Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 2. С. 44–56

УДК 512.542

ОТДЕЛИМОСТЬ РЕШЕТКИ τ-ЗАМКНУТЫХ ТОТАЛЬНО ω-КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

И. П. Лось, В. Г. Сафонов

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: innalos.los1@gmail.com, vgsafonov@im.bas-net.by
Поступила 22.12.2023

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс конечных групп. Полную решетку формаций θ называют $\mathfrak{X}$-отделимой, если для любого терма $\eta(x_1,\ldots,x_n)$ сигнатуры $\{\cap,\vee_\theta\}$, любых θ-формаций $\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n$ и любой группы $A\in\mathfrak{X}\cap\eta(\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1\in\mathfrak{F}_1,\ldots,A_n\in\mathfrak{F}_n$, что $A\in\eta(\theta\mathrm{form}(A_1),\ldots,\theta\mathrm{form}(A_n))$. Доказано, что решетка всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций $\mathfrak{G}$-отделима, где τ – подгрупповой функтор в смысле А. Н. Скибы, $\mathfrak{G}$ – класс всех конечных групп.

Введение. Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. Мы придерживаемся терминологии и обозначений, принятых в [1–3].

Пусть ω – некоторое непустое подмножество множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, $\omega'=\mathbb{P}\setminus\omega$. Всякую функцию вида $f:\omega\cup\{\omega'\}\to\{$формации групп$\}$ называют ω-*композиционным спутником* [3]. Для произвольного ω-композиционного спутника f полагают

$$CF_\omega(f)=(G\mid G/R_\omega(G)\in f(\omega')\text{ и }G/C^p(G)\in f(p)\text{ для всех }p\in\pi(Com(G))\cap\omega),$$

где $Com(G)$ обозначает множество всех композиционных абелевых факторов группы G; $R_\omega(G)$ – наибольшая нормальная разрешимая ω-подгруппа группы G; $C^p(G)$ – пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, у которых композиционные факторы имеют порядок p (если таких факторов у группы G нет, то полагают $C^p(G)=G$).

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F}=CF_\omega(f)$ для некоторого ω-композиционного спутника f, то $\mathfrak{F}$ называют ω-*композиционной*, а f – ω-*композиционным спутником* $\mathfrak{F}$.

Всякую формацию считают 0-*кратно* ω-*композиционной.* При $n\geq 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют n-*кратно* ω-*композиционной*, если $\mathfrak{F}=CF_\omega(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно ω-композиционными формациями. Формация $\mathfrak{F}$ называется *тотально* ω-*композиционной,* если она является n-кратно ω-композиционной для всякого целого неотрицательного n.

Формации такого вида введены А. Н. Скибой и Л. А. Шеметковым в работе [3], где были установлены их основные свойства, доказана алгебраичность и модулярность решетки всех n-кратно ω-композиционных формаций, а также поставлено более двух десятков открытых вопросов, определивших перспективные направления исследований в теории частично композиционных формаций. Полученные за последующие десять лет результаты в этом направлении нашли свое отражение в монографиях [4; 5].

В различных приложениях теории классов групп часто возникает необходимость рассматривать классы групп, замкнутые относительно некоторых систем своих подгрупп, согласованных с гомоморфизмами. В связи с этим А. Н. Скибой [2] были введены в рассмотрение понятия подгруппового функтора τ и τ-замкнутого класса групп, в частности, τ-замкнутой формации.

Подгрупповым функтором [2] называют отображение τ, сопоставляющее каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что: 1) $G\in\tau(G)$; 2) для любых групп $H\in\tau(A)$

и $T \in \tau(B)$ и любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называют τ-*замкнутым*, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$.

В данной работе мы изучаем некоторые решеточные свойства τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций, связанные с однопорожденными τ-замкнутыми тотально ω-композиционными формацими (т. е. порожденными одной единственной группой) и устанавливаем отделимость решетки $c^{\tau}_{\omega_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций в смысле следующего определения.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс групп. Полную решетку формаций θ называют $\mathfrak{X}$-*отделимой* [2], если для любого терма $\eta(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры $\{\cap, \vee_\theta\}$, любых θ-формаций $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$ и любой группы $A \in \mathfrak{X} \cap \eta(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}_n$, что $A \in \eta(\theta\mathrm{form}(A_1), \ldots, \theta\mathrm{form}(A_n))$.

А. Н. Скибой [2, с. 159] доказано, что для любого подгруппового функтора τ решетка l^{τ}_n всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой, а решетка разрешимых тотально насыщенных формаций $\mathfrak{S}$-отделима, где $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп. $\mathfrak{G}$-отделимость решетки l^{τ}_∞ всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций доказана В. Г. Сафоновым [6]. В совместной работе Л. А. Шеметкова, А. Н. Скибы и Н. Н. Воробьева [7] установлена $\mathfrak{G}$-отделимость решетки $l^{\tau}_{\omega_n}$ всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций. В. Г. Сафонов и И. Н. Сафонова [8] доказали $\mathfrak{G}$-отделимость решетки $l^{\tau}_{\omega_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций.

В данной статье мы докажем, что для любого подгруппового функтора τ решетка $c^{\tau}_{\omega_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой.

Необходимо отметить, что тотально ω-композиционные формации, их решетки и полугруппы до настоящего времени остаются достаточно слабо изученными. Вместе с тем накопленный за последние годы идейный и технический материал позволил несколько активизировать исследования в данном направлении (см., например, работы А. А. Царева [9; 10]), а также работы авторов [11–13] и В. В. Щербины [14; 15]).

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение:

Теорема А. *Решетка $c^{\tau}_{\omega_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой.*

В разделе 3 мы докажем теорему А, а также приведем некоторые следствия данного результата.

1. Определения и обозначения. Напомним некоторые понятия и обозначения, используемые в работе.

Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ обозначают пересечение всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций (или, другими словами, $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-формаций), содержащих $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутые тотально ω-композиционные формации, то через $\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{H}$ обозначают пересечение всех тотально ω-композиционных формаций, содержащих $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}$, т. е. $\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{H} = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$.

Относительно операций $\vee^{\tau}_{\omega_\infty}$ и $\cap$ множество $c^{\tau}_{\omega_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций, частично упорядоченное по включению, образует полную решетку формаций, в которой для любого подмножества $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\} \subseteq c^{\tau}_{\omega_\infty}$ пересечение $\cap_{j\in J}\mathfrak{F}_j$ является наибольшей нижней границей и $c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\,(\mathfrak{F}_j \mid j \in J)$ является наименьшей верхней границей множества $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ в $c^{\tau}_{\omega_\infty}$.

Пусть f – ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда если все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то спутник f называют *внутренним* (или *приведенным*). Спутник f называют $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-*значным,* если все его значения принадлежат $c^{\tau}_{\omega_\infty}$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – набор всех ω-композиционных $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-значных спутников формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\bigcap_{i\in I} f_i$ – ω-композиционный c^{ω}_∞-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, который называют *минимальным ω-композиционным c^{ω}_∞-значным спутником* формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ – некоторый набор ω-композиционных $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-значных спутников. Тогда ω-композиционный $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-значный спутник $f = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(f_j \mid j \in J)$ определяют следующим образом:

$$f(a) = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(f_j \mid j \in J)(a) = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}(f_j(a) \mid j \in J) = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\,(\cup_{j \in J} f_j(a))$$

для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. В частности,

$$f(a) = (f_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} f_2)(a) = f_1(a) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} f_2(a) = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\,(f_1(a) \cup f_2(a)).$$

Полную решетку формаций θ называют индуктивной [2], если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i \in \theta^{\omega}$ и для всякого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ внутренних ω-композиционных θ-значных спутников, где f_i – ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, имеет место

$$\vee_{\theta^{\omega}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = CF_{\omega}(\vee_{\theta}(f_i \mid i \in I)).$$

Для всякого класса групп $\mathfrak{F}$ и всякого простого числа $p \in \omega$ полагают

$$\mathfrak{F}(C^p) = \begin{cases} (G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}), & \text{если } p \in \pi(Com(\mathfrak{F})), \\ \varnothing, & \text{если } p \notin \pi(Com(\mathfrak{F})). \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация групп. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначают пересечение всех нормальных подгрупп K группы G с $G/K \in \mathfrak{F}$ и называют $\mathfrak{F}$-*корадикалом* группы G. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – формации, то гашюцово произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ определяется следующим образом: $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}$.

2. Вспомогательные результаты. Нам понадобятся некоторые известные факты теории формаций, которые мы сформулируем в виде следующих лемм.

Лемма 2.1 [3, лемма 2]. *Пусть* $\mathfrak{F} = \cap_{i \in I}\mathfrak{F}_i$*, где* $\mathfrak{F}_i = CF_{\omega}(f_i)$*. Тогда* $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$*, где* $f = \cap_{i \in I} f_i$.

Лемма 2.2 [14, теорема 2.2]. *Решетка* $c^{\tau}_{\omega_\infty}$ *всех* τ*-замкнутых тотально* ω*-композиционных формаций индуктивна.*

Лемма 2.3 [16]. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *– непустая наследственная формация,* $\mathfrak{F}$ *– непустая* τ*-замкнутая формация. Тогда* $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ *–* τ*-замкнутая формация.*

Лемма 2.4 [14, лемма 2.8; 3, лемма 5]. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– непустая совокупность групп,* $\mathfrak{F} = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(\mathfrak{X})$*, и* f *– минимальный* ω*-композиционный* $c^{\tau}_{\omega_\infty}$*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}$*, и пусть* $\pi = \omega \cap \pi(Com(\mathfrak{X}))$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(G/R_{\omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $p \in \pi$;

3) $f(p) = \varnothing$ *для всех* $p \in \omega \backslash \pi$;

4) *если* $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(h)$*, спутник* h $c^{\tau}_{\omega_\infty}$*-значен, то для всех* $p \in \pi$ *имеет место*

$$f(p) = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F},\ O_p(G) = 1)$$

и

$$f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(G \mid G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_{\omega}(G) = 1);$$

5) $\pi(Com(\mathfrak{X})) \cap \omega = \pi(Com(\mathfrak{F})) \cap \omega$.

Лемма 2.5 [3, теорема 6]. *Пусть формация* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$*, где* $\mathfrak{H} = CF_{\omega}(h)$*,* $\mathfrak{M} = CF_{\omega}(m)$ *и спутники* h *и* m *являются внутренними. Тогда если* $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$*, то формация* $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$*, где* $f(\omega') = \mathfrak{F}$ *и для всех* $p \in \omega$ *имеет место*

$$f(p) = \begin{cases} m(p)\mathfrak{H}, & \text{если } m(p) \neq \varnothing, \\ f(p) = h(p), & \text{если } m(p) = \varnothing. \end{cases}$$

Лемма 2.6 [17, гл. IV; 18, предложение 2.2.11]. *Пусть* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ *и* $\mathfrak{M}$ *– формации. Тогда:*

1) $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$*, если* $\mathfrak{F} \neq \varnothing$;

2) $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ *является формацией;*

3) $G^{\mathfrak{F}\mathfrak{H}} = (G^{\mathfrak{H}})^{\mathfrak{F}}$ *для всех* $G \in \mathfrak{G}$;

4) $(\mathfrak{F}\mathfrak{H})\mathfrak{M} = \mathfrak{F}(\mathfrak{H}\mathfrak{M})$.

Лемма 2.7 [3, лемма 4]. *Если* $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ *и* $G/O_p(G) \in \mathfrak{F} \bigcap f(p)$ *для некоторого* $p \in \omega$, *то* $G \in \mathfrak{F}$.

Лемма 2.8 [14, лемма 3.1]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая* τ*-замкнутая формация,* π *– такое множество простых чисел, что* $\pi(Com(\mathfrak{F})) \cap \omega \subseteq \pi$. *Тогда формация* $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$ *является* τ*-замкнутой тотально* ω*-композиционной формацией.*

Следующая лемма является частным случаем теоремы 4.1.16 [2].

Лемма 2.9 [2]. *Решетка всех* τ*-замкнутых формаций* $\mathfrak{G}$*-отделима.*

Напомним, что формацию $\mathfrak{F}$ называют [19; 20]:

1) ω*-разрешимо насыщенной*, если из условия $G/N \in \mathfrak{F}$ для нормальной в G подгруппы N из $\Phi(R_\omega(G))$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$;

2) $\mathfrak{N}_\omega$*-насыщенной*, если для любого $p \in \omega$ из того, что $G/\Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Для всякого простого числа p через Z_p обозначают группу порядка p.

Лемма 2.10 [20, теорема 4.5]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая формация,* ω *– непустое множество простых чисел. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *формация* $\mathfrak{F}$ *является* $\mathfrak{N}_\omega$*-насыщенной;*

2) *формация* $\mathfrak{F}$ ω*-разрешимо насыщенна;*

3) $c\mathrm{form}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{N}_{\omega'}\mathfrak{F}$;

4) $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, *где* f *–* ω*-композиционный спутник, удовлетворяющий следующим условиям:*

а) $f(p) = \mathrm{Q}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F})$, *если* $p \in \omega$ *и* $Z_p \in Com(\mathfrak{F})$;

б) $f(p) = \varnothing$;

в) $f(S) = \mathfrak{F}$, *если* $S \in \mathfrak{J} \setminus \{Z_p \mid p \in \omega\}$, *где* $\mathfrak{J}$ *– класс всех простых групп.*

Лемма 2.11 [2, с. 152]. *Пусть* $N_1 \times \ldots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \ldots \times N_k = \mathrm{Soc}(G)$, *где* $k > 1$ *и* G *– группа с* $O_p(G) = 1$. *Пусть* M_i *– наибольшая нормальная в* G *группа, содержащая* $N_1 \times \ldots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \ldots \times N_k$, *но не содержащая* N_i. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *для любого* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *факторгруппа* G/M_i *монолитична и ее монолит* N_iM_i/M_i G*-изоморфен* N_i *и* $O_p(G/M_i) = 1$*;*

2) $M_1 \cap \ldots \cap M_k = 1$.

3. Доказательство теоремы А. Вначале установим справедливость следующих вспомогательных утверждений.

Лемма 3.1. *Пусть* $\eta(x_1, \ldots, x_n)$ *– терм сигнатуры* $\{\cap, \vee^\tau_{\omega_\infty}\}$, f_i *– внутренний* ω*-композиционный* $c^\tau_{\omega_\infty}$*-значный спутник формации* $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, \ldots, n$. *Тогда*

$$\eta(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n) = CF_\omega(\eta(f_1, \ldots, f_n)),$$

где $\eta(f_1, \ldots, f_n)$ *– внутренний* ω*-композиционный* $c^\tau_{\omega_\infty}$*-значный спутник* $\eta(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)$.

Доказательство. Проведем индукцию по числу t вхождений в терм η символов из $\{\cap, \vee^\tau_{\omega_\infty}\}$. В случае, когда $t = 1$ утверждение леммы вытекает из лемм 2.1 и 2.2.

Пусть $t > 1$ и предположим, что утверждение леммы верно для термов с меньшим числом вхождений символов из $\{\cap, \vee^\tau_{\omega_\infty}\}$. Пусть терм η имеет вид

$$\eta_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})\Delta\eta_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}),$$

где $\Delta \in \{\vee^\tau_{\omega_\infty}, \cap\}$ и

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\} \cup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}\} = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

По индуктивному предположению для термов $\eta_1(x_{i_1},\ldots,x_{i_r})$ и $\eta_2(x_{j_1},\ldots,x_{j_s})$ утверждение леммы верно. Поэтому

$$\eta_1(\mathfrak{F}_{i_1},\ldots,\mathfrak{F}_{i_r}) = CF_\omega(\eta_1(f_{i_1},\ldots,f_{i_r})),$$

$$\eta_2(\mathfrak{F}_{j_1},\ldots,\mathfrak{F}_{j_s}) = CF_\omega(\eta_2(f_{j_1},\ldots,f_{j_s})),$$

где $\eta_1(f_{i_1},\ldots,f_{i_r})$ и $\eta_2(f_{j_1},\ldots,f_{j_s})$ – внутренние ω-композиционные $c^\tau_{\omega_\infty}$-значные спутники. Поэтому имеет место

$$\eta(\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n) = \eta_1(x_{i_1},\ldots,x_{i_r})\Delta\eta_2(x_{j_1},\ldots,x_{j_s}) =$$

$$= CF_\omega(\eta_1(f_{i_1},\ldots,f_{i_r})\Delta\eta_2(f_{j_1},\ldots,f_{j_s})) = CF_\omega(\eta(f_1,\ldots,f_n)),$$

где $\Delta \in \{\vee^\tau_{\omega_\infty},\cap\}$. □

Лемма 3.2. *Пусть $\mathfrak{H} = CF_\omega(h)$, где h – внутренний $c^\tau_{\omega_\infty}$-значный спутник, $\pi \subseteq \omega$ и m – натуральное число. Тогда справедливы утверждения:*

(1) *$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой тотально ω-композиционной формацией и $\mathfrak{F}$ имеет такой внутренний $c^\tau_{\omega_\infty}$-значный спутник f, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $f(p) = \mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{H}$ для всех $p \in \pi$ и $f(p) = h(p)$ для всех $p \in \omega\setminus\pi$.*

(2) *$\mathfrak{L} = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой тотально ω-композиционной формацией и $\mathfrak{L} = CF_\omega(l)$, где l – такой внутренний $c^\tau_{\omega_\infty}$-значный спутник, что $l(\omega') = l(p) = \mathfrak{L}$ для всех $p \in \pi$ и $l(p) = h(p)$ для всех $p \in \omega\setminus\pi$.*

Доказательство. (1) Ввиду леммы 2.3 формация $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой. Кроме того, формация $\mathfrak{N}^m_\pi$, как известно, является тотально локальной и наследственной (см., например, [2, с. 34–35]). Поэтому $\mathfrak{N}^m_\pi$ – τ-замкнутая тотально ω-композиционная формация. Пусть t – минимальный $c^\tau_{\omega_\infty}$-значный спутник формации $\mathfrak{N}^m_\pi$. Индукцией по m покажем, что $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой тотально ω-композиционной формацией, т. е. $\mathfrak{F} \in c^\tau_{\omega_\infty}$. Пусть $m = 1$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H}$.

По лемме 2.4 для $\mathfrak{N}_\pi = CF_\omega(t)$ имеем $t(\omega') = (1)$, $t(p) = (1)$ для всех $p \in \pi$, $t(p) = \varnothing$ для всех $p \in \omega\setminus\pi$. Ввиду леммы 2.5 формация $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H}$ является ω-композиционной и имеет такой ω-композиционный спутник f, что $f(\omega') = \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{H}$, $f(p) = t(p)\mathfrak{H} = (1)\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ для всех $p \in \pi$ и $f(p) = h(p)$ для всех $p \in \omega\setminus\pi$. Поскольку $f(a)$ – ω-композиционная формация для всех $a \in \omega\cup\{\omega'\}$, то $\mathfrak{F}$ – 2-кратно ω-композиционная формация. Но тогда по тем же соображениям формация $\mathfrak{F}$ является 3-кратно ω-композиционной и т. д. Поэтому формация $\mathfrak{F}$ является n-кратно ω-композиционной для любого натурального n. Следовательно, $\mathfrak{F}$ – тотально ω-композиционная формация. Таким образом, имеет место $\mathfrak{F} \in c^\tau_{\omega_\infty}$.

Пусть теперь $m > 1$ и предположим, что утверждение леммы верно для $m-1$. Покажем, что лемма верна и для m. По лемме 2.6 имеют место равенства

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{H} = (\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{N}^{m-1}_\pi)\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{H}).$$

Согласно лемме 2.5 формация $\mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{H})$ является ω-композиционной и имеет такой ω-композиционный спутник f, что $f(\omega') = \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{H})$,

$$f(p) = t(p)\mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{H} = (1)\mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{H} = \mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{H}$$

для всех $p \in \pi$ и $f(p) = h(p)$ для всех $p \in \omega\setminus\pi$. Поскольку $f(\omega') = \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{H}$ и по индуктивному предположению для всех $p \in \omega$ формация $f(p)$ является тотально ω-композиционной, то формация $\mathfrak{F}$ – тотально ω-композиционна. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой тотально ω-композиционной формацией. Поэтому имеет место (1).

(2) Поскольку, с учетом леммы 2.6, имеют место равенства

$$\mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{L} = \mathfrak{N}^m_\pi(\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}) = (\mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} = \mathfrak{L},$$

то $\mathfrak{L}$ – τ-замкнутая тотально ω-композиционная формация по утверждению (1). Кроме того, в силу (1) имеем $\mathfrak{L} = CF_\omega(l)$, где l – такой внутренний $c^\tau_{\omega_\infty}$-значный спутник, что $l(\omega') = \mathfrak{L}$, с учетом леммы 2.6,

$$l(p) = \mathfrak{N}^{m-1}_\pi \mathfrak{L} = \mathfrak{N}^{m-1}_\pi(\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}) = (\mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} = \mathfrak{L}$$

для всех $p \in \pi$ и $l(p) = h(p)$ для всех $p \in \omega \setminus \pi$. Поэтому справедливо утверждение (2). $\square$

Лемма 3.3. *Пусть* $\eta(x_1,\ldots,x_n)$ *– терм сигнатуры* $\{\cap, \vee^\tau_{\omega_\infty}\}$, $\pi \subseteq \omega$ *и* m *– натуральное число. Тогда для любых* τ*-замкнутых тотально* ω*-композиционных формаций* $\mathfrak{F}_1$, …, $\mathfrak{F}_n$ *справедливы равенства:*

(1) $\eta(\mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{F}_n) = \mathfrak{N}^m_\pi\eta(\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n)$;

(2) $\eta(\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_n) = \mathfrak{S}_\pi\eta(\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n)$.

Доказательство. Проведем индукцию по числу t вхождений в терм η символов $\{\cap, \vee^\tau_{\omega_\infty}\}$. Утверждение леммы очевидно, если $t = 0$. Пусть $t = 1$ и $\Delta \in \{\cap, \vee^\tau_{\omega_\infty}\}$. Рассмотрим прежде случай, когда $\Delta = \vee^\tau_{\omega_\infty}$. Положим

$$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{N}^m_\pi(\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H}), \;\; \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{H},$$

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{S}_\pi(\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H}), \;\; \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}.$$

В силу леммы 3.2 формации $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{X}_1$ являются τ-замкнутыми тотально ω-композиционными формациями. При этом $\mathfrak{L}_1 = CF_\omega(l_1)$, где l_1 – такой внутренний $c^\tau_{\omega_\infty}$-значный спутник, что $l_1(\omega') = \mathfrak{L}_1$ и $l_1(p) = \mathfrak{N}^{m-1}_\pi(\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H})$ для всех $p \in \pi$ и $l(p) = k(p)$ для всех $p \in \omega \setminus \pi$, где k – некоторый внутренний $c^\tau_{\omega_\infty}$-значный спутник формации $\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H}$. Кроме того, $\mathfrak{X}_1 = CF_\omega(x_1)$, где x_1 – такой внутренний $c^\tau_{\omega_\infty}$-значный спутник, что $x_1(\omega') = \mathfrak{X}_1$ и $x_1(p) = \mathfrak{S}_\pi(\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H})$ для всех $p \in \pi$ и $x(p) = k(p)$ для всех $p \in \omega \setminus \pi$.

Поскольку $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ содержатся в $\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H}$, то

$$\mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}^m_\pi(\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H}) = \mathfrak{L}_1,$$

$$\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{M} \cup \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}_\pi(\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H}) = \mathfrak{X}_1,$$

откуда следует $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}_1$.

Покажем, что $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_1$. Согласно лемме 3.2 формации $\mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{H}$ имеют такие внутренние $c^\tau_{\omega_\infty}$-значные ω-композиционные спутники m_1 и h_1, соответственно, что $m_1(\omega') = \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{M}$, $h_1(\omega') = \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{H}$ и $m_1(p) = \mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{M}$, $h_1(p) = \mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{H}$ для всякого $p \in \pi$, $m_1(p) = m(p)$, $h_1(p) = h(p)$ для всякого $p \in \omega \setminus \pi$, где m и h – некоторые внутренние $c^\tau_{\omega_\infty}$-значные ω-композиционные спутники формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно.

Ввиду леммы 2.2 формация $\mathfrak{L}_2$ имеет такой внутренний $c^\tau_{\omega_\infty}$-значный ω-композиционный спутник l_2, что для ω' и всякого $p \in \pi$ имеют место равенства

$$l_2(\omega') = m_1(\omega') \vee^\tau_{\omega_\infty} h_1(\omega') = \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_2,$$

$$l_2(p) = m_1(p) \vee^\tau_{\omega_\infty} h_1(p) = \mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{N}^{m-1}_\pi\mathfrak{H}$$

и $l_2(p) = m(p) \vee^\tau_{\omega_\infty} h(p)$ для всех $p \in \omega \setminus \pi$. Следовательно, $l_1(p) = l_2(p)$ для любого $q \in \omega$ и $l_2(\omega') = \mathfrak{L}_2 \subseteq \mathfrak{L}_1 = l_1(\omega')$.

Допустим, что $\mathfrak{L}_1 \setminus \mathfrak{L}_2 \neq \varnothing$ и пусть A – группа минимального порядка из $\mathfrak{L}_1 \setminus \mathfrak{L}_2$. Тогда A – $\bar{\tau}$-минимальная монолитическая группа и $P = \mathrm{Soc}(A) = A^{\mathfrak{L}_2}$. Если $\pi(Com(P)) \cap \pi = \varnothing$, то P либо неабелева группа, либо абелева π'-группа. Поскольку при этом $A \in \mathfrak{L}_1 = \mathfrak{N}^m_\pi(\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H})$, то $A \in \mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{L}_2$. Противоречие. Следовательно, $\pi(Com(P)) \cap \pi \neq \varnothing$ и P – абелева p-группа, где $p \in \pi$. Так как $\mathfrak{L}_2$ – ω-композиционная формация и $p \in \omega$, то $P \nsubseteq \Phi(O_p(A))$ по лемме 2.10. Поэтому $P = C^p(A) = O_p(A)$. Поскольку $A \in \mathfrak{L}_1$ и $p \in \pi$, то

$$A/O_p(A) = A/C^p(A) \in l_1(p) = l_2(p) \subseteq \mathfrak{L}_2.$$

Но тогда ввиду леммы 2.7 имеем $A \in \mathfrak{L}_2$. Получили противоречие. Поэтому $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_2$. Таким образом, в случае когда $\Delta = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}$ утверждение (1) верно.

Покажем теперь, что в рассматриваемом случае утверждение (2) также имеет место, т. е. $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2$. Допустим, что $\mathfrak{X}_1 \setminus \mathfrak{X}_2 \neq \varnothing$ и пусть B – произвольная группа из $\mathfrak{X}_1 \setminus \mathfrak{X}_2$. Поскольку $B \in \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{S}_\pi(\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{H})$, то $R = B^{\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{H}} \in \mathfrak{S}_\pi$. Пусть k – нильпотентная длина группы R. Тогда $R \in \mathfrak{N}^k_\pi$ и, с учетом доказанного выше, имеем

$$B \in \mathfrak{N}^k_\pi(\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}^k_\pi \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{N}^k_\pi \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{H} = \mathfrak{X}_2.$$

Поэтому $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2$ и, следовательно, $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2$. Значит, в случае когда $\Delta = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}$, имеет место и утверждение (2).

Пусть теперь $\Delta = \cap$. Положим

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{N}^m_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \text{ и } \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{N}^m_\pi \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}^m_\pi \mathfrak{H}.$$

Так как

$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \text{ и } \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H},$$

то

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{N}^m_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{N}^m_\pi \mathfrak{M} \text{ и } \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{N}^m_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{N}^m_\pi \mathfrak{H},$$

значит, $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2$.

Индукцией по m покажем, что $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2$. Пусть $m = 1$. Тогда

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \text{ и } \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{H}.$$

Допустим, что $\mathfrak{X}_2 \setminus \mathfrak{X}_1 \neq \varnothing$ и пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{X}_2 \setminus \mathfrak{X}_1$. Тогда G – $\bar{\tau}$-минимальная монолитическая группа и $N = \mathrm{Soc}(G) = G^{\mathfrak{X}_1}$.

Предположим, что $\pi(Com(N)) \cap \pi = \varnothing$. Тогда N либо неабелева группа, либо абелева π'-группа. Поскольку при этом $G \in \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{H}$, то $G \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$. Поэтому $G \in \mathfrak{X}_1$. Противоречие. Значит, $\pi(Com(N)) \cap \pi \neq \varnothing$ и N – абелева p-группа, где $p \in \pi$. Ввиду того, что $\mathfrak{X}_1$ – ω-композиционная формация и $p \in \pi \subseteq \omega$, то $N \nsubseteq \Phi(O_p(G))$ в силу леммы 2.10. Поэтому $N = O_p(G) = C^p(G) = F(G)$ и $G = N \rtimes M$ для некоторой максимальной подгруппы M из G. Так как $G \in \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{H}$ и $N = F(G)$, то $M \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$. Отсюда $G^{\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_\pi$. Но тогда $G \in \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{X}_1$. Получили противоречие. Значит, $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2$.

Пусть теперь $m > 1$ и при $m - 1$ утверждение верно. Пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{X}_2 \setminus \mathfrak{X}_1$. Тогда G – $\bar{\tau}$-минимальная монолитическая группа и $N = \mathrm{Soc}(G) = G^{\mathfrak{X}_1}$.

Если $\pi(Com(N)) \cap \pi = \varnothing$, то N либо неабелева группа, либо абелева π'-группа. Тогда поскольку $G \in \mathfrak{N}^m_\pi \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}^m_\pi \mathfrak{H}$, то $G \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$. Поэтому $G \in \mathfrak{X}_1$. Противоречие. Значит, $\pi(Com(N)) \cap \pi \neq \varnothing$ и N – абелева p-группа, где $p \in \pi$. Поскольку $\mathfrak{X}_1$ – ω-композиционная формация и $p \in \pi \subseteq \omega$, то $N \nsubseteq \Phi(O_p(G))$ ввиду леммы 2.10. Поэтому $N = O_p(G) = C^p(G) = F(G)$ и $G = N \rtimes M$ для некоторой максимальной подгруппы M из G. Поскольку

$$G \in \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{N}^m_\pi \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}^m_\pi \mathfrak{H} \text{ и } N = F(G),$$

то $G/F(G) \simeq M \in \mathfrak{N}^{m-1}_\pi \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}^{m-1}_\pi \mathfrak{H}$. Но тогда по индукции имеем

$$G/F(G) \in \mathfrak{N}^{m-1}_\pi \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}^{m-1}_\pi \mathfrak{H} = \mathfrak{N}^{m-1}_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}).$$

Следовательно, так как $F(G) \in \mathfrak{N}_\pi$, то мы получаем

$$G \in \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{N}^{m-1}_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})) = (\mathfrak{N}_\pi \mathfrak{N}^{m-1}_\pi)(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}^m_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{X}_1.$$

Противоречие. Значит, $\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_1$. Поэтому в случае, когда $\Delta = \cap$ утверждение (1) верно.

Пусть теперь $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{S}_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$ и $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{M} \cap \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{H}$. Тогда, как нетрудно убедиться, $\mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{L}_2$. Допустим, что $\mathfrak{L}_2 \nsubseteq \mathfrak{L}_1$ и пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{L}_2 \setminus \mathfrak{L}_1$. Тогда G – $\bar{\tau}$-минимальная монолитическая группа и $N = \mathrm{Soc}(G) = G^{\mathfrak{L}_1}$.

Если $\pi(Com(N)) \cap \pi = \varnothing$, то N либо неабелева группа, либо абелева π'-группа. Тогда поскольку $G \in \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{M} \cap \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{H}$, то $G \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$. Поэтому $G \in \mathfrak{X}_1$. Противоречие. Значит, $\pi(Com(N)) \cap \pi \neq \varnothing$ и N – абелева p-группа, где $p \in \pi$. Поэтому

$$G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{N}_p(\mathfrak{S}_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})) = (\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_\pi)(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{S}_\pi(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{L}_1.$$

Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_1$. Таким образом, в случае когда $\Delta = \cap$ утверждение (2) также верно.

Пусть теперь $t > 1$ и предположим, что лемма верна для всякого терма с меньшим числом символов из $\{\vee^\tau_{\omega_\infty}, \cap\}$. Пусть η имеет вид

$$\eta_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})\Delta\eta_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}),$$

где $\Delta \in \{\vee^\tau_{\omega_\infty}, \cap\}$ и $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\} \cup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. По индуктивному предположению для термов $\eta_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ и $\eta_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s})$ утверждение леммы верно. Поэтому

$$\eta_1(\mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{F}_{i_r}) = \mathfrak{N}^m_\pi\eta_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r}),\ \ \eta_2(\mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{N}^m_\pi\mathfrak{F}_{j_s}) = \mathfrak{N}^m_\pi\eta_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s}) \text{ и}$$

$$\eta_1(\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_{i_r}) = \mathfrak{S}_\pi\eta_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r}),\ \ \eta_2(\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_{j_s}) = \mathfrak{S}_\pi\eta_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s}).$$

Значит, имеют место равенства

$$\begin{gathered}\eta(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_n) = \eta_1(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{i_r})\Delta\eta_2(\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}_{j_s}) = \\ = \mathfrak{N}_\pi\eta_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r})\Delta\mathfrak{N}_\pi\eta_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s}) = \mathfrak{N}_\pi(\eta_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r})\Delta\eta_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s})) = \\ = \mathfrak{N}_\pi\eta(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n).\end{gathered}$$

Таким образом, утверждение (1) верно. Аналогично,

$$\begin{gathered}\eta(\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_n) = \eta_1(\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_{i_r})\Delta\eta_2(\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}_{j_s}) = \\ = \mathfrak{S}_\pi\eta_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r})\Delta\mathfrak{S}_\pi\eta_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s}) = \mathfrak{S}_\pi(\eta_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r})\Delta\eta_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s})) = \\ = \mathfrak{S}_\pi\eta(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n).\end{gathered}$$

Следовательно, утверждение (2) также верно. □

Лемма 3.4. *Пусть $\eta(x_1, \ldots, x_n)$ – терм сигнатуры $\{\cap, \vee^\tau_{\omega_\infty}\}$, $\mathfrak{X}_i$ и $\mathfrak{F}_i$ – такие $c^\tau_{\omega_\infty}$-формации, что $\mathfrak{X}_i \subseteq \mathfrak{F}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $\eta(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n) \subseteq \eta(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n)$.*

Доказательство. Проведем индукцию по числу t вхождений символов $\{\cap, \vee^\tau_{\omega_\infty}\}$ в терм η. Утверждение леммы очевидно, если $t = 1$.

Пусть $t > 1$ и лемма верна для всякого терма с меньшим числом символов из $\{\cap, \vee^\tau_{\omega_\infty}\}$. Пусть терм η имеет вид $\eta_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})\Delta\eta_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s})$, где $\Delta \in \{\cap, \vee^\tau_{\omega_\infty}\}$ и

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\} \cup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}\} = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Положим

$$\mathfrak{M}_1 = \eta_1(\mathfrak{X}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{X}_{i_r}),\ \ \mathfrak{M}_2 = \eta_2(\mathfrak{X}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{X}_{j_s}),$$

$$\mathfrak{H}_1 = \eta_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r}),\ \ \mathfrak{H}_2 = \eta_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s}).$$

По индуктивному предположению для термов $\eta_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ и $\eta_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_s})$ утверждение леммы верно, тогда $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{H}_i$, $i = 1, 2$. Если $\Delta = \cap$, то $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2$. Аналогично, если $\Delta = \vee^\tau_{\omega_\infty}$, то $\mathfrak{M}_1 \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{H}_1 \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H}_2$. Поэтому $\mathfrak{M}_1\Delta\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{H}_1\Delta\mathfrak{H}_2$. Значит, справедливо включение

$$\begin{gathered}\eta(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n) = \eta_1(\mathfrak{X}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{X}_{i_r})\Delta\eta_2(\mathfrak{X}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{X}_{j_s}) \subseteq \\ \subseteq \eta_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r})\Delta\eta_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s}) = \eta(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n),\end{gathered}$$

что завершает доказательство. □

Напомним, что подгрупповой функтор τ называют *замкнутым* [2, с. 16], если для любых двух подгрупп G и $H \in \tau(G)$ имеет место $\tau(H) \subseteq \tau(G)$. Пусть τ – произвольный подгрупповой функтор, $\overline{\tau}$ – пересечение всех замкнутых подгрупповых функторов τ_i, для которых $\tau \leq \tau_i$, т. е. $\tau(G) \subseteq \tau_i(G)$ для любой группы G. Функтор $\overline{\tau}$ называется *замыканием* функтора τ [2, с. 20].

Доказательство теоремы А. Предположим, что теорема неверна и пусть группа G – контрпример минимального порядка. Тогда найдутся терм $\eta(x_1,\dots,x_n)$ сигнатуры $\{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_\infty}\}$ и $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-формации $\mathfrak{F}_1$, …, $\mathfrak{F}_n$, такие что $G \in \eta(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n)$, но не существует групп A_1, …, A_n таких, что $A_1 \in \mathfrak{F}_1$, …, $A_n \in \mathfrak{F}_n$ и $G \in \eta\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_1),\dots,c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_n)\big)$.

Положим $\mathfrak{M} = \eta(\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n)$, f_i – минимальный $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1,\dots,n$.

Вначале покажем, что утверждение теоремы верно, если в терм η входит всего один символ из $\{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_\infty}\}$. Действительно, если $G \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, то $G \in \mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Значит,

$$G \in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(G) \cap c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(G).$$

Пусть $G \in \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{M}$ и $P = \mathrm{Soc}(G)$. Допустим, что G – монолитическая группа.

Допустим, что $\pi(Com(P)) \cap \omega = \varnothing$. Тогда P либо неабелева группа, либо абелева ω'-группа. Ввиду леммы 2.8 формация $\mathfrak{S}_{\omega}\tau\,\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) \in c^{\tau}_{\omega_\infty}$. Поэтому

$$G \in \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{S}_{\omega}\tau\,\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2).$$

Из последнего включения следует, что $G \in \tau\,\mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau} \mathfrak{F}_2$. По лемме 2.9 найдутся такие группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ и $A_2 \in \mathfrak{F}_2$, что

$$G \in \tau\,\mathrm{form}(A_1) \vee^{\tau} \tau\,\mathrm{form}(A_2) \subseteq c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_1) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_2).$$

Пусть теперь $\pi(Com(P)) \cap \omega \neq \varnothing$. Тогда P – абелева p-группа для некоторого простого числа $p \in \omega$. Заметим, что $\Phi(O_p(G)) = 1$. Действительно, если $\Phi(O_p(G)) \neq 1$, то в силу индуктивного предположения для группы $G/\Phi(O_p(G))$ утверждение теоремы верно. Поскольку $G \in \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{F}_2$, то $G/\Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{F}_2$, поскольку $\mathfrak{F}_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{F}_2$ формация. Но $|G/\Phi(O_p(G))| < |G|$. Поэтому, в силу выбора группы G, найдутся такие группы $B_1 \in \mathfrak{F}_1$, $B_2 \in \mathfrak{F}_2$, что

$$G/\Phi(O_p(G)) \in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_1) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_2).$$

Так как по лемме 2.10 формация $c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_1) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_2)$ является $\mathfrak{N}_p$-насыщенной, то

$$G \in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_1) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_2).$$

Получаем противоречие с выбором группы G. Значит, $\Phi(O_p(G)) = 1$. Следовательно, $P \nsubseteq \Phi(O_p(G))$ и $P = C_G(P) = O_p(G) = C^p(G)$. Поскольку $G \in \mathfrak{M}$, то по лемме 2.4 имеем $G/P = G/C^p(G) \in m(p)$ и, следовательно, $m(p) \neq \varnothing$. В силу леммы 2.2 справедливо равенство $m(p) = f_1(p) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} f_2(p)$.

Допустим, что $f_1(p) = \varnothing$. Тогда $m(p) = f_2(p)$ и $G \in \mathfrak{F}_2$ ввиду леммы 2.7. Значит,

$$G \in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(G/G^{\mathfrak{F}_1}) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(G).$$

Противоречие. Поэтому мы можем считать, что $f_1(p) \neq \varnothing$ и $f_2(p) \neq \varnothing$.

Так как $|G/C^p(G)| < |G|$, то по индукции для группы $G/C^p(G)$ теорема верна. Поэтому найдутся такие группы $D_1 \in f_1(p)$ и $D_2 \in f_2(p)$, что

$$G/C^p(G) \in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(D_1) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(D_2).$$

Пусть $C_i = D_i/O_p(D_i)$, $i \in 1,2$. Тогда

$$c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(D_i) \subseteq \mathfrak{N}_p c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_i).$$

Поэтому имеет место включение

$$c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(D_1)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(D_2)\subseteq\mathfrak{N}_p c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_1)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}\mathfrak{N}_p c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_2).$$

По лемме 3.3(1) справедливо равенство

$$\mathfrak{N}_p c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_1)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}\mathfrak{N}_p c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_2)=\mathfrak{N}_p\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_1)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_2)\big).$$

Значит,

$$G/P=G/C^p(G)\in\mathfrak{N}_p\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_1)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_2)\big).$$

Так как $P=O_p(G)$, то $O_p(G/P)=1$. Поэтому $G/P\in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_1)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_2)$.

Пусть $R_i=Z_p\wr C_i=K_i\rtimes C_i$, где Z_p – группа порядка p, K_i – база регулярного сплетения R_i, $i=1,2$. Понятно, что $O_p(R_i)=C^p(R_i)=K_i$. Так как

$$R_i/O_p(R_i)\simeq C_i\in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(D_i)\subseteq f_i(p),$$

то в силу леммы 2.7 имеем $R_i\in\mathfrak{F}_i$. Пусть далее $\mathfrak{X}_i=c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(R_i)$, $i=1,2$ и $\mathfrak{L}=\mathfrak{X}_1\vee^{\tau}_{\omega_\infty}\mathfrak{X}_2$. Обозначим через l и x_i – минимальные ω-композиционные $c^{\tau}_{\omega_\infty}$-значные спутники формаций $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{X}_i$ ($i=1,2$) соответственно. Тогда по лемме 2.2 имеем $l=x_1\vee^{\tau}_{\omega_\infty}x_2$. Следовательно,

$$l(p)=x_1(p)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}x_2(p)=c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\big((R_1/C^p(R_1)\big)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}\big((R_2/C^p(R_2)\big)=$$

$$=c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_1)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(C_2).$$

Значит, $G/O_p(G)=G/P\in l(p)$. В силу леммы 2.7

$$G\in\mathfrak{L}=c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(R_1)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(R_2).$$

Противоречие.

Пусть теперь G не является монолитической группой и $\mathrm{Soc}(G)=N_1\times\ldots\times N_k$, где N_j – минимальная нормальная подгруппа группы G, $j\in J=\{1,\ldots,k\}$ ($k\geqslant 2$). Обозначим через M_j наибольшую нормальную подгруппу группы G, содержащую

$$N_1\times\ldots\times N_{j-1}\times N_{j+1}\times\ldots\times N_k$$

и не содержащую N_j. В силу леммы 2.11 группа $B_j=G/M_j$ является монолитической и ее монолит N_jM_j/M_j G-изоморфен N_j и $M_1\cap\ldots\cap M_k=1$. Поскольку $B_j\in\mathfrak{M}=\mathfrak{F}_1\vee^{\tau}_{\omega_\infty}\mathfrak{F}_2$ и $|B_j|<|G|$, то по индукции для группы B_j найдутся такие группы $S_{j1}\in\mathfrak{F}_1$ и $S_{j2}\in\mathfrak{F}_2$, что

$$B_j\in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_{j1})\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_{j2}),\quad j\in J.$$

Положим $S_1=S_{11}\times S_{21}\times\ldots\times S_{k1}$ и $S_2=S_{12}\times S_{22}\times\ldots\times S_{k2}$. Поскольку $S_{j1}\in\mathfrak{F}_1$ и $S_{j2}\in\mathfrak{F}_2$ при любом $j\in J$, то $S_1\in\mathfrak{F}_1$ и $S_2\in\mathfrak{F}_2$. Так как $S_{j1}\in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_1)$ и $S_{j2}\in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_2)$ для любого $j\in J$, то $c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_{j1})\subseteq c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_1)$ и $c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_{j2})\subseteq c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_2)$. Поэтому для всякого $j\in J$ имеет место включение

$$c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_{j1})\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_{j2})\subseteq c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_1)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_2).$$

Поскольку $B_j\in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_{j1})\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_{j2})$, то в силу леммы 2.11 получаем, что

$$G\in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_1)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(S_2)$$

как подпрямое произведение групп, изоморфных группам B_1, …, B_k. Противоречие.

Поэтому мы можем считать, что число t вхождений символов из $\{\cap,\vee^{\tau}_{\omega_\infty}\}$ в терм $\eta(x_1,\ldots,x_n)$ больше 1 и для всех термов с числом вхождений символов из $\{\cap,\vee^{\tau}_{\omega_\infty}\}$ меньшим t утверждение теоремы верно.

Пусть $G\in\eta(\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n)$ и терм η имеет вид

$$\eta_1(x_{i_1},\ldots,x_{i_r})\Delta\eta_2(x_{j_1},\ldots,x_{j_s}),$$

где $\Delta \in \{\cap, \vee^{\tau}_{\omega_\infty}\}$ и

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\} \cup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}\} = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Если $\Delta = \cap$, то $G \in \eta_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r}) \cap \eta_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s})$. По индукции для термов η_1 и η_2 утверждение теоремы верно. Следовательно, найдутся такие группы $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, …, $A_r \in \mathfrak{F}_{i_r}$ и $B_1 \in \mathfrak{F}_{j_1}$, …, $B_s \in \mathfrak{F}_{j_s}$, что

$$G \in \eta_1\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_1), \ldots, c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_r)\big)$$

и

$$G \in \eta_2\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_1), \ldots, c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_s)\big).$$

Пусть $\Omega = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\} \cap \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}\}$. Положим $R_{i_m} = A_m$, если $x_{i_m} \notin \Omega$, $R_{i_m} = P_{j_k} = A_m \times B_k$, если $x_{i_m} = x_{j_k} \in \Omega$ и $P_{j_k} = B_k$, если $x_{j_k} \notin \Omega$, $m = 1, \ldots, r$, $k = 1, \ldots, s$. Ясно, что $R_{i_m} \in \mathfrak{F}_{i_m}$ и $P_{j_k} \in \mathfrak{F}_{j_k}$. Обозначим через $\mathfrak{M}_{i_m}$ формацию $c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(R_{i_m})$, а через $\mathfrak{M}_{j_k}$ – формацию $c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(P_{j_k})$, $m = 1, \ldots, r$, $k = 1, \ldots, s$. Поскольку для любых $m = 1, \ldots, r$, $k = 1, \ldots, s$ справедливы включения $c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_m) \subseteq \mathfrak{M}_{i_m}$ и $c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_k) \subseteq \mathfrak{M}_{j_k}$, то в силу леммы 3.4 имеют место включения:

$$\eta_1\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_1), \ldots, c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_r)\big) \subseteq \eta_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{i_r}),$$
$$\eta_2\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_1), \ldots, c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_s)\big) \subseteq \eta_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{j_s}).$$

Следовательно, имеем

$$G \in \eta_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{i_r}) \cap \eta_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{j_s}) = \eta(\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n),$$

где $\mathfrak{M}_i$ – однопорожденная τ-замкнутая тотально ω-композиционная подформация формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Снова получили противоречие.

Пусть теперь $\Delta = \vee^{\tau}_{\omega_\infty}$. Тогда

$$G \in \eta_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r}) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \eta_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s}).$$

Положим $\mathfrak{H}_1 = \eta_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_r})$ и $\mathfrak{H}_2 = \eta_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_s})$. Тогда $G \in \mathfrak{H}_1 \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \mathfrak{H}_2$ и по доказанному существуют такие группы $H_1 \in \mathfrak{H}_1$ и $H_2 \in \mathfrak{H}_2$, что

$$G \in c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(H_1) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(H_2).$$

Поскольку при $t = 1$ теорема верна, то для групп H_1 и H_2 найдутся такие группы $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, …, $A_r \in \mathfrak{F}_{i_r}$ и $B_1 \in \mathfrak{F}_{j_1}$, …, $B_s \in \mathfrak{F}_{j_s}$, что

$$H_1 \in \eta_1\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_1), \ldots, c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_r)\big), \ \ H_2 \in \eta_2\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_1), \ldots, c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_s)\big).$$

Пусть теперь $\Omega = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\} \cap \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}\}$. Положим $R_{i_m} = A_m$, если $x_{i_m} \notin \Omega$, $R_{i_m} = P_{j_k} = A_m \times B_k$, если $x_{i_m} = x_{j_k} \in \Omega$ и $P_{j_k} = B_k$, если $x_{j_k} \notin \Omega$, $m = 1, \ldots, r$, $k = 1, \ldots, s$. Очевидно, что $R_{i_m} \in \mathfrak{F}_{i_m}$ и $P_{j_k} \in \mathfrak{F}_{j_k}$. Положим $\mathfrak{M}_{i_m} = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(R_{i_m})$, $\mathfrak{M}_{j_k} = c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(P_{j_k})$, $m = 1, \ldots, r, k = 1, \ldots, s$. Поскольку для любых $m = 1, \ldots, r, k = 1, \ldots, s$ справедливы включения $c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_m) \subseteq \mathfrak{M}_{i_m}$ и $c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_k) \subseteq \mathfrak{M}_{j_k}$, то в силу леммы 3.4 имеем:

$$\eta_1\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_1), \ldots, c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_r)\big) \subseteq \eta_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{i_r}),$$
$$\eta_2\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_1), \ldots, c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_s)\big) \subseteq \eta_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{j_s}).$$

Значит, выполняется включение

$$\eta_1\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_1), \ldots, c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_r)\big) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \eta_2\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_1), \ldots, c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_s)\big) \subseteq$$
$$\subseteq \eta_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{i_r}) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} \eta_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{j_s}).$$

Так как

$$c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(H_1) \vee^{\tau}_{\omega_\infty} c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(H_2) \subseteq$$

$$\subseteq \eta_1\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_1),\dots,c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(A_r)\big)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}\eta_2\big(c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_1),\dots,c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(B_s)\big),$$

то справедливо включение

$$c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(H_1)\vee^{\tau}_{\omega_\infty}c^{\tau}_{\omega_\infty}\mathrm{form}(H_2)\subseteq \eta_1(\mathfrak{M}_{i_1},\dots,\mathfrak{M}_{i_r})\vee^{\tau}_{\omega_\infty}\eta_2(\mathfrak{M}_{j_1},\dots,\mathfrak{M}_{j_s}).$$

Следовательно,

$$G\in \eta_1(\mathfrak{M}_{i_1},\dots,\mathfrak{M}_{i_r})\vee^{\tau}_{\omega_\infty}\eta_2(\mathfrak{M}_{j_1},\dots,\mathfrak{M}_{j_s})=\eta(\mathfrak{M}_1,\dots,\mathfrak{M}_n),$$

где $\mathfrak{M}_i$ – однопорожденная τ-замкнутая тотально ω-композиционная подформация формации $\mathfrak{F}_i$, $i=1,\dots,n$. Противоречие. □

Приведем некоторые следствия доказанной теоремы.

Если τ – *единичный* подгрупповой функтор [2], т. е. $\tau(G)$ – совокупность всех подгрупп группы G для любой группы G, то из теоремы А получаем

Следствие 3.5. *Решетка всех наследственных тотально ω-композиционных формаций $\mathfrak{G}$-отделима.*

В случае когда $\tau(G)$ – совокупность всех нормальных подгрупп группы G для каждой группы G [2, с. 17] из теоремы А получаем

Следствие 3.6. *Решетка всех нормально наследственных тотально ω-композиционных формаций $\mathfrak{G}$-отделима.*

Если τ – тривиальный подгрупповой функтор [2], т. е. $\tau(G)=\{G\}$ для всех G, то из теоремы А вытекает

Следствие 3.7. *Решетка c^{ω}_{∞} всех тотально ω-композиционных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой.*

Если $\omega=\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, то из теоремы А получаем

Следствие 3.8. *Решетка c^{τ}_{∞} всех τ-замкнутых тотально композиционных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой.*

Пусть теперь τ – единичный подгрупповой функтор. Тогда из теоремы А вытекает

Следствие 3.9. *Решетка всех наследственных тотально композиционных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой.*

Пусть $\tau(G)$ – совокупность всех нормальных подгрупп группы G для каждой группы G. Тогда получаем

Следствие 3.10. *Решетка всех нормально наследственных тотально композиционных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой.*

Наконец, если τ – тривиальный подгрупповой функтор из теоремы А вытекает

Следствие 3.11. *Решетка c_∞ всех тотально композиционных формаций является $\mathfrak{G}$-отделимой.*

Литература

1. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.

2. *Скиба А. Н.*, Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997.

3. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп // Украинский мат. журн. 2000. Т. 52, № 6. С. 783–797.

4. *Селькин В. М.* Однопорожденные формации. Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2011.

5. *Воробьев Н. Н.* Алгебра классов конечных групп. Витебск: ВГУ им. П. М. Машерова, 2012.

6. *Сафонов В. Г.* $\mathfrak{G}$-отделимость решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 5. С. 692–704.

7. *Shemetkov L. A., Skiba A. N., Vorob'ev N. N.* On laws of lattices of partially saturated formations // Asian-European Journal of Mathematics. 2009. Vol. 2, N 1. P. 155–169.

8. *Сафонов В. Г., Сафонова И. Н.* Отделимость решетки τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций конечных групп // Проблемы физики, математики и техники. 2017. № 4(33). С. 76–83.

9. *Tsarev A. A.* Inductive lattices of totally composition formations // Revista Colombiana de Matematicas. 2018. Vol. 52, N 2. P. 161–169.

10. *Tsarev A. A.* On the lattice of all totally composition formations of finite groups // Ricerche di Matematica. 2019. Vol. 68, N 2. P. 693–698.

11. *Los I. P., Safonov V. G.* Separability of the lattice of τ-closed totally ω-composition formations of finite groups // The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. July 02–06, 2019. Vinnytsia, Ukraine, 2019. P. 64–65.

12. *Лось И. П., Сафонов В. Г.* τ-Замкнутые тотально ω-композиционные формации конечных групп с булевыми подрешетками // Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2021. Т. 60: Материалы Междунар. конф. по алгебре, анализу и геометрии. С. 92–94.

13. *Лось И. П., Сафонов В. Г.* Об однопорожденных и ограниченных тотально ω-композиционных формациях конечных групп // Проблемы физики, математики и техники. 2021. № 4(49). С. 101–107.

14. *Щербина В. В.* О двух задачах теории частично тотально композиционных формаций конечных групп // Прикладная математика и Физика. 2020. Т. 52, № 1. С. 18–32.

15. *Щербина В. В.* Частично композиционные формации с заданной структурой. I // Прикладная математика и Физика. 2021. Т. 53, № 3. С. 171–204.

16. *Сафонов В. Г.* Характеризация разрешимых однопорожденных тотально насыщенных формаций конечных групп // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 185–191.

17. *Doerk K., Hawkes T.* Finite Soluble Groups. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.

18. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of Finite Groups. Dordrecht: Springer, 2006.

19. *Shemetkov L. A.* Frattini extensions of finite groups and formations // Comm. Algebra. 1997. Vol. 25, N 3. P. 955–964.

20. *Шеметков Л. А.* Локальные задания формаций конечных групп // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16, № 8. С. 229–244.

I. P. Los, V. G. Safonov

Separability of the lattice of τ-closed totally ω-composition formations of finite groups

Summary

Let $\mathfrak{X}$ be a non-empty class of finite groups. A complete lattice θ of formations is said $\mathfrak{X}$-separable if for every term $\eta(x_1,\ldots,x_n)$ of signature $\{\cap,\vee_\theta\}$, θ-formations $\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n$, and every group $A\in\mathfrak{X}\cap\eta(\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_n)$ are exists $\mathfrak{X}$-groups $A_1\in\mathfrak{F}_1,\ldots,A_n\in\mathfrak{F}_n$ such that $A\in$ $\in\eta(\theta\mathrm{form}(A_1),\ldots,\theta\mathrm{form}(A_n))$. In particular, if $\mathfrak{X}=\mathfrak{G}$ is the class of all finite groups then the lattice θ of formations is said $\mathfrak{G}$-separable or, briefly, separable. It is proved that the lattice $c^{\tau}_{\omega_\infty}$ of all τ-closed totally ω-composition formations is $\mathfrak{G}$-separable.