Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 2. С. 34–43

УДК 512.542

О СЛАБО $\mathbb{P}$-СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

С. И. Ленденкова

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
e-mail: slendenkova@mail.ru
Поступила 22.12.2023

Подгруппа H конечной группы G называется *слабо $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой*, если H порождается двумя подгруппами, одна из которых субнормальна в G, а другую можно соединить с группой G цепочкой подгрупп с простыми индексами. Устанавливаются свойства слабо $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп, позволяющие распространять известные результаты о конечных группах с наборами $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп на конечные группы со слабо $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами. В частности, устанавливается сверхразрешимость конечной группы со слабо $\mathbb{P}$-субнормальными нормализаторами силовских подгрупп и метанильпотентность группы со слабо $\mathbb{P}$-субнормальными B-подгруппами.

Введение. В работе рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и терминология соответствуют [1].

Предложенные А. Н. Скибой [2] понятия слабо субнормальной и частично субнормальной подгруппы связаны с порождением подгруппы двумя подгруппами, одна из которых субнормальна в группе, а другая обладает определенными свойствами.

Определение 1 [2]. Подгруппу H группы G называют *слабо субнормальной подгруппой группы G*, если $H = \langle H_1, H_2\rangle$, где H_1 субнормальна в G, а H_2 полунормальна в G. Здесь и далее запись $H = \langle H_1, H_2\rangle$ означает, что H порождается своими подгруппами H_1 и H_2. Напомним, что подгруппа A группы G называется *полунормальной подгруппой группы G*, или *полуперестановочной*, если существует подгруппа B в группе G такая, что $G = AB$ и A перестановочна с каждой подгруппой из B.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел.

Определение 2. Подгруппа H группы G называется *$\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой группы G*, если $H = G$ или существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 < H_1 < \ldots < H_{n-1} < H_n = G \qquad (1)$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}$ для всех i. В этой ситуации используется обозначение H $\mathbb{P}$-sn G.

Определение 3. Подгруппа H группы G называется *K$\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой группы G*, если $H = G$ или существует цепочка подгрупп (1) такая, что для каждого i либо H_i нормальна в H_{i+1}, либо $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}$. В этой ситуации используется обозначение H K$\mathbb{P}$-sn G.

Определения 2 и 3 введены А. Ф. Васильевым, Т. И. Васильевой и В. Н. Тютяновым [3]. Ясно, что субнормальная подгруппа H группы G будет K$\mathbb{P}$-субнормальной в G, а каждая $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа – K$\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой. В знакопеременной группе A_6 единичная подгруппа K$\mathbb{P}$-субнормальна, но не $\mathbb{P}$-субнормальна.

Введем следующее новое понятие.

Определение 4. Подгруппу H группы G будем называть *слабо $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой группы G*, если $H = \langle H_1, H_2\rangle$, где H_1 субнормальна в G, а H_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в G.

В настоящей работе устанавливаются свойства слабо $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп, в частности, оказывается, что слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа K$\mathbb{P}$-субнормальна, а в разрешимой группе G для подгруппы H следующие утверждения эквивалентны:

H слабо $\mathbb{P}$-субнормальна;

H K$\mathbb{P}$-субнормальна;

H $\mathbb{P}$-субнормальна.

Кроме того, в разрешимой группе каждая слабо субнормальная подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна, но обратное неверно: в симметрической группе S_4 подгруппа $\langle(1\,2)\rangle$ $\mathbb{P}$-субнормальна, но не слабо субнормальна.

Полученные свойства позволяют распространить известные результаты о группах с наборами $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп на группы со слабо $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами. В частности, группа со слабо $\mathbb{P}$-субнормальными нормализаторами силовских подгрупп будет сверхразрешимой, а со слабо $\mathbb{P}$-субнормальными B-подгруппами – метанильпотентной.

1. Вспомогательные результаты. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих порядок группы G, а наибольшая нормальная π-подгруппа группы G – через $O_\pi(G)$ для $\pi \subseteq \pi(G)$, в частности, если $\pi = \{p\}$, то $O_p(G)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа группы G. Запись $X \leq Y$, $X < Y$, $X \lhd Y$, $X \lhd\lhd Y$ означает, что X – подгруппа в группе Y, соответственно, собственная подгруппа, нормальная подгруппа, субнормальная подгруппа; $|X|$ – порядок группы X и $|X:Y|$ – индекс $Y \leq X$.

Будем использовать следующие обозначения для группы G и ее подгруппы H:

H_G – наибольшая нормальная в G подгруппа, содержащаяся в H;

H_{sG} – наибольшая субнормальная в G подгруппа, содержащаяся в H.

Лемма 1 [4, Лемма 1.2]. *Если M – максимальная подгруппа группы G, то $M_G = M_{sG}$.*

Лемма 2 [1; 5]. *Пусть $K \lhd\lhd G$, N – нормальная подгруппа группы G, H – подгруппа группы G, $r \in \pi(G)$. Тогда*

(1) *$KN/N \lhd\lhd G/N$;*

(2) *$KN \lhd\lhd G$;*

(3) *если $N \leq H$ и $H/N \lhd\lhd G/N$, то $H \lhd\lhd G$;*

(4) *$\pi(K) = \pi(K^G)$ и $K \leq O_{\pi(K)}(G)$;*

(5) *если K r-разрешима, то K^G r-разрешима;*

(6) *если K r-нильпотентна, то K^G r-нильпотентна;*

(7) *если K r-разложима, то K^G r-разложима.*

Лемма 3 [6, лемма 1.8]. (1) *Пусть $H \leq U \leq G$. Если подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна в U, а подгруппа U $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна в G.*

(2) *Если H – $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G, а N – нормальная подгруппа группы G, то подгруппа HN $\mathbb{P}$-субнормальна в G, а подгруппа HN/N $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N.*

(3) *Если $N \leq U \leq G$, N нормальна в G и U/N – $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G/N, то подгруппа U $\mathbb{P}$-субнормальна в группе G.*

(4) *Если H – $\mathbb{P}$-субнормальная в группе G подгруппа, а N – нормальная подгруппа группы G, то $(H \cap N)$ $\mathbb{P}$-субнормальна в N.*

Лемма 4. *Пусть H – $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G. Если N – нормальная подгруппа группы G, то H $\mathbb{P}$-субнормальна в HN.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Надо считать HN собственной подгруппой группы G. Пусть M – максимальная подгруппа группы G простого индекса, в которой H $\mathbb{P}$-субнормальна. Если $HN \leq M$, то по индукции H $\mathbb{P}$-субнормальна в HN. Пусть HN не содержится в M. Тогда N не содержится в M, $G = MN$ и $|G:M| =$

$= |N:(N\cap M)| \in \mathbb{P}$. По тождеству Дедекинда $H \leq HN\cap M = H(N\cap M) \leq HN$. Так как

$$|HN:H(N\cap M)| = \frac{|H||N||H\cap N\cap M|}{|H\cap N||H||N\cap M|} = |N:(N\cap M)| \in \mathbb{P},$$

то $|HN:H(N\cap M)| \in \mathbb{P}$. Применяя индукцию к группе M, в которой подгруппа $N\cap M$ нормальна, а подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна, заключаем, что подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна в $H(N\cap M)$. Значит, подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна в HN по лемме 3 (1). □

Лемма 5. *Если H – слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G и $N \lhd G$, то справедливы следующие утверждения:*

(1) *подгруппа HN слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G;*

(2) *подгруппа HN/N слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N;*

(3) *если $N \leq U \leq G$ и U/N – слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G/N, то U – слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G.*

Доказательство. Пусть $H = \langle H_1, H_2\rangle$, где H_1 субнормальна в G, а H_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в G.

(1) Согласно лемме 2 (2) подгруппа H_1N субнормальна в G, а по лемме 3 (2) подгруппа H_2N $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Так как $HN = \langle H_1N, H_2N\rangle$, то подгруппа HN слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G.

(2) Ясно, что факторгруппа $HN/N = \langle H_1N/N, H_2N/N\rangle$. По лемме 2 (1) подгруппа H_1N/N субнормальна в G/N, а по лемме 3 (2) подгруппа H_2N/N $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N. Поэтому HN/N слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N.

(3) Пусть $N \leq U \leq G$ и U/N – слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G/N. Тогда $U/N = \langle U_1/N, U_2/N\rangle$, где U_1/N субнормальна в G/N, а U_2/N $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N. По лемме 2 (3) подгруппа U_1 субнормальна в G, а по лемме 3 (3) подгруппа U_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Так как $U = \langle U_1, U_2\rangle$, то U – слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G. □

Лемма 6 [3, лемма 3.1]. (1) *Пусть $H \leq U \leq G$. Если H $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в U, а U $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в G, то H $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в G.*

(2) *Если H – $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G, а N – нормальная подгруппа группы G, то подгруппа HN $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в G.*

Лемма 7. *Каждая $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа разрешимой группы G является $\mathbb{P}$-субнормальной в G подгруппой.*

Доказательство. Пусть H – $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа разрешимой группы G. Согласно определению 3 существует цепочка подгрупп (1) такая, что либо H_i нормальна в H_{i+1}, либо $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}$ для каждого i. Если $H = G$ или $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}$ для каждого i, то H $\mathbb{P}$-субнормальна в G по определению 2. Пусть для некоторого i подгруппа H_i нормальна в H_{i+1}. Так как H_{i+1} разрешима, то используя ее композиционный ряд, можно построить цепочку подгрупп $H_i = V_0 < V_1 < \ldots < V_{m-1} < V_m = H_{i+1}$ такую, что $|V_{j+1} : V_j| \in \mathbb{P}$ для каждого j. Поступая так с каждой парой подгрупп $H_i \lhd H_{i+1}$, получим $\mathbb{P}$-субнормальность подгруппы H в группе G. □

Теорема 1. (1) *В группе каждая слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа является $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой.*

(2) *В разрешимой группе G для подгруппы H следующие утверждения эквивалентны:*

(2.1) *H – слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G;*

(2.2) *H – $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G;*

(2.3) *H – $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G.*

(3) *В разрешимой группе каждая слабо субнормальная подгруппа является $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой.*

Доказательство. (1) Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть $H = \langle H_1, H_2 \rangle$ – слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G и M – максимальная подгруппа группы G, содержащая H. Здесь H_1 субнормальна в G, H_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Согласно лемме 1 $M_{sG} = M_G$, поэтому $H_1 \le M_G$ и $H = \langle H_1, H_2 \rangle \le M_G H_2 \le M < G$. Так как подгруппа H_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то $H_2 M_G$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G согласно лемме 3 (2). По лемме 4 подгруппа H_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в $H_2 M_G$. Поэтому подгруппа H слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в $H_2 M_G$. По индукции подгруппа H K$\mathbb{P}$-субнормальна в $H_2 M_G$. Таким образом, H K$\mathbb{P}$-sn $H_2 M_G$, а $H_2 M_G$ $\mathbb{P}$-sn G. Согласно лемме 6 (1), подгруппа H K$\mathbb{P}$-субнормальна в G.

(2) Если H – слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G, то согласно утверждению (1) подгруппа H K$\mathbb{P}$-субнормальна в группе G, поэтому из (2.1) вытекает (2.2). Если H – K$\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа разрешимой группы G, то согласно лемме 7 подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна в группе G, поэтому из (2.2) следует (2.3). Так как каждая $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа является слабо $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой, то (2.3) $\Rightarrow$ (2.1).

(3) Вначале проверим, что в разрешимой группе каждая полунормальная подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна. Пусть A – полунормальная подгруппа группы G. Согласно определению полунормальной подгруппы, см. определение 1, существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и A перестановочна с каждой подгруппой из B. Пусть

$$B = B_0 \le B_1 \le \ldots \le B_{m-1} \le B_m = B$$

– композиционный ряд группы B. Поскольку подгруппа B разрешима, то $|B_i : B_{i-1}| \in \mathbb{P}$ для каждого $i = 1, 2, \ldots m$. Так как подгруппа A перестановочна с каждой подгруппой B_i, то AB_i – подгруппа группы G и можно построить цепочку подгрупп

$$AB = AB_0 \le AB_1 \le \ldots \le AB_{m-1} \le AB_m = AB = G$$

такую, что

$$|AB_i : AB_{i-1}| = \frac{|A||B_i||A \cap B_{i-1}|}{|A \cap B_i||A||B_{i-1}|} = \frac{|B_i : B_{i-1}|}{|(A \cap B_i) : (A \cap B_{i-1})|}$$

делит $|B_i : B_{i-1}| \in \mathbb{P}$. Значит, A – $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G.

Пусть $H = \langle H_1, H_2 \rangle$ – слабо субнормальная подгруппа разрешимой группы G, подгруппа H_1 субнормальна в G, H_2 полунормальна в G. Согласно доказанному подгруппа H_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в G и $H = \langle H_1, H_2 \rangle$ будет слабо $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой группы G. По утверждению (2) подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна в G. $\square$

Лемма 8. *Пусть в группе G существует холлова подгруппа H.*

(1) *Если H слабо субнормальна в G, то H полунормальна в G.*

(2) *Если H слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то H $\mathbb{P}$-субнормальна в G.*

Доказательство. Пусть H – π-холлова подгруппа группы G для некоторого $\pi \subseteq \pi(G)$. Если $H_1 \le H$ и H_1 субнормальна в G, то H_1^G – π-группа согласно лемме 2 (4) и $H_1^G \le H$.

(1) Если H слабо субнормальна в G, то $H = \langle H_1, H_2 \rangle$, где H_1 субнормальна в G, а H_2 полунормальна в G. Поскольку $H = H_1^G H_2$, то H полунормальна в G по лемме [7, лемма 1 (2)].

(2) Если H слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то $H = \langle H_1, H_2 \rangle$, где H_1 субнормальна в G, а H_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Поскольку $H = H_1^G H_2$, то H $\mathbb{P}$-субнормальна в G по лемме 3 (2). $\square$

Заметим, что K$\mathbb{P}$-субнормальная холлова подгруппа (в частности, силовская подгруппа) может быть не $\mathbb{P}$-субнормальной. Например, в группе $G = C_7 \times A_6$ силовская 7-подгруппа C_7 нормальна, а значит, и K$\mathbb{P}$-субнормальна, но не $\mathbb{P}$-субнормальна.

Лемма 9. *Пусть R – r-подгруппа группы G. Предположим, что R* K$\mathbb{P}$*-субнормальна в G. Если $r = \max \pi(G)$, то R субнормальна в G.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. В силу леммы 2 (4) субнормальность r-подгруппы R равносильна тому, что $R \le O_r(G)$. Ясно, что $R < G$.

Согласно определению 3, существует цепочка подгрупп

$$R = H_0 < H_1 < \ldots < H_{n-1} = K < H_n = G$$

такая, что либо подгруппа H_i нормальна в H_{i+1}, либо $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}$ для каждого i. Так как R – r-подгруппа в K и R $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в $K < G$, то R субнормальна в K по индукции и $R \leq O_r(K)$. Если K нормальна в G, то $O_r(K)$ субнормальна в G, поэтому

$$R \leq O_r(K) \leq O_r(G),$$

что и требовалось доказать. Пусть K не нормальна в G. Тогда $|G : K| = t \in \mathbb{P}$ и $t \leq r = \max \pi(G)$. Если $t = r$ и G_r – силовская r-подгруппа группы G, содержащая $O_r(K)$, то

$$G = KG_r,\ O_r(K)^G = O_r(K)^{KG_r} = O_r(K)^{G_r} \leq G_r.$$

Поэтому $R \leq O_r(K) \leq O_r(G)$, что и требовалось доказать. Пусть $t < r$. Тогда факторгруппа G/K_G изоморфна подгруппе симметрической группы степени t, поэтому G/K_G является r'-группой и силовская r-подгруппа группы G содержится в K_G. Значит, $R \leq O_r(K) \leq K_G \lhd G$ и опять R субнормальна в G. □

2. Группы со слабо $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами.

Теорема 2. *Пусть R – силовская r-подгруппа группы G. Предположим, что R слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $r > 2$, то G r-разрешима;*

(2) *если в группе G силовская 3-подгруппа и силовская 5-подгруппа слабо $\mathbb{P}$-субнормальны в G, то G разрешима;*

(3) *если $r = \max \pi(G)$, то R нормальна в G;*

(4) *если G – простая группа, то $r = 2$ и*

$$G \in \mathfrak{X} = \{PSL(2,7), PSL(2,11), SL(3,5), SL(2,2^n), 2^n + 1 = p \in \mathbb{P}\}.$$

Доказательство. (1) Пусть R – силовская r-подгруппа, слабо $\mathbb{P}$-субнормальная в G. Тогда $R = \langle R_1, R_2 \rangle$, где R_1 субнормальна в G, R_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Заметим, что $R_1 \leq O_r(G) \leq R$ по лемме 2 (4), поэтому $R = \langle R_1, R_2 \rangle \leq O_r(G)R_2 = R$. По лемме 3 (2) подгруппа $R = O_r(G)R_2$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Согласно [8, теорема 2.1] группа G r-разрешима.

(2) Пусть в группе G силовская 3-подгруппа и силовская 5-подгруппа слабо $\mathbb{P}$-субнормальны. Тогда по (1) группа G 3-разрешима и 5-разрешима. Значит, имеется нормальный ряд, факторы которого являются 3-группами, 5-группами или $\{3,5\}'$-группами. Так как $\{3,5\}'$-группы разрешимы [9], то группа G разрешима.

(3) По теореме 1 (1) подгруппа R $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в G, а по лемме 9 подгруппа R нормальна в G.

(4) Пусть R – силовская r-подгруппа, слабо $\mathbb{P}$-субнормальная в G, и группа G простая. Тогда $R = \langle R_1, R_2 \rangle$, где R_1 субнормальна в G, а R_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Так как G простая, то $O_p(G) = 1$ и $R_1 \leq O_p(G) = 1$, поэтому $R = R_2$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Согласно [8, Следствие 2.1.2] $r = 2$ и $G \in \mathfrak{X}$. □

Напомним, что группу, у которой все силовские подгруппы циклические, называют z-группой.

Следствие 1. *Группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда выполняется любое одно из следующих условий:*

(1) *нормализатор каждой силовской подгруппы слабо $\mathbb{P}$-субнормален в группе;*

(2) *каждая холлова подгруппа слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в группе;*

(3) *каждая примарная подгруппа и каждая бипримарная нециклическая z-подгруппа слабо $\mathbb{P}$-субнормальна.*

Доказательство. Согласно [6, лемма 1.1 (2)] в сверхразрешимой группе каждая подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна. Поэтому проверяем только обратные утверждения.

(1) Пусть в группе G нормализатор каждой силовской подгруппы слабо $\mathbb{P}$-субнормален. Согласно теореме 1 (1) нормализатор каждой силовской подгруппы будет $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой. Поскольку каждая подгруппа, содержащая нормализатор силовской подгруппы, самонормализуема [1, лемма 1.67], то нормализатор каждой силовской подгруппы будет $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой. Согласно [10, теорема 4.1.29 (1)] группа G сверхразрешима.

(2) Пусть все холловы подгруппы в группе G слабо $\mathbb{P}$-субнормальны. В частности, все силовские подгруппы будут слабо $\mathbb{P}$-субнормальными в G. По теореме 2 (2) группа G разрешима. Согласно лемме 8 (2) каждая холлова подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна в G и группа G сверхразрешима согласно [10, теорема 4.1.29 (2)].

(3) Пусть каждая примарная подгруппа и каждая бипримарная нециклическая z-подгруппа слабо $\mathbb{P}$-субнормальны. Поскольку в группе G все силовские подгруппы слабо $\mathbb{P}$-субнормальны, то по теореме 2 (2) группа G разрешима. Согласно теореме 1 (2) каждая примарная подгруппа и каждая бипримарная нециклическая z-подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальны. По теореме [10, теорема 4.1.29 (3)] группа G сверхразрешима. □

3. Произведение слабо $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп. Зафиксируем простое число $r \in \pi(G)$. Если группа G содержит нормальную силовскую r-подгруппу, то G называют r-замкнутой. Если группа G содержит нормальную r'-холлову подгруппу, то G называют r-нильпотентной. Группа называется r-разрешимой, если она обладает нормальным рядом, факторы которого являются либо r-группой, либо r'-группой.

Группа G порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ $(p_i \in \mathbb{P},\ i = 1, \dots, n)$ называется *дисперсивной по Оре*, если $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ и G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

Группа, в которой все силовские (все примарные циклические) подгруппы $\mathbb{P}$-субнормальны, называется w-сверхразрешимой группой (v-сверхразрешимой группой соответственно). Группа, в которой все подгруппы Шмидта сверхразрешимы, называется sh-сверхразрешимой группой. Каждая w-сверхразрешимая группа является v-сверхразрешимой, а каждая v-сверхразрешимая группа является sh-сверхразрешимой [11]. Закрепим также обозначение $\mathscr{A}$ за формацией всех групп с абелевыми силовскими подгруппами, а $G^{\mathscr{A}}$ – пересечение всех нормальных подгрупп группы G, факторгруппы по которым принадлежат $\mathscr{A}$.

Нам потребуются следующие утверждения.

Лемма 10. *Пусть группа $G = AB$ – произведение слабо $\mathbb{P}$-субнормальных в G подгрупп A и B. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если подгруппы A и B разрешимы, то группа G разрешима;*

(2) *если A и B дисперсивны по Оре, то G дисперсивна по Оре;*

(3) *если A и B – w-сверхразрешимы, то группа G w-сверхразрешима в каждом из следующих случаев:*

(3.1) *индексы подгрупп A и B в группе G взаимно просты;*

(3.2) *$\mathscr{A}$-корадикал $G^{\mathscr{A}}$ группы G нильпотентен.*

Доказательство. Согласно теореме 1 (1) подгруппы A и B $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальны в группе G. Для $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальных сомножителей A и B все утверждения доказаны в работе [3, 5.2–5.5]. □

Теорема 3. *Пусть группа $G = AB$ – произведение слабо $\mathbb{P}$-субнормальных в G подгрупп A и B. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если A и B r-разрешимы, то G r-разрешима;*

(2) *если A и B r-нильпотентны и $r = \min \pi(G)$, то G r-нильпотентна;*

(3) *если подгруппы A и B r-замкнуты и $r = \max \pi(G)$, то G r-замкнута;*

(4) *если A и B – v-сверхразрешимы и индексы подгрупп $AF(G)$ и $BF(G)$ в группе G взаимно просты, то группа G v-сверхразрешима;*

(5) *если A и B – v-сверхразрешимы и $\mathscr{A}$-корадикал $G^{\mathscr{A}}$ группы G нильпотентен, то группа G w-сверхразрешима;*

(6) *если A и B sh-сверхразрешимы, то G sh-сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть $A = \langle A_1, A_2\rangle$, $B = \langle B_1, B_2\rangle$, где A_1 и B_1 субнормальны в G, а A_2 и B_2 $\mathbb{P}$-субнормальны в G.

(1) Подгруппы A_1^G и B_1^G нормальны в группе G и r-разрешимы по лемме 2 (5). Подгруппа $N = A_1^G B_1^G$ r-разрешима и нормальна в G. Факторгруппа $G/N = (A_2N/N)(B_2N/N)$, где A_2N/N и B_2N/N – $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы в G/N по лемме 3 (2). Согласно [12, теорема 1 (1)] факторгруппа G/N r-разрешима. Поэтому группа G r-разрешима.

(2) Согласно утверждению (1) группа G r-разрешима. Из минимальности $r \in \pi(G)$ получаем, что группа G разрешима. По теореме 1 (2) подгруппы A и B $\mathbb{P}$-субнормальны в G. Согласно [12, теорема 1 (2)] группа G r-нильпотентна.

(3) Согласно теореме 1 (1) подгруппа A $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в группе G. Пусть R_1 – силовская r-подгруппа в A. По условию R_1 нормальна в A, в частности, подгруппа R_1 $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в A. Ввиду леммы 6 (1) подгруппа R_1 $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в группе G. По условию $r = \max \pi(G)$, а по лемме 9 подгруппа $R_1 \leq O_r(G)$. Аналогично, $R_2 \leq O_r(G)$, где R_2 – силовская r-подгруппа в B. Согласно [13, VI.4.6] произведение R_1R_2 – силовская r-подгруппа в G, поэтому $R_1R_2 \leq O_r(G)$ и группа G r-замкнута.

(4) Каждая v-сверхразрешимая группа дисперсивна по Оре [6, лемма 2.4]. Согласно теореме 1 (1) подгруппы A и B $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальны в группе G. По лемме 10 (2) группа G дисперсивна по Оре, в частности, группа G разрешима. Теперь подгруппы A и B $\mathbb{P}$-субнормальны в группе G по теореме 1 (2) и группа G становится v-сверхразрешимой согласно [14, теорема 2].

(5) Согласно [11, теорема 3 (2)] каждая v-сверхразрешимая группа с нильпотентным $\mathscr{A}$-корадикалом $G^{\mathscr{A}}$ является w-сверхразрешимой. Остается применить лемму 10 (3.2).

(6) Каждая sh-сверхразрешимая группа дисперсивна по Оре [14, лемма 6 (2.2)]. Согласно теореме 1 (1) подгруппы A и B $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальны в группе G. По лемме 10 (2) группа G дисперсивна по Оре, в частности, группа G разрешима. Теперь подгруппы A и B $\mathbb{P}$-субнормальны в группе G по теореме 1 (2) и группа G становится sh-сверхразрешимой согласно [14, теорема 1]. □

Непосредственно из теоремы 3 (4), (5) вытекает

Следствие 2. *Пусть A и B – v-сверхразрешимые слабо $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы группы $G = AB$. Тогда группа G v-сверхразрешима в каждом из следующих случаев:*

(1) *индексы подгрупп A и B в группе G взаимно просты;*

(2) *коммутант группы G нильпотентен.*

С учетом [14, следствие 2.2] из теоремы 3 (5) вытекает

Следствие 3. *Если A и B – v-сверхразрешимые слабо $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы группы $G = AB$, то $G^{\mathrm{v}\mathfrak{U}} \leq G^{\mathfrak{N}\mathscr{A}}$.*

Следствие 4. *Пусть A – v-сверхразрешимая слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G и $G = AB$. Тогда группы G v-сверхрзрешима в каждом из следующих случаев:*

(1) *подгруппа B нильпотентна и нормальна в G;*

(2) *подгруппа B нильпотентна и $|G : B|$ – простое число.*

Доказательство. Пусть A – v-сверхразрешимая слабо $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G. По теореме 1 (1) подгруппа A $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в G и дисперсивна по Оре согласно [6, лемма 2.4].

(1) Пусть подгруппа B нильпотентна и нормальна в G. Тогда факторгруппа G/B разрешима, а значит, G разрешима.

(2) Пусть B нильпотентна и $|G:B|$ – простое число. Тогда по определению 2 подгруппа B $\mathbb{P}$-субнормальна в G, в частности, B $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в G. Поэтому группа G дисперсивна по Оре по лемме 10 (2), в частности, группа G разрешима. Следовательно, подгруппа A $\mathbb{P}$-субнормальна в G по теореме 1 (2) и утверждения (1) и (2) справедливы в силу [14, лемма 9]. $\square$

4. Группы со слабо $\mathbb{P}$-субнормальными B-подгруппами. Ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта. Я. Г. Беркович предложил [15] называть B-группой группу, у которой факторгруппа по подгруппе Фраттини является группой Шмидта. B-группы называют также обобщенными группами Шмидта. Следуя [16], группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной силовской q-подгруппой будем называть $S_{\langle p,q\rangle}$-группой. B-группу, у которой $B/\Phi(B)$ является $S_{\langle p,q\rangle}$-группой, будем называть $B_{\langle p,q\rangle}$-группой.

Лемма 11 [8, лемма 1.6]. *Пусть U – нормальная в группе V подгруппа и V/U является $B_{\langle p,q\rangle}$-группой. Если H – наименьшая в V подгруппа такая, что $HU=V$, то H будет $B_{\langle p,q\rangle}$-группой.*

Лемма 12. *Пусть в группе G все B-подгруппы слабо $\mathbb{P}$ -субнормальны и N – нормальная подгруппа группы G. Тогда в факторгруппе G/N все B-подгруппы слабо $\mathbb{P}$-субнормальны.*

Доказательство. Пусть K/N – $B_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из G/N. По лемме 11 в K существует $B_{\langle p,q\rangle}$-группа L такая, что $K=LN$. По условию подгруппа L слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Из леммы 5 (2) следует, что K/N слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N. $\square$

Лемма 13 [17, лемма 4]. *Если группа G не p-нильпотентна, то в G существует подгруппа Шмидта с неединичной нормальной силовской p-подгруппой.*

Лемма 14 [8, лемма 1.8 (1)]. *Если в группе G нет $B_{\langle p,q\rangle}$-подгрупп для всех $q\in\pi(G)$, то группа G p-нильпотентна.*

Теорема 4. (1) *Если в группе G все B-подгруппы слабо $\mathbb{P}$-субнормальны, то G метанильпотентна.*

(2) *Пусть p – наибольший простой делитель порядка группы G. Если в группе G каждая $B_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа слабо $\mathbb{P}$-субнормальна для всех $q\in\pi(G)$, то факторгруппа $G/O_p(G)$ p-нильпотентна; в частности, группа G p-разрешима.*

Доказательство. (1) В силу леммы 12 условия теоремы наследуют все факторгруппы группы G. Будем использовать индукцию по порядку группы. Зафиксируем $p=\max\pi(G)$.

Пусть G не p-нильпотентна. Тогда в группе G существует $S=[P]Q$ – подгруппа Шмидта, которая p-замкнута по лемме 14. По условию S слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G, а по теореме 1 (1) подгруппа S $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в G. Подгруппа P – нормальная силовская p-подгруппа в S, в частности, подгруппа P $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в S. По лемме 6 (1) подгруппа P $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в группе G. По лемме 9 $P\le O_p(G)$. По индукции факторгруппа $G/O_p(G)$ метанильпотентна, в частности, разрешима, значит, G разрешима.

Пусть теперь G p-нильпотентна. Тогда $G=[G_{p'}]G_p$, где $G_{p'}$ – нормальная p'-холлова подгруппа. Пусть H – B-подгруппа в $G_{p'}$. По условию $H=\langle H_1,H_2\rangle$ слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G, где H_1 субнормальна в G, H_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Так как $H\le G_{p'}$, то $H_1 \lhd\lhd G_{p'}$. По лемме 3 (4) подгруппа H_2 $\mathbb{P}$-субнормальна в $G_{p'}$ и H слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в $G_{p'}$. По индукции $G_{p'}$ метанильпотентна, в частности, разрешима, поэтому факторгруппа $G/G_{p'}$ разрешима и группа G разрешима.

Значит, группа G разрешима и по теореме 1 (2) каждая B-подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна. Согласно [8, теорема 3.1] группа G метанильпотентна.

(2) Если в группе G нет $B_{\langle p,q \rangle}$-подгрупп для всех $q \in \pi(G)$, то по лемме 14 группа G p-нильпотентна и утверждение справедливо. Тогда следует считать, что в группе G есть $B_{\langle p,q \rangle}$-подгруппы. Пусть $p = \max \pi(G)$ и каждая $B_{\langle p,q \rangle}$-подгруппа слабо $\mathbb{P}$-субнормальна для любого $q \in \pi(G)$. Пусть $H = [H_p]H_q$ – $B_{\langle p,q \rangle}$-подгруппа в G, где H_p – нормальная силовская p-подгруппа в H и H_q – циклическая силовская q-подгруппа в H. В частности, H_p $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в H. По условию подгруппа H слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G, по теореме 1 (1) H $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в G. По лемме 6 (1) H_p $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в G. Из максимальности p и леммы 9 получаем, что $H_p \leq O_p(G)$. Следовательно, группа G непростая и $O_p(G) \neq 1$.

Рассмотрим факторгруппу $\overline{G} = G/O_p(G)$. Пусть $\overline{G}$ не p-нильпотентна, тогда по лемме 14 в $\overline{G}$ существует $B_{\langle p,q \rangle}$-подгруппа $\overline{A} = A/O_p(G)$, которая p-замкнута. Согласно лемме 11 подгруппа $A = TO_p(G)$, где $T = [T_p]T_q$ – $B_{\langle p,q \rangle}$-подгруппа из A. Подгруппа T_p нормальна в T, в частности, $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в T. По условию T слабо $\mathbb{P}$-субнормальна в G, а по теореме 1 (1) подгруппа T $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в G. По лемме 6 (1) подгруппа T_p $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальна в G. Тогда из максимальности p и леммы 9 получаем, что $T_p \leq O_p(G)$ и подгруппа $\overline{A}$ – q-подгруппа. Получили противоречие с выбором группы $\overline{G}$. Следовательно, $G/O_p(G)$ p-нильпотентна, в частности, группа G p-разрешима. □

Следующий пример показывает, что метанильпотентность группы в теореме 4 (1) нельзя ослабить до нильпотентности коммутанта.

Пример. У группы $G = S_3 \wr C_2$ ([18, SmallGroup(72,40)]) коммутант $G' \cong [C_3]S_3$ ненильпотентен. Поскольку любая максимальная в G подгруппа непростого индекса изоморфна силовской 2-подгруппе, то каждая B-подгруппа группы G будет $\mathbb{P}$-субнормальной в G подгруппой.

Литература

1. *Монахов В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйш. шк., 2006.

2. *Хуан Ц., Ху Б., Скиба А. Н.* Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 1. С. 210–220.

3. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальных подгруппах конечной группы // Математические заметки. 2014. Т. 95, № 4. С. 517–528.

4. *Nyhoff L. R.* The influence on a finite group of the cofactors and subcofactors of its subgroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 154. P. 459–491.

5. *Lennox J. C., Stonehewer S. E.* Subnormal subgroups of groups. Oxford: Clarendon Press., 1987.

6. *Монахов В. С.* Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 447–462.

7. *Монахов В. С.* Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой // Математические заметки. 2006. Т. 80, № 4. С. 373–381.

8. *Монахов В. С., Княгина В. Н.* Конечные группы с $\mathbb{P}$-субнормальной силовской подгруппой // Укр. мат. журн. 2021. Т. 72, № 10. С. 1571–1578.

9. *Gorenstein D.* Finite simple groups. An introduction to their classification. New York: Plenum Press., 1982.

10. *Трофимук А. А.* Конечные факторизуемые группы с органичениями на сомножители. Минск: Изд. центр БГУ, 2021.

11. *Монахов В. С.* О трех формациях над $\mathfrak{U}$ // Мат. заметки. 2021. Т. 110, № 3. С. 358–367.

12. *Monakhov V., Kniahina V.* Finite factorised groups with partially solvable $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Lobachevskii J. Math. 2015. Vol. 36, N 4. P. 441–445.

13. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1967.
14. *Монахов В. С.* Конечные факторизуемые группы с $\mathbb{P}$-субнормальными *v*-сверхразрешимыми и *sh*-сверхразрешимыми сомножителями // Математические заметки. 2022. Т. 111, № 3. С. 403–410.
15. *Berkovich Y. G., Janko Z.* Groups of Prime Power Order. I. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2011.
16. *Монахов В. С.* Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Укр. мат. конгресс / Ин-т математики НАН Украины. Киев, 2002. С. 81–90.
17. *Монахов В. С., Трофимук А. А.* О конечных разрешимых группах фиксированного ранга // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 1123–1137.
18. *«The GAP Group: GAP – Groups, Algorithms, and Programming»*, Ver. 4.11.1 released on 02-03-2021 [Electronic resourse]. – Mode of access: http://www.gap-system.org.

S. I. Lendziankova

On weakly $\mathbb{P}$-subnormal subgroups of finite groups

Summary

A subgroup H of a finite group G is called a *weakly $\mathbb{P}$-subnormal subgroup* if H is generated by two subgroups, one of which is subnormal in G, and the other one can be connected to G by a subgroup chain with prime indexes. We establish the properties of weakly $\mathbb{P}$-subnormal subgroups and one makes possible to extend the known results on finite groups with sets of $\mathbb{P}$-subnormal subgroups to finite groups with weakly $\mathbb{P}$-subnormal subgroups. In particular, we prove that a finite group with weakly $\mathbb{P}$-subnormal normalizers of Sylow subgroups is supersolvable and a group with weakly $\mathbb{P}$-subnormal B-subgroups is metanilpotent.