Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 2. С. 28–33

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ЧАСТИЧНО РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ С ТРАНЗИТИВНЫМ ОТНОШЕНИЕМ π-КВАЗИНОРМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПОДГРУПП

И. М. Дергачева, Е. А. Задорожнюк, И. П. Шабалина

Белорусский государственный университет транспорта
e-mail: irina.dergacheva.76@mail.ru
Поступила 18.12.2023

На протяжении всей статьи все группы конечны. Говорят, что подгруппа A группы G π-квазинормальна в G, если A 1π-субнормальна и модулярна в G. Доказано, что если группа G π_0-разрешима и π-квазинормальность является транзитивным отношением в G, где $\pi_0 = \pi(D)$ и D – π-специальный корадикал группы G, то D – абелева холлова подгруппа нечетного порядка в G.

1. Введение. На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу; $\mathscr{L}(G)$ – решетка всех подгрупп группы G, $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел; $\pi = \{p_1, \ldots, p_t\} \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Группа G называется *π-специальной* [1–3], если

$$G = O_{p_1}(G) \times \cdots \times O_{p_n}(G) \times O_{\pi'}(G).$$

Пересечение всех таких нормальных подгрупп N группы G, для которых факторгруппа G/N является π-специальной, называется *π-специальным корадикалом* G.

Подгруппа A группы G называется *1π-субнормальной* в G [4–6], если A $\mathfrak{F}$-субнормальна в *смысле Кегеля* [7] или *K-$\mathfrak{F}$-субнормальна* в G [8], где $\mathfrak{F}$ – класс всех π'-групп, т. е. в G имеется цепь подгрупп

$$A = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \cdots \leqslant A_n = G,$$

такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ – π'-группа для всех $i = 1, \ldots, n$.

Подгруппа A группы G называется *модулярной* в G, если M – модулярный элемент (в *смысле Куроша* [9, с. 43]) решетки $\mathscr{L}(G)$, т. е. (i) $\langle X, M \cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ для всех $X \leqslant G, Z \leqslant G$ таких, что $X \leqslant Z$ и (ii) $\langle M, Y \cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y \leqslant G, Z \leqslant G$ таких, что $M \leqslant Z$.

Подгруппа A группы G называется *квазинормальной* (Оре) или *перестановочной* (Стоунхьюэр) в G, если A перестановочна с каждой подгруппой H группы G, т. е. $AH = HA$. Каждая квазинормальная подгруппа, очевидно, модулярна в группе. Кроме того, общеизвестен следующий интересный факт.

Теорема A (Шмидт [9, теорема 5.1.1]). *Подгруппа A группы G квазинормальна в G тогда и только тогда, когда A субнормальна и модулярна в G.*

Теорема A позволяет определить следующий π-аналог квазинормальности.

Определение 1.1. Мы говорим, что подгруппа A группы G π-квазинормальна в G, если A 1π-субнормальна и модулярна в G.

Понятно, что подгруппа A квазинормальна в G тогда и только тогда, когда A π-квазинормальна в G, где π – множество всех простых групп.

В данной работе, обобщая соответствующий результат работы Цахера [10] о разрешимых PT-группах, мы доказываем следующий факт.

Теорема B. *Пусть D – π-специальный корадикал группы G и G является π_0-разрешимой группой, где $\pi_0 = \pi(D)$. Если π-квазинормальность является транзитивным* *отношением в G, то D – абелева холлова подгруппа в G, имеющая нечетный порядок, и каждый главный фактор группы G ниже D является циклическим.*

2. Некоторые предварительные результаты. Мы используем $\mathfrak{S}_{1\pi}$ для обозначения класса всех π-специальных групп.

Первая лемма может быть доказана прямой проверкой.

Лемма 2.1. *Класс $\mathfrak{S}_{1\pi}$ замкнут относительно взятия прямых произведений, гомоморфных образов и подгрупп. Более того, если E является нормальной подгруппой в G и $E/(E\cap\Phi(G))$ является π-специальной группой, то E является π-специальной.*

Ввиду леммы 2.1 и предложения 2.2.8 в [8] имеет место следующая

Лемма 2.2. *Если N – нормальная подгруппа в G, тогда*

$$(G/N)^{\mathfrak{S}_{1\pi}} = G^{\mathfrak{S}_{1\pi}}N/N.$$

Лемма 2.3 (см. лемму 2.6 в [11]). *Пусть A, K и N – подгруппы G. Предположим, что A 1π-субнормальна в G, а N нормальна в G. Тогда:*

(1) *$A\cap K$ 1π-субнормальна в K;*

(2) *если $N \leqslant K$ и K/N 1π-субнормальна в G/N, то K является σ-субнормальной в G;*

(3) *если $K \leqslant E \leqslant G$, где K 1π-субнормальна в E, тогда KN/N 1π-субнормальна в NE/N.*

Все утверждения следующей леммы вытекают из соответствующих утверждений леммы 2.3 и общих свойств модулярных подгрупп [9, с. 201].

Лемма 2.4. *Пусть A, B и N – подгруппы группы G, где A π-квазинормальна, а N нормальна в G. Тогда:*

(1) *подгруппа $A\cap B$ π-квазинормальна в B;*

(2) *подгруппа AN/N π-квазинормальна в G/N;*

(3) *если $N \leqslant B$ и B/N π-квазинормальна в G/N, то B π-квазинормальна в G.*

Говорят, что подгруппа A группы G является *π-субквазинормальной* в G, если существует цепь подгрупп

$$A = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \cdots \leqslant A_n = G$$

такая, что A_{i-1} π-квазинормальна в A_i для всех $i = 1,\ldots,n$.

Понятно, что π-квазинормальность является транзитивным отношением в G тогда и только тогда, когда каждая π-субквазинормальная подгруппа G является π-квазинормальной в G.

Следующая лемма является следствием леммы 2.4 данной работы и лемм 1 и 4 работы [12].

Лемма 2.5. *Пусть A, B и N – подгруппы группы G, где A π-субквазинормальна в G, а N нормальна в G. Тогда:*

(1) *$A\cap B$ является π-субквазинормальным в B;*

(2) *AN/N π-субквазинормальна в G/N;*

(3) *если $N \leqslant K$ и подгруппа K/N является π-субквазинормальным в G/N, то K π-субквазинормальна в G.*

Лемма 2.6 (см. лемма 1.2.16 в [13]). *Если A – квазинормальная p-подгруппа G, то $O^p(G) \leqslant N_G(A)$.*

3. Доказательство теоремы B. Предположим, что теорема неверна, и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда $D \neq 1$.

(1) *Если R – неединичная нормальная подгруппа группы G, то заключение теоремы выполняется для G/R.*

Если H/R – π-субквазинормальная подгруппа группы G/R, то H π-субквазинормальна в G по лемме 2.5(3). Поэтому H π-квазинормальна в G по условию теоремы и, значит, H/R

является π-квазинормальной в G/R по лемме 2.4(2). Следовательно, π-квазинормальность является транзитивным отношением в G/R. Поэтому имеет место (1) по выбору G.

(2) *Если E – собственная π-субквазинормальная подгруппа группы G, то $E^{\mathfrak{G}_{1\pi}} \leqslant D$ и заключение теоремы выполняется для E.*

Каждая π-субквазинормальная подгруппа H группы E π-субквазинормальна в G, поэтому по условию H π-квазинормальна в G, а значит, H π-квазинормальна в E по лемме 2.4(1). Следовательно, гипотеза верна для E, поэтому заключение теоремы выполняется для E в силу выбора G. Кроме того, поскольку $G/D \in \mathfrak{G}_{1\pi}$ и $\mathfrak{G}_{1\pi}$ – наследственный класс по лемме 2.1, то

$$E/(E \cap D) \simeq ED/D \in \mathfrak{G}_{1\pi}$$

и поэтому $E/(E \cap D) \in \mathfrak{G}_{1\pi}$. Следовательно, $E^{\mathfrak{G}_{1\pi}} \leqslant E \cap D \leqslant D$.

(3) *подгруппа D нильпотентна и каждый главный фактор H/K группы G ниже D является циклическим.*

Предположим, что это утверждение неверно, и пусть R – минимальная нормальная подгруппа G. Прежде покажем, что $R \leqslant D$. В силу леммы 2.2 и утверждения (1), $RD/R = (G/R)^{\mathfrak{G}_{1\pi}}$ – абелева группа и каждый главный фактор $(H/R)/(K/R)$ группы G/R ниже RD/R является циклическим. Предположим, что $R \cap D = 1$. Тогда

$$D \simeq D/1 = D/(D \cap R) \simeq RD/R$$

нильпотентна. Ввиду G-изоморфизма $D \simeq RD/R$. Каждый главный фактор группы G ниже D является циклическим. Таким образом, $R \leqslant D$ и поэтому каждый главный фактор группы G/R между DR/R и R/R является циклическим.

Поскольку G $\pi(D)$-разрешима, R является p-группой для некоторого простого числа p. Пусть V – максимальная подгруппа в R. Тогда $V_G = 1$ и V π-субквазинормальна в G. Поэтому V π-квазинормальна в G. Допустим, что $V \neq 1$. Тогда $R = V^G$ – группа порядка p согласно [9, теорема 5.2.3], противоречие. Следовательно, $V = 1$ и поэтому $|R| = p$. Таким образом, каждый главный фактор группы G ниже D является циклическим ввиду теоремы Жордана–Гельдера для главных рядов.

Покажем, что D нильпотентна. Предположим, что G имеет минимальную нормальную подгруппу $N \neq R$. Тогда $N \leqslant D$ и $D \simeq D/(N \cap R)$ нильпотентна. Предположим теперь, что R – единственная минимальная нормальная подгруппа G. Тогда, ввиду леммы 2.2, имеет место $R \nleqslant \Phi(G)$ поскольку $D \neq 1$ и поэтому $R = C_G(R) = O_p(G) = F(G)$ согласно [14, гл. A, 13.8(b) и 15.2]. Но $|R| = p$. Значит, $G/R = G/C_G(R)$ циклическая группа и, следовательно, G сверхразрешима. Но тогда

$$D = G^{\mathfrak{G}_{1\pi}} \leqslant G' \leqslant F(G)$$

и поэтому D нильпотентна. Отсюда имеем (3).

(4) *Каждая подгруппа группы $F(G)$ является квазинормальной в G, а каждая подгруппа группы D нормальная в D* (это следует из утверждения (3), леммы 1.6 и теоремы A, поскольку каждая субнормальная подгруппа является π-субквазинормальной в группе).

(5) *D – холлова подгруппа группы G. Следовательно, D имеет дополнение M в G.*

Предположим, что это неверно, и пусть P – силовская p-подгруппа группы D и G_p – силовская p-подгруппа группы G такие, что $1 < P < G_p$, $G_p \leqslant H$, где либо $H = G_p$ и $p \in \pi$, либо H – холлова π'-подгруппа в G.

(a) *$D = P$ – минимальная нормальная подгруппа в G. Следовательно, H нормальна в G и $|D| = p$, поэтому $G_p \leqslant C_G(D)$.*

Пусть R – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в D. Тогда R является q-группой для некоторого простого числа q ввиду (3). Более того, ввиду леммы 2.2, $D/R = (G/R)^{\mathfrak{S}_{1\pi}}$ является холловой подгруппой группы G/R по утверждению (1) и тогда H/D нормальна в G/D поскольку G/D π-специальна согласно лемме 2.1. Значит, H нормальна в G.

Предположим, что $PR/R \neq 1$. Тогда $PR/R \in \mathrm{Syl}_p(G/R)$. Если $q \neq p$, то $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Это противоречит тому, что $P < G_p$. Следовательно, $q = p$, поэтому $R \leqslant P$ и значит, $P/R \in \in \mathrm{Syl}_p(G/R)$ и мы снова получаем, что $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Это противоречие показывает, что $PR/R = 1$, откуда следует, что $R = P$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в D. Поскольку D нильпотентна по утверждению (3), то p'-дополнение S группы D является характеристической подгруппой в D, а значит, нормальной в G. Следовательно, $S = 1$, откуда следует, что $R = D = P$. Наконец, ввиду (3), $|D| = p$ и поэтому $D \leqslant Z(G_p)$. Следовательно, $G_p \leqslant C_G(D)$.

(b) $D \nleqslant \Phi(G)$. *Следовательно, для некоторой максимальной подгруппы M группы G имеет место равенство $G = D \rtimes M$.*

Это следует из утверждения (a) и леммы 2.2, так как G не π-специальна.

(c) *Если в G имеется минимальная нормальная подгруппа $L \neq D$, то $G_p = D \times L$ – нормальная абелева подгруппа в G. Следовательно, $O_{p'}(G) = 1$.*

Действительно, $DL/L \simeq D$ – холлова подгруппа группы G/L по утверждениям (1) и (a). Следовательно, $G_pL/L = DL/L$, поэтому $G_p = D \times (L \cap G_p)$. Но $D < G_p$ и поэтому $L \cap G_p \neq 1$, что влечет $L \cap G_p = L$ поскольку G p-разрешима по условию. Таким образом, $G_p = D \times L$ и $O_{p'}(G) = 1$.

(d) *$V = C_G(D) \cap M$ – нормальная подгруппа в G и $C_G(D) = D \times V \leqslant H$.*

Ввиду утверждений (a) и (b), $C_G(D) = D \times V$, где $V = C_G(D) \cap M$ – нормальная подгруппа в G. Более того, $V \simeq DV/D$ π-специальна по лемме 2.1. Таким образом, $V = O_\pi(V) \times O_{\pi'}(V)$.

Пусть W – холловская π'-подгруппа в V. Тогда подгруппа W характеристична в V и поэтому она нормальна в G. Предположим, что $p \in \pi$. Тогда $W \leqslant O_{p'}(G) = 1$ и поэтому V – p-группа. Следовательно, $C_G(D) \leqslant G_p = H$. Пусть теперь $p \in \pi'$ и пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в V. Тогда L – p-группа ввиду (c). Значит, $V = O_{\pi'}(V) \leqslant H$ и поэтому $C_G(D) = D \times V \leqslant H$.

(e) *В G имеется минимальная нормальная подгруппа L, где $D \neq L \leqslant M$. Следовательно, $G_p = D \times L$ – нормальная абелева p-подгруппа в G.*

Предположим, что D является единственной минимальной нормальной подгруппой в G. Тогда $D = C_G(D)$ согласно [15, гл. A, 15.2], поскольку $D \nleqslant \Phi(G)$ согласно (b). Однако $D < G_p \leqslant C_G(G)$ согласно (a). Это противоречие показывает, что в G имеется минимальная нормальная подгруппа $N \neq D$. Значит, $G_p = D \times N$ – нормальная элементарная абелева подгруппа в G ввиду (c). Но тогда $G_p \cap DM = D(G_p \cap M)$, где $G_p \cap M$ – неединичная нормальная подгруппа в G и поэтому для некоторой минимальной нормальной подгруппы L группы G имеет место $D \neq L \leqslant M$ и $G_p = D \times L$ – нормальная абелева p-подгруппа в G.

(f) *Каждая подгруппа группы G_p является нормальной в G. Таким образом, $|D| = |L| = p$.*

Пусть $A \leqslant G_p$. Тогда A квазинормальна в G ввиду (4), поэтому ввиду (e) имеем $G = G_pO^p(G) \leqslant N_G(A)$ согласно лемме 2.6.

(g) *Заключительное противоречие для* (5).

Ввиду (d), $C_G(D) \leqslant H$, где $H = G_p$, если $p \in \pi$ и H – холлова π'-подгруппа в G, если $p \in \pi'$.

Согласно (e) и (f), $G_p = D \times L$, где $|D| = |L| = p$ и L – минимальная нормальная подгруппа G, содержащаяся в M, и каждая подгруппа G_p нормальна в G.

Пусть $D = \langle a \rangle$, $L = \langle b \rangle$ и $N = \langle ab \rangle$. Тогда $L \neq N \neq D$, поэтому в силу G-изоморфизмов

$$G_p/N = DN/N \simeq D \simeq L \simeq LN/N = G_p/N$$

мы получаем, что $C_G(D) = C_G(L) = C_G(G_p)$ и $G/C_G(D) = G/C_G(L) = G/C_G(G_p)$.

Прежде предположим, что $p \in \pi$. Тогда $C_G(L) \leqslant G_p$. С другой стороны, $L \leqslant M$, где $M \simeq G/D$ π-специальна, и поэтому

$$M = O_{p_1}(M) \times \cdots \times O_{p_n}(M) \times O_{\pi'}(M),$$

где $p_1, \ldots, p_n \in \pi$ и

$$O_{\pi'}(M) \leqslant C_G(L) \leqslant G_p \leqslant O_\pi(M).$$

Это показывает, что $O_{\pi'}(M) = 1$ и поэтому M – нильпотентная π-группа. Следовательно, M и G – p-группы.

Полученное противоречие показывает, что $p \in \pi'$ и поэтому $C_G(D) \leqslant H$, где H – холлова π'-подгруппа в G. Но

$$O_{p_1}(M) \times \cdots \times O_{p_n}(M) \leqslant C_G(D)$$

и поэтому

$$O_{p_1}(M) \times \cdots \times O_{p_n}(M) = 1.$$

Следовательно, M, и поэтому G, являются π'-группами. Следовательно, G π-специальна. Полученное противоречие завершает доказательство (5).

(6) *Если p – простое число и $(p-1, |G|) = 1$, тогда $(p, |D|) = 1$. Следовательно наименьшее простое число в $\pi(G)$ принадлежит $\pi(|G : D|)$. В частности, $|D|$ нечетно, а значит, D абелева.*

Предположим, что p делит $|D|$. Тогда D имеет максимальную подгруппу E такую, что $|D : E| = p$ и E нормальна в G ввиду утверждений (3) и (5). Отсюда следует, что $C_G(D/E) = G$, поскольку $(p-1, |G|) = 1$, т. е. $D/M \leqslant Z(G/M)$. Но G/D нильпотентна. Следовательно, G/M нильпотентна и, значит, $D \leqslant M < D$, противоречие. Следовательно, наименьшее простое число в $\pi(G)$ принадлежит $\pi(|G : D|)$. В частности, $|D|$ нечетно, и поэтому D абелева, поскольку ввиду (4) D является дедекиндовой группой.

Из утверждений (3), (5) и (6) следует, что заключение теоремы выполняется для G. Но это противоречит выбору G. Это заключительное противоречие завершает доказательство теоремы. □

Литература

1. *Chunikhin S. A.* Subgroups of finite groups. Minsk: Nauka i Tehnika. 1964.

2. *Skiba A. N.* On some results in the theory of finite partially soluble groups // Commun. Math. Stat. 2016. Vol. 4, N 3. P. 281–309.

3. *Skiba A. N.* Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups // J. Algebra. 2018. Vol. 495. P. 114–129.

4. *Haiyan Li, A.-Ming Liu, Safonova I. N., Skiba A. N.* Characterizations of some classes of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups // Communications in Algebra. DOI: 10.1080/00927872.2023.2235006.

5. *Zhang X.-F., Guo W., Safonova I. N., Skiba A. N.* A Robinson description of finite $P\sigma T$-groups // J. Algebra. 2023. Vol. 631. P. 218–235.

6. *A-Ming Liu, Chen M., Safonova I. N., Skiba A. N.* Finite groups with modular σ-subnormal subgroups // J. Group Theory. 2023. https://doi.org/10.1515/jgth-2023-0064.

7. Kegel O. H. Untergruppenverbande endlicher Gruppen, die den subnormalteilerverband each enthalten // Arch. Math. 1978. Vol. 30, N 3. P. 225–228.

8. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of Finite groups. Dordrecht: Springer, 2006.

9. *Schmidt R.* Subgroup lattices of groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1994.

10. *Zacher G.* I gruppi risolubili finiti in cui i sottogruppi di composizione coincidono con i sottogruppi quasi-normali // Atti della Accademia Nazionale dei Lincei Rend. cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 1964. Vol. 8, N 37. P. 150–154.

11. *Skiba A. N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. Vol. 436, N 8. P. 1–16.

12. *Zimmermann I.* Submodular subgroups of finite groups // Math. Z. 1989. Vol. 202, N 2. P. 545–557.

13. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M.* Products of Finite Groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2010.

14. *Doerk K., Hawkes T.* Finite Soluble Groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.

15. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 1967.

I. M. Dergacheva, E. A. Zadorozhnyuk, I. P. Shabalina

Finite partially soluble groups with transitive π-quasinormality relation for subgroups

Summary

Throughout the article, all groups are finite. We say that a subgroup A of G is π-quasinormal in G, if A is 1π-subnormal and modular in G. We prove that if the group G is π_0-solvable, where $\pi_0 = \pi(D)$ and D is the π-special residual of G, and π-quasi-normality is a transitive relation in G, then D is an abelian Hall subgroup of odd order in G.