr}_A(B)\longrightarrow\mathrm{Irr}\,(C_B(A))$ между множеством всех A-инвариантных неприводимых характеров группы B и множеством всех неприводимых характеров подгруппы $C_B(A)$, которое обладает рядом свойств, зависящих, в частности, от свойств подгруппы A. Пусть $\chi\in\mathrm{Irr}_A(B)$. Тогда, по лемме 13.3 [4] существует такой единственный неприводимый характер $\widehat{\chi}$ группы Γ, что $\widehat{\chi}_B=\chi$ и $A\subseteq\ker(\det\widehat{\chi})$. Он называется *каноническим продолжением характера* χ *на группу* Γ. В дальнейшем под $\widehat{\chi}$ будем понимать именно такой характер.

Условие (*). Скажем, что для Γ, A, B, C, χ и n выполнено условие (*), если $\Gamma = BA$, где B – нормальная в Γ подгруппа, $(|B|,|A|) = 1$, A – группа нечетного порядка, большего 3, которая не является нормальной в группе Γ, $C_B(a) = C_B(A) = C$ для каждого элемента $a \in A^{\#}$, и B имеет точный неприводимый характер χ степени n, который является a-инвариантным хотя бы для одного элемента $a \in A^{\#}$.

Теорема (*). *Пусть для* Γ, A, B, C, χ *и* $n = 2|A|+1$ *выполнено условие* (*). *Тогда группа* Γ *разрешима,* n *является степенью простого числа* q*, подгруппа* $C_{2'}$ *абелева и, если подгруппа* C *не абелева, то в обозначениях леммы* 2.7 [1] *характер* $\chi_C = \beta + |A|\beta_1$, *где* $\beta(1) = |A|+1$ *и* $\beta_1(1) = 1$ *либо* $\beta(1) = 1$ *и* $\beta_1(1) = 2$. *Также, если* $|\pi| > 1$ *и при* $|\pi| = 1$ *характер* $\widehat{\chi}$ *примитивный, то* $G = O_q(B)C$.

Продолжим нумерацию формулировок лемм, начатую в первой части [1] работы. В ней, напомним, мы, в частности, показали, что неприводимый характер $\widehat{\chi}$ точный и что $\widehat{\chi}(1) = q^{\alpha}$ для некоторого нечетного простого числа q и $\alpha \in \mathbf{N}$.

Пусть $N = N_{\Gamma}(B_q)$, где $\widehat{\chi}(1) = q^{\alpha}$. Мы можем считать, что подгруппа B_q является A-инвариантной, т. е. $A \subseteq N$.

Лемма 3.13. *Выполняется* $N \neq \Gamma$.

Доказательство. Допустим обратное, т. е. $N = \Gamma$. Тогда $B_q = O_q(B)$. Из теоремы Клиффорда вытекает, что

$$\widehat{\chi}(1) = e|\Gamma : I_{\Gamma}(\varphi)|\varphi(1),$$

где $\varphi \in \mathrm{Irr}\,(\widehat{\chi}_{B_q})$ и $e = (\widehat{\chi}_{B_q},\varphi)_{B_q}$ делит $|\Gamma : B_q|$. Так как $B_q \subseteq I_{\Gamma}(\varphi)$ и $\widehat{\chi}(1) = q^{\alpha}$, то $e = |\Gamma : I_{\Gamma}(\varphi)| = 1$. Следовательно, характер $\varphi = \widehat{\chi}_{B_q}$ неприводим. Поэтому неприводим и характер $\widehat{\chi}_X$ для любой такой подгруппы $X \subseteq \Gamma$, что $B_q \subseteq X$.

Очевидно также, что $\widehat{\varphi} = \widehat{\chi}_{AB_q}$.

Так как $A \ntrianglelefteq X$ для $AB_q \subseteq X$, ибо $B_q \nsubseteq C$ по леммам 3.3 и 2.1 [1], то мы легко убеждаемся в том, что для X, A, $X_{\pi'}$, $C_{X_{\pi'}}(A)$, $\chi_{X_{\pi'}}$ и n выполняется условие $(^*)$. Поэтому, если $X \neq \Gamma$, то по индукции

$$X_{\pi'} = B_q C_{X_{\pi'}}(A)$$

и подгруппа $C_{X_{\pi'}}(A)$ и характер $\chi_{C_{X_{\pi'}}(A)}$ удовлетворяют утверждениям теоремы $(^*)$. В дальнейшем это утверждение мы будем применять неоднократно.

Пусть

$$X = \Gamma_1^{(q_i)} = AB_qB_{q_i} \neq \Gamma$$

для таких A-инвариантных силовских q_i-подгрупп B_{q_i}, $q_i \in \pi'$, $q_i \neq q$, что $B_{q_i} \nsubseteq C$. Тогда по только что сказанному

$$\left(\Gamma_1^{(q_i)}\right)_{\pi'} = O_q\left(\left(\Gamma_1^{(q_i)}\right)_{\pi'}\right) C_{\left(\Gamma_1^{(q_i)}\right)_{\pi'}}(A) = B_q C_{\left(\Gamma_1^{(q_i)}\right)_{\pi'}}(A).$$

Мы видим, что $B_{q_i} \subseteq C$. Это противоречит выбору подгруппы B_{q_i}.

Поэтому

$$\Gamma_1^{(q_1)} = AB_qB_{q_1} = \Gamma$$

для некоторого одного простого числа $q_1 \neq q$.

Отсюда мы видим, что подгруппа $B = B_qB_{q_1}$ разрешима.

Рассмотрим группу $X = AB_q(B_{q_1})_0$ для A-инвариантной собственной нормальной подгруппы $(B_{q_1})_0 \subseteq B_{q_1}$. Тогда $X \neq \Gamma$, и мы получим, что $(B_{q_1})_0 \subseteq C_{B_{q_1}}(A)$. Поскольку это утверждение справедливо для любой такой подгруппы $(B_{q_1})_0$, то по теореме 5.3.7 [3] подгруппа A действует неприводимо и нетривиально на факторгруппе $B_{q_1}/(B_{q_1})'$ и при этом либо подгруппа B_{q_1} элементарна абелева, либо подгруппа

$$\Phi(B_{q_1}) = Z(B_{q_1}) = (B_{q_1})' = C_{B_{q_1}}(A)$$

элементарна абелева, т. е. подгруппа B_{q_1} специальная класса 2. Мы также заключаем, что факторгруппа $B_{q_1}/C_{B_{q_1}}(A)$ минимальная A-инвариантная.

При этом $|A|$ делит $|B_{q_1}/C_{B_{q_1}}(A)| - 1$, что легко следует из леммы 1 [5]. Так как $B_{q_1} \not\subseteq C$, то

$$(q_1)^{k_1} = |B_{q_1}/C_{B_{q_1}}(A)| = k_2|A| + 1$$

для некоторых натуральных чисел k_1 и k_2.

В дальнейших рассуждениях нам потребуется тот факт, что

$$C_\Gamma(B_q) = Z(B_q) = Z(\Gamma).$$

Докажем это. Так как характер $\varphi = \widehat{\chi}_{B_q}$ неприводим и характер $\widehat{\chi}$ точный, то по упражнению 2.15 [4] $C_\Gamma(B_q) = Z(\Gamma)$. Понятно, что $Z(B_q) \subseteq C_\Gamma(B_q)$. Поэтому $Z(B_q) \subseteq Z(\Gamma)$.

Убедимся в том, что $Z(\Gamma) \subseteq Z(B_q)$.

Допустим, что это не так. Тогда $(Z(\Gamma))_{q'} \neq 1$. Отсюда, из того, что $\varphi \in \mathrm{Irr}_{AB_{q_1}}(B_q)$, а также из леммы 2 [6] вытекает, что $1 \neq (Z(\Gamma))_{q'} = \ker\chi_1$ для такого неприводимого характера χ_1 группы Γ, что $\varphi = (\chi_1)_{B_q}$.

Предположим вначале, что $A\ker\chi_1/\ker\chi_1 \lhd \Gamma/\ker\chi_1$. Тогда по лемме 2.3 [1] $B = (\ker\chi_1)_{\pi'}C_B(A)$. Поскольку $(\ker\chi_1)_{\pi'} \cap B_q = 1$, ибо характер φ точный, то мы получим, что $B_q \subseteq C_B(A)$, что не так.

Поэтому $A\ker\chi_1/\ker\chi_1 \ntriangleleft \Gamma/\ker\chi_1$. По лемме 2.3 [1] $A \cap \ker\chi_1 = 1$. Учитывая этот факт нетрудно установить, что для $\overline{\Gamma} = \Gamma/\ker\chi_1, \overline{A} = A\ker\chi_1/\ker\chi_1 \cong A, \overline{B} = B/\ker\chi_1, C_{\overline{B}}(A)$, $(\chi_1^*)_{\overline{B}}$ и n выполняется условие (*). Здесь χ_1^* – неприводимый характер факторгруппы $\overline{\Gamma}$, соответствующий характеру χ_1 в смысле леммы 2.22 [4]. Поскольку $|\overline{\Gamma}| < |\Gamma|$, то по индукции $\overline{B} = \overline{B}_q C_{\overline{B}}(A)$. Мы видим, что $\overline{B}_{q_1} = B_{q_1}\ker\chi_1/\ker\chi_1 \subseteq C_{\overline{B}}(A)$. Значит, $[B_{q_1}, A] \subseteq \ker\chi_1$. Поскольку $\ker\chi_1 \subseteq Z(\Gamma)$, то $[B_{q_1}, A] \subseteq Z(\Gamma)$. Тогда по лемме 2.2 [1]

$$B_{q_1} = [B_{q_1}, A]C_{B_{q_1}}(A) \subseteq C,$$

что не так. Наше предположение о том, что $(Z(\Gamma))_{q'} \neq 1$ ошибочно. Значит, $Z(\Gamma) \subseteq Z(B_q)$. Поэтому $Z(\Gamma) = Z(B_q)$

Желаемое утверждение доказано.

Пользуясь им мы покажем, что

$$C_{\overline{\Gamma}}(\overline{B}_q) = \overline{B}_q = B_q/Z(B_q).$$

Здесь $\overline{\Gamma} = \Gamma/Z(B_q)$.

Предположим, что это не так и $(C_{\overline{\Gamma}}(\overline{B}_q))_{q'} \neq 1$. Тогда для некоторой q'-подгруппы $1 \neq X \subseteq AB_{q_1}$ выполняется утверждение

$$1 \neq XZ(B_q)/Z(B_q) \subseteq C_{\overline{\Gamma}}(\overline{B}_q).$$

Отсюда следует, что $[X, B_q] \subseteq Z(B_q)$. Так как $Z(B_q) = Z(\Gamma)$ и $B_q = [B_q, X]C_{B_q}(X)$ по лемме 2 [1], то $B_q \subseteq C_{B_q}(X)$, т. е. $X \subseteq C_\Gamma(B_q)$. Однако мы ранее убедились в том, что $C_\Gamma(B_q) = Z(B_q)$. Мы получили противоречие. Стало быть, $C_{\overline{\Gamma}}(\overline{B}_q) = \overline{B}_q$.

Так как $C_\Gamma(B_q) = Z(B_q)$, то легко видеть, что $F(\Gamma) = F(B) = B_q$ и $Z(F(\Gamma)) = Z(B_q)$, а также что факторгруппа

$$\overline{F} = F(\Gamma)/Z(F(\Gamma)) = \overline{B}_q$$

самоцентрализуема в группе $\overline{\Gamma}$.

Можем также записать, что

$$\overline{\Gamma} = \Gamma/Z(B_q) = (\overline{B}_q)B_{q_1}A,$$

ибо $\overline{B}_{q_1} = B_{q_1}Z(B_q)/Z(B_q) \cong B_{q_1}$ и $\overline{A} = AZ(B_q)/Z(B_q) \cong A$.

Предположим, что $|\pi| > 1$. Применим лемму 2.9 [1]. По ней $B = F(B)C$. Отсюда и из выше вытекает, что $B = B_qC$. Стало быть, $B_{q_1} \subseteq C$, что не так.

Поэтому мы заключаем, что $|\pi| = 1$. По условию доказываемой теоремы характер $\widehat{\chi}$ примитивный.

Тогда по теореме Д. А. Супруненко [7, теорема 4.4] факторгруппа $\overline{F} = \overline{B}_q$ элементарна абелева порядка $\widehat{\chi}(1)^2 = q^{2\alpha}$. Следовательно,

$$\Phi(B_q) \subseteq Z(B_q).$$

Поскольку факторгруппа $\overline{B}_q$ самоцентрализуема в $\overline{\Gamma} = \Gamma/Z(B_q)$, то факторгруппа $\overline{\Gamma}/\overline{B}_q \cong AB_{q_1}$ изоморфна некоторой подгруппе группы $GL(2\alpha; q)$.

Так как $|\pi| = 1$, то $|A| = p^m$ для $m \in \mathbb{N}$. Значит,

$$n = 2|A| + 1 = 2p^m + 1 = q^\alpha$$

и по лемме 2.8 [1] α – нечетное число и либо $\alpha = 1$, либо $q = 3$ и при этом или $m = 1$, или же $p = 11$, $m = 2$ и $\alpha = 5$.

Предположим вначале, что $\alpha = 1$. Тогда $\widehat{\chi}(1) = q$.

Поскольку в рассматриваемом случае

$$|GL(2;q)| = q(q-1)(q^2-1) = q(2|A|)^2 2(|A|+1) = 8q|A|^2(|A|+1),$$

то $|B_{q_1}|$ делит $8(|A|+1)$. Следовательно,

$$|B_{q_1}| \leqslant 8(|A|+1).$$

С другой стороны, по одному из выделенных ранее равенств

$$(q_1)^{k_1} = k_2|A| + 1 \leqslant |B_{q_1}|$$

для некоторых натуральных чисел k_1 и k_2.

Предположим, что $q_1 = 2$. Тогда $k_2|A| + 1 = 2^{k_1}$. Поскольку $|A|$ – нечетное число, то k_2 – также нечетное натуральное число.

Покажем, что $|A| + 1$ – степень 2. Для этого достаточно убедиться в том, что $k_2 = 1$.

Допустим, что это не так. Тогда $k_2 \geqslant 3$ и $|A| + 1$ делится на некоторое нечетное простое число $p_1 \geqslant 3$. Отсюда и из предпоследних выделенных равенств вытекает, что

$$k_2|A| + 1 \leqslant 8(|A|+1)/p_1.$$

Следовательно,

$$9|A| + 3 = 3(3|A|+1) \leqslant p_1(k_2|A|+1) \leqslant 8(|A|+1).$$

Отсюда $|A| \leqslant 5$. Поскольку по условию теоремы $|A| > 3$, то мы получаем, что $|A| = 5$. Поэтому $q = 2|A| + 1 = 11$ и, значит,

$$|GL(2;11)| = 11(11-1)(11^2-1) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11.$$

При этом подгруппа порядка $q - 1 = 2|A| = 10$ в группе $GL(2;11)$ циклическая. Следовательно,

$$|B_2 : C_{B_2}(A)| \leqslant 2^3 = 8.$$

Поскольку по лемме 1 [5]

$$|B_2 : C_{B_2}(A)| \equiv 1 \pmod{|A|},$$

то мы видим, что $|B_2 : C_{B_2}(A)| = 4$ и $|A| = 3$ или $|B_2 : C_{B_2}(A)| = 8$ и $|A| = 7$, что не так. Противоречие.

Итак, $k_2 = 1$ и $|A| + 1 = p^m + 1 = 2^k$ для некоторого натурального числа k. Значит, $m = 1$ и $p = 2^k - 1$ – простое число Мерсенна. Так как $|A| > 3$, то мы видим, что k – нечетное натуральное число. Следовательно,

$$2p + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1 = q$$

– также простое число Мерсенна и $k+1$ – четное натуральное число, большее 2. Поэтому

$$2^{k+1} - 1 = (2^{(k+1)/2} - 1)(2^{(k+1)/2} + 1)$$

не является простым числом. Противоречие.

Пусть теперь $q_1 \neq 2$. Так как $|B_{q_1}|$ делит $8(|A|+1)$, то $|B_{q_1}| \leqslant (|A|+1)/2$. Так как $|B_{q_1}/C_{B_{q_1}}(A)| \leqslant |B_{q_1}|$, то

$$k_2|A| + 1 = |B_{q_1}/C_{B_{q_1}}(A)| \leqslant (|A|+1)/2$$

с четным натуральным числом k_2. Мы получили неверное неравенство.

Наше предположение о том, что $\alpha = 1$ ошибочно. Поэтому $\alpha \neq 1$ и $q = 3$.

Ранее установлено, что подгруппа B_{q_1} специальная класса 2, т. е.

$$C_{B_{q_1}}(A) = \Phi(B_{q_1}) = Z(B_{q_1}) = (B_{q_1})'$$

элементарна абелева либо $C_{B_{q_1}}(A) = 1$ и подгруппа B_{q_1} абелева. Также факторгруппа $B_{q_1}/C_{B_{q_1}}(A)$ минимальная A-инвариантная.

Если $|(B_{q_1})'| = q_1$, то группа B_{q_1} называется экстра-специальной. Для экстра-специальных групп B_{q_1} по теореме 5.5.2 (i) [3] $|B_{q_1}| = (q_1)^{2r+1}$ для некоторого натурального числа r. А по теореме 5.5.5 [3] все точные неприводимые характеры экстра-специальных групп имеют степень $(q_1)^r$.

Если же $|(B_{q_1})'| = (q_1)^d$, $d > 1$, то все ее неприводимые характеры неточные. При этом ядра всех ее линейных неприводимых характеров содержат $(B_{q_1})'$, а ядра всех нелинейных неприводимых характеров, они имеют степень $(q_1)^r$, специальной группы B_{q_1} содержатся в подгруппе $(B_{q_1})'$ и имеют в ней индекс, равный q_1.

Предположим, что $C_{B_{q_1}}(a) \neq 1$ для некоторого не единичного элемента $a \in A$. Тогда $C_{B_{q_1}}(A) \neq 1$ и поэтому существует элемент $1 \neq b_1 \in C_{B_{q_1}}(A)$ простого порядка q_1.

Поскольку характер $\varphi = \widehat{\chi}_{B_q}$ неприводим, то характер $\widehat{\chi}_{\langle b_1 \rangle B_q}$ также неприводим. Причем $\langle b_1 \rangle \ntrianglelefteq \langle b_1 \rangle B_q$, ибо, как ранее установлено, $C_\Gamma(B_q) = Z(B_q)$. Мы можем применить лемму 1 [8]. Поскольку q_1 не делит $\widehat{\chi}(1)$ и $q_1 - 1$ не делит $\widehat{\chi}(1)$, если $q_1 \neq 2$, то по ней $|Spec\,\widehat{\chi}(b_1)| = q_1$. Однако, из леммы 2.7 [1] легко видеть, что $|Spec\,\widehat{\chi}(b_1)| \leqslant |\,\mathrm{Irr}\,(\chi_C)| \leqslant 3$. Поэтому $q_1 \leqslant 3$. Так как $q_1 \neq q = 3$, то $q_1 = 2$.

Итак, мы получаем, что либо подгруппа B_{q_1} элементарна абелева и $C_{B_{q_1}}(a) = 1$ для каждого неединичного элемента $a \in A$, либо $q_1 = 2$ и $C_{B_2}(a) \neq 1$ для некоторого неединичного элемента $a \in A$.

Рассмотрим вначале случай, когда подгруппа B_{q_1} элементарна абелева и $C_{B_{q_1}}(a) = 1$.

Рассмотрим при этом группу $B = B_{q_1}B_q$ и подгруппу $D = (B_{q_1}) \cap (B_{q_1})^b$, $b \in B \setminus N_B(B_{q_1})$.

Предположим, что $D \neq 1$ для некоторого элемента $b = b_0$. Тогда $\langle B_{q_1}, (B_{q_1})^{b_0} \rangle \subseteq C_B(D)$. Поскольку $B_{q_1} \subset C_B(D) \subseteq B$ и $(B_{q_1})^{b_{q_0}} \subset C_B(D)$, то $C_0 = C_B(D) \cap B_q \neq 1$. Очевидно, что $Z(B_q) \subseteq C_0$. Так как $\Phi(B_q) \subseteq Z(B_q)$, то $C_0 \lhd B_q$.

Заметим, что $C_0 \neq Z(B_q)$, ибо в противном случае $C_B(D) = B_{q_1} \times Z(B_q)$. Тогда $B_{q_1} = (B_{q_1})^{b_0}$, т. е. $b_0 \in N_B(B_{q_1})$, что не так.

Также $C_0 \neq B_q$, ибо $C_B(B_q) = Z(B_q)$, что доказано ранее.

Пусть $1 \neq b_1 \in D$. Рассмотрим подгруппу $\langle b_1 \rangle B_q$. Понятно, что $C_0 \subseteq C_{B_q}(b_1)$. Поэтому $C_{B_q}(b_1) \lhd B_q$. Также характер $\widehat{\chi}_{<b_1>B_q}$ неприводим и характер $\varphi \in \mathrm{Irr}_{\langle b_1 \rangle}(B_q)$. По теореме 13.32 (b) [4] $\varphi_{C_{B_q}(b_1)}$ содержит единственную неприводимую компоненту, кратность которой сравнима с ± 1 по модулю $|\langle b_1 \rangle|$, а кратности остальных его неприводимых компонент делятся на $|\langle b_1 \rangle|$. Однако характер $\varphi_{C_{B_q}(b_1)}$ разветвляется по теореме Клиффорда, и все его неприводимые компоненты имеют одинаковую кратность. Стало быть, $\varphi_{C_{B_q}(b_1)} = = \varphi(1)\xi$, $\xi(1) = 1$, т. е. $C_{B_q}(b_1) \subseteq Z(B_q)$. Поэтому $C_{B_q}(b_1) = Z(B_q)$. Стало быть, и $C_0 = = Z(B_q)$, что не так.

Полученное противоречие показывает, что $D = 1$. Это означает, что подгруппа B_{q_1} является TI-подгруппой. Рассмотрим подгруппу $B = B_{q_1}B_q$. В условии В [9] положим, что $H = B_{q_1}$ и $O_{\pi'}(G) = B_q$. По лемме 7 [9] (заметим, что она справедлива и для подгрупп H четного порядка) подгруппа B_{q_1} изоморфна дополнительному множителю некоторой группы Фробениуса. Поскольку она элементарна абелева, то B_{q_1} циклическая простого порядка, т. е. $|B_{q_1}| = q_1$.

Так как подгруппа B_{q_1} является A-инвариантной, то $|A|$ делит $q_1 - 1$, т. е. $q_1 - 1 = d|A|$ и, значит, $q_1 = d|A| + 1$.

Допустим, что d – нечетное натуральное число. Тогда $q_1 = dp^m + 1$ – четное простое число, т. е. $|B_{q_1}| = q_1 = 2$. Это невозможно.

Так как $2|A| + 1 = \widehat{\chi}(1) = 3^{\alpha}$, то $d \geqslant 4$. Мы получаем, что

$$\widehat{\chi}(1) = 2|A| + 1 < 3|A| \leqslant |B_{q_1}| - 1.$$

По теореме 1 [10] подгруппа $B_{q_1} \lhd \Gamma$. Тогда $B_{q_1} \subseteq C_{\Gamma}(B_q)$, т. е. подгруппа $B_{q_1} \subseteq Z(\Gamma) \subseteq C$ и абелева, что и требуется.

Рассмотрим теперь случай, когда подгруппа B_{q_1} не является элементарной абелевой. Следовательно, она специальная 2-группа класса 2.

Выше отмечено, что ее нелинейные неприводимые характеры имеют равную степень 2^r, $r \in \mathbb{N}$, их ядра содержатся в подгруппе $(B_2)'$ и имеют в ней индекс, равный 2. Количество нелинейных неприводимых характеров в группе B_2 равно $|C_{B_2}(A)| - 1$, все они A-инвариантны по теореме 13.1 [4] и по лемме 13.3 [4] продолжаются на группу AB_2. Поэтому, если ψ один из таких характеров, то группа AB_2 имеет неприводимый характер $\widehat{\psi}$ степени 2^r.

Предположим, что

$$A \ker\widehat{\psi} / \ker\widehat{\psi} \lhd AB_2 / \ker\widehat{\psi}.$$

Тогда $A\ker\widehat{\psi} \lhd AB_2$. Но

$$(\ker\widehat{\psi})_2 \subseteq (B_2)' = C_{B_2}(A),$$

что ранее установлено. Поэтому $A \lhd A\ker\widehat{\psi}$, что влечет $A \lhd AB_2$. Значит, $B_2 \subseteq C$, что не так.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$A \ker\widehat{\psi} / \ker\widehat{\psi} \ntriangleleft AB_2 / \ker\widehat{\psi}.$$

По лемме 2.1 [1] $\ker\widehat{\psi} \cap A = 1$. По теореме [11]

$$2^r \equiv \pm 1 \pmod{|A|}.$$

Тогда

$$2^r = k_2|A| \mp 1 \tag{1}$$

для некоторого, легко видеть, нечетного натурального числа k_2.

Пусть

$$\widehat{\chi}_{AB_2} = \sum_i \alpha_i \varphi_i, \quad \varphi_i \in \mathrm{Irr}\,(AB_2), \quad \alpha_i \in \mathbb{N}.$$

Поскольку A – p-группа нечетного порядка и изоморфна некоторому дополнительному множителю группы Фробениуса по лемме 7 [9], то она циклическая и, значит, можно доказать, что

$$c.d.(AB_2) \in \{1; |A|; 2^r\}$$

и что $(AB_2)' \subseteq \ker\varphi_i$, если $\varphi_i(1)$ не степень 2.

Допустим, что $\varphi_i(1)$ не степень 2 для всех i. Тогда

$$(B_2)' \subseteq \cap_i \ker\varphi_i = \ker\widehat{\chi}_{B_2A} = 1.$$

Противоречие, ибо мы рассматриваем случай, когда подгруппа B_2 не является абелевой.

Стало быть, $\varphi_{i_0}(1) = 2^r$ для некоторого i_0. Понятно, что $\widehat{\chi}_{AB_2}(1) \geqslant \alpha_{i_0}\varphi_{i_0}(1)$. Значит, с учетом равенства (1)

$$2|A|+1 = 3^{\alpha} \geqslant \alpha_{i_0}2^r = \alpha_{i_0}(k_2|A| \mp 1).$$

Предположим, что $k_2 = 1$. Стало быть, $2^r = |A| \mp 1$.

Пусть $2^r = |A| - 1$. Тогда $|A| = 2^r + 1$. Поэтому

$$3^{\alpha} = 2|A|+1 = 2(2^r+1)+1 = 2^{r+1}+3.$$

Мы получаем, что натуральное число 2^{r+1} делится на 3, что не так.

Пусть теперь $2^r = |A| + 1$. Тогда $|A| = 2^r - 1$. Поэтому

$$3^{\alpha} = 2|A|+1 = 2(2^r-1)+1 = 2^{r+1}-1.$$

Получаем, что $2^{r+1}-1$ – простое число Мерсенна. И так как оно делится на 3, то $\alpha = 1$. Поэтому $2|A|+1 = 3$, т. е. $|A| = 1$, что тоже не так.

Рассмотрим теперь случай, когда $k_2 \geqslant 3$. Тогда из чуть выше выделенного неравенства получаем что

$$2|A|+1 \geqslant 3|A| \mp 1,$$

т. е. $|A| \leqslant 2$, что не так. □

Пусть далее $q_1 \in \pi'$, B_{q_1} – A-инвариантная силовская q_1-подгруппа из B и $N^{(q_1)} = N_{\Gamma}(B_{q_1})$.

Лемма 3.14. *Выполняется* $N^{(q_1)} \neq \Gamma$.

Доказательство. Допустим обратное, т. е. $N^{(q_1)} = \Gamma$. Тогда $B_{q_1} \lhd \Gamma$, т. е. $B_{q_1} = O_{q_1}(B)$. Также из леммы 3.13 следует, что $q_1 \neq q$. Рассмотрев характер $\widehat{\chi}_{B_{q_1}}$ степени q^{α}, мы с помощью теоремы Клиффорда устанавливаем, что все его неприводимые компоненты линейные и, следовательно, подгруппа B_{q_1} абелева.

Так как $B_{q_1} \lhd \Gamma$, то по теореме Шура–Цассенхауза группа Γ содержит q_1-дополнение $\Gamma_1 = AD$, где $D = B_{(q_1)'}$ – A-инвариантная холлова q_1'-подгруппа из B. Тогда

$$\Gamma_1 = AD \neq \Gamma = B_{q_1}\Gamma_1.$$

Поскольку $B = B_{q_1}D$, то мы также можем считать, что $B_q \subseteq D$, т. е. $B_q \subseteq \Gamma_1$.

Допустим, что характер $\widehat{\chi}$ примитивный. По следствию 6.13 [4] $B_{q_1} \subseteq Z(\Gamma)$. Поэтому $\Gamma = B_{q_1} \times \Gamma_1$. Тогда $\widehat{\chi} = \mu' \times \chi'$ для точного линейного характера μ' подгруппы B_{q_1} и точного неприводимого характера $\chi' = \widehat{\chi}_{\Gamma_1}$. Поскольку $A \ntriangleleft \Gamma_1$, ибо в противном случае $A \lhd \Gamma$, что противоречит условию $(^*)$, то легко заметить, что для Γ_1, A, $(\Gamma_1)_{\pi'}$, $C_{(\Gamma_1)_{\pi'}}(A)$, $(\chi')_{(\Gamma_1)_{\pi'}} = \chi_{(\Gamma_1)_{\pi'}}$ и n выполняется условие $(^*)$. По индукции

$$(\Gamma_1)_{\pi'} = O_q((\Gamma_1)_{\pi'})C_{(\Gamma_1)_{\pi'}}(A)$$

и для подгруппы $C_{(\Gamma_1)_{\pi'}}(A)$, а также для ее характера $\chi_{C_{(\Gamma_1)_{\pi'}}(A)}$ выполняются все заключения доказываемой теоремы. Тогда все эти заключения справедливы и для подгруппы C

и ее характера χ_C, а также $B = O_q(B)C$ и по утверждению (1) леммы 3.5 [2] подгруппа C удовлетворяет всем заключениям доказываемой теоремы. В рассматриваемом случае теорема верна. Это противоречит выбору группы Γ.

Поэтому в дальнейшем доказательстве этой леммы характер $\widehat{\chi}$ не является примитивным. Из условия $(^*)$ вытекает, что $|\pi| > 1$.

Предположим, что группа Γ разрешима. По лемме 2.9 [1] $B = F(B)C$. Тогда $AF(B) \lhd \Gamma$. Применим теорему Клиффорда к характеру $\widehat{\chi}_{AF(B)}$.

Если он неприводим, то по индукции, которую, очевидно, мы можем применить,

$$F(B) = O_q(F(B))C_{F(B)}(A).$$

Легко видеть, что $B = O_q(B)C$, что приводит к противоречию с выбором группы Γ.

Предположим, что характер $\widehat{\chi}_{AF(B)}$ не является неприводимым. Тогда из теоремы Клиффорда вытекает, что для каждой его неприводимой компоненты ψ^x, $x \in C_B(A)$, выполняется, что $\psi^x(1) = q^{\alpha_1}$ для некоторого натурального числа $\alpha_1 < \alpha$. Так как $\widehat{\chi}(1) = 2|A| + 1 = q^{\alpha}$, то мы замечаем, что

$$\psi^x(1) \notin \{|A|-1; |A|; |A|+1; 2|A|-2; 2|A|-1; 2|A|\}.$$

Из лемм 2.1 и 2.10 [1] вытекает, что

$$(A\ker\psi)^x / \ker\psi^x \lhd AF(B)/\ker\psi^x.$$

Отсюда следует, что

$$A\ker\psi^x \lhd AF(B), \ \ x \in C_B(A).$$

Значит,

$$A = \cap_x A\ker\psi^x \lhd AF(B).$$

Тогда $A \lhd \Gamma_1$, что не так.

Делаем вывод, что $|\pi| > 1$, группа Γ не является разрешимой и характер $\widehat{\chi}$ импримитивный.

Пусть $\lambda \in \operatorname{Irr}(\widehat{\chi}_{B_q})$ и пусть $\lambda' \in \operatorname{Irr}(I = I_\Gamma(\lambda))$ – такой характер, что по теореме 6.11 (a) [4]

$$\widehat{\chi} = (\lambda')^{\Gamma}.$$

Поскольку $B_{q_1} \subseteq I$ и $\Gamma = B_{q_1}\Gamma_1$, то $\Gamma = I\Gamma_1$. Тогда из упражнения 5.2 [4] вытекает, что

$$\widehat{\chi}_{\Gamma_1} = ((\lambda')^{I\Gamma_1})_{\Gamma_1} = ((\lambda')_{I\cap\Gamma_1})^{\Gamma_1}.$$

Если $A \lhd \Gamma_1$, то $B_q \subseteq C$, что будет противоречить лемме 3.3 [1]. Поэтому $A \ntriangleleft \Gamma_1$.

Допустим вначале, что характер $\widehat{\chi}_{\Gamma_1}$ неприводим. Так как $A \ntriangleleft \Gamma_1$, то нам нетрудно убедиться в том, что для группы Γ_1, A, $(\Gamma_1)_{\pi'}$, $C_{(\Gamma_1)_{\pi'}}(A)$, $\chi_{(\Gamma_1)_{\pi'}}$ и n выполняется условие $(^*)$. Поскольку $|\Gamma_1| < |\Gamma|$, то по индукции

$$(\Gamma_1)_{\pi'} = O_q((\Gamma_1)_{\pi'})C_{(\Gamma_1)_{\pi'}}(A).$$

Отсюда вытекает, что $AO_q((\Gamma_1)_{\pi'}) \lhd \Gamma_1$.

Предположим, что характер $\widehat{\chi}_{AO_q((\Gamma_1)_{\pi'})}$ не является неприводимым. Как чуть ранее получаем, что $A \lhd \Gamma_1$, что не так.

Пусть теперь характер $\widehat{\chi}_{AO_q((\Gamma_1)_{\pi'})}$ не является приводимым. Тогда для подгруппы $\Gamma^{(')} = AB_{q_1}O_q((\Gamma_1)_{\pi'})$ неприводим и характер $\widehat{\chi}_{\Gamma^{(')}}$. Нетрудно убедиться в том, что для группы $\Gamma^{(')}$ мы можем применить индукцию, если $|\Gamma^{(')}| < |\Gamma|$. Тогда

$$(\Gamma^{(')})_{\pi'} = O_q((\Gamma^{(')})_{\pi'})C_{(\Gamma^{(')})_{\pi'}}(A).$$

Следовательно, $B_{q_1} \subseteq C$. Отсюда и из выше сказанного вытекает, что $B = O_q(B)C$, что и требуется.

Предположим теперь, что $|\Gamma^{(')}| = |\Gamma|$. Значит,

$$\Gamma = AB_{q_1}O_q((\Gamma_1)_{\pi'}).$$

Мы замечаем, что $O_q((\Gamma_1)_{\pi'}) = B_q$ и что группа $\Gamma = A(B = B_{q_1}B_q)$ разрешима, что не так.

Осталось рассмотреть случай, когда характер $\widehat{\chi}_{\Gamma_1}$ не является неприводимым. Поскольку $A \ntriangleleft \Gamma_1$, то для некоторой компоненты θ характера $\widehat{\chi}_{\Gamma_1}$ подгруппы Γ_1 выполняется утверждение

$$A\ker\theta/\ker\theta \ntriangleleft \Gamma_1/\ker\theta.$$

С учетом леммы 2.1 [1] по лемме 2.10 [1] получаем, что $\theta(1) = |A|-1;\ |A|;\ |A|+1;\ 2(|A|-1);\ 2|A|-1$ или $2|A|$.

Рассмотрим все эти значения.

Предположим, что $\theta(1) = |A|-1;\ |A|+1$ или $2(|A|-1)$. Из теоремы 3 [12] вытекает, что

$$(\Gamma_1)_{\pi'} = O_2((\Gamma_1)_{\pi'})C_{(\Gamma_1)_{\pi'}}(A).$$

Поскольку $B_q \subseteq (\Gamma_1)_{\pi'}$, то $B_q \subseteq C_{(\Gamma_1)_{\pi'}}(A) \subseteq C$. Это противоречит лемме 3.3 [1].

Пусть теперь $\theta(1) = |A|$. Из указанной выше теоремы вытекает, что

$$(\Gamma_1)_{\pi'} = [(\Gamma_1)_{\pi'}, A] \times C_{(\Gamma_1)_{\pi'}}(A)$$

и $[(\Gamma_1)_{\pi'}, A] \subseteq Z((\Gamma_1)_{\pi'})$. Следовательно,

$$\Gamma^* = AB_{q_1}[(\Gamma_1)_{\pi'}, A] \triangleleft \Gamma.$$

Рассмотрим характер $\widehat{\chi}_{\Gamma^*}$.

Допустим, что он не является неприводимым. Так как $\widehat{\chi}(1) = 2|A|+1 = q^{\alpha}$, $q > 2$, то, ввиду теоремы Клиффорда, все его неприводимые компоненты имеют q-степень меньшую, чем $|A|-1$. Как и ранее, с помощью леммы 2.10 [1], мы легко убеждаемся в том, что $A \triangleleft \Gamma^*$. Тогда $[(\Gamma_1)_{\pi'}, A] \subseteq C$. Отсюда, а также из выше выделенного равенства и из леммы 2.2 [1] вытекает, что $B_q \subseteq C$, что не так.

Предположим теперь, что характер $\widehat{\chi}_{\Gamma^*}$ неприводим.

Если $|\Gamma^*| < |\Gamma|$, то, учитывая, что $A \ntriangleleft \Gamma^*$, по индукции

$$(\Gamma^*)_{\pi'} = O_q((\Gamma^*)_{\pi'})C_{(\Gamma^*)_{\pi'}}(A).$$

Отсюда вытекает, что $B_{q_1} \subseteq C_{(\Gamma^*)_{\pi'}}(A) \subseteq C$. Так как $B_{q_1} \triangleleft \Gamma$, то с применением теоремы Клиффорда и леммы 2.7 [1] мы убеждаемся в том, что $B_{q_1} \subseteq Z(\Gamma)$. Следовательно, $\Gamma = B_{q_1} \times \Gamma_1$ и характер $\widehat{\chi}_{\Gamma_1}$ неприводим. Как и ранее в таком случае мы придем к противоречию с выбором группы Γ.

Пусть теперь $|\Gamma^*| = |\Gamma|$. Тогда $\Gamma^* = \Gamma$ и группа Γ разрешима, что не так.

Предположим теперь, что $\theta(1) = 2|A|-1 = (q_2)^{\alpha'}$ и $\theta(1) \neq 17$. Здесь $q \neq q_2 \neq q_1$ – простое нечетное число и $\alpha' \in \mathbb{N}$. Тогда по указанной ранее теореме

$$(\Gamma_1)_{\pi'} = O_{q_2}((\Gamma_1)_{\pi'})C_{(\Gamma_1)_{\pi'}}(A).$$

Отсюда мы видим, что $B_q \subseteq C$, что не так.

Пусть $\theta(1) = 2|A|-1 = 17$. Мы получаем, что $|A| = 9$. Значит, $\pi = \{3\}$, что не так.

Осталось рассмотреть случай, когда $\theta(1) = 2|A|$. В обозначениях леммы 3.2 [1] $\widehat{\chi}_{\Gamma_1} = \eta + \theta$, $\eta(1) = 1$ и $A\ker\eta \triangleleft \Gamma_1$. По ней же характер $\theta_{A\ker\eta}$ точен,

$$(\Gamma_1)_{\pi'} = (\ker\eta)_{\pi'}C((\Gamma_1)_{\pi'})(A)$$

и факторгруппа $(\Gamma_1)_{\pi'}/(\ker\eta)_{\pi'}$ абелева. Поскольку группа Γ не является разрешимой, то подгруппа $(\ker\eta)_{\pi'}$ тоже неразрешима.

Поскольку $\Gamma = AB = B_{q_1}\Gamma_1$, то
$$AB_{q_1}(\ker\eta)_{\pi'} \lhd \Gamma.$$
Как и ранее, рассмотрев характер $\widehat{\chi}_{AB_{q_1}(\ker\eta)_{\pi'}}$, мы убеждаемся в том, что
$$\Gamma = AB_{q_1}(\ker\eta)_{\pi'}.$$
Поэтому
$$\Gamma_1 = A(\ker\eta)_{\pi'}.$$

Из утверждений леммы 3.2 [1] следует, что характер θ_{Γ_1} неприводим и к нему применима теорема [13]. Так как подгруппа $(\ker\eta)_{\pi'}$ неразрешима, то выполняется только утверждение (2_{iii}) этой теоремы. По этому утверждению
$$(\ker\eta)_{\pi'} = \big(K_1 = ((\ker\eta)_{\pi'})_{\{2;3;5\}}\big) \times \big(K_2 = ((\ker\eta)_{\pi'})_{\{2;3;5\}'}\big)$$
и $K_2 \subseteq Z((\ker\eta)_{\pi'})$.

При этом или
$$(\ker\eta)_{\pi'}/Z((\ker\eta)_{\pi'}) \cong \prod_{a\in A}(PSL(2;5))^a$$
– прямое произведение факторгрупп и, следовательно, подгруппа $(\ker\eta)_{\pi'}$ является центральным произведением некоторых своих подгрупп, или $K_1 \subseteq C_{(\ker\eta)_{\pi'}}(A)$.

Допустим, что $K_2 \neq 1$. Тогда группа $\Gamma^{(1)} = AB_{q_1}K_2$ разрешима. Поскольку $|\pi| > 1$, то по лемме 2.9 [1]
$$B_{q_1}K_2 = F(B_{q_1}K_2)C_{B_{q_1}K_2}(A).$$

Пусть при этом $C_{B_{q_1}K_2}(A) \neq 1$. Поскольку подгруппа $F(B_{q_1}K_2)$ абелева, то
$$F(B_{q_1}K_2) = [F(B_{q_1}K_2),A] \times C_{F(B_{q_1}K_2)}(A)$$
и, нетрудно видеть, что
$$B_{q_1}K_2 = [F(B_{q_1}K_2),A]C_{B_{q_1}K_2}(A)$$
и
$$[F(B_{q_1}K_2),A] \cap C_{B_{q_1}K_2}(A) = 1.$$
Мы делаем вывод, что
$$\Gamma = A[F(B_{q_1}K_2),A]K_1C_{B_{q_1}K_2}(A)$$
и $\Gamma_1 = A[F(B_{q_1}K_2),A]K_1 \lhd \Gamma$. При этом $\Gamma_1 \neq \Gamma$. Как и ранее нетрудно убедиться в том, что характер $\widehat{\chi}_{\Gamma_1}$ неприводим и к нему и к группе Γ_1 можем применить индукцию. По ней
$$(\Gamma_1)_{\pi'} = (O_q((\Gamma_1)_{\pi'}))C_{(\Gamma_1)_{\pi'}}(A).$$
Следовательно, $B = O_q(B)C$, и мы придем к противоречию с выбором группы Γ.

Пусть теперь $C_{B_{q_1}K_2}(A) = 1$. Тогда подгруппа $B_{q_1}K_2$ абелева и, значит,
$$K_2 \subseteq Z(B = B_{q_1}K_1 \times K_2) = Z(\Gamma).$$
Поэтому $\Gamma = (\Gamma_1 = AB_{q_1}K_1) \times K_2$ и $\Gamma_1 \neq \Gamma$. Так как $A \ntriangleleft \Gamma_1$, ибо $A \ntriangleleft \Gamma$, то к группе Γ_1 и ее характеру $\widehat{\chi}_{\Gamma_1}$ можем также применить индукцию. Как и ранее придем к противоречию с выбором группы Γ.

Итак, $K_2 = 1$. Стало быть, $\Gamma = AB_{q_1}K_1$ т. е. в данном случае $\Gamma_1 = AK_1$ и
$$K_1/Z(K_1) \cong \prod_{a\in A}(PSL(2;5))^a,$$
ввиду того, что $K_1 \nsubseteq C$, ибо в противном случае $B_q \subseteq C$, что не так.

Мы видим, что $B_{q_1}Z(K_1) \lhd \Gamma$. Пусть $\psi \in \mathrm{Irr}\,(\widehat{\chi}_{AB_1Z(K_1)})$.

Покажем, что характер $\widehat{\chi}_{B_{q_1}Z(K_1)}$ содержит линейную компоненту.

Предположим, что $(\psi(1), p) \neq 1$ для некоторого такого характера ψ и для некоторого простого числа $p \in \pi$. Тогда $|A|$ делит $\psi(1)$ ввиду того, что A – TI-подгруппа в $AB_1Z(K_1)$. Так как $\widehat{\chi}(1) = 2|A| + 1$, то

$$\psi(1) \in \{|A|; 2|A|\}.$$

Если $\psi(1) = |A|$, то по теореме Клиффорда характер $\psi_{B_{q_1}Z(K_1)}$ разветвляется в сумму линейных компонент, каждая из которых является неприводимой компонентой характера $\widehat{\chi}_{B_{q_1}Z(K_1)}$.

Если $\psi(1) = 2|A|$, то характер $(\widehat{\chi} - \psi)_{B_{q_1}Z(K_1)}$ неприводим степени 1.

Так как характер $\widehat{\chi}_{B_{q_1}Z(K_1)}$ содержит линейную компоненту, то с помощью теоремы Клиффорда мы убеждаемся в том, что все неприводимые компоненты указанного характера линейные, и их ядра содержат $(B_{q_1}Z(K_1))'$, т. е. $(B_{q_1}Z(K_1))' \subseteq \ker\widehat{\chi} = 1$. Мы видим, что подгруппа $B_{q_1}Z(K_1)$ абелева. Следовательно, $Z(K_1) \subseteq I$ и поэтому $Z(K_1) \subseteq I \cap K_1$. Отсюда и из ранее сказанного вытекает, что $|K_1 : I \cap K_1|$ делит $|PSL(2;5)|$.

Так как $\Gamma = I\Gamma_1 = IK_1$, то мы получаем, что

$$\widehat{\chi}(1) = |\Gamma : I| = |IK_1 : I| = |K_1 : I \cap K_1| = q^{\alpha}.$$

Мы видим, что $q = 3$ или $q = 5$.

И так как среди всех примарных индексов подгрупп группы $PSL(2;5)$ существует только индекс равный 5, то мы видим, что $q = 5$. Поэтому $2|A| + 1 = 5^{\alpha}$. Отсюда следует, что $2|A| = 5^{\alpha} - 1$. Однако мы видим, что для любого натурального числа α число $5^{\alpha} - 1$ делится на 4. Левая же часть последнего равенства делится только на 2.

Указанный выше случай невозможен.

Следовательно, $(\psi(1), p) = 1$ для всех простых чисел $p \in \pi$ и для всех $\psi \in$ $\in \mathrm{Irr}\left(\widehat{\chi}_{B_{q_1}Z(K_1)}\right)$. Тогда характер $\psi_{B_{q_1}Z(K_1)}$ неприводим, и его степень равна q^{α_1}, $\alpha_1 \leqslant \alpha$.

Если $\alpha_1 \neq \alpha$, то $\psi(1) < |A| - 1$ для всех неприводимых компонент ψ характера $\widehat{\chi}_{AB_{q_1}Z(K_1)}$ и, значит, по лемме 2.10 [1] $A\ker\psi/\ker\psi \lhd AB_{q_1}Z(K_1)/\ker\psi$. Поскольку

$$\cap_{\psi} \in \mathrm{Irr}\,(\widehat{\chi}_{AB_{q_1}Z(K_1)}) = 1,$$

то мы получаем, что $A \lhd AB_{q_1}Z(K_1)$. Это означает, что $B_{q_1}Z(K_1) \subseteq C$. Так как $B_{q_1} \lhd \Gamma$ и $B_{q_1} \subseteq$ $\subseteq C$, то с помощью теоремы Клиффорда и леммы 2.7 мы заключаем, что $B_{q_1} \subseteq Z(B) = Z(\Gamma)$. Тогда $\Gamma = \Gamma_1 \times B_{q_1}$. Такой случай раасматривался ранее.

Если же $\alpha_1 = \alpha$, то $\psi = \widehat{\chi}_{AB_{q_1}Z(K_1)}$. Поскольку $A \ntriangleleft AB_{q_1}Z(K_1)$, в чем мы только что убедились и $|AB_{q_1}Z(K_1)| < |\Gamma|$, то мы сможем применить индукцию. По ней

$$B_{q_1}Z(K_1) = O_q(B_{q_1}Z(K_1))C_{B_{q_1}Z(K_1)}(A).$$

Мы вновь замечаем, что $B_{q_1} \subseteq C$. Этот случай невозможен.

Это последнее противоречие, которое доказывает лемму 3.14. $\square$

Литература

1. *Ядченко А. А.* О разрешимости и факторизации некоторых π-разрешимых неприводимых линейных групп примарной степени. Часть I // Тр. Ин-та математики. 2022. Т. 30, № 1–2. С. 84–98.

2. *Ядченко А. А.* О разрешимости и факторизации некоторых π-разрешимых неприводимых линейных групп примарной степени. Часть II // Тр. Ин-та математики. 2023. Т. 31, № 1. С. 77–89.

3. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Harper and Row,1968.
4. *Isaacs I. M.* Character theory of finite groups. New York: Academic Press, 1976.
5. *Ядченко А. А.* О П-разрешимых неприводимых линейных группах с холловой TI-подгруппой нечетного порядка. II // Тр. Ин-та математики. 2009. Т. 17, № 2. С. 94–104.
6. *Романовский А. В., Ядченко А. А.* О силовских подгруппах линейных групп // Математический сб. 1988. Т. 137(179), № 4(12). С. 568–573.
7. *Dixon J.* The structure of linear groups. L.: Butler and Tanner Ltd., 1971.
8. *Ядченко А. А.* О спектрах p-элементов конечных комплексных p-разрешимых линейных групп // Математические заметки. 1991. Т. 50, № 3. С. 143–151.
9. *Ядченко А. А.* О π-разрешимых неприводимых линейных группах схолловой TI-подгруппой нечетного порядка I // Тр. Ин-та математики. 2008. Т. 16, № 2. С. 118–130.
10. *Ядченко А. А.* О конечных π-разрешимых линейных группах // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Минск: Наука и техника, 1986. С. 181–207.
11. *Ядченко А. А.* Разрешимые неприводимые линейные группы произвольной степени с холловской TI-подгруппой // Математические заметки. 1990. Т. 48, № 2. С. 137–144.
12. *Ядченко А. А.* О факторизации некоторых π-разрешимых неприводимых линейных групп // Тр. Ин-та математики. 2019. Т. 27, № 1–2. С. 79–107.
13. *Ядченко А. А.* О нормальных подгруппах и факторизации некоторых π-разрешимых неприводимых линейных групп // Тр. Ин-та математики. 2021. Т. 29, № 1–2. С. 149–164.

A. A. Yadchenko

On the solvability and factorization of some π-solvable irreducible linear groups of primary degree. Part III

Summary

The article is the third one in a series of papers, where for a set π consisting of odd primes, finite π-solvable irreducible complex linear groups of degree $2|H|+1$ are investigated, for which Hall π-subgroups are TI-subgroups and are not normal in groups. The purpose of the series is to prove solvability and to determine the conditions for factorization of such groups. The proof of the theorem is continued. Further properties of the minimal counterexample to the theorem are established.