Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 2. С. 81–90

УДК 515.542

О СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ СИСТЕМАМИ УСЛОВНО ПОЛУНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

А. А. Трофимук

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина
e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com
Поступила 26.12.2023

Подгруппы A и B группы G называются cc-*перестановочными* в G, если A перестановочна с B^g для некоторого элемента $g \in \langle A,B\rangle$. Подгруппа A группы G называется *условно полунормальной* в G, если в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и A cc-перестановочна с каждой подгруппой из T. В настоящей работе доказана сверхразрешимость группы G, факторизуемой сверхразрешимыми условно полунормальными подгруппами A и B, в следующих случаях: коммутант G' нильпотентен; $(|A|,|B|) = 1$; G метанильпотентна и $(|G:A|,|G:B|) = 1$; G метанильпотентна и $(|A/A^{\mathfrak{N}}|,|B/B^{\mathfrak{N}}|) = 1$. Кроме того, установлена сверхразрешимость группы, у которой максимальные, силовские, максимальные из силовских, минимальные, 2-максимальные подгруппы являются условно полунормальными подгруппами.

Введение. Рассматриваются только конечные группы. Подгруппы A и B группы G называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Заметим, что равенство $AB = BA$ равносильно тому, что $AB \leqslant G$. Более слабое условие перестановочности было приведено в работе [1]: подгруппы A и B группы G называются cc-*перестановочными* в G, если A перестановочна с B^g для некоторого элемента $g \in \langle A,B\rangle$. При этом подгруппа A группы G называется cc-*перестановочной* в G, если A cc-перестановочна с каждой подгруппой из G.

Подгруппы A и B группы G называются *взаимно (тотально) перестановочными* [2], если $UB = BU$ и $AV = VA$ (соответственно $UV = VU$) для всех $U \leq A$ и $V \leq B$. Результаты, связанные со строением групп с заданными системами взаимно (тотально) перестановочных подгрупп, приведены в разделах 4–5 монографии [3].

Со времени выхода работы [2] теория произведений взаимно и тотально перестановочных подгрупп получила широкое развитие. Так, в работе [4] было введено понятие tcc-подгруппы: подгруппа A группы G называется tcc-*подгруппой* в G, если в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и подгруппы A и T тотально cc-перестановочны. Кроме того, в [4] исследованы группы с заданными системами tcc-подгрупп.

В работе [5, теорема C] доказано утверждение: *предположим, что $G = AB$, где A и B – сверхразрешимые подгруппы группы G. Пусть либо коммутант G' нильпотентен, либо* $(|A|,|B|) = 1$. *Если подгруппа A* cc-*перестановочна с каждой подгруппой из подгруппы B и подгруппа B* cc-*перестановочна с каждой подгруппой из подгруппы A, то G сверхразрешима.*

Подгруппы A и B, удовлетворяющие условию «подгруппа A cc-перестановочна с каждой подгруппой из подгруппы B и подгруппа B cc-перестановочна с каждой подгруппой из подгруппы A», можно кратко называть *взаимно* cc-*перестановочными подгруппами*.

Напомним, что подгруппа A называется *полунормальной* в группе G, если в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и A перестановочна с каждой подгруппой из T. В [6] исследованы группы, факторизуемые полунормальными подгруппами. Вполне естественно рассмотреть следующее

Определение. Подгруппа A группы G называется *условно полунормальной* подгруппой в G, если в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и A cc-перестановочна с каждой подгруппой из T.

Подгруппу T в дальнейшем будем называть *условным добавлением* к подгруппе A в группе G. Очевидно, что всякая tcc-подгруппа является условно полунормальной подгруппой. Обратное неверно. Примером является знакопеременная группа A_4, в которой силовская 2-подгруппа является условно полунормальной подгруппой, но не является tcc-подгруппой.

Если $G = AB$ – произведение взаимно cc-перестановочных подгрупп A и B, то A и B будут условно полунормальными подгруппами в группе G. Обратное неверно, см. [4, пример 1.1].

В настоящей работе доказана сверхразрешимость группы G, факторизуемой сверхразрешимыми условно полунормальными подгруппами A и B, в следующих случаях: коммутант G' нильпотентен; $(|A|,|B|) = 1$; G метанильпотентна и $(|G:A|,|G:B|) = 1$; G метанильпотентна и $(|A/A^{\mathfrak{N}}|,|B/B^{\mathfrak{N}}|) = 1$. Кроме того, установлена сверхразрешимость группы, у которой максимальные, силовские, максимальные из силовских, минимальные, 2-максимальные подгруппы являются условно полунормальными подгруппами.

1. Предварительные рассмотрения. Приведем известные результаты, которые неоднократно будут использоваться в доказательствах.

Используемая терминология соответствует [7; 8]. Запись $H \leq G$ означает, что H – подгруппа группы G. Если $H \leq G$ и $H \neq G$, то пишем $H < G$. Запись $H \trianglelefteq G$ означает, что H – нормальная подгруппа группы G. Через G', $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются коммутант, центр, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G соответственно; $\mathrm{O}_p(G)$ и $\mathrm{O}_{p'}(G)$ – наибольшие нормальные в G p- и p'-подгруппы соответственно; $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G. Элементарная абелева группа порядка p^t и циклическая группа порядка m обозначаются E_{p^t} и Z_m соответственно, а $A \rtimes B$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B.

Группа называется сверхразрешимой, если порядки ее главных факторов являются простыми числами. Через $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{N}$ обозначим класс всех сверхразрешимых и нильпотентных групп соответственно, а через $H^{\mathfrak{X}}$ – $\mathfrak{X}$-корадикал группы H, см. [7, с. 166]. Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется p-замкнутой, а группа с нормальной p'-холловой подгруппой называется p-нильпотентной.

Лемма 1.1 [9, лемма 6]. *Предположим, что разрешимая группа $G \notin \mathfrak{U}$, но факторгруппа $G/K \in \mathfrak{U}$ для каждой неединичной нормальной в G подгруппы K. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$Z(G) = \mathrm{O}_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$;*

(2) *группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N, $N = F(G) = \mathrm{O}_p(G) = C_G(N)$ для некоторого $p \in \pi(G)$;*

(3) *G – примитивная группа; $G = N \rtimes M$, где M – максимальная подгруппа в группе G с единичным ядром;*

(4) *N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n, $n > 1$;*

(5) *если подгруппа M абелева, то M циклическая порядка, делящего $p^n - 1$, а n – наименьшее натуральное число такое, что $p^n \equiv 1 \pmod{|M|}$.*

Лемма 1.2 [8, VI.9]. (1) *Класс $\mathfrak{U}$ – наследственная насыщенная формация.*

(2) *Каждая минимальная нормальная подгруппа сверхразрешимой группы имеет простой порядок.*

(3) *Пусть N – нормальная в G подгруппа и G/N сверхразрешима. Если N либо циклическая, либо $N \leq Z(G)$, либо $N \leq \Phi(G)$, то G сверхразрешима.*

(4) *Каждая сверхразрешимая группа G p-замкнута для наибольшего $p \in \pi(G)$ и q-нильпотентна для наименьшего $q \in \pi(G)$.*

(5) *Коммутант сверхразрешимой группы нильпотентен.*

(6) *Группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая ее максимальная подгруппа имеет простой индекс.*

Лемма 1.3 [8, с. 721; 10]. *Пусть G – минимальная несверхразрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *G разрешима и $|\pi(G)| \leq 3$;*

(2) *G имеет единственную нормальную силовскую подгруппу P и $P = G^{\mathfrak{U}}$. Кроме того, P имеет экспоненту p, если $p \neq 2$, и экспоненту 2 или 4, если $p = 2$;*

(3) *$P/\Phi(P)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G/\Phi(P)$ и $|P/\Phi(P)| > p$;*

(4) *если Q – дополнение к P в G, то $Q/Q \cap \Phi(G)$ – либо примарная циклическая группа, либо минимальная неабелева группа;*

(5) *если $|\pi(Q)| = 2$, то Q – нециклическая группа с циклическими силовскими подгруппами.*

(6) *если G не является группой Шмидта, то G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа.*

2. Свойства условно полунормальных подгрупп.

Лемма 2.1. *Пусть A – условно полунормальная подгруппа группы G и Y – условное добавление к A в G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *A – условно полунормальная подгруппа в H для каждой подгруппы H группы G такой, что $A \leq H$;*

(2) *AN/N – условно полунормальная подгруппа в G/N для каждой $N \trianglelefteq G$;*

(3) *для каждой $X \leqslant Y$ существует $y \in Y$ такой, что $AX^y \leqslant G$. В частности, $AM \leqslant G$ для некоторой максимальной подгруппы M группы Y и $AH \leqslant G$ для некоторой π-холловой подгруппы H разрешимой группы Y и любого $\pi \subseteq \pi(G)$;*

(4) *$AK \leqslant G$ для каждой субнормальной подгруппы K в Y;*

(5) *$AK^g \leqslant G$ для любого $g \in G$ и любой субнормальной подгруппы K из Y;*

(6) *A^x – условно полунормальная подгруппа группы G и Y^x – условное добавление к A^x в G для любого $x \in G$;*

(7) *если A – максимальная подгруппа, то $|G:A|$ – простое число;*

(8) *если Y разрешима и A r-замкнута, r – наибольшее простое число из $\pi(G)$, то ее силовская r-подгруппа A_r субнормальна в G.*

Доказательство. 1. Так как Y – условное добавление к A в G, то $G = AY$. По тождеству Дедекинда $H = H \cap AY = A(H \cap Y)$. Так как $H \cap Y \leqslant Y$, то для любого $Z \leq H \cap Y$ существует элемент $u \in \langle A, Z \rangle$ такой, что $AZ^u \leqslant G$. Поэтому A – условно полунормальная подгруппа в H.

2. Так как $G = AY$, то $G/N = (AN/N)(YN/N)$. Пусть X/N – произвольная подгруппа в YN/N. Так как $N \leqslant X \leqslant YN$. То по тождеству Дедекинда $X = X \cap YN = (X \cap Y)N$. Так как $X \cap Y \leqslant Y$, то $A(X \cap Y)^u \leqslant G$ для некоторого $u \in \langle A, X \cap Y \rangle$. Поэтому

$$(AN/N)(X/N)^{uN} = A(X \cap Y)^u N/N \leqslant G/N$$

для $uN \in \langle A, X \cap Y \rangle N/N \subseteq \langle A, X \rangle N/N = \langle AN/N, X/N \rangle$. Значит, AN/N – условно полунормальная подгруппа в G/N.

3. Так как A – условно полунормальная подгруппа группы G, то по определению для каждой $X \leqslant Y$ существует $u \in \langle A, X \rangle$ такой, что $AX^u \leqslant G$. Так как $u \in G = AY = YA$, то $u = ya$ для некоторых $y \in Y$ и $a \in A$. Тогда

$$AX^u = AX^{ya} = A(X^y)^a = A^a(X^y)^a = (AX^y)^a \leqslant G.$$

Поэтому существует подгруппа AX^y в группе G для некоторого $y \in Y$. Очевидно, что если X – π-холлова подгруппа разрешимой группы Y, то $H = X^y$ – π-холлова подгруппа из Y. Поэтому $AH \leqslant G$. Аналогично и в случае, когда X – максимальная подгруппа группы Y. Тогда $M = X^y$ – максимальная подгруппа группы Y и $AM \leqslant G$.

4. Поскольку K субнормальная подгруппа в Y, то существует цепь подгрупп

$$Y = K_0 \geqslant K_1 \geqslant \ldots \geqslant K_{n-1} \geqslant K_n = K,$$

в которой подгруппа K_{i+1} нормальна в K_i для всех i. Применим индукцию по n. По п. (3) существует $y \in Y$ такой, что $AK_1^y = AK_1 \leqslant G$. Поэтому утверждение справедливо для $n = 0$ и $n = 1$. Значит, $n \geqslant 2$. Согласно п. (1) A – условно полунормальная подгруппа в AK_1 и K_1 – условное добавление к A в AK_1. Так как длина субнормальной цепи между K и K_1 меньше, чем n, то по индукции в группе AK_1 существует подгруппа AK, а следовательно, $AK \leqslant G$.

5. Так $g \in G = AY = YA$, то $g = ya$ для некоторых $y \in Y$ и $a \in A$. Тогда

$$AK^g = AK^{ya} = A(K^y)^a = (AK^y)^a.$$

Так как K субнормальна в Y, то K^y субнормальна в Y. По п. (4) $AK^y \leqslant G$. Значит, $AK^g \leqslant G$.

6. Так как $AY = G$, то $A^xY^x = G$. Пусть $L \leq Y^x$. Тогда $L^{x^{-1}} \leq Y$ и существует $u \in \langle A, L^{x^{-1}} \rangle$ такой, что $A(L^{x^{-1}})^u \leqslant G$. Так как $\langle A, L^{x^{-1}} \rangle = \langle A^x, L \rangle^{x^{-1}}$, то существует $v \in \langle A^x, L \rangle$ такой, что $u = v^{x^{-1}}$.

Поскольку $x^{-1}u = vx^{-1}$, то

$$A(L^{x^{-1}})^u = AL^{vx^{-1}} = (A^xL^v)^{x^{-1}}.$$

Поэтому $A^xL^v \leqslant G$. Следовательно, A^x – условно полунормальная подгруппа группы G и Y^x – ее условное добавление к A^x в G.

7. Из п. (3) следует, что $AY_p \leqslant G$ для некоторой силовской p-подгруппы Y_p группы Y. Поскольку A – максимальная подгруппа группы G, то либо $AY_p = A$, либо $AY_p = G$. Если $AY_p = A$ для всех $p \in \pi(Y)$, то $Y \leqslant A$ и $G = AY = A$, противоречие. Значит, существует простое $q \in \pi(Y)$ такое, что $AY_q = G$ и Y_q – условное добавление к A в G. Из п. (4) можно считать, что Y_q – минимальное условное добавление к A в G. По п. (3) $AS < G$ и $|G : AS| = q$ для некоторой максимальной подгруппы S из Y_q. Так как A – максимальная подгруппа группы G, то $|G : A| = |G : AS| = q$.

8. Применим индукцию по порядку группы G. По п. (3) $AY_1 \leqslant G$ для некоторой r'-холловой подгруппы Y_1 группы Y. Если $AY_1 < G$, то по п. (1) A – условно полунормальная подгруппа в AY_1 и по индукции A_r субнормальна в AY_1. Кроме того, A_r субнормальна в некоторой силовской r-подгруппе G_r группы G. Пусть $Y_r \leqslant R$, где R – силовская r-подгруппа группы G и $R^g = G_r$ для некоторого $g \in G$. По [11, теорема 1] A_r субнормальна в

$$G = AY = AY_1Y_r = (AY_1)Y_r^g = (AY_1)G_r.$$

Поэтому будем считать, что $G = AY_1$. По п. (3) $AQ \leqslant G$ для некоторой силовской q-подгруппы Q из Y_1. Если $AQ < G$, то A – условно полунормальная подгруппа в AQ и по индукции A_r субнормальна в AQ. Поэтому A_r нормальна в AQ и $Q \leqslant N_G(A_r)$. Так как это верно для любого $q \in \pi(Y_1)$, то A_r нормальна в $G = AY_1$.

Поэтому $G = AQ$. По п. (4) Q – минимальное условное добавление к A в G. По п. (3) $AM < G$ для некоторой максимальной подгруппы M из Q. Так как A – условно полунормальная подгруппа в AM, то по индукции A_r субнормальна в AM, а следовательно, A_r нормальна в AM. Поскольку $|G : AM| = q$, то $G/(AM)_G$ изоморфна подгруппе группы S_q. Поэтому $G_r \leqslant (AM)_G \leqslant AM$ и $A_r = G_r$ субнормальна в G. □

Лемма 2.2. *Пусть G разрешима и $G = AB$ – произведение условно полунормальных подгрупп A и B. Если силовская p-подгруппа P группы G нормальна в G и абелева, то $P \cap A$ и $P \cap B$ нормальны в G.*

Доказательство. Так как A – условно полунормальная подгруппа в G, то существует подгруппа H такая, что $AH = G$. Тогда по лемме 2.1 (3) $AH_{p'}$ – подгруппа группы G для некоторой холловой p'-подгруппы $H_{p'}$ в H. Очевидно, что $P \cap A$ – силовская p-подгруппа в A. Обозначим $A_p = P \cap A$. Поэтому $P \cap AH_{p'} = A_p$ и A_p нормальна в $AH_{p'}$. Значит, $H_{p'} \leqslant N_G(A_p)$. Пусть H_p – силовская p-подгруппа в H. Так как H_p и A_p содержатся в абелевой подгруппе P, то $H_p \leqslant C_G(A_p)$. Значит, $A_p = P \cap A$ нормальна в

$$G = AH = AH_pH_{p'}.$$

Аналогично доказывается, что $P \cap B$ нормальна в G. □

3. Группы, факторизуемые условно полунормальными подгруппами.

Теорема 3.1. *Пусть A и B – сверхразрешимые условно полунормальные подгруппы группы G и $G = AB$. Тогда G сверхразрешима в следующих случаях:*

(1) *коммутант G' нильпотентен;*

(2) $(|A|, |B|) = 1$.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть N – неединичная нормальная в G подгруппа. Факторгруппа

$$G/N = (AN/N)(BN/N), \;\; AN/N \simeq A/A \cap N, \;\; BN/N \simeq B/B \cap N,$$

поэтому подгруппы AN/N и BN/N сверхразрешимы, а по лемме 2.1 (2) они являются условно полунормальными подгруппами в G/N.

1. Так как

$$(G/N)' = G'N/N \simeq G'/G' \cap N,$$

то коммутант $(G/N)'$ нильпотентен. Следовательно, факторгруппа G/N удовлетворяет всем требованиям теоремы и G/N сверхразрешима по выбору группы G.

Из леммы 1.1 получаем, что группа G примитивна, в G существует минимальная нормальная подгруппа N такая, что $N = C_G(N) = O_p(G) = F(G)$ для некоторого $p \in \pi(G)$, N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n, $n > 1$. Теперь $N \leq G'$, коммутант G' – p-подгруппа и $N = G'$. Так как G/N абелева и $O_p(G/N) = 1$, то N – силовская p-подгруппа группы G.

Предположим, что $AN = G$. Тогда $A \cap N = 1$, A – максимальная в G подгруппа. По условию A – условно полунормальная подгруппа в G. По лемме 2.1 (7) $|G : A| = p$. Поэтому $|N| = p$, противоречие. Значит, предположение неверно и $AN < G$. Аналогично, $BN < G$.

По лемме 2.1 (1) подгруппа A является условно полунормальной подгруппой в AN и сверхразрешима по условию. Так как N нормальна в AN, то N – условно полунормальная подгруппа в AN. Кроме того, N абелева. Поскольку $(AN)' \leq G'$, то коммутант $(AN)'$ нильпотентен. По индукции подгруппа AN сверхразрешима. Аналогично, BN сверхразрешима. Теперь группа $G = (AN)(BN)$ является произведением нормальных сверхразрешимых подгрупп AN и BN и ее коммутант G' нильпотентен. По теореме Бэра [12] группа G сверхразрешима.

2. Так как

$$(|AN/N|, |BN/N|) = (|A/A \cap N|, |B/B \cap N|) = 1,$$

то факторгруппа G/N удовлетворяет всем требованиям теоремы и G/N сверхразрешима по выбору группы G.

Пусть p – наибольшее простое из $\pi(G)$. Так как $(|A|,|B|)=1$, то будем считать, что $p\in\pi(A)$. Пусть Y – условное добавление к A в G. По лемме 2.1 (3) для каждого $q\in\pi(Y)$ существует силовская q-подгруппа Y_q из Y такая, что $AY_q\leqslant G$. Если $q\neq p$, то по лемме 2.1 (8) A_p субнормальна в AY_q, а следовательно, A_p нормальна в AY_q и $Y_q\leqslant N_G(A_p)$. Пусть $q=p$ и $\pi=\pi(A)$. Так как A – π-холлова подгруппа, то $AY_p=A$ и $Y_p\leqslant A$. Поэтому $Y_p\leqslant N_G(A_p)$. Тогда A_p нормальна в $G=AY$, поскольку $Y_q\leqslant N_G(A_p)$ для любого $q\in\pi(Y)$. Очевидно, что A_p силовская p-подгруппа в G. Пусть $P=A_p$. Тогда G разрешима, так как G/P сверхразрешима.

Из леммы 1.1 получаем, что группа G примитивна, в G существует минимальная нормальная подгруппа N такая, что $N=C_G(N)=O_p(G)=F(G)=P$ для наибольшего $p\in\pi(G)$, N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n, $n>1$.

Так как $(|A|,|B|)=1$, то $N\leqslant A$ и B – p'-группа. Так как B – условно полунормальная подгруппа в G, то $G=BH$, где H – условное добавление к B в G и $N\leqslant H$. Пусть N_1 – минимальная нормальная подгруппа в A такая, что $N_1\leqslant N$. По лемме 1.2 (2) $|N_1|=p$. Так как N_1 субнормальна в H, то по лемме 2.1 (4) $BN_1\leqslant G$. Так как G p-замкнута, то $B\leqslant N_G(N_1)$. Поэтому N_1 нормальна в $G=AB$, противоречие. □

Следствие 3.1 [5, теорема C]. *Пусть $G=AB$ – произведение взаимно* cc*-перестановочных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если либо коммутант G' нильпотентен, либо $(|A|,|B|)=1$, то G сверхразрешима.*

Теорема 3.2. *Пусть A и B – сверхразрешимые условно полунормальные подгруппы метанильпотентной группы G и $G=AB$. Тогда G сверхразрешима в следующих случаях:*

(1) $(|G:A|,|G:B|)=1$;

(2) $(|A/A^{\mathfrak{N}}|,|B/B^{\mathfrak{N}}|)=1$.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть N – нееденичная нормальная в G подгруппа. Факторгруппа

$$G/N=(AN/N)(BN/N),\ \ AN/N\simeq A/A\cap N,\ \ BN/N\simeq B/B\cap N,$$

поэтому подгруппы AN/N и BN/N сверхразрешимы, а по лемме 2.1 (2) они являются условно полунормальными подгруппами в G/N.

Так как по условию A и B – сверхразрешимые условно полунормальные подгруппы метанильпотентной группы G, то по лемме 2.1 (8) A_p и B_p субнормальны в G для наибольшего простого числа p из $\pi(G)$.

Так как $P=A_pB_p$ является силовской p-подгруппой группы G, то G p-замкнута.

1. Так как

$$(|G/N:AN/N|,|G/N:BN/N|)=(|G:AN|,|G:BN|)=$$
$$=\left(\frac{|G:A|}{|N:A\cap N|},\frac{|G:B|}{|N:B\cap N|}\right),$$

то $(|G/N:AN/N|,|G/N:BN/N|)=1$, поскольку $(|G:A|,|G:B|)=1$. Факторгруппа

$$G/N=(AN/N)(BN/N)$$

сверхразрешима по выбору группы G.

Из леммы 1.1 получаем, что группа G примитивна, в G существует минимальная нормальная подгруппа N такая, что $N=C_G(N)=O_p(G)=F(G)=P$ для наибольшего $p\in\pi(G)$, N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n, $n>1$.

Применяя рассуждения как в теореме 1.1 (1), будем считать, что AN и BN – собственные подгруппы группы G. Подгруппы A и N – условно полунормальные подгруппы в AN и сверхразрешимы, $(|AN:A|,|AN:N|)=1$. Поскольку AN метанильпотентна, то по индукции подгруппа AN сверхразрешима. Аналогично, BN сверхразрешима. Так как G/N нильпотентна, то AN и BN субнормальны в G. Теперь группа $G=(AN)(BN)$ является произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп AN и BN взаимно простых индексов. Согласно [9, следствие 3.1] группа G сверхразрешима.

2. Из [7, лемма 5.8] следует, что

$$(|(AN/N)/(AN/N)^{\mathfrak{N}}|, |(BN/N)/(BN/N)^{\mathfrak{N}}|) =$$
$$= (|AN/(AN)^{\mathfrak{N}}N|, |BN/(BN)^{\mathfrak{N}}N|) =$$
$$= (|AN/A^{\mathfrak{N}}N|, |BN/B^{\mathfrak{N}}N|) = \left(\frac{|A/A^{\mathfrak{N}}|}{|S_1|}, \frac{|B/B^{\mathfrak{N}}|}{|S_2|}\right),$$
$$S_1 = (A \cap N)/(A^{\mathfrak{N}} \cap N),\ S_2 = (B \cap N)/(B^{\mathfrak{N}} \cap N).$$

Так как $(|A/A^{\mathfrak{N}}|, |B/B^{\mathfrak{N}}|) = 1$, то

$$(|(AN/N)/(AN/N)^{\mathfrak{N}}|, |(BN/N)/(BN/N)^{\mathfrak{N}}|) = 1.$$

Факторгруппа $G/N = (AN/N)(BN/N)$ сверхразрешима по выбору группы G.

Из леммы 1.1 следует, что $F(G) = N = C_G(N) = P$ – единственная минимальная нормальная в G подгруппа, $G = N \rtimes M$ и N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n, $n > 1$. Очевидно, что M – p'-холлова подгруппа в M и M нильпотентна. Так как $G = AB$, то $M = A_{p'}B_{p'}$, где $A_{p'}$ и $B_{p'}$ – p'-холловы подгруппы из A и B соответственно.

Если $p \in \pi(A) \cap \pi(B)$, то по лемме 2.2 $P \cap A$ и $P \cap B$ нормальны в G. Поэтому $P \leqslant \leqslant A \cap B$. Так как $O_{p'}(A) = 1$, то по [9, лемма 2] $A_{p'}$ – абелева подгруппа экспоненты, делящей $p-1$. Аналогично, $B_{p'}$ – абелева подгруппа экспоненты, делящей $p-1$. Поскольку A/P нильпотентна, то $(A/P)^{\mathfrak{N}} = A^{\mathfrak{N}}P/P = 1$ и $A^{\mathfrak{N}} \leqslant P$. Аналогично, $B^{\mathfrak{N}} \leqslant P$. Так как $(|A/A^{\mathfrak{N}}|, |B/B^{\mathfrak{N}}|) = 1$, то $(|A_{p'}|, |B_{p'}|) = 1$ и $M = A_{p'} \times B_{p'}$. Поэтому M абелева подгруппа экспоненты, делящей $p-1$. По лемме 1.1 (5) M – циклическая порядка, делящего $p-1$ и $|N| = p$, противоречие.

Пусть $p \notin \pi(B)$. Тогда $B^{\mathfrak{N}} = 1$. Значит, $(|A/A^{\mathfrak{N}}|, |B|) = 1$ и $(|A|, |B|) = 1$, поскольку $A^{\mathfrak{N}}$ – p-подгруппа. По теореме 1.1 (2) G сверхразрешима. □

Пример 3.1. Несверхразрешимая группа $G = E_{7^2} \rtimes S_3$, ([13], IdGroup=[294,7]), факторизуется сверхразрешимыми условно полунормальными подгруппами $A \simeq Z_7 \times D_{14}$ и $B \simeq E_{7^2} \rtimes Z_3$ такими, что $(|G:A|, |G:B|) = 1$ и $(|A/A^{\mathfrak{N}}|, |B/B^{\mathfrak{N}}|) = 1$, так как $A^{\mathfrak{N}} \simeq Z_7$ и $B^{\mathfrak{N}} \simeq E_{7^2}$. Поэтому условие метанильпотентности группы G в теореме 3.2 убрать нельзя.

4. Группы, с заданными системами условно полунормальных подгрупп.

Теорема 4.1. *Пусть G – группа. Тогда G сверхразрешима в каждом из следующих случаев:*

(1) *в группе G все максимальные подгруппы являются условно полунормальными подгруппами;*

(2) *в группе G все силовские подгруппы являются условно полунормальными подгруппами;*

(3) *каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из нормальной подгруппы H группы G является условно полунормальной подгруппой в G и G/H сверхразрешима;*

(4) *в группе G все 2-максимальные подгруппы являются условно полунормальными подгруппами;*

(5) *в разрешимой группе G все максимальные подгруппы из каждой нециклической силовской подгруппы являются условно полунормальными подгруппами в G.*

Доказательство. 1. Пусть M – произвольная максимальная подгруппа группы G. По лемме 2.1 (7) $|G:M|$ – простое число. По лемме 1.2 (6) G сверхразрешима.

2. Покажем, что группа G разрешима. Пусть R – силовская r-подгруппа группы G. Тогда R является условно полунормальной подгруппой. Пусть T – условное добавление к R

в группе G. По лемме 2.1 (3) $RQ \leqslant G$ для некоторой силовской q-подгруппы Q группы T, где q – произвольное простое число из $\pi(T) \setminus \{r\}$. Подгруппа RQ является $\{r,q\}$-холловой подгруппой группы G. По [14, теорема 2] G r-разрешима при $r \neq 3$. Пусть t – наименьшее из $\pi(G)$. Если $t > 2$, то G разрешима. Если $t = 2$, то по доказанному G t-разрешима, а, значит, разрешима.

Покажем, что группа G сверхразрешима. Предположим, что G – контрпример минимального порядка. Пусть N – произвольная неединичная нормальная подгруппа группы G и RN/N – силовская r-подгруппа группы G/N. По лемме 2.1 (2) RN/N является условно полунормальной подгруппой группы G/N. Тогда G/N сверхразрешима по выбору группы G.

Пусть P – силовская p-подгруппа группы G, где p – наибольшее из $\pi(G)$. По лемме 2.1 (8) P субнормальна в G, а следовательно, нормальна в G. По лемме 1.1 группа G примитивна, в G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N такая, что $N = C_G(N) = O_p(G) = F(G) = P$, N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n, $n > 1$.

Пусть Q – силовская q-подгруппа из G, $q \neq p$. По условию Q – условно полунормальная подгруппа в G и T – условное добавление к подгруппе Q в G. Очевидно, что $P \leqslant T$. Пусть $P_1 \leqslant P$ такая, что $|P_1| = p$. Тогда по лемме 2.1 (4) $QP_1 \leqslant G$, поскольку P_1 субнормальна в T. Так как G p-замкнута, то $Q \leqslant N_G(P_1)$. Поскольку это включение справедливо для любого $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$, то P_1 нормальна в G, противоречие.

3. Предположим, что утверждение неверно и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть K – собственная подгруппа из G. Очевидно, что

$$K \cap H \trianglelefteq K \text{ и } K/K \cap H \simeq KH/H$$

сверхразрешима. По лемме 2.1 (1) каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из $K \cap H$ является условно полунормальной подгруппой в K. Тогда по выбору группы G подгруппа K сверхразрешима и поэтому G – минимальная несверхразрешимая группа. Кроме того, H также сверхразрешима. Пусть q – наибольшее простое число из $\pi(H)$. Тогда по лемме 1.2 (4) силовская q-подгруппа Q из H нормальна в H и, следовательно, Q нормальна в G. Пусть $\overline{Q_1} = Q_1/Q$ циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 из H/Q. Тогда

$$\overline{Q_1} = \langle xQ \rangle = \langle x \rangle Q/Q \simeq \langle x \rangle / \langle x \rangle \cap Q \simeq \langle x \rangle,$$

поскольку $x \notin Q$. Так как $x \in H$, то по лемме 2.1 (2) $\overline{Q_1}$ – условно полунормальная подгруппа в G/Q. Поскольку $(G/Q)/(H/Q)$ сверхразрешима, то по индукции G/Q сверхразрешима.

По лемме 1.3 G разрешима, в G существует единственная нормальная силовская p-подгруппа P и $P = G^{\mathfrak{U}}$, $\overline{P} = P/\Phi(P)$ – минимальная нормальная подгруппа в $\overline{G} = G/\Phi(P)$ и $|P/\Phi(P)| > p$. Кроме того, P имеет экспоненту p, если $p \neq 2$, и экспоненту 2 или 4, если $p = 2$.

Если $p \neq q$, то $G \simeq G/Q \cap P$ сверхразрешима по лемме 1.2 (1), поскольку G/Q и G/P сверхразрешимы. Поэтому $p = q$ и $Q \leqslant P$. Так как $Q\Phi(P)/\Phi(P) \leqslant \overline{P}$ и $\overline{P}$ – минимальная нормальная подгруппа в $\overline{G}$, то $Q \leqslant \Phi(P)$ или $Q\Phi(P) = P$. Если $Q \leqslant \Phi(P)$, то G сверхразрешима по лемме 1.2 (3), поскольку $Q \leqslant \Phi(G)$ и G/Q сверхразрешима, противоречие. Если $Q\Phi(P) = P$, то $Q = P$.

Предположим, что $p = 2$. Пусть $x \in P$ и $P_1 = \langle x \rangle$. Тогда $|P_1| = 2$ или $|P_1| = 4$. По условию P_1 – условно полунормальная подгруппа в G. По лемме 2.1 (3) существует в G холлова $2'$-подгруппа S такая, что $P_1 S \leqslant G$. По [8, IV.2.8] $P_1 \leqslant N_G(S)$, а следовательно, $P \leqslant N_G(S)$ и S нормальна в G, противоречие.

В дальнейшем будем считать, что $p > 2$. Пусть $\overline{K} = K/\Phi(P)$ – подгруппа порядка p в $\overline{P}$. Тогда

$$\overline{K} = \langle x\Phi(P) \rangle = \langle x \rangle \Phi(P)/\Phi(P).$$

Так как $x \in P$, то $|\langle x\rangle| = p$ и поэтому из леммы 2.1 (2) следует, что $\overline{K}$ – условно полунормальная подгруппа в $\overline{G}$ и $\overline{T} = T/\Phi(P)$ – условное добавление к $\overline{K}$ в $\overline{G}$. Поэтому по лемме 2.1 (3) для каждого $r \in \pi(\overline{T})$, $r \neq p$, существует силовская r-подгруппа $\overline{R}$ в $\overline{T}$ такая, что $\overline{KR} \leqslant \overline{G}$. Ясно, что $\overline{R}$ – силовская r-подгруппа в $\overline{G}$. Подгруппа

$$\overline{P} \cap \overline{KR} = \overline{K}(\overline{P} \cap \overline{R}) = \overline{K}$$

нормальна в $\overline{KR}$ и $\overline{R} \leqslant N_{\overline{G}}(\overline{K})$. Так как $\overline{P}$ абелева, то $\overline{K}$ нормальна в $\overline{G}$. Значит, $\overline{K} = \overline{P}$, противоречие.

4. Предположим, что утверждение неверно и пусть G – контрпример минимального порядка. По лемме 2.1 (1) и по п. (1) каждая максимальная подгруппа M будет сверхразрешимой. Поэтому G – минимальная несверхразрешимая группа и применима лемма 1.3. Тогда группа G разрешима, $|\pi(G)| \leqslant 3$ и имеет единственную нормальную силовскую подгруппу $P = G^{\mathfrak{U}}$. Очевидно, что $\Phi(G) = 1$. Поэтому P – минимальная нормальная подгруппа порядка p^n, $n > 1$, и $G = P \rtimes M$, где M – некоторая максимальная подгруппа группы G. Поскольку условие теоремы наследуют все факторгруппы, то P – единственная минимальная нормальная подгруппа в G.

Если $|\pi(G)| = 3$, то G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа и $M = [T]R$, где $|T| = t$, $|R| = r$, $t, r \in \pi(G)$. Подгруппы T и R являются 2-максимальными подгруппами группы G. Тогда по условию $TY_1 = G = RY_2$, где Y_1 и Y_2 – их условные добавления в G. Кроме того, $P \leqslant Y_1$ и $P \leqslant Y_2$. Пусть P_1 – минимальная нормальная подгруппа в P. Тогда по лемме 2.1 (4) $T \leqslant N_G(P_1)$ и $R \leqslant N_G(P_1)$. Тогда P_1 нормальна в $G = PM = PTR$, противоречие.

Таким образом, $|\pi(G)| = 2$. Тогда M – q-группа. Если $|M| > q$, то существует в M максимальная подгруппа M_1 такая, что $M_1 \neq 1$. Подгруппа M_1 является 2-максимальной подгруппой группы G. Тогда по условию $M_1Y = G$, где Y – ее условное добавление в G. Очевидно, что $P \leqslant Y$. Если Y – собственная подгруппа в G, то Y сверхразрешима. Пусть P_1 – минимальная нормальная подгруппа в Y такая, что $P_1 \leqslant P$. Тогда по лемме 2.1 (4) $M_1P_1 \leqslant G$ и $M_1 \leqslant N_G(P_1)$. Поэтому P_1 нормальна в $G = M_1Y$, противоречие.

Поэтому будем считать, что $Y = G$. Пусть R – максимальная подгруппа из P. Тогда по лемме 2.1 (4) $T = M_1R \leqslant G$. Очевидно, что $|G : T| = pq$ и T является 2-максимальной подгруппой группы G. Тогда по условию $TX = G$, где X – ее условное добавление в G. По лемме 2.1 (3) существует силовская q-подгруппа Q в X такая, что $L = TQ \leqslant G$. Очевидно, что $|G : L| = p$ и L – максимальная подгруппа в G. Так как $P \nleqslant L$, то $L_G = 1$. Тогда по [7, теорема 4.43] $M = L^g$ для некоторого $g \in G$. Поскольку $R^g \leqslant L^g \cap P^g = M \cap P = 1$, то $R = 1$ и $|P| = p$, противоречие.

Значит, $|M| = q$ и P – максимальная подгруппа в G. Пусть P_1 – максимальная подгруппа в P. Тогда по условию $P_1K = G$, где K – условное добавление к P_1 в G. По лемме 2.1 (3) в подгруппе K существует силовская q-подгруппа K_1 такая, что $P_1K_1 \leqslant G$ и $K_1 \leqslant N_G(P_1)$. Поэтому P_1 нормальна в $G = P_1K = PK_1$. Поэтому $|P| = p$, противоречие.

5. Пусть P – силовская p-подгруппа группы G. Если P циклическая, то G p-сверхразрешима. Пусть P нециклическая. Тогда по лемме 2.1 (3) для каждой максимальной подгруппы P_i из P и каждого $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$ существует силовская q-подгруппа Q в G такая, что $P_iQ \leqslant G$. По [15, теорема 3.4] G p-сверхразрешима. Так как это справедливо для любого $p \in \pi(G)$, то G сверхразрешима. □

Следствие 4.1 [1, теорема 3.10 (a, c)]. *Пусть G – группа. Тогда группа G сверхразрешима в каждом из следующих случаев:*

(1) *в группе G все* 2*-максимальные подгруппы* cc*-перестановочны в G;*

(2) *каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка* 4 *из G является* cc*-перестановочной в G.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф23РНФ-237).

Литература

1. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* Conditionally permutable subgroups and supersolubility of finite groups // Southeast Asian Bull. Math. 2005. Vol. 29. P. 493–510.

2. *Asaad M., Shaalan A.* On the supersolubility of finite groups // Arch. Math. 1989. Vol. 53. P. 318–326.

3. *Ballester-Bolinches A., Estaban-Romero R., Asaad M.* Products of finite groups. Berlin: Walter de Gruyter, 2010.

4. *Trofimuk A. A.* On the supersol4ubility of a group with some tcc-subgroups // J. Algebra Appl. 2021. Vol. 20, N 2. P. 2150020-1–2150020-18.

5. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups // Publ. Math. Debrecen. 2006. Vol. 68, N 3–4. P. 433–449.

6. *Монахов В. С., Трофимук А. А.* О сверхразрешимости группы с полунормальными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2020. Vol. 61, № 1. С. 148–159.

7. *Монахов В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006.

8. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1967.

9. *Монахов В. С., Чирик И. К.* О сверхразрешимом корадикале произведения субнормальных сверхразрешимых подгрупп // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 353–364.

10. *Doerk K.* Minimal nichtüberauflösbare, endliche gruppen // Math. Zeitschrift. 1966. Vol. 91. P. 198–205.

11. *Wielandt H.* Subnormalität in faktorisierten endlichen Gruppen // J. Algebra. 1981. Vol. 69, N 2. P. 305–311.

12. *Baer R.* Supersoluble immersion // Can. J. Math. 1959. Vol. 11. P. 353–369.

13. A system for computational discrete algebra GAP 4.12.2 [Electronic resource]. – Mode of access: https://www.gap-system.org. – Date of access: 22.09.2023.

14. *Tyutyanov V. N., Kniahina V. N.* 14 Finite groups with biprimary Hall subgroups // J. Algebra. 2015. Vol. 443. P. 430–440.

15. *Monakhov V. S., Trofimuk A. A.* On the supersolubility of a finite group with NS-supplemented subgroups // Acta Math. Hungar. 2020. Vol. 160, N 1. P. 161–167.

A. A. Trofimuk

On the supersolubility of a group with given systems of conditionally seminormal subgroups

Summary

The subgroups A and B are said to be cc-*permutable*, if A is permutable with B^x for some $x \in \langle A, B\rangle$. A subgroup A of a finite group G is called *conditionally seminormal subgroup* in G, if there exists a subgroup T of G such that $G = AT$ and A is cc-permutable with all subgroups of T. In this paper, we proved the supersolubility of a group $G = AB$, where A and B are supersoluble conditionally seminormal subgroups in G, in the following cases: the derived subgroup G' is nilpotent; $(|A|, |B|) = 1$; G is metanilpotent and $(|G : A|, |G : B|) = 1$; G is metanilpotent and $(|A/A^{\mathfrak{N}}|, |B/B^{\mathfrak{N}}|) = 1$. Besides, we obtained the supersolubility of a group in which maximal subgroups, Sylow subgroups, maximal subgroups of every Sylow subgroup, minimal subgroups, 2-maximal subgroups are conditionally seminormal subgroups.