Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 2. С. 15–27

УДК 515.12

О ТОПОЛОГИЯХ ЭКСПОНЕНТЫ МЕТРИЗУЕМОГО ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

А. С. Бедрицкий, В. Л. Тимохович

Белорусский государственный университет
e-mail: bedrickiAS@bsu.by, timvlaleo@gmail.com
Поступила 10.02.2023

Изучаются свойства топологии τ_{inf}, являющейся инфимумом множества всех топологий, порожденных метриками Хаусдорфа на экспоненте (гиперпространстве) $\exp X$ метризуемого топологического пространства X. В качестве основного результата получены необходимые и достаточные условия выполнения первой аксиомы счетности для τ_{inf}, а также метризуемости (метрикой Хаусдорфа) этой топологии («достижения» инфимума). Помимо этого, исследована связь τ_{inf} с другими топологиями на $\exp X$, а именно: с топологией Виеториса, топологией Фелла, локально конечной топологией.

Введение. Отправными точками в теории экспоненциальных пространств (или гиперпространств) являются работы Хаусдорфа [1] и Виеториса [2]. В [1] в случае метрического пространства (X, ρ) (наши обозначения могут отличаться от обозначений в цитируемых источниках) на экспоненте $\exp X$ определена метрика, названная впоследствии метрикой Хаусдорфа (здесь обозначена через $\widehat{\rho}$, а соответствующая топология – через $\tau_{\widehat{\rho}}$), а в [2] уже для произвольного топологического пространства X на $\exp X$ определена топология, получившая впоследствии название топологии Виеториса (здесь обозначена через τ_V). Систематичным исследованиям экспоненты $\exp X$ положила начало работа Майкла [3], где были установлены некоторые основные свойства топологии Виеториса и метрики Хаусдорфа в контексте их взаимосвязи с устройством топологии исходного пространства X. В дальнейшем на множестве $\exp X$ были определены и другие топологии виеторисовского типа (по схожести процедуры задания топологии) и среди них топология Фелла τ_F [4] и локально конечная топология (locally finite topology) τ_{LF} [5], связанные с топологией Виеториса соотношениями $\tau_F \leqslant \tau_V$ и $\tau_V \leqslant \tau_{LF}$ (т. е. $\tau_F \subset \tau_V$ и $\tau_V \subset \tau_{LF}$). Как оказалось, в случае метризуемого пространства X, топология τ_{LF} является супремумом (в полной решетке всех топологий на множестве $\exp X$) множества всех топологий вида $\tau_{\widehat{\rho}}$, где ρ – допустимая (т. е. согласованная с топологией) метрика на X [5].

В предлагаемой работе рассмотрена топология τ_{inf}, являющаяся инфимумом указанного выше множества топологий вида $\tau_{\widehat{\rho}}$ (см., например, [6]). В частности показано, что $\tau_{inf} \geqslant \tau_F$ (следствие 1); топологии τ_{inf} и τ_V сравнимы тогда и только тогда, когда пространство X со счетной базой, и при этом $\tau_V \geqslant \tau_{inf}$ (теоремы 8 и 9); а каждое из совпадений $\tau_{inf} = \tau_F$, $\tau_{inf} = \tau_V$ и $\tau_{inf} = \tau_{LF}$ равносильно компактности пространства X (теорема 8). Основным результатом можно считать следующее: если пространство $\exp_{inf} X$ удовлетворяет первой аксиоме счетности, то оно и метризуемо, причем метрикой вида $\widehat{\rho}$, что, в свою очередь, равносильно тому, что пространство X локально компактно и со счетной базой (предложение 11 и теорема 5).

Кратко об используемых обозначениях и понятиях. Под пространством понимаем произвольное топологическое T_1-пространство (при необходимости отделимость оговаривается особо). Пусть X – пространство с топологией τ, ρ – некоторая метрика на X (возможно, не согласованная с топологией τ). Замыкание и внутренность множества $A \subset X$ будем обозначать через $[A]$ и, соответственно, $intA$. При необходимости эти обозначения будем уточнять, например, $[A]_\tau$ (замыкание относительно топологии τ), $int_\rho A$ (внутренность относительно метрики ρ). Аналогично при обозначении сходимости последовательности: $x_n \xrightarrow[\tau]{} x$ (сходимость относительно топологии τ), $x_n \xrightarrow[\rho]{} x$ (сходимость относительно метрики ρ). Записью $A \underset{op}{\subset} X$ ($A \underset{cl}{\subset} X$) будем обозначать открытость (замкнутость соответственно) множества A в пространстве X. Обозначим также $B_\rho(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x,y) < \varepsilon\}$ и $B_\rho(A,\varepsilon) = \bigcup\limits_{a\in A} B_\rho(a,\varepsilon)$ – ε-окрестность точки $x \in X$ и, соответственно, ε-раздутие множества $A \subset X$.

Напомним некоторые понятия. Пространство X называют секвенциальным, если для любого незамкнутого множества $A \subset X$ найдутся точка $x \in X \setminus A$ и последовательность $(a_n)_{n=1}^\infty \subset A$, сходящаяся к x. Скажем, что пространство X удовлетворяет условию Фреше–Урысона в точке $x \in X$, если для любого множества $A \subset X$, при выполнении соотношения $x \in [A]$, существует последовательность $(a_n)_{n=1}^\infty \subset A$, сходящаяся к x. Пространство X называют пространством Фреше–Урысона, если X удовлетворяет условию Фреше–Урысона в каждой своей точке.

Скажем, что пространство X удовлетворяет условию (Lim), если в X не существует последовательности, сходящейся одновременно к различным точкам.

Экспонентой (или гиперпространством) пространства X называют множество $\exp X$ всех непустых замкнутых подмножеств пространства X (обычно, с некоторой топологией). Для множества $A \subset X$ и семейства α некоторых множеств в X обозначим (следуя обозначениям из [7]):

$$D_1(A) = \{F \in \exp X \mid F \subset A\}, \quad D_2(A) = \{F \in \exp X \mid F \cap A \neq \varnothing\}, \quad D_2(\alpha) = \bigcap_{B\in\alpha} D_2(B),$$

т. е. $D_2(\alpha) = \{F \in \exp X \mid F \cap B \neq \varnothing$ для любого $B \in \alpha\}$.

Предбазы топологий на $\exp X$ составляют множества вида: $D_1(U)$ и $D_2(U)$ для топологии Виеториса τ_V, $D_1(V)$ и $D_2(U)$ для топологии Фелла τ_F, $D_1(U)$ и $D_2(\alpha)$ для локально конечной топологии τ_{LF}, где U и V открыты в X и множество $X \setminus V$ компактно, α – локально конечное семейство открытых в X множеств. Экспоненту $\exp X$ с топологией τ_V (τ_F) будем обозначать кратко $\exp_V X$ ($\exp_F X$ соответственно). Будем также использовать сокращенные записи, например, $F_n \xrightarrow[F]{} B$ вместо $F_n \xrightarrow[\tau_F]{} B$, $[\mathscr{H}]_V$ вместо $[\mathscr{H}]_{\tau_V}$ и т. п.

Если пространство X метризуемо и ρ – некоторая допустимая метрика на X, то на $\exp X$ определена соответствующая метрика Хаусдорфа $\widehat{\rho}$,

$$\widehat{\rho}(F,P) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid B_\rho(F,\varepsilon) \supset P \text{ и } B_\rho(P,\varepsilon) \supset F\}$$

(здесь мы допускаем $\widehat{\rho}(F,P) = \infty$ для некоторых F, $P \in \exp X$, что не влияет на определение топологии на $\exp X$). Отметим, что для двух эквивалентных метрик ρ и σ на X соответствующие метрики Хаусдорфа могут быть не эквивалентны (т. е. индуцированные топологии $\tau_{\widehat{\rho}}$ и $\tau_{\widehat{\sigma}}$ на $\exp X$ различны). Метрическое пространство $(\exp X, \widehat{\rho})$ $\big($а также топологическое пространство $(\exp X, \tau_{\widehat{\rho}})\big)$ обозначим через $\exp_{\widehat{\rho}} X$. Обозначим также $\widehat{X} = \{\{x\} \in \exp X \mid x \in X\}$ («экземпляр» множества X в $\exp X$).

1. Предварительные рассмотрения. Пусть M – совокупность некоторых метрик на множестве Z ($Z \neq \varnothing$, $M \neq \varnothing$), $\mathscr{T}_M = \{\tau_\rho \mid \rho \in M\}$ – множество соответствующих топологий (τ_ρ – топология на Z, заданная метрикой ρ). В полной решетке $\mathscr{T}$ всех топологий на Z для множества $\mathscr{T}_M$ определены точные нижняя и верхняя грани (т. е. инфимум и супремум) τ_{inf} и τ_{sup} соответственно, где $\tau_{inf} = \bigcap\{\tau_\rho \mid \rho \in M\}$, а топология τ_{sup} задается предбазой $\bigcup\{\tau_\rho \mid \rho \in M\}$. Пространство, полученное заданием на Z топологии τ_{inf}, обозначим через

Z_{inf}. Далее, для краткости, будем употреблять в некоторых случаях символ «inf» вместо «τ_{inf}», например, $x_n \xrightarrow[inf]{} x$ вместо $x_n \xrightarrow[\tau_{inf}]{} x$, $int_{inf}(\,\cdot\,)$ вместо $int_{\tau_{inf}}(\,\cdot\,)$ и т. п.

Опишем некоторые основные свойства пространства Z_{inf}. Отметим как очевидное, что множество $A \subset Z_{inf}$ открыто (замкнуто) в Z_{inf} тогда и только тогда, когда оно открыто (замкнуто соответственно) относительно любой метрики $\rho \in M$. Обозначим далее $I_\rho = (0;1)$, $E = \prod\limits_{\rho \in M} I_\rho$ и для $z \in Z$ и $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_\rho)_{\rho \in M} \in E$ положим $B_R(z,\bar{\varepsilon}) = \bigcup\limits_{\rho \in M} B_\rho(z,\varepsilon_\rho)$. Множество $B_R(z,\bar{\varepsilon})$ назовем псевдоокрестностью точки z с псевдорадиусом $\bar{\varepsilon}$. Устройство топологии τ_{inf} выясняет следующее

Предложение 1. *Множество $U \subset Z_{inf}$ открыто в Z_{inf} тогда и только тогда, когда для любой точки $z \in U$ существует псевдоокрестность $B_R(z,\bar{\varepsilon}) \subset U$, где $\bar{\varepsilon} \in E$ $(\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(z))$.*

Доказательство следует непосредственно из определения топологии τ_{inf}.

Замечание. Если множество M конечно, то для задания топологии τ_{inf} достаточно ограничиться псевдоокрестностями с псевдорадиусами $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_\rho)_{\rho \in M}$ такими, что $\varepsilon_\rho = \varepsilon_\sigma$ для любых $\rho, \sigma \in M$.

Пространство Z_{inf}, являясь, очевидно, T_1-пространством, может не быть хаусдорфовым. В нем также могут находиться последовательности, сходящиеся одновременно к различным точкам.

Пример. Пусть $Z = I \cup \{a,b\}$, где $I = [0;1]$, $I \cap \{a,b\} = \varnothing$, $a \neq b$. Инъекциями φ и ψ «разместим» множество Z на плоскости $\mathbb{R}^2$ с обычной евклидовой метрикой d,

$$d((x,y),(x',y')) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

Обозначим $A = \left\{\frac{1}{2^n} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}$, $B = \left\{\frac{1}{3^n} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ и положим

$$\varphi(a) = \psi(a) = (0,1), \quad \varphi(b) = \psi(b) = (0,-1),$$

$$\varphi(z) = \begin{cases} (z,1) & \text{при } z \in A, \\ (z,0) & \text{при } z \in I \setminus A \end{cases}$$

и

$$\psi(z) = \begin{cases} (z,-1) & \text{при } z \in B, \\ (z,0) & \text{при } z \in I \setminus B. \end{cases}$$

Далее определим метрики ρ и σ, «перенеся» на Z метрику d с «экземпляров» $\varphi(Z)$ и $\psi(Z)$, а именно,

$$\rho(z_1,z_2) = d(\varphi(z_1),\varphi(z_2)),$$
$$\sigma(z_1,z_2) = d(\psi(z_1),\psi(z_2)),$$

и положим $M = \{\rho,\sigma\}$. Несложно проверить, что при $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon,\varepsilon)$ (см. замечание выше)

$$B_R(a,\bar{\varepsilon}) = \{a\} \cup \{z \in A \,|\, z < \varepsilon\},$$
$$B_R(b,\bar{\varepsilon}) = \{b\} \cup \{z \in B \,|\, z < \varepsilon\}$$

и

$$int_{inf} B_R(a,\bar{\varepsilon}) = int_{inf} B_R(b,\bar{\varepsilon}) = \varnothing;$$

для $z \in I \setminus (A \cup B)$ $B_R(z,\bar{\varepsilon}) = (z-\varepsilon; z+\varepsilon) \cap I$ и $B_R(z,\bar{\varepsilon}) \underset{op}{\subset} Z_{inf}$. Если $z \in A \cup B$ и $0 < \varepsilon \leqslant z$, то $B_R(z,\bar{\varepsilon}) = ((z-\varepsilon; z+\varepsilon) \cap I) \setminus B$ при $z \in A$ и $B_R(z,\bar{\varepsilon}) = ((z-\varepsilon; z+\varepsilon) \cap I) \setminus A$ при $z \in B$, причем, в обоих случаях $B_R(z,\bar{\varepsilon}) \underset{op}{\subset} Z_{inf}$. Таким образом, окрестностную базу в Z_{inf} составляют множества вида $O^z_\varepsilon = (z-\varepsilon; z+\varepsilon) \cap I$, где $z \in I$, $\varepsilon > 0$; $V^a_U = \{a\} \cup U$, где $U \subset (0;1)$, U открыто в I (относительно евклидовой топологии) и U содержит множество $\{z \in A \mid z < \varepsilon\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$, $V_U^b = \{b\} \cup U$, где U задается аналогично (с заменой A на B).

Рассмотрим последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ и ее подпоследовательности $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$, $\left(\frac{1}{3^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ и $(z_i)_{i=1}^{\infty}$, где $z_i = \frac{1}{n_i} \in I \setminus (A \cup B)$, $n_1 < n_2 < \ldots$. Очевидно, что

$$\frac{1}{2^n} \xrightarrow[\rho]{} a \quad \text{и} \quad \frac{1}{2^n} \xrightarrow[\sigma]{} 0,$$

$$\frac{1}{3^n} \xrightarrow[\sigma]{} b \quad \text{и} \quad \frac{1}{3^n} \xrightarrow[\rho]{} 0$$

и

$$z_i \xrightarrow[\rho,\sigma]{} 0$$

(т. е. относительно обеих метрик), что влечет такие же сходимости (т. е. к тем же точкам) относительно топологии τ_{inf}. Отметим, что последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ не сходится относительно каждой из метрик ρ и σ, однако $\frac{1}{n} \xrightarrow[inf]{} 0$.

Покажем далее, что пространство Z_{inf} не удовлетворяет условию Фреше–Урысона в точках a и b. Действительно, пусть, например, $P = (0;1) \setminus (A \cup B)$. Несложно заметить, что $V_U^a \cap P \neq \varnothing$ для любой окрестности (указанного выше вида) точки a, откуда $a \in [P]_{inf}$. Допустим от противного, что существует последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset P$ такая, что $z_n \xrightarrow[inf]{} a$. Можем считать, что $z_{n+1} < z_n < \frac{1}{n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $U = (0;1) \setminus \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Легко проверить, что $V_U^a = \{a\} \cup U$ – окрестность точки a в Z_{inf}, но $V_U^a \cap \{z_n \mid n \in Z\} = \varnothing$. Получили противоречие. Для точки b рассмотрение аналогичное.

Как показывает пример, пространство Z_{inf} может не быть пространством Фреше–Урысона. Однако справедливо

Предложение 2. *Пространство Z_{inf} секвенциально.*

Доказательство. Пусть $A \subset Z_{inf}$ и A не замкнуто в Z_{inf}. Но тогда A не замкнуто относительно некоторой метрики $\rho \in M$, и следовательно существуют точка $z \in Z_{inf} \setminus A$ и последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ такие, что $a_n \xrightarrow[\rho]{} z$. Последнее влечет сходимость $a_n \xrightarrow[inf]{} z$. $\square$

Исследуем подробнее сходимость в Z_{inf}. Рассмотрим произвольную последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset Z_{inf}$. Будем говорить, что последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ R-сходится к точке $z \in Z_{inf}$ (кратко $z_n \xrightarrow[R]{} z$), если для любой псевдоокрестности $B_R(z, \bar{\varepsilon})$ точки z можно выбрать $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\{z_k \mid k \geqslant n\} \subset B_R(z, \bar{\varepsilon})$. Отметим, что из сходимости $z_n \xrightarrow[\rho]{} z$, где $\rho \in M$, следует R-сходимость $z_n \xrightarrow[R]{} z$, а последняя, очевидно, влечет сходимость $z_n \xrightarrow[inf]{} z$.

Предложение 3. *При выполнении в Z_{inf} условия (Lim), сходимость $z_n \xrightarrow[inf]{} z$ и R-сходимость $z_n \xrightarrow[R]{} z$ равносильны.*

Доказательство. В одну сторону ($z_n \xrightarrow[R]{} z \Rightarrow z_n \xrightarrow[inf]{} z$) утверждение очевидно (см. предложение 1). Пусть $z_n \xrightarrow[inf]{} z$. Допустим от противного, что R-сходимость $z_n \xrightarrow[R]{} z$ отсутствует. Тогда существуют псевдоокрестность $B_R(z, \bar{\varepsilon}) = \bigcup\limits_{\rho \in M} B_\rho(z, \varepsilon_\rho)$ и подпоследовательность $(z_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ такие, что $B_R(z, \bar{\varepsilon}) \cap \{z_{n_i} \mid i \in \mathbb{N}\} = \varnothing$. Обозначим $a_i = z_{n_i}$ и $A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Поскольку $a_i \xrightarrow[inf]{} z$ и $z \notin A$, то множество A не замкнуто в Z_{inf}, и следовательно, A не замкнуто относительно некоторой метрики $\rho \in M$. Но тогда найдутся точка $z' \in Z_{inf} \setminus A$ и подпоследовательность $(a_{i_j})_{j=1}^{\infty}$ такие, что $a_{i_j} \xrightarrow[\rho]{} z'$. А поскольку $a_{i_j} \xrightarrow[inf]{} z'$ и в то же время $a_{i_j} \xrightarrow[inf]{} z$, то в силу условия (Lim) $z = z'$, откуда $a_{i_j} \xrightarrow[\rho]{} z$. Однако $\{a_{i_j} \mid j \in \mathbb{N}\} \subset A$ и $A \cap B_\rho(z, \varepsilon_\rho) = \varnothing$. Получили противоречие. $\square$

Предложение 4. *Пусть Z_{inf} удовлетворяет условию (Lim) и $z_n \xrightarrow[inf]{} z$. Тогда существуют метрика $\rho \in M$ и подпоследовательность $(z_{n_i})_{i=1}^\infty$ такие, что $z_{n_i} \xrightarrow[\rho]{} z$.*

Доказательство. Пусть $z_n \xrightarrow[inf]{} z$. Если существует стационарная подпоследовательность $(z_{n_i})_{i=1}^\infty$ (т. е. $z_{n_1} = z_{n_2} = \ldots$), то $z_{n_i} \xrightarrow[\rho]{} z$ при любой метрике $\rho \in M$. Если такой подпоследовательности не существует, то можно выделить подпоследовательность $(z_{n_i})_{i=1}^\infty$, у которой $z_{n_i} \neq z_{n_j}$ при $i \neq j$ и $z_{n_i} \neq z$ для каждого $i \in \mathbb{N}$. Можно считать, что таковой является исходная последовательность $(z_n)_{n=1}^\infty$. Повторяя почти дословно рассуждения выше (доказательство предложения 3), выделяем метрику $\rho \in M$ и подпоследовательность $(z_{n_i})_{i=1}^\infty$ такие, что $z_{n_i} \xrightarrow[\rho]{} z$. $\square$

Выясним, при каком условии (необходимом и достаточном) псевдоокрестность $B_R(z, \bar{\varepsilon})$ является окрестностью (в смысле Бурбаки, т. е. $z \in int_{inf} B_R(z, \bar{\varepsilon})$).

Предложение 5. *Пусть $z \in Z_{inf}$. Если $z \in int_{inf} B_R(z, \bar{\varepsilon})$ для любого псевдорадиуса $\bar{\varepsilon} \in E$, то пространство Z_{inf} удовлетворяет условию Фреше–Урысона в точке z.*

Доказательство. Пусть $A \subset Z_{inf}$ и $z \in [A]_{inf}$. Допустим, что $z \notin [A]_\rho$ для любой метрики $\rho \in M$. Но тогда, как легко заметить, $B_R(z, \bar{\varepsilon}) \cap A = \varnothing$ при некотором $\bar{\varepsilon} \in E$, что противоречит соотношениям $z \in int_{inf} B_R(z, \bar{\varepsilon})$ и $z \in [A]_{inf}$. Таким образом $z \in [A]_\rho$ для некоторой метрики $\rho \in M$, и следовательно, можно выбрать последовательность $(a_n)_{n=1}^\infty \subset A$ так, чтобы $a_n \xrightarrow[\rho]{} z$. Последнее влечет сходимость $a_n \xrightarrow[inf]{} z$. $\square$

Обратное утверждение докажем при дополнительном условии.

Предложение 6. *Если в пространстве Z_{inf} выполняется условие (Lim), а в точке $z \in Z_{inf}$ выполняется условие Фреше–Урысона, то $z \in int_{inf} B_R(z, \bar{\varepsilon})$ для любого $\bar{\varepsilon} \in E$.*

Доказательство. Допустим от противного, что $z \notin int_{inf} B_R(z, \bar{\varepsilon})$ для некоторого $\bar{\varepsilon} \in E$. Обозначим $A = Z_{inf} \setminus B_R(z, \bar{\varepsilon})$. Ясно, что $z \notin A$, но $z \in [A]_{inf}$. По условию можно выбрать последовательность $(a_n)_{n=1}^\infty \subset A$ так, чтобы $a_n \xrightarrow[inf]{} z$. Но тогда в силу предложения 4 для некоторых метрики $\rho \in M$ и подпоследовательности $(a_{n_i})_{i=1}^\infty$ имеет место сходимость $a_{n_i} \xrightarrow[\rho]{} z$. Таким образом для некоторого $m \in \mathbb{N}$ при всех $i \geqslant m$ выполняются соотношения $a_{n_i} \in B_\rho(z, \varepsilon_\rho) \subset B_R(z, \bar{\varepsilon})$, что противоречит соотношениям $a_{n_i} \in A$. $\square$

Предложения 5 и 6 можно дополнить следующим образом.

Предложение 7. *Для пространства Z_{inf} следующие условия равносильны:*

(а) *$z \in int_{inf} B_R(z, \bar{\varepsilon})$ для любых $z \in Z_{inf}$ и $\bar{\varepsilon} \in E$;*

(б) *для любых $z \in Z_{inf}$ и $\bar{\varepsilon} \in E$ можно выбрать $\bar{\delta} \in E$ таким образом, что для каждой точки $y \in B_R(z, \bar{\delta})$ найдется псевдоокрестность $B_R(y, \bar{\gamma}) \subset B_R(z, \bar{\varepsilon})$.*

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (б) вытекает непосредственно из предложения 1.

Докажем, что (б) $\Rightarrow$ (а). Пусть выполняется условие (б). Фиксируем произвольную псевдоокрестность $B_R(z_0, \bar{\varepsilon}_0)$ и обозначим $U = \{z \in Z_{inf} \mid B_R(z, \bar{\varepsilon}) \subset B_R(z_0, \bar{\varepsilon}_0)$ для некоторого $\bar{\varepsilon} \in E\}$. Очевидно, что $z_0 \in U \subset B_R(z_0, \bar{\varepsilon}_0)$. Используя условие (б) и предложение 1, легко проверить, что $U \underset{op}{\subset} Z_{inf}$. $\square$

2. Экспоненциальное пространство и экспоненциальные топологии. Рассмотрим произвольное T_1-пространство X с топологией τ и его экспоненту $\exp X$. Определенные на множестве $\exp X$ топологии Виеториса τ_V, Фелла τ_F и локально конечная τ_{LF} связаны очевидными соотношениями

$$\tau_F \leqslant \tau_V \quad \text{и} \quad \tau_V \leqslant \tau_{LF}.$$

Совпадение $\tau_F = \tau_V$ равносильно компактности пространства X [4; 8], а для совпадения $\tau_V = \tau_{LF}$ необходимо и достаточно, чтобы в X любое локально конечное семейство открытых множеств было конечно [5; 9] (для вполне регулярного пространства X выполнение этого условия равносильно его псевдокомпактности [10, с. 311]).

Если пространство X метризуемо и Ω – множество всех допустимых (т. е. согласованных с топологией τ) метрик на X, то на $\exp X$ помимо топологий τ_V, τ_F и τ_{LF} возникает множество метрик Хаусдорфа $M = \{\widehat{\rho} \mid \rho \in \Omega\}$ и множество соответствующих топологий $\mathscr{T}_M = \{\tau_{\widehat{\rho}} \mid \rho \in \Omega\}$, а также топологии τ_{inf} и τ_{sup}, инфимум и супремум соответственно множества $\mathscr{T}_M$ в полной решетке $\mathscr{T}$ всех топологий на $\exp X$. Соотношения топологий вида $\tau_{\widehat{\rho}}$ с топологией τ_V хорошо известны [3]: $\tau_V \geqslant \tau_{\widehat{\rho}}$ равносильно вполне ограниченности метрики ρ, $\tau_V \leqslant \tau_{\widehat{\rho}}$ тогда и только тогда, когда ρ – метрика Атсуи (т. е. $\rho(A,B) > 0$ для любых непустых замкнутых в X дизъюнктных множеств A и B, что равносильно равномерной непрерывности любой непрерывной вещественнозначной функции на метрическом пространстве (X,ρ) [11]), а совпадение $\tau_V = \tau_{\widehat{\rho}}$ равносильно компактности пространства X. Как оказалось, $\tau_{sup} = \tau_{LF}$ [5]. Из этого тотчас следует (см. [5]), что если топология τ_{sup} удовлетворяет первой аксиоме счетности, то она и метризуема, причем $\tau_{sup} = \tau_{\widehat{\rho}}$ (супремум «достигается»), где $\rho \in \Omega$ и ρ – метрика Атсуи; и обратно, если пространство X допускает метрику Атсуи ρ, то $\tau_{sup} = \tau_{\widehat{\rho}}$.

Перейдем к топологиям τ_F и τ_{inf}. Напомним некоторые свойства топологии τ_F. Известно, что если пространство $\exp_F X$ хаусдорфово, то оно и вполне регулярно, что, в свою очередь, равносильно тому, что пространство X хаусдорфово и локально компактно [12]. Если же $\exp_F X$ метризуемо, то оно является польским пространством (т. е. со счетной базой и допускает полную метрику), что, в свою очередь, равносильно тому, что X – хаусдорфово локально компактное пространство со счетной базой [8]. Отметим также, что если пространство X хаусдорфово и локально компактно, то локально компактно и пространство $\exp_F X$ (см. [8]).

К вышесказанному добавим следующее

Предложение 8. *Если пространство X хаусдорфово и является пространством Фреше–Урысона, то пространство $\exp_F X$ удовлетворяет условию (Lim).*

Доказательство. Допустим от противного, что существуют последовательность $(F_n)_{n=1}^{\infty} \subset \exp_F X$ и множества $A \in \exp_F X$ и $B \in \exp_F X$ такие, что $F_n \xrightarrow[F]{} A$, $F_n \xrightarrow[F]{} B$ и $A \neq B$. Пусть, например, $B \setminus A \neq \varnothing$, $z \in B \setminus A$. Из сходимости $F_n \xrightarrow[F]{} A$ и соотношения $A \in D_1(X \setminus \{z\})$ следует, что $F_n \in D_1(X \setminus \{z\})$ или, другими словами, $z \notin F_n$ для всех n, начиная с некоторого номера. Можем считать, что $z \notin F_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Пусть далее U – произвольная окрестность точки z. Из сходимости $F_n \xrightarrow[F]{} B$ и соотношения $B \in D_2(U)$ следует, что $F_n \cap \cap U \neq \varnothing$ для всех n, начиная с некоторого номера, и тем более $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n\right) \cap U \neq \varnothing$. Но тогда $z \in \left[\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n\right]$, и в силу условия Фреше–Урысона существует последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, сходящаяся к точке z. Можем считать, что $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap A = \varnothing$. А поскольку $K = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{z\}$ – компакт и $A \in D_1(X \setminus K)$, то из сходимости $F_n \xrightarrow[F]{} A$ следует, что для некоторого $m \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение $\cup\{F_n \mid n \geqslant m\} \subset X \setminus K$ или, другими словами, $(\cup\{F_n \mid n \geqslant m\}) \cap K = \varnothing$. Но тогда $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \cup\{F_n \mid n < m\}$, и следовательно для некоторого $k < m$ множество F_k содержит подпоследовательность $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$. Последнее влечет соотношение $z \in F_k$. Получили противоречие. $\square$

Рассмотрим далее топологию τ_{inf} и соответствующее пространство $\exp_{inf} X$ (т. е. множество $\exp X$ с топологией τ_{inf}). Заметим, прежде всего, что при любой метрике $\rho \in \Omega$

множество $\widehat{X} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ замкнуто в $\exp_{\widehat{\rho}} X$ и каноническая биекция

$$X \ni x \longrightarrow \{x\} \in \widehat{X}$$

является изометрией (метрических пространств (X,ρ) и $(\widehat{X},\widehat{\rho})$). Тогда справедливо

Предложение 9. *Подпространство $\widehat{X} \subset \exp_{inf} X$ замкнуто в $\exp_{inf} X$ и канонически гомеоморфно (т. е. посредством канонической биекции) пространству X.*

Отметим также, что все предложения части 1 (предложения 1–7) остаются справедливыми при замене «Z» на «$\exp X$».

Исследуем взаимосвязь топологий τ_{inf} и τ_F и установим простейшие следствия.

Предложение 10. *Для любой метрики $\rho \in \Omega$ справедливо соотношение $\tau_{\widehat{\rho}} \geqslant \tau_F$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные $F \in \exp X$ и окрестности (в $\exp_F X$) $D_2(U)$ и $D_1(V)$ множества F, где $U \underset{op}{\subset} X$ и множество $K = X \setminus V$ компактно. Достаточно показать, что $B_{\widehat{\rho}}(F,\varepsilon_1) \subset D_2(U)$ и $B_{\widehat{\rho}}(F,\varepsilon_2) \subset D_1(V)$ при некоторых $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$. Начнем с соотношения $F \in D_2(U)$. Фиксируем некоторую точку $x \in F \cap U$ и выберем $\varepsilon_1 > 0$ так, чтобы $B_\rho(x,\varepsilon_1) \subset U$. Несложно проверить, что если $P \in B_{\widehat{\rho}}(F,\varepsilon_1)$, то $B_\rho(x,\varepsilon_1) \cap P \neq \varnothing$, и следовательно $P \in D_2(U)$, откуда $B_{\widehat{\rho}}(F,\varepsilon_1) \subset D_2(U)$.

Перейдем к соотношению $F \in D_1(V)$. В силу компактности множества K можно выбрать $\varepsilon_2 > 0$, при котором $B_\rho(F,\varepsilon_2) \subset V$. Ясно, что если $P \in B_{\widehat{\rho}}(F,\varepsilon_2)$, то $P \subset B_\rho(F,\varepsilon_2) \subset V$, откуда $B_{\widehat{\rho}}(F,\varepsilon_2) \subset D_1(V)$. □

Непосредственно из предложения 10 вытекает

Следствие 1. *Справедливо соотношение $\tau_{inf} \geqslant \tau_F$.*

Из следствия 1 и предложения 8 вытекает

Следствие 2. *Пространство $\exp_{inf} X$ удовлетворяет условию (Lim).*

Предложения 3–6 и следствие 2 позволяют сформулировать

Следствие 3. *Пусть $(F_n)_{n=1}^\infty \subset \exp_{inf} X$ и $F \in \exp_{inf} X$. Справедливы следующие утверждения:*

(а) *сходимости $F_n \underset{inf}{\longrightarrow} F$ и $F_n \underset{R}{\longrightarrow} F$ равносильны;*

(б) *если $F_n \underset{inf}{\longrightarrow} F$, то можно выбрать подпоследовательность $(F_{n_i})_{i=1}^\infty$ и метрику $\rho \in \Omega$ таким образом, что $F_{n_i} \underset{\widehat{\rho}}{\longrightarrow} F$;*

(в) *пространство $\exp_{inf} X$ удовлетворяет условию Фреше–Урысона в точке $F \in \exp_{inf} X$ тогда и только тогда, когда $F \in int_{inf} B_R(F,\bar{\varepsilon})$ для любого $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_\rho)_{\rho\in\Omega} \in E$ $\big($здесь и далее $B_R(F,\bar{\varepsilon}) = \bigcup\limits_{\rho\in\Omega} B_{\widehat{\rho}}(F,\varepsilon_\rho)\big)$.*

Поскольку локальная компактность хаусдорфова пространства X равносильна хаусдорфовости $\exp_F X$ [12], то соотношение $\tau_{inf} \geqslant \tau_F$ влечет

Следствие 4. *Если метризуемое пространство X локально компактно, то пространство $\exp_{inf} X$ хаусдорфово.*

В случае компактности метризуемого пространства X, пространство $\exp_V X$ компактно и все топологии вида $\tau_{\widehat{\rho}}$ совпадают с топологией τ_V [3], и следовательно $\tau_{inf} = \tau_V$ (т. е. $\exp_{inf} X = \exp_V X$). Из этих соображений и предложения 9 очевидным образом следует

Предложение 11. *Для метризуемого пространства X равносильны условия:*

(а) *X компактно;*

(б) *пространство $\exp_{inf} X$ компактно;*

(в) *$\exp_{inf} X$ – компакт, метризуемый любой метрикой $\widehat{\rho}$, где $\rho \in \Omega$.*

3. Пространство $\exp_{inf} X$ и первая аксиома счетности. Здесь мы покажем, что для пространства $\exp_{inf} X$ выполнение первой аксиомы счетности влечет его метризуемость, причем, метрикой вида $\widehat{\rho}$, где $\rho \in \Omega$ (случай «достижения» инфимума), и выявим соответствующую связь с устройством исходного пространства X. Нам понадобятся следующие известные утверждения.

Теорема 1 [13] (см. также [10, с. 439]). *Пусть пространство X метризуемо и $F \underset{cl}{\subset} X$. Тогда для любой метрики ρ_0 на F, согласованной с индуцированной топологией, существует допустимая метрика на X, совпадающая на F с ρ_0.*

Теорема 2 [14, с. 315]. *Хаусдорфово локально компактное пространство X метризуемо тогда и только тогда, когда X представимо в виде $X = \bigcup\limits_{t \in T} X_t$, где $X_t \underset{op}{\subset} X$ и X_t со счетной базой, и $X_t \cap X_s = \varnothing$ при $t \neq s$.*

Нам также понадобится

Лемма 1. *Пусть пространство X метризуемо, множества $A = \{a_t \mid t \in T\}$ и $B = \{b_t \mid t \in T\}$ ($a_t \neq a_s$ и $b_t \neq b_s$ при $t \neq s$) замкнуты в X и дискретны (как подпространства). Тогда для любого $\bar{\varepsilon} \in E$, $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_\rho)_{\rho \in \Omega}$, множество*

$$\{t \in T \mid B_R(A, \bar{\varepsilon}) \not\ni A \cup \{b_t\}\}$$

конечно.

Доказательство. Допустим от противного, что можно выбрать $t_n \in T$ ($t_n \neq t_k$ при $n \neq k$) таким образом, что $B_R(A, \bar{\varepsilon}) \not\ni A \cup \{b_{t_n}\}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Вследствие теоремы 1 существует метрика $\sigma \in \Omega$, для которой $\sigma(a_{t_n}, b_{t_n}) = \frac{1}{n}$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Но тогда $B_R(A, \bar{\varepsilon}) \supset B_{\widehat{\sigma}}(A, \varepsilon_\sigma) \ni A \cup \{b_{t_n}\}$ для всех n, для которых $\frac{1}{n} < \varepsilon_\sigma$. Получили противоречие. □

В работе [15] введено понятие уплотняющей метрики.

Определение [15]. Допустимая метрика ρ на не компактном пространстве X называется уплотняющей, если соответствующее пополнение $\widetilde{X}$ – компакт с одноточечным наростом $\widetilde{X} \setminus X$.

Теорема 3 [15; 16]. *Хаусдорфово не компактное пространство X допускает уплотняющую метрику тогда и только тогда, когда X локально компактно и со счетной базой.*

Теорема 4 [15]. *Допустимая метрика ρ на не компактном пространстве X является уплотняющей тогда и только тогда, когда из любых бесконечных дискретных и замкнутых в X множеств A и B можно выбрать последовательности точек $a_n \in A$ и $b_n \in B$ так, чтобы $\rho(a_n, b_n) \longrightarrow 0$.*

Лемма 2 (уточнение теоремы 4). *Допустимая метрика ρ на не компактном пространстве X является уплотняющей тогда и только тогда, когда для любых двух последовательностей $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ и $(y_n)_{n=1}^\infty \subset X$, не имеющих в X предельных точек (точка называется предельной для последовательности, если любая ее окрестность содержит бесконечно много членов этой последовательности), $\rho(x_n, y_n) \longrightarrow 0$.*

Доказательство. Достаточность – очевидное следствие теоремы 4. Докажем необходимость. Пусть метрика ρ уплотняющая, $\widetilde{X}$ – соответствующее компактное пополнение, ξ – точка нароста (т. е. $\widetilde{X} \setminus X = \{\xi\}$) и U – произвольная окрестность точки ξ (т. е. $\xi \in U \underset{op}{\subset} \widetilde{X}$). Поскольку множество $K = \widetilde{X} \setminus U$ компактно, то K может содержать лишь конечное число членов каждой из последовательностей. Таким образом, $x_n \longrightarrow \xi$ и $y_n \longrightarrow \xi$. Но тогда, очевидно, $\rho(x_n, y_n) \longrightarrow 0$. □

Перейдем к основному результату этой части. Прежде всего отметим, что в рассматриваемом контексте случай компактности метризуемого пространства X тривиален, поскольку в этом случае все топологии вида $\tau_{\widehat{\rho}}$ совпадают с топологией Виеториса τ_V, и, таким образом, $\exp_{inf} X = \exp_V X$ – компакт, метризуемый любой метрикой $\widehat{\rho}$, где $\rho \in \Omega$ (см. предложение 11).

Теорема 5. *Для метризуемого не компактного пространства X равносильны условия:*

(a) *пространство $\exp_{inf} X$ удовлетворяет первой аксиоме счетности;*

(б) *пространство X локально компактно и со счетной базой;*

(в) $\tau_{inf} = \tau_{\widehat{\rho}}$ *(т. е. пространство* $\exp_{inf} X$ *метризуемо метрикой* $\widehat{\rho}$*), где* $\rho \in \Omega$ *и метрика* ρ *уплотняющая.*

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (б). Пусть для $\exp_{inf} X$ выполняется первая аксиома счетности. Докажем локальную компактность пространства X. Допустим от противного, что существует точка $x_0 \in X$, ни одна окрестность которой не имеет компактного замыкания. Фиксируем некоторую метрику $\rho_0 \in \Omega$. Несложно показать, что найдутся окрестности U_n точки x_0 и замкнутые в X дискретные множества $A_n = \{a_i^n \mid i \in \mathbb{N}\}$ ($a_i^n \neq a_j^n$ при $i \neq j$) такие, что $[U_{n+1}] \subset U_n \subset B_{\rho_0}\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ и $A_n \subset U_n \setminus [U_{n+1}]$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\widehat{\rho}_0(A_n, \{x_0\}) \leqslant \frac{1}{n}$, и следовательно $A_n \underset{inf}{\longrightarrow} \{x_0\}$. Далее для каждого $n \geqslant 2$ определим множество $B_k^n = A_n \cup \cup \{a_i^1 \mid i \geqslant k\}$, а также выберем метрики $\rho_n \in \Omega$, удовлетворяющие условию $\rho_n(a_i^n, a_i^1) = \frac{1}{i}$, $i \in \mathbb{N}$ (см. теорему 1). Легко заметить, что $\widehat{\rho}_n(A_n, B_n^k) \leqslant \frac{1}{k}$, и следовательно, $B_k^n \underset{inf}{\longrightarrow} A_n$ (при $k \to \infty$) при каждом фиксированном $n \geqslant 2$. Обозначим $\mathscr{H} = \{B_k^n \mid n, k \in \mathbb{N}\}$. Ясно, что $\{x_0\} \in \in [\mathscr{H}]_{inf}$, и выполнение первой аксиомы счетности позволяет выбрать последовательность $(B_{k_i}^{n_i})_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ так, чтобы $B_{k_i}^{n_i} \underset{inf}{\longrightarrow} \{x_0\}$. Но тогда (см. следствие 3(б)) для некоторых метрики $\rho \in \Omega$ и подпоследовательности $(B_{p_j}^{m_j})_{j=1}^{\infty}$ ($m_j = n_{i_j}$, $p_j = k_{i_j}$, $i_1 < i_2 < \ldots$) имеет место сходимость $B_{p_j}^{m_j} \underset{\widehat{\rho}}{\longrightarrow} \{x_0\}$, что невозможно, поскольку каждое множество $B_{p_j}^{m_j}$ содержит точки множества A_1, а $B_\rho(x_0, \varepsilon) \cap A_1 = \varnothing$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Получили противоречие. Локальная компактность пространства X доказана.

Допустим далее, что X не имеет счетной базы. Тогда, используя теорему 2, X можно представить в виде дизъюнктного объединения непустых открытых множеств U_t и V_t, где $t \in T$ и множество T несчетно. Для каждого $t \in T$ фиксируем точки $a_t \in U_t$ и $b_t \in V_t$ и положим $A = \{a_t \mid t \in T\}, B = \{b_t \mid t \in T\}$. Пусть $\{\mathscr{W}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ – локальная база (в пространстве $\exp_{inf} X$) множества A, $\mathscr{W}_1 \supset \mathscr{W}_2 \supset \ldots$. Выберем псевдоокрестности $B_R(A, \bar{\varepsilon}_n)$, $\bar{\varepsilon}_n = (\varepsilon_\rho^n)_{\rho \in \Omega}$, так, чтобы $B_R(A, \bar{\varepsilon}_n) \subset \mathscr{W}_n$, и обозначим

$$T_n = \{t \in T \mid B_R(A, \bar{\varepsilon}_n) \not\ni A \cup \{b_t\}\}.$$

В силу леммы 1 каждое множество T_n конечно. Положим $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$ и выберем $t_0 \in T \setminus S$ ($T \setminus S \neq \varnothing$, поскольку T несчетно, а S не более чем счетно). Рассмотрим множество $P = A \cup \cup \{b_{t_0}\}$. Ясно, что $P \in B_R(A, \bar{\varepsilon}_n) \subset \mathscr{W}_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Но тогда $P = A$, что невозможно. Получили противоречие. Итак, пространство X имеет счетную базу. (а) $\Rightarrow$ (б) доказано.

(б) $\Rightarrow$ (в). Если пространство X локально компактно и со счетной базой, то (см. теорему 3) X допускает уплотняющую метрику ρ. Покажем, что $\tau_{\widehat{\sigma}} \geqslant \tau_{\widehat{\rho}}$ для любой метрики $\sigma \in \Omega$. Тем самым будет доказано совпадение $\tau_{inf} = \tau_{\widehat{\rho}}$. Допустим от противного, что для некоторых $F \in \exp_{inf} X$, $\sigma \in \Omega$ и $\varepsilon > 0$ имеем при любом $n \in \mathbb{N}$ соотношение $B_{\widehat{\sigma}}(F, \frac{1}{n}) \not\subset \not\subset B_{\widehat{\rho}}(F, 2\varepsilon)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ фиксируем $F_n \in B_{\widehat{\sigma}}(F, \frac{1}{n}) \setminus B_{\widehat{\rho}}(F, 2\varepsilon)$. Ясно, что

$$\widehat{\sigma}(F, F_n) < \frac{1}{n}, \tag{1}$$

но

$$\widehat{\rho}(F, F_n) > \varepsilon. \tag{2}$$

Неравенства (2) показывают, что существует последовательность $(F_{n_i})_{i=1}^{\infty}$, $n_1 < n_2 < \ldots$, для которой либо $F_{n_i} \not\subset B_\rho(F, \varepsilon)$ для любого $i \in \mathbb{N}$, либо $F \not\subset B_\rho(F_{n_i}, \varepsilon)$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Рассмотрим первый случай. Можем считать, что $F_n \not\subset B_\rho(F, \varepsilon)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Выбираем точки $y_n \in F_n \setminus B_\rho(F, \varepsilon)$ и $x_n \in B_\sigma(y_n, \frac{1}{n}) \cap F$ (см. (1)). Отметим как очевидное, что при каждом $n \in \mathbb{N}$

$$\sigma(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \tag{3}$$

и поскольку $y_n \notin B_\rho(F,\varepsilon)$ (т. е. $\rho(y_n, F) \geqslant \varepsilon$), то

$$\rho(x_n, y_n) \geqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Во втором случае, так же как и в первом, можем считать, что $F \not\subset B_\rho(F_n, \varepsilon)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Выберем точки $x_n \in F \setminus B_\rho(F_n,\varepsilon)$ и $y_n \in B_\sigma(x_n, \frac{1}{n}) \cap F_n$ (см. (1)). Ясно, что для точек x_n и y_n при любом $n \in \mathbb{N}$ также выполняются условия (3) и (4).

Покажем далее, что последовательности $(x_n)_{n=1}^\infty$ и $(y_n)_{n=1}^\infty$ не имеют (в обоих случаях) предельных точек. Допустим, например, что z – предельная точка для последовательности $(x_n)_{n=1}^\infty$. Тогда $x_{n_i} \underset{\sigma}{\longrightarrow} z$ для некоторой подпоследовательности $(x_{n_i})_{i=1}^\infty$, что в силу (3) влечет и сходимость $y_{n_i} \underset{\sigma}{\longrightarrow} z$. А поскольку сходимости «$\underset{\sigma}{\longrightarrow}$» и «$\underset{\rho}{\longrightarrow}$» равносильны, то $\rho(x_{n_i}, y_{n_i}) \longrightarrow 0$, что противоречит условию (4).

Итак, отсутствие предельных точек у последовательностей $(x_n)_{n=1}^\infty$ и $(y_n)_{n=1}^\infty$ доказано. Но тогда по лемме 2 получаем сходимость $\rho(x_n, y_n) \longrightarrow 0$, что опять же противоречит условию (4). (б) $\Rightarrow$ (в) доказано.

Остается отметить, что импликация (в) $\Rightarrow$ (а) очевидна. $\square$

Легко заметить, что если в части (а) $\Rightarrow$ (б) теоремы 5 ограничиться доказательством локальной компактности пространства X, то достаточно предположить выполнение в пространстве $\exp_{inf} X$ условия Фреше–Урысона в каждой точке вида $\{x\}$, где $x \in X$. Оказывается, что справедливо и обратное.

Теорема 6. *Метризуемое не компактное пространство X локально компактно тогда и только тогда, когда пространство $\exp_{inf} X$ удовлетворяет условию Фреше–Урысона в каждой точке вида $\{x\}$, где $x \in X$.*

Доказательство. Доказательство достаточности, как замечено выше, фактически содержится в доказательстве части (а) $\Rightarrow$ (б) теоремы 5 (с заменой первой аксиомы счетности на условие Фреше–Урысона). Докажем необходимость. Пусть X локально компактно. Фиксируем произвольные $x \in X$ и $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_\rho)_{\rho\in\Omega} \in E$. Можем считать, что для некоторой метрики $\sigma \in \Omega$ замыкание $[B_\sigma(x,\varepsilon_\sigma)]$ компактно. Для упрощения записей обозначим $O = B_\sigma(x, \varepsilon_\sigma)$. Отметим, что если $F \in \exp X$ и $F \subset O$, то множество F компактно, и следовательно $\widehat{\sigma}(\{x\}, F) < \varepsilon_\sigma$. Таким образом, $D_1(O) \subset B_{\widehat{\sigma}}(\{x\}, \varepsilon_\sigma)$. Отметим также очевидные соотношения $\{x\} \in D_1(O) \subset B_R(\{x\}, \bar{\varepsilon})$. Покажем далее, что $D_1(O) \underset{op}{\subset} \exp_{inf} X$. Пусть $F \in D_1(O)$. Компактность множества F позволяет выбрать для каждой метрики $\rho \in \Omega$ некоторое δ_ρ, $0 < \delta_\rho < 1$, так, чтобы $B_\rho(F, \delta_\rho) \subset O$, и следовательно $B_{\widehat{\rho}}(F, \delta_\rho) \subset D_1(O)$. Ясно, что $B_R(F, \bar{\delta}) \subset D_1(O)$, где $\bar{\delta} = (\delta_\rho)_{\rho\in\Omega}$. В силу предложения 1 $D_1(O) \underset{op}{\subset} \exp_{inf} X$. Итак, $\{x\} \in int_{inf} B_R(\{x\}, \bar{\varepsilon})$, откуда следует выполнение для $\exp_{inf} X$ условия Фреше–Урысона в точке $\{x\}$ (см. часть (в) следствия 3). $\square$

4. Пространство $\exp_{inf} X$ и хаусдорфовость. По-прежнему пространство X метризуемо и не компактно. Если X локально компактно, то $\exp_{inf} X$ хаусдорфово (см. следствие 4). В [6] показано, что верно и обратное. Здесь мы приводим более простое, на наш взгляд, доказательство. Нам понадобится следующая вспомогательная

Лемма 3. *Пусть пространство $\exp_{inf} X$ хаусдорфово, $F \in \exp_{inf} X$, $x \in X \setminus F$. Тогда можно выбрать $\bar{\varepsilon} \in E$, $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_\rho)_{\rho\in\Omega}$, так, чтобы $B_\rho(F, \varepsilon_\rho) \cap B_\sigma(x, \varepsilon_\sigma) = \varnothing$ для любых $\rho, \sigma \in \Omega$.*

Доказательство. Обозначим $P = F \cup \{x\}$. Хаусдорфовость пространства $\exp_{inf} X$ позволяет выбрать $\bar{\varepsilon} \in E$, $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_\rho)_{\rho\in\Omega}$, таким образом, что $B_R(F, \bar{\varepsilon}) \cap B_R(P, \bar{\varepsilon}) = \varnothing$. Допустим, что для некоторых $\rho \in \Omega$ и $\sigma \in \Omega$ существует точка $z \in B_\rho(F, \varepsilon_\rho) \cap B_\sigma(x, \varepsilon_\sigma)$. Тогда положим

$M = F \cup \{z\}$. Несложно проверить, что $M \in B_{\widehat{\rho}}(F, \varepsilon_\rho)$ и $M \in B_{\widehat{\sigma}}(P, \varepsilon_\sigma)$. Но тогда $M \in B_R(F, \bar{\varepsilon}) \cap$ $\cap B_R(P, \bar{\varepsilon})$. Получили противоречие. □

Теорема 7. *Пространство $\exp_{inf} X$ хаусдорфово в том и только в том случае, когда X локально компактно.*

Доказательство. В одну сторону (достаточность) теорема выполняется (см. следствие 4). Докажем необходимость. Пусть пространство $\exp_{inf} X$ хаусдорфово и не компактно (случай компактности $\exp_{inf} X$ тривиален, см. предложение 11). Фиксируем произвольную точку $x \in X$ и некоторое замкнутое в X дискретное множество F, $x \notin F$, $F = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ($a_n \neq a_k$ при $n \neq k$). Лемма 3 позволяет выбрать $\bar{\varepsilon} \in E$, $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_\rho)_{\rho \in \Omega}$, таким образом, что $B_\rho(F, \varepsilon_\rho) \cap B_\sigma(x, \varepsilon_\sigma) = \varnothing$ для любых $\rho, \sigma \in \Omega$. Фиксируем некоторую метрику $\sigma \in \Omega$ и предположим, что X не локально компактно в точке x. Тогда окрестность $B_\sigma(x, \varepsilon_\sigma)$ содержит замкнутое в X дискретное множество $P = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ($b_n \neq b_k$ при $n \neq k$). В силу теоремы 1 существует метрика $\rho \in \Omega$, для которой $\rho(a_n, b_n) = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Но тогда, очевидно, $B_\rho(F, \varepsilon_\rho) \cap B_\sigma(x, \varepsilon_\sigma) \neq \varnothing$. Получили противоречие. □

5. Топологии $\boldsymbol{\tau_{inf}}$, $\boldsymbol{\tau_{LF}}$, $\boldsymbol{\tau_V}$ и $\boldsymbol{\tau_F}$. Случаи совпадения. В этой части рассмотрим вопрос о сравнении топологии τ_{inf} с топологиями τ_{LF}, τ_V и τ_F. Случаи совпадения описывает следующая

Теорема 8. *Для метризуемого пространства X следующие условия равносильны:*

(а) $\tau_{inf} = \tau_V$;

(б) $\tau_{inf} \geqslant \tau_V$;

(в) $\tau_{inf} = \tau_{LF}$;

(г) $\tau_{inf} = \tau_F$;

(д) *X компактно.*

Доказательство. Импликации (д) $\Rightarrow$ (а) $\Rightarrow$ (б), (д) $\Rightarrow$ (в) и (д) $\Rightarrow$ (г) очевидны. Докажем, что (б) $\Rightarrow$ (д). Допустим от противного, что X не компактно, и рассмотрим дизъюнктные замкнутые в X дискретные множества $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ($a_n \neq a_k$ и $b_n \neq b_k$ при $n \neq k$). Обозначим $P_n = A \cup \{b_n\}$ и выберем метрику $\sigma \in \Omega$ такую, что $\sigma(a_n, b_n) = \frac{1}{n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ (см. теорему 1). Ясно, что $\widehat{\sigma}(A, P_n) \leqslant \frac{1}{n}$, откуда $P_n \underset{\widehat{\sigma}}{\longrightarrow} A$, и в силу соотношений $\tau_{\widehat{\sigma}} \geqslant \tau_{inf} \geqslant \tau_V$ имеет место сходимость $P_n \underset{V}{\longrightarrow} A$. Однако для окрестности (в $\exp_V X$) $D_1(X \setminus B)$ множества A имеем $P_n \notin D_1(X \setminus B)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Получили противоречие. (б) $\Rightarrow$ (д) доказано.

(в) $\Rightarrow$ (д). Поскольку $\tau_{LF} \geqslant \tau_V$ и по условию $\tau_{inf} = \tau_{LF}$, то $\tau_{inf} \geqslant \tau_V$. Последнее, как показано выше ((б) $\Rightarrow$ (д)), влечет компактность пространства X. (в) $\Rightarrow$ (д) доказано.

(г) $\Rightarrow$ (д). Как и в части (б) $\Rightarrow$ (д) допустим, что X не компактно, и рассмотрим то же множество A и некоторую точку $x_0 \in X \setminus A$. Положим $A_n = \{x_0\} \cup \{a_k \mid k \geqslant n\}$. Рассмотрим окрестность (в $\exp_F X$) $\mathscr{W}$ множества $\{x_0\} \in \exp_F X$, $\mathscr{W} = D_1(U) \cap D_2(V)$, где $x_0 \in U \underset{op}{\subset} X$ и множество $K = X \setminus U$ компактно, $x_0 \in V \underset{op}{\subset} X$, $V \subset U$ и $V \cap A = \varnothing$. Ясно, что окрестности указанного вида образуют в $\exp_F X$ локальную базу в точке $\{x_0\}$ (точка в $\exp_F X$). Ясно также, что $A_n \in \mathscr{W}$ для всех n, начиная с некоторого номера. Но тогда $A_n \underset{F}{\longrightarrow} \{x_0\}$, откуда, вследствие совпадения $\tau_{inf} = \tau_F$, $A_n \underset{inf}{\longrightarrow} \{x_0\}$, что, в свою очередь, влечет сходимость $A_{n_i} \underset{\widehat{\rho}}{\longrightarrow} \{x_0\}$ для некоторых подпоследовательности $(A_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ и метрики $\rho \in \Omega$ (см. следствие 3(б)). Последнее, однако, невозможно, поскольку $B_\rho(x_0, \varepsilon) \cap A = \varnothing$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. □

Соотношения $\tau_F \leqslant \tau_{inf}$ (см. следствие 1) и $\tau_{inf} \leqslant \tau_{LF}$ и теорема 8 влекут

Следствие 5. *Для метризуемого пространства X следующие условия равносильны:*

(а) $\tau_F < \tau_{inf}$ *(т. е. $\tau_F \leqslant \tau_{inf}$ и $\tau_F \neq \tau_{inf}$)*;

(б) $\tau_{inf} < \tau_{LF}$;

(в) *X не компактно.*

Вопрос о сравнимости топологий τ_{inf} и τ_V частично проясняет часть (б)$\Leftrightarrow$(д) теоремы 8. Полностью решает вопрос следующая

Теорема 9. *Для метризуемого пространства X равносильны условия:*

(а) *X со счетной базой;*

(б) *X допускает вполне ограниченную метрику;*

(в) $\tau_V \geqslant \tau_{inf}$.

Доказательство. (а) $\Leftrightarrow$ (б) – хорошо известный факт (см., например, [10, с. 398]).

(б) $\Rightarrow$ (в). Пусть $\rho \in \Omega$ и метрика ρ вполне ограничена. Тогда $\tau_V \geqslant \tau_{\widehat{\rho}}$ [3], и следовательно $\tau_V \geqslant \tau_{inf}$. (б) $\Rightarrow$ (в) доказано.

(в) $\Rightarrow$ (а). Допустим от противного, что в X не существует счетной базы. Тогда, поскольку X имеет σ-дискретную базу [10, с. 418], то в X найдется замкнутое дискретное множество $A = \{a_\lambda \,|\, \lambda < \omega_1\}$ ($a_\alpha \neq a_\beta$ при $\alpha \neq \beta$), где λ – любой не более чем счетный ординал, ω_1 – первый несчетный ординал. Обозначим $A_\lambda = \{a_\alpha \,|\, \alpha < \lambda\}$, $\mathscr{H} = \{A_\lambda \,|\, \lambda < \omega_1\}$. Несложно проверить, что $A \notin \mathscr{H}$ и $A \in [\mathscr{H}]_V$, а поскольку $\tau_V \geqslant \tau_{inf}$, то и $A \in [\mathscr{H}]_{inf}$. В силу секвенциальности пространства $\exp_{inf} X$ (предложение 2), а также следствия 3 (часть (б)), найдутся множество $B \in \exp X \setminus \mathscr{H}$, последовательность $(A_{\lambda_n})_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ и метрика $\rho \in \Omega$ такие, что $A_{\lambda_n} \xrightarrow[\widehat{\rho}]{} B$. Рассмотрим следующие варианты расположения множества B.

1) $B \not\subset A$. Фиксируем некоторую точку $b \in B \setminus A$. Ясно, что $\varepsilon = \rho(b, A) > 0$ и $B_\rho(A, \varepsilon) \not\supset$ $\not\supset B$, откуда $\widehat{\rho}(B, A_\lambda) \geqslant \varepsilon$ для любого $\lambda < \omega_1$, что противоречит сходимости $A_{\lambda_n} \xrightarrow[\widehat{\rho}]{} B$. Таким образом, $B \subset A$.

2) Найдутся $a_\alpha \notin B$ и $a_\beta \in B$ такие, что $\alpha < \beta$ (a_α – «дырка» в множестве B). Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $B_\rho(a_\alpha, \varepsilon) \cap A = \{a_\alpha\}$ и $B_\rho(a_\beta, \varepsilon) \cap A = \{a_\beta\}$. Для всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого номера, $\widehat{\rho}(B, A_{\lambda_n}) < \varepsilon$, и следовательно $A_{\lambda_n} \ni a_\beta$. А поскольку $a_\alpha \in A_{\lambda_n}$ (так как $\alpha < \beta$) и $\widehat{\rho}(B, A_{\lambda_n}) < \varepsilon$, то $a_\alpha \in B$. Получили противоречие. Таким образом, множество B не содержит «дырок».

3) Существует не более чем счетный ординал λ_0 такой, что $\lambda < \lambda_0$ для любой точки $a_\lambda \in B$. Можно считать, что λ_0 – первый среди таких ординалов, и тогда $B = A_{\lambda_0}$, что невозможно, поскольку $B \notin \mathscr{H}$.

Итак, получаем совпадение $B = A$. Фиксируем ординал $\lambda_0 < \omega_1$, $\lambda_0 > \lambda_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ (такой ординал существует, см., например, [14, с. 69]), а также $\varepsilon > 0$, при котором $B_\rho(a_{\lambda_0}, \varepsilon) \cap A = \{a_{\lambda_0}\}$. Поскольку $B = A$, то $\widehat{\rho}(B, A_{\lambda_n}) \geqslant \varepsilon$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, что противоречит сходимости $A_{\lambda_n} \xrightarrow[\widehat{\rho}]{} B$. $\square$

Остается отметить случай несравнимости топологий τ_{inf} и τ_V. Из теорем 8 и 9 очевидным образом вытекает

Следствие 6. *Топологии τ_{inf} и τ_V на $\exp X$ несравнимы тогда и только тогда, когда вес пространства X несчетен.*

Литература

1. *Hausdorff F.* Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig, 1914.

2. *Vietoris L.* Bereiche zweiter Ordnung // Monatshefte Math. Phys. 1923. Vol. 33. P. 49–62.

3. *Michael E. A.* Topologies on spaces of subsets // Trans. Amer. Math. Soc. 1951. Vol. 71. P. 152–182.

4. *Fell J. M.* A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non-Hausdorff space // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 13. P. 472–476.

5. *Beer G. A., Himmelberg C. J., Prikry K., van Vleck F. S.* The locally finite topology on 2^X // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. Vol. 101. P. 168–172.

6. *Costantini C., Vitolo P.* On the infimum of the Hausdorff metric topologies // Proc. London Math. Soc. 1995. Vol. 70. P. 441–480.

7. *Пономарев В. И.* Новое пространство замкнутых множеств и многозначные непрерывные отображения бикомпактов // Математический сб. 1959. Т. 48(90), № 2. С. 191–212.

8. *Beer G.* Topologies on Closed and Closed Convex Sets. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993.

9. *Naimpally S. A., Sharma P. L.* Fine uniformity and the locally finite hyperspace topology // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 103. P. 611–646.

10. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.

11. *Atsuji M.* Uniform continuity of continuous functions of metric spaces // Pacific J. Math. 1958. Vol. 8. P. 11–16.

12. *Beer G., Tamaki R.* The infinite value functional and the uniformization of hit-and-miss hyperspace topologies // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. Vol. 122. P. 601–611.

13. *Hausdorff F.* Erweiterung einer Homöomorphie // Eund. Math. 1930. Vol. 16. P. 353–360.

14. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.

15. *Тимохович В. Л., Фролова Д. С.* О свойствах инфимальной топологии пространства отображений // Изв. вузов. Матем. 2016. № 4. С. 87–99.

16. *Тимохович В. Л., Фролова Д. С.* Об инфимальной топологии пространства отображений // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2011. № 2. С. 136–140.

A. S. Bedritskiy, V. L. Timokhovich

On the topologies of a hyperspace of a metrizable topological space

Summary

The properties of the topology τ_{inf}, which is the infimum of the set of all topologies generated by the Hausdorff metrics on the hyperspace $\exp X$ of a metrizable topological space X are studied. As one of the main results necessary and sufficient conditions for the metrizability (with Hausdorff metric) of τ_{inf} are obtained. We also show that $\exp X$ with the topology τ_{inf} is first-countable space if and only if a space X is locally compact and second-countable. Besides we investigate relations between τ_{inf} and other topologies on the $\exp X$: Vietoris topology, Fell topology and locally finite topology.