Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 1. С. 88–100

УДК 512.542

О РАЗРЕШИМОСТИ И ФАКТОРИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ π-РАЗРЕШИМЫХ НЕПРИВОДИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП ПРИМАРНОЙ СТЕПЕНИ. ЧАСТЬ II

А. А. Ядченко

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: yadchenko_56@mail.ru

Поступила 29.11.2022

Работа является второй из серии статей, где для множества π, состоящего из нечетных простых чисел, исследуются конечные π-разрешимые неприводимые комплексные линейные группы степени $2|H|+1$, у которых холловы π-подгруппы H являются TI-подгруппами и не являются нормальными в группах. Цель серии – доказать разрешимость и определить условия факторизации таких групп. Продолжено доказательство теоремы. Установлены дальнейшие свойства минимального контрпримера к теореме.

1. Введение. Исследуются конечные π-разрешимые неприводимые комплексные линейные группы степени $n = 2|H|+1$, у которых холлова π-подгруппа H является TI-подгруппой.

В первой части работы [1] были доказаны некоторые предварительные результаты, а также получены некоторые свойства минимального контрпримера Γ к теореме (*), которая является основой доказательства главной теоремы. В данной ее части будет продолжено изучение свойств минимального контрпримера к теореме (*).

Условие 1. Пусть π – множество нечетных простых чисел и G – конечная не π-замкнутая π-разрешимая группа с π-холловой TI-подгруппой H, имеющая точный неприводимый характер χ степени n.

Теорема. *Пусть группа G удовлетворяет условию* 1 *и* $n = 2|H|+1 > 7$. *Тогда n – степень простого числа q, группа G разрешима и, если при $|\pi| = 1$ характер χ примитивный, то $G = N_G(H)O_q(G)$.*

2. Некоторые определения, обозначения и предварительные результаты. N – множество натуральных чисел; Z_+ – множество целых неотрицательных чисел; если ψ – характер некоторой подгруппы $X \subseteq G$, то $\operatorname{Irr}(\psi)$ обозначает множество всех неприводимых компонент характера ψ; $\pi = \pi(H)$; $\pi' = \pi(X) \setminus \pi$; $X_{\pi'}$ – холлова π'-подгруппа группы X. Если $X \lhd G$ и φ – неприводимый характер подгруппы X, то условие, что φ – g-инвариантен для некоторого элемента $g \in G \setminus X$, запишем для краткости в виде $I_G(\varphi) \neq X$. Все остальные обозначения и определения обычны и их можно найти, например, в [2] или [3]. Всюду под характером группы будем понимать комплексный характер, а под группой – конечную группу.

Пусть $\Gamma = AB$ – группа с подгруппами A и B, где $B \lhd \Gamma$, $(|A|,|B|) = 1$ и $|A|$ нечетен (A – *группа копростых автоморфизмов группы* B). Тогда она удовлетворяет условию теоремы 13.1 [3]. Согласно этой теореме существует взаимно-однозначное соответствие $\pi(B, A) : \operatorname{Irr}_A(B) \to \operatorname{Irr}(C_B(A))$ между множеством всех A-инвариантных неприводимых характеров группы B и множеством всех неприводимых характеров подгруппы $C_B(A)$, которое обладает рядом свойств, зависящих, в частности, от свойств подгруппы A. Пусть $\chi \in \operatorname{Irr}_A(B)$. Тогда, по лемме 13.3 [3], существует такой единственный неприводимый характер $\hat{\chi}$ группы Γ, что $\hat{\chi}_B = \chi$ и $A \subseteq \ker(\det \hat{\chi})$. Он называется *каноническим продолжением характера* χ *на группу* Γ. В дальнейшем под $\hat{\chi}$ будем понимать именно такой характер.

Условие (*). Скажем, что для Γ, A, B, C, χ и n выполнено условие (*), если $\Gamma = BA$, где B – нормальная в Γ подгруппа, $(|B|, |A|) = 1$, A – группа нечетного порядка, большего 3, которая не является нормальной в группе Γ, $C_B(a) = C_B(A) = C$ для каждого элемента $a \in A^{\#}$, и B имеет точный неприводимый комплексный характер χ степени n, который является a-инвариантным хотя бы для одного элемента $a \in A^{\#}$.

Теорема (*). *Пусть для* Γ, A, B, C, χ *и* $n = 2|A|+1$ *выполнено условие* (*). *Тогда группа* Γ *разрешима,* n *является степенью простого числа* q, *подгруппа* $C_{2'}$ *абелева и, если подгруппа* C *не абелева, то в обозначениях леммы* 2.7 [1] *характер* $\chi_C = \beta + |A|\beta_1$, *где* $\beta(1) = |A|+1$ *и* $\beta_1(1) = 1$ *либо* $\beta(1) = 1$ *и* $\beta_1(1) = 2$. *Также, если* $|\pi| > 1$ *и при* $|\pi| = 1$ *характер* $\hat{\chi}$ *примитивный, то* $G = O_q(G)C$.

Продолжим нумерацию формулировок лемм, начатую в предыдущей части работы [1]. В ней, напомним, мы, в частности, показали, что неприводимый характер $\hat{\chi}$ точный и что $\hat{\chi}(1) = q^{\alpha}$ для некоторого нечетного простого числа q и $\alpha \in N$.

Лемма 3.3. *Пусть* $q \in \pi(n)$, B_q – A*-инвариантная силовская* q*-подгруппа группы* B. *Тогда* $[B_q, A] \not\subseteq C$.

Доказательство. Предположим, что $[B_q, A] \subseteq C$. Поскольку по лемме 2.2 [1] $B_q = [B_q, A]C_{B_q}(A)$, то $B_q \subseteq C$. По упражнению 13.2 [2]

$$\frac{\beta(1)\,|B:C|}{\chi(1)}$$

– целое число, где β из леммы 2.6 [1] Поскольку $B_q \subseteq C$, то q не делит $|B:C|$. Так как $\chi(1)$ – степень q, то $\chi(1)$ делит $\beta(1)$. Поскольку $\beta(1) \leq \chi(1)$, то $\beta(1) = \chi(1)$. Из леммы 2.6 [1] следует, что $k = 0$, $\varepsilon = 1$ и $\hat{\chi}_A = \beta(1)1_A$, т. е. $A \subseteq \ker \hat{\chi}$. Получили противоречие с леммой 3.1 [2]. Значит, $[B_q, A] \not\subseteq C$.

Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Если характер* $\hat{\chi}$ *не является примитивным, то* $\hat{\chi} = \mu^{\Gamma}$ *для линейного характера* μ *такой собственной подгруппы* $X \subseteq \Gamma$, *что* $A \subseteq X$, $A \not\trianglelefteq X$ *и* $|G:X| = \hat{\chi}(1) = q^{\alpha}$. *При этом* $\hat{\chi}_X = \eta + \theta$, *где* $\eta \neq 0$ *и* θ *– такие компоненты характера* $\hat{\chi}_X$, *что и в лемме* 3.2 [1] *и для которых и для подгруппы* $X_{\pi'}$ *выполняются утверждения* $(1_i)-(1_{vi})$ *леммы* 3.2 [1].

Доказательство. Допустим, что характер $\hat{\chi}$ не является примитивным. Тогда для некоторого неприводимого характера μ собственной подгруппы X группы Γ выполняется утверждение $\hat{\chi} = \mu^{\Gamma}$. Так как

$$\hat{\chi}(1) = |\Gamma : X|\,\mu(1) = q^{\alpha},$$

то числа $|\Gamma : X|$ и $\mu(1)$ – также являются степенями простого числа q, и мы можем считать, что $A \subseteq X$. Также мы видим, что $B = B_q X$.

Допустим, что $A \lhd X$. Тогда $X_{\pi'} \subseteq C$, т. е. $B = B_q C$ и, значит, $|B:C|$ – степень простого числа q. По лемме 2.9 [1] $B = O_q(B)C$. Так как $\chi \in \mathrm{Irr}_A(B)$ имеет степень $2|A|+1$, то нам остается только проанализировать утверждения леммы 2.7 [1] и выбрать для χ_C только те, которые могут выполняться. Это утверждения (1)–(5) и (12). Если это не утверждения (1) и (2), то $C' \subseteq \ker \chi_C = 1$, ибо все неприводимые компоненты характера χ_C линейные. Стало быть, подгруппа C абелева. Утверждения (1) и (2) сформулированы в теореме (*). Мы замечаем, что теорема (*) верна. Но это противоречит выбору группы Γ.

Поэтому $A \ntriangleleft X$.

Допустим вначале, что $\mu(1) \neq 1$. Поскольку $\hat{\chi}(1) = 2|A|+1$, то мы замечаем, что $|\Gamma : X| \not\equiv 1(\mod |A|)$. Тогда $|B : X_{\pi'}| \not\equiv 1(\mod |A|)$ и из леммы 2.12 [1] следует, что $B = X_{\pi'}C$. Поэтому для $a \in A$ получаем, что

$$\hat{\chi}(a) = \sum_{x \in T} \mu^0(xax^{-1}) = |T|\,\mu(a).$$

Здесь $\mu^0(b) = \mu(b)$, если $b \in X$ и $\mu^0(b) = 0$, если $b \not\in X$ и T – множество представителей всех смежных классов группы Γ по подгруппе X, взятых по одному из каждого класса и $T \subseteq C$. Поэтому для всех $x \in T$ и для всех $a \in A$ выполняется $\mu^0(xax^{-1}) = \mu(a)$.

С другой стороны, по лемме 2.6 [1]

$$\hat{\chi}(a) = k\rho_A(a) + \beta(1)1_A(a) = \beta(1).$$

Значит, $|T|\,\mu(a) = \beta(1)$. Отсюда следует, что $|T| = |\Gamma : X| = q^{\alpha_2}$, $\alpha_2 < \alpha$, делит $\beta(1)$. Однако, как следует из значений $\beta(1)$ в формулировке леммы 2.7 [1], это невозможно. В самом деле. Пусть выполняется ее утверждение (1). Тогда $\beta(1) = |A|+1$. Поскольку

$$\hat{\chi}(1) = 2|A|+1 = 2(|A|+1) - 1 = q^{\alpha},$$

то видим, что q не делит $|A|+1$. Таким же образом мы убеждаемся в том, что q не делит $\beta(1)$ в каждом из утверждений леммы 2.7 [1] за исключением заключения (15). Однако и оно не может выполняться, ибо в противном случае $A \subseteq \ker \hat{\chi}$, как следует из леммы 2.6 [1]. Это противоречит лемме 3.1 [1]. Остается, что $\mu(1) = 1$. Тогда $|\Gamma : X| = q^{\alpha}$.

Положим, что $X = \Gamma_1$ и применим лемму 3.2 [1] в ее обозначениях. Понятно, что $\mu \in \mathrm{Irr}(\eta) \subseteq \mathrm{Irr}(\hat{\chi}_X)$.

Лемма доказана.

Лемма 3.5. (1) *Если подгруппа* C *не абелева, то в обозначениях леммы* 2.7 [1] *характер* $\chi_C = \beta + |A|\beta_1$, *где* $\beta(1) = |A|+1$ *и* $\beta_1(1) = 1$ *либо* $\beta(1) = 1$ *и* $\beta_1(1) = 2$.

(2) *При этом для каждой не абелевой подгруппы* $C_0 = C_{B_1}(A)$, A*-инвариантной подгруппы* $B_1 \subseteq B$ *и* A*-инвариантного неприводимого характера* $\chi_1 = \chi_{B_1}$ *справедливо равенство* $(\chi_1)_{C_0} = \beta' + |A|\beta'_1$ *с неприводимыми компонентами* $\beta' = \beta_{C_0}$ *и* $\beta'_1 = (\beta_1)_{C_0}$.

Доказательство. Допустим, что подгруппа C не является абелевой. Покажем, что характер χ_C имеет одно из только что указанных в утверждении (1) свойств.

Поскольку $\chi(1) = 2|A|+1$, то для характера χ_C может выполняться только одно из утверждений (1)–(5), (12) или (15) леммы 2.7 [1]. Допустим, что все неприводимые компоненты ξ характера χ_C линейные. Тогда

$$C' \subseteq \cap_{\xi \in Irr(\chi_C)} \ker \xi = \ker \chi_C = 1.$$

Это значит, что подгруппа C абелева, что не так по предположению. Поэтому из указанных утверждений леммы 2.7 [1] могут выполняться только те, в которых присутствует нелинейная неприводимая компонента ξ. Это утверждения (1), (2) или (15).

Если выполняется утверждение (1) или (2), то

$$\chi_C = \beta + |A|\beta_1$$

с $\beta(1) = |A|+1$ и $\beta_1(1) = 1$ – утверждение (1) или $\beta(1) = 1$ и $\beta_1(1) = 2$ – утверждение (2) леммы 2.7 [1].

Согласно случаю (15) леммы 2.7 [1] $\chi_C = \beta$. Тогда в лемме 2.6 [1] $\chi(1) = \beta(1)$ и $k = 0$. Стало быть, $A \subseteq \ker \hat{\chi}$, что противоречит лемме 3.1 [1]. Поэтому этот случай также невозможен.

Утверждение (1) доказано.

Докажем утверждение (2).

Пусть B_1 – A-инвариантная подгруппа из B, $C_0 = C_{B_1}(A)$ – не абелева подгруппа и $\chi_1 = \chi_{B_1} \in \mathrm{Irr}_A(B_1)$.

Если $A \triangleleft AB_1$, то $A \subseteq C_\Gamma(B_1)$. По упражнению 2.15 [2] $A \subseteq Z(\Gamma)$, что не так.

Поэтому $A \not\triangleleft AB_1$ к характеру $(\chi_1)_{C_0}$ мы можем применить лемму 2.7 [1]. Легко видеть, что выполняется одно из утверждений (1) или (2), т. е.

$$(\chi_1)_{C_0} = \beta' + |A|\beta_1',$$

где $\beta'(1) = |A|+1$ и $\beta_1'(1) = 1$ или $\beta'(1) = 1$ и $\beta_1'(1) = 2$. Поскольку

$$C_0 = C_{B_1}(A) = C \cap B_1 \subseteq C,$$

то

$$(\chi_1)_{C_0} = \chi_{C_0} = \beta_{C_0} + |A|(\beta_1)_{C_0} = \beta' + |A|\beta_1'.$$

Пусть вначале для характера $(\chi_1)_{C_0}$ выполняется утверждение (1) леммы 2.7 [1], т. е. $\beta'(1) = |A|+1$ и $\beta_1'(1) = 1$. Покажем, что и для характера χ_C также выполняется утверждение (1) этой леммы. Так как $\beta_1(1) \leqslant 2 < |A|+1$, то мы видим, что характер β' не может быть неприводимой компонентой характера $(\beta_1)_{C_0}$. Значит, $\beta' = \beta_{C_0}$, $\beta(1) = |A|+1$ и $\beta_1' = (\beta_1)_{C_0}$, $\beta(1) = 1$.

Пусть теперь для характера $(\chi_1)_{C_0}$ выполняется утверждение (2) леммы 2.7 [1], т. е. $\beta'(1) = 1$ и $\beta_1'(1) = 2$. Покажем, что для характера χ_C не может выполняться утверждение (1) этой леммы. Пусть это не так, и на самом деле в нем $\beta(1) = |A|+1$ и $\beta_1(1) = 1$. Тогда, очевидно, $(\beta_{C_0}, \beta_1')_{C_0} \neq 0$ и $((\beta_1)_{C_0}, \beta_1')_{C_0} = 0$. Следовательно,

$$(\chi_{C_0}, \beta_1')_{C_0} = ((\chi_C)_{C_0}, \beta_1')_{C_0} =$$

$$= ((\beta_{C_0} + |A|(\beta_1)_{C_0}), \beta_1')_{C_0} = (\beta_{C_0}, \beta_1')_{C_0} \leqslant \beta(1)/\beta_1'(1) = (|A|+1)/2.$$

Отсюда и из чуть выше выделенного равенства получаем, что

$$|A| = ((\chi_1)_{C_0}, \beta_1')_{C_o} < (\chi_{C_0}, \beta_1')_{C_0} \leqslant (|A|+1)/2.$$

Противоречие. Мы видим, что и в шаге 2 выполняется утверждение (2) леммы 2.7 [1]. Итак, $\beta_{C_0} = \beta'$ и $(\beta_1)_{C_0} = \beta_1'$.

Лемма доказана.

Из утверждения (1) леммы 3.5 вытекает, что для доказательства теоремы (*) нам достаточно установить, что $B = O_q(B)C$ и подгруппа C разрешима.

В леммах 3.6–3.11 мы предположим, что $B = O_q(B)C$ и продолжим изучать свойства минимального контрпримера Γ к теореме (*).

Лемма 3.6. *Предположим, что* $B = O_q(B)C$. *Тогда выполняется каждое из следующих утверждений:*

(1) *характер* $\varphi = \hat{\chi}_{O_q(B)}$ *неприводим и* $\hat{\chi}_{O_q(B)A} = \hat{\varphi}$;

(2) *каждая подгруппа нечетного порядка из* C *абелева.*

Доказательство. Пусть $B = O_q(B)C$. Тогда $O_q(B)A \triangleleft \Gamma$.

В самом деле. Поскольку $\Gamma = O_q(B)(C \times A)$, то $\gamma = g(c \times a) = (ga)c$ для каждого элемента $\gamma \in \Gamma$ и для некоторых элементов $g \in O_q(B)$, $c \in C$ и $a \in A$, то

$$(O_q(B)A)^\gamma = ((O_q(B)A)^{ga})^c = (O_q(B)A)^c = (O_q(B))^c A^c = O_q(B)A.$$

Поэтому к характеру $\hat{\chi}$ и подгруппе $O_q(B)A$ применима теорема Клиффорда, согласно которой

$$\hat{\chi}(1) = q^\alpha = (|\Gamma : I| = |T|)e\varphi'(1),$$

где $\varphi' \in \mathrm{Irr}(\hat{\chi}_{O_q(B)A})$, $I = I_\Gamma(\varphi')$ – группа инерции характера φ' в группе Γ, e – натуральное число, делящее $\hat{\chi}(1)$ и T – множество представителей всех смежных классов группы Γ по подгруппе I, взятых по одному из каждого класса. Мы видим, что $|T|$ – также степень простого числа q.

Допустим, что $|T| \neq 1$. Тогда $(\varphi')^t(1) < |A| - 1$ и по лемме 2.10 [1]

$$A^t \ker(\varphi')^t / \ker(\varphi')^t \lhd O_q(B)A / \ker(\varphi')^t$$

для всех $t \in T$, т. е. $A^t \ker(\varphi')^t \lhd O_q(B)A$ для всех $t \in T$. Поскольку из условия леммы вытекает, что $T \subseteq C$, то $A^t = A$ и, значит, $A \ker(\varphi')^t \lhd O_q(B)A$ для всех $t \in T$. Тогда

$$A = \cap_{t \in T} A \ker(\varphi')^t = A(\cap_{t \in T} \ker(\varphi')^t) \lhd O_q(B)A,$$

ибо

$$(\cap_{t \in T} \ker(\varphi')^t) = \ker \hat{\chi}_{O_q(B)A} = 1.$$

Отсюда следует, что $A \lhd \Gamma$. Это противоречит условию теоремы.

Стало быть, $|T| = 1$. Поэтому $\hat{\chi}_{O_q(B)A} = e\varphi'$. Если $e \neq 1$, то $\varphi'(1) < |A| - 1$ и мы с применением леммы 2.10 [1] также получаем, что $A \lhd O_q(B)A$, ибо $\ker \varphi' = 1$. Значит, $A \lhd \Gamma$. Противоречие. Поэтому мы заключаем, что $e = 1$ и, значит,

$$\hat{\chi}_{O_q(B)A} = \varphi'$$

– неприводимый характер группы $O_q(B)A$, а

$$\varphi = (\varphi')_{O_q(B)} \in Irr_A(O_q(B))$$

– A-инвариантный неприводимый характер подгруппы $O_q(B)$. Понятно, что $\hat{\chi}_A = (\varphi')_A$. Поэтому $\varphi' = \hat{\varphi}$, в силу единственности характера $\hat{\varphi}$. Значит,

$$\hat{\chi}_{O_q(B)A} = \hat{\varphi}.$$

Утверждение (1) установлено.

Докажем утверждение (2). Пусть C_0 – подгруппа нечетного порядка из C.

Если $O_q(B)C_0 = B$, то группа B имеет нечетный порядок. Поскольку все неприводимые характеры подгруппы C в этом случае имеют нечетную степень, то для характера χ_C не могут выполняться утверждения (1) и (2) леммы 2.7 [1]. Следовательно, он содержит только линейные неприводимые компоненты. Стало быть, $C' \subseteq \ker \chi_C = 1$. В этом случае подгруппа C и, значит, подгруппа C_0 абелева.

Пусть теперь $B_1 = O_q(B)C_0 \neq B$. Из утверждения (1) доказываемой леммы вытекает, что характер $\chi_1 = \chi_{B_1}$ неприводим. Поскольку подгруппа B_1 имеет нечетный порядок, то все неприводимые характеры подгруппы $C_{B_1}(A)$ имеют нечетную степень. Отсюда и из утверждения (2) леммы 3.5 следует, что подгруппа $C_{B_1}(A)$ абелева. Поэтому и ее подгруппа C_0 абелева.

Лемма доказана.

Пусть подгруппа $B_1 \subseteq B$ – такая A-инвариантная подгруппа, что $B_1 \neq B$, характер $\chi_1 = \chi_{B_1}$ неприводим, A-инвариантен и $A \ntriangleleft \Gamma_1 = AB_1$. Нетрудно установить, что для Γ_1, A, B_1, $C_{B_1}(A)$, χ_1 и n выполняется условие (*). Так как $\Gamma_1 \neq \Gamma$, то из индукции вытекает, что $B_1 = O_q(B_1)C_{B_1}(A)$ и подгруппа $C_{B_1}(A)$ разрешима. В дальнейшем мы это будем учитывать.

В частности, если $O_q(B) \subseteq B_1$, то из леммы 3.6 вытекает, что характер $\chi_1 = \chi_{B_1}$ неприводим и A-инвариантен, а из леммы 3.3 вытекает, что $A \ntriangleleft \Gamma_1$.

Лемма 3.7. *Если* $B = O_q(B)C$, *то характер* $\hat{\chi}$ *примитивный.*

Доказательство. Заметим, что, если подгруппа C разрешима, то она содержит холлову $2'$-подгруппу, которая по лемме 3.6 абелева. К тому же $1 \neq Z(O_q)(B) \subseteq Z(\Gamma)$. И мы замечаем, что теорема (*) верна. Но это противоречит выбору группы Γ. Поэтому мы предполагаем, что подгруппа C не является разрешимой.

Допустим, что характер $\hat{\chi}$ импримитивный. По лемме 3.4 $\hat{\chi} = \mu^{\Gamma}$ для линейного характера μ собственной подгруппы $X \subseteq \Gamma$. Мы видим, что

$$\hat{\chi}(1) = 2|A| + 1 = |\Gamma : X|\mu(1) = |\Gamma : X| = q^{\alpha}.$$

По закону взаимности Фробениуса для характеров

$$(\hat{\chi}, \mu^{\Gamma})_{\Gamma} = (\hat{\chi}_X, \mu)_X = 1,$$

т. е. характер $\hat{\chi}_X$ содержит неприводимую компоненту μ. Значит, он не является неприводимым. Так как характер $\hat{\chi}_{O_q(B)} = \varphi$ неприводим по утверждению (1) леммы 3.6, то мы видим, что $O_q(B) \not\subseteq X$.

Предположим, что $\Gamma_1 = O_q(B)X \neq \Gamma$. По упражнению 5.1 [3]

$$(\mu^{\Gamma_1})^{\Gamma} = \mu^{\Gamma} = \hat{\chi}.$$

Поэтому характер μ^{Γ_1} неприводим, ибо характер $\hat{\chi}$ неприводим, и мы видим, что

$$\varphi = \hat{\chi}_{O_q(B)} \in \mathrm{Irr}\Big((\mu^{\Gamma_1})_{O_q(B)}\Big).$$

Следовательно,

$$\varphi(1) = |\Gamma : X| \leqslant \mu^{\Gamma_1}(1) = |\Gamma_1 : X| < |\Gamma : X| = \hat{\chi}(1).$$

Противоречие, ибо $\varphi(1) = \hat{\chi}(1)$ по утверждению (1) леммы 3.6.

Значит, $\Gamma_1 = O_q(B)X = \Gamma$. Отсюда и из выделенной ранее формулы вытекает, что

$$|\Gamma : X| = |O_q(B)X : X| = |O_q(B) : O_q(B) \cap X| = q^{\alpha}.$$

Предположим, что $\Phi(O_q(B)) \not\subseteq (O_q(B) \cap X)$. Так как

$$\Phi(O_q(B))(O_q(B) \cap X) \neq O_q(B)$$

по теореме 5.1.1 (i) [3], то

$$X \subset X_1 = \Phi(O_q(B))(O_q(B) \cap X)X = \Phi(O_q(B))X \neq \Gamma.$$

Следовательно, характер μ^{X_1} неприводим степени, как нетрудно видеть,

$$|X_1 : X| = |\Gamma : X| / |\Gamma : X_1| = (2|A| + 1) / |\Gamma : X_1| < |A| - 1.$$

Из лемм 2.3 и 2.10 [1] следует, что

$$A \ker \mu^{X_1} / \ker \mu^{X_1} \lhd X_1 / \ker \mu^{X_1}.$$

Поэтому по лемме 2.3 [1]

$$(X_1)_{\pi'} = (\ker \mu^{X_1}) C_{(X_1)_{\pi'}}(A).$$

Легко также видеть, что $|B:(X_1)_{\pi'}|$ не делится на такую степень $f>1$ простого числа q, что $f \equiv 1(\bmod |A|)$. Тогда по лемме 2.12 [1] $B=(X_1)_{\pi'}C$. Следовательно,

$$B = (\ker \mu^{X_1}) C_B(A).$$

Так как по лемме 2.11 [2] $\ker \mu^{X_1} \subseteq X$, то

$$B = XC_B(A).$$

Отсюда и из определения 5.1 [2] вытекает, что

$$\hat{\chi}(a) = \mu^{\Gamma}(a) = \sum_{t \in T} \mu(a^t) = |T|\,\mu(a)$$

для $a \in A$, ибо множество T – представителей всех смежных классов, взятых по одному из каждого класса, состоит из элементов C. Так как

$$|T| = |\Gamma : X| = q^{\alpha} = \hat{\chi}(1),$$

то $\hat{\chi}(a) = \hat{\chi}(1)\mu(a)$. Следовательно, $a \in Z(\hat{\chi}) = Z(\Gamma)$, ввиду точности неприводимого характера $\hat{\chi}$. Это противоречит условию (*).

Мы делаем вывод, что $\Phi(O_q(B)) \subseteq (O_q(B) \cap X)$, т. е. $O_q(B) \cap X \lhd O_q(B)$. Также мы можем утверждать, что между группами X и Γ не существует подгруппы $X_1 \supset X$, т. е. подгруппа X является максимальной в Γ. И так как $O_q(B) \cap X \lhd X$, то

$$O_q(B) \cap X \lhd O_q(B)X = \Gamma.$$

Рассмотрим характер $\sigma = (1_X)^{\Gamma}$. По теореме 5.18 [2] $(\sigma, 1_{\Gamma})_{\Gamma} = 1$. Поэтому $\xi(1) \le 2|A|$ для каждого характера $\xi \in \mathrm{Irr}(\sigma)$, $\xi \ne 1_{\Gamma}$. Причем по упражнению 5.16 [2] $\ker \xi = \ker \sigma$. Понятно, что

$$O_q(B) \cap X \subseteq \ker \sigma \subseteq X.$$

Предположим, что

$$A \ker \xi / \ker \xi \lhd \Gamma / \ker \xi$$

для некоторой неприводимой компоненты ξ характера σ. Стало быть, $A\ker\xi \lhd \Gamma$. Так как $A\ker\xi \subseteq X$, то

$$(\hat{\chi}_{A\ker\xi}, \mu_{A\ker\xi})_{A\ker\xi} \ne 0.$$

Из теоремы Клифорда вытекает, что все неприводимые компоненты характера $\hat{\chi}_{A\ker\xi}$ линейные. Следовательно, подгруппа $(A\ker\xi)'$ абелева. Поэтому $A \lhd A\ker\xi$ и $A \lhd \Gamma$, что не так.

Стало быть,

$$A \ker \xi / \ker \xi \ntriangleleft \Gamma / \ker \xi$$

для каждого $\xi \ne 1_{\Gamma}$. Отсюда и из леммы 2.10 [1] вытекает, что

$$\xi(1) \in \{|A|-1; |A|; |A|+1; 2(|A|-1); 2|A|-1\}$$

или $\xi(1) = 2|A|$. Причем, каждое значение $\xi(1)$ является степенью простого числа, если $\xi(1) \ne 2|A|$ и если, может быть, $\xi(1) \ne |A|$.

Допустим, что существует характер ξ_1 с $\xi_1(1) = |A|-1$. Так как в сумме степени всех неприводимых компонент характера σ равны $2|A|$ и $|A|>3$ по условию, то должна существовать компонента ξ_2 с $\xi_2(1) = |A|+1$. Поскольку значения $|A|-1$ и $|A|+1$ – степени 2, то мы получим, что $|A|=3$, что не так.

Допустим, что существует характер ξ_1 с $\xi_1(1) = |A|$. Тогда существует компонента ξ_2 с $\xi_2(1) = |A|$. Тогда мы замечаем, что все неприводимые компоненты характера $\sigma_{\Gamma_{\pi'}}$ линейные. Значит, $(\Gamma_{\pi'})' \subseteq \ker\sigma$. Следовательно, $(\Gamma_{\pi'})' \subseteq X$. Тогда мы, применяя теорему Клиффорда и рассматривая характер $\hat{\chi}_{(\Gamma_{\pi'})'}$, убеждаемся в том, что подгруппа $(\Gamma_{\pi'})'$ абелева. Стало быть, подгруппа $B=\Gamma_{\pi'}$ разрешима. Тогда разрешима и подгруппа C, что по предположению не так.

Также мы убеждаемся в том, что $\xi(1)\neq 2(|A|-1)$ и $\xi(1)\neq 2|A|-1$.

Осталось предположить, что $\xi(1)=2|A|$. Легко видеть, что все неприводимые компоненты ϱ характера ξ_B имеют степень 2. При этом они все сопряжены элементами $a\in A$. Поэтому они все либо импримитивные, либо все примитивные.

Допустим, что характер ϱ импримитивный. Тогда он индуцируется линейным характером собственной подгруппы B^* индекса 2 в B. Так как $B_2\subseteq C$, ибо $B=O_q(B)C$, то B^* – A-инвариантна. Значит, $AB^*\lhd\Gamma$ и ее индекс равен $2\neq q$. Стало быть, характер $\hat{\chi}_{AB^*}$ неприводим. Нетрудно убедиться в том, что подгруппа AB^* удовлетворяет условию леммы и теоремы. Так $|AB^*|<|\Gamma|$, то по индукции подгруппа $C_{B^*}(A)$ разрешима. Значит, разрешима и подгруппа C, что не так по предположению.

Допустим теперь, что характер ϱ примитивный. Следовательно, примитивным является и точный неприводимый характер $\overline{\varrho}$ в смысле леммы 2.22 [2] степени 2 фактор группы $\overline{\Gamma}=\Gamma/\ker\varrho$. Так как

$$\Phi(O_q(B))\subseteq O_q(B)\cap X\subseteq\ker\varrho,$$

то фактор группа

$$\overline{O_q(B)}=O_q(B)\ker\varrho/\ker\varrho\cong O_q(B)/O_q(B)\cap\ker\varrho$$

абелева. Так как она нормальна в $\overline{\Gamma}$, то по следствию 6.13 [2] $\overline{O_q(B)}\subseteq Z(\overline{\Gamma})$. Так как $B=O_q(B)C$, то

$$\overline{C}=C\ker\varrho/\ker\varrho\lhd\overline{B}=B/\ker\varrho.$$

Отсюда вытекает, что $C\ker\varrho\lhd B$. Поскольку $C\ker\varrho\subseteq X$, то $\mu_{C\ker\varrho}\in\operatorname{Irr}(\chi_{C\ker\varrho})$. Так как $\mu(1)=1$, то, как и ранее, из точности характера χ и теоремы Клиффорда вытекает, что подгруппа $C\ker\varrho$ абелева. Значит, и подгруппа C абелева. Это вновь противоречит нашему предположению о том, что подгруппа C не разрешима.

Наше предположение о том, что характер $\hat{\chi}$ импримитивный неверно. Стало быть, он примитивный.

Лемма доказана.

Из вышесказанного следует, что любая подгруппа $C_0\subseteq C$, для которой $\Gamma_1=O_q(B)C_0\neq\Gamma$ является разрешимой.

Лемма 3.8. *Если* $B=O_q(B)C$, *то выполняются следующие утверждения:*

(1) *подгруппа* $B=O_q(B)C'$, C' *не разрешима и* $O_q(B)\cap C'=1$;

(2) $C=(1\neq Z(O_q(B))=Z(\Gamma))\times C'$;

(3) *фактор группа* $F(\Gamma)/Z(\Gamma)$ *элементарна абелева порядка* $\hat{\chi}(1)^2$;

(4) $\chi_{C'}=\beta_{C'}+|A|(\beta_1)_{C'}$, *где* $\beta_{C'}$ *– точный неприводимый характер подгруппы* C' *степени* $|A|+1$ *и* $(\beta_1)_{C'}=1_{C'}$ *либо* $\beta_{C'}=1_{C'}$ *и* $(\beta_1)_{C'}$ *– точный неприводимый характер степени* 2 *подгруппы* C'.

Доказательство. (1). Предположим, что $B\neq B_1=O_q(B)C'$. Тогда подгруппа $C_0=C'$ разрешима, что влечет разрешимость группы C. Это противоречит нашему предположению. Поэтому $B=O_q(B)C'$ и C''' не разрешима. Ниже покажем, что $O_q(B)\cap C'=1$.

Так как по лемме 3.6 характер $\hat{\chi}_{O_q(B)}$ неприводим и $\hat{\chi}$ точен, то

$$1 \neq Z(O_q(B)) \subseteq Z(\Gamma).$$

Следовательно,

$$Z(O_q(B)) \subseteq C_{O_q(B)}(A) = C \cap O_q(B) \lhd C.$$

Далее, по лемме 3.7 характер $\hat{\chi}$ примитивный. Поскольку $O_q(B) \subseteq F(\Gamma)$ и $O_q(B) \not\subseteq C$, ибо $B = O_q(B)C'$ и $A \ntriangleleft \Gamma$, то мы замечаем, что $Z(\Gamma) \neq F(\Gamma)$. Так как $\hat{\chi}(1) = q^{\alpha}$, то по теореме Д. А. Супруненко (теорема 4.4 [4]) фактор группа $F(\Gamma) / Z(\Gamma)$ является единственной максимальной нормальной абелевой подгруппой фактор группы $\Gamma / Z(\Gamma)$. Она же элементарна абелева порядка $q^{2\alpha}$ – утверждение (3).

Поэтому $\Phi(F(\Gamma)) \subseteq Z(\Gamma)$. Можно доказать, что $Z(\Gamma) = Z(O_q(B))$ и $F(\Gamma) = O_q(B)$. Тогда $\Phi(O_q(B)) \subseteq Z(O_q(B))$. Отсюда и из последнего выделенного выражения вытекает, что $C_{O_q(B)}(A) \lhd \Gamma$.

Рассматривая точный характер

$$\chi_{C_{O_q(B)}(A)} = \beta_{C_{O_q(B)}(A)} + |A| (\beta_1)_{C_{O_q(B)}(A)}$$

с применением теоремы Клиффорда к обоим слагаемым, которые имеют q'-степень, мы убеждаемся в том, что все его неприводимые компоненты линейные. Стало быть, подгруппа $C_{O_q(B)}(A)$ абелева. И так как характер $\hat{\chi}$ точный и примитивный, то подгруппа $C_{O_q(B)}(A) \subseteq Z(\Gamma)$. Поэтому $C_{O_q(B)}(A) = Z(\Gamma)$ и

$$C = \left(1 \neq C_{O_q(B)}(A) = Z(O_q(B)) = Z(\Gamma)\right) \times C'$$

– утверждение (2). Отсюда и из чуть выше выделенного выражения следует, что $O_q(B) \cap C' = 1$ – утверждение (1).

Поскольку $\beta_{C'} = 1_{C'}$ и $(\beta_1)_{C'} = 1_{C'}$ для линейных характеров β и β_1 подгруппы C, то утверждение (4) вытекает из леммы 3.5 и утверждения (2) доказываемой леммы.

Лемма доказана.

Лемма 3.9. *Пусть* $B = O_q(B)C$, $C_0 \subseteq C'$ *– такая подгруппа, что* $(|O_q(B)|, |C_0|) = 1$ *и* $c \in C$ *– элемент простого порядка* $o(c)$.

(1) *Если* $\beta(1) = |A| + 1$, *то* $\beta(1) = \alpha_\beta + \beta_\beta(o(c) - 1)$, *где* $\alpha_\beta = (\beta_{<c>}, 1_{<c>})_{<c>}$ *и* $\beta_\beta = (\beta_{<c>}, \mu')_{<c>}$ *для одного из неглавных линейных характеров* μ' *подгруппы* $< c >$.

(2) *Если* $\beta(1) \neq |A| + 1$, *то* $\pi(C_0) \subseteq \{2;3\}$.

Доказательство. Поскольку $\hat{\chi}_{O_q(B)} = \varphi$ – неприводимый характер, то $\varphi \in \mathrm{Irr}_{AC_0}(O_q(B))$. По лемме 13.3 [2] существует такой неприводимый характер $\hat{\hat{\chi}}$ группы Γ, что по следствию 13.4 [2] характер $\hat{\hat{\chi}}_{AC_0}$ является рациональнозначным. По следствию 6.17 [2] $\hat{\hat{\chi}} = \hat{\chi}\lambda'$ для некоторого неприводимого характера λ' фактор группы $\Gamma / O_q(B)$. Так как $\hat{\hat{\chi}}(1) = \hat{\chi}(1)$, то $\lambda'(1) = 1$. Также, с учетом леммы 2.22 [2] мы можем считать, что λ' – такой неприводимый характер группы Γ, что $O_q(B) \subseteq \ker \lambda'$. Поэтому

$$(\hat{\chi}\lambda')_{C_0} = \hat{\chi}_{C_0}\lambda'_{C_0} = \chi_{C_0}\lambda'_{C_0} = (\beta_{C_0} + |A| (\beta_1)_{C_0})\lambda'_{C_0}.$$

Пусть вначале $\beta(1)=|A|+1$. Так как $C_0 \subseteq C'$, то из леммы 3.8 вытекает, что $(\beta_1)_{C_0}=1_{C_0}$. Тогда

$$(\hat{\chi}\lambda')_{C_0}(c)=(\beta_{C_0}+|A|1_{C_0})(c)\lambda'_{C_0}(c)$$

для каждого элемента $c \in C_0$ простого порядка $o(c)$. Поскольку $C_0 \subseteq C' \subseteq \ker\lambda'$ и $O_q(B) \subseteq \ker\lambda'$, то $O_q(B)C_0 \subseteq \ker\lambda'$. Поэтому последнее выделенное равенство примет вид

$$(\hat{\chi}\lambda')_{C_0}(c)=(\hat{\chi}_{C_0}1_{C_0})(c)=\chi_{C_0}(c)=(\beta_{C_0}+|A|1_{C_0})(c)1_{C_0}(c).$$

Так как характер $(\hat{\chi}\lambda')_{AC_0}$ рациональнозначный, то число $(\hat{\chi}\lambda')(c)$ также рациональное и, значит, целое для каждого элемента $c \in C_0$. Отсюда и из последнего выделенного равенства вытекает, что значение

$$(\beta_{C_0}+|A|1_{C_0})(c)1_{C_0}(c)$$

является целым числом. Поскольку целым числом является $|A|1_{C_0}(c)1_{C_0}(c)=|A|$, то таковым является и

$$\beta_{C_0}(c)=\beta_{C_0}(c)1_{C_0}(c)=\beta_{C_0}(c).$$

По лемме 2 [5]

$$\beta_{C_0}(c)=\alpha_\beta-\beta_\beta$$

и

$$\beta(1)=\alpha_\beta+\beta_\beta(o(c)-1)=\beta_{C_0}(c)+\beta_\beta o(c),$$

где $\alpha_\beta=(\beta_{<c>},1_{<c>})_{<c>}$ и $\beta_\beta=(\beta_{<c>},\mu')_{<c>}$, $\mu' \neq 1_{<c>}$.

Пусть теперь $\beta(1)=1$ и $\beta_1(1)=2$. Тогда мы получим, что

$$\chi_{C_0}=1_{C_0}+|A|(\beta_1)_{C_0}$$

– целое число.

Как и ранее мы получим, что $(\beta_1)(c)$ является целым числом. Стало быть,

$$\beta_1(1)=\alpha_{\beta_1}+\beta_{\beta_1}(o(c)-1).$$

Отсюда и того, что $\beta_1(1)=2$ следует, что

$$2 \geq \alpha_{\beta_1}+\beta_{\beta_1}(o(c)-1).$$

Если $\alpha_{\beta_1}=0$, то $\beta_{\beta_1}(o(c)-1) \leq 2$. Очевидно, $o(c)-1 \leq 2$. Стало быть, $o(c) \leq 3$.

Если же $\alpha_{\beta_1} \neq 0$, то $\beta_{\beta_1}(o(c)-1) \leq 1$. Тоже видим, что $o(c) \leq 2$.

Следовательно, $|C_0|$ не имеет простых делителей больших, чем 3.

Стало быть, $\pi(C_0) \subseteq \{2;3\}$.

Лемма доказана.

Лемма 3.10. *Если* $B=O_q(B)C$, *то подгруппа* C' *разрешима.*

Доказательство. По лемме 3.8

$$C=(Z(O_q(B))=Z(\Gamma))\times C';\ B=O_q(B)C';\ O_q(B)\cap C'=1.$$

Пусть $q_1 \in \pi(C')$, $C^{(q_1)}=C_{C'}(C_{q_1})$ и $N^{(q_1)}=N_{C'}(C_{q_1})$ – подгруппа, содержащаяся в

$$(N^{(q_1)})^*=N_{AC'}(C_{q_1})=AN^{(q_1)}.$$

Ввиду неразрешимости подгруппы C' найдется такое простое число $q \neq q_1 \in \pi(C)=\pi(C')$.

Пусть для некоторого из таких чисел $\Gamma=(N^{(q_1)})^*O_q(B)$. Так как группа $(N^{(q_1)})^*$ содержит холлову $(q_1)'$-подгруппу $((N^{(q_1)})^*)_{(q_1)'}$ и $((N^{(q_1)})^*)_{(q_1)'}O_q(B) \neq \Gamma$, то по ранее сказанному подгруппа $((N^{(q_1)})^*)_{(q_1)'}$ разрешима. Тогда разрешима и подгруппа $(N^{(q_1)})^*$. Это, в свою очередь, влечет разрешимость группы Γ. Отсюда вытекает, что подгруппа C' также разрешима, что не так.

Поэтому для всех простых чисел $q \neq q_1 \in \pi(C')$ выполняется, что

$$\Gamma_1 = (N^{(q_1)})^* O_q(B) \neq \Gamma.$$

Следовательно, по ранее сказанному подгруппа $C_0 = (C_{\Gamma_1})_{\pi'}(A)$ абелева либо не абелева, но разрешима, и характер χ_{C_0} по лемме 3.5 содержит не линейную неприводимую компоненту.

Предположим, что подгруппа C_0 абелева. Тогда подгруппа $N^{(q_1)} \subseteq C_0$ также абелева и по лемме Бернсайда подгруппа C' содержит нормальное $(q_1)'$-дополнение D. Тогда $\Gamma_1^{(')} = ADO_q(B) \neq \Gamma$. Вновь получим, что подгруппа $(C_{\Gamma_1^{(')}})_{\pi'}(A)$ разрешима. Стало быть, подгруппа D и, следовательно, подгруппа C' также разрешимы, что не так.

Мы делаем вывод, что подгруппы C_0 и $N^{(q_1)}$ не абелевы, но разрешимы и характер $\chi_{N^{(q_1)}}$ разветвляется по лемме 3.5 и содержит не линейную неприводимую компоненту $\beta_{N^{(q_1)}}$ степени $|A|+1$ или $(\beta_1)_{N^{(q_1)}}$ степени 1.

Поскольку подгруппа $N^{(q_1)}$ разрешима, то она содержит холлову $2'$-подгруппу S, которая абелева по утверждению (2) леммы 3.6. Положив, что $q_1 \neq 2$ мы получим, что $C_{q_1} \subseteq S \subseteq C^{(q_1)}$ и

$$|N^{(q_1)} : C^{(q_1)}| = 2^{\alpha_1}$$

для некоторого натурального числа α_1. Рассматривая теперь подгруппу $C_0 = C^{(q_1)}$, мы по лемме 3.5 также получаем, что она абелева или не абелева, но разрешима и $\beta_{C^{(q_1)}}(1) = |A|+1$ или $(\beta_1)_{C^{(q_1)}}(1) = 2$.

Пусть вначале подгруппа $C^{(q_1)}$ абелева. Так как $C^{(q_1)} \lhd N^{(q_1)}$, то $|A|+1$ делит 2^{α_1} по теореме 6.15 [2]. Поэтому $\beta_{N^{(q_1)}}(1) = |A|+1 = 2^{\alpha_2}$ для некоторого натурального числа $\alpha_2 \leq \alpha_1$. Следовательно,

$$\hat{\chi}(1) = 2|A|+1 = 2(|A|+1)-1 = 2^{\alpha_2+1}-1 = q^{\alpha}.$$

Отсюда мы видим, что $\alpha = 1$ и, значит, $\hat{\chi}(1) = q$. Отсюда и из утверждения (3) леммы 3.8 вытекает, что $|F(\Gamma) : Z(\Gamma)| = q^2$.

Нетрудно видеть, что фактор группа $\Gamma / F(\Gamma)$ изоморфна некоторой подгруппе $Aut(F(\Gamma)/Z(\Gamma))$. Но

$$|Aut(F(\Gamma)/Z(\Gamma))| = (q^2-1)\cdot(q^2-q) = q\cdot(q-1)^2\cdot(q+1)$$

и так как $q-1 = 2|A|$ и $q+1 = 2^{\alpha_2+1}$, то

$$|Aut(F(\Gamma)/Z(\Gamma))| = q\cdot 4\cdot |A|^2 \cdot 2^{\alpha_2+1} = 2^{\alpha_2+3}\cdot q \cdot |A|^2 .$$

Поэтому $|\Gamma / F(\Gamma)|$ делит $2^{\alpha_2+3}\cdot q \cdot |A|^2$. Следовательно, $|B / F(\Gamma)|$ делит $2^{\alpha_2+3}\cdot q$. Мы заключаем, что фактор группа $B / F(\Gamma)$ бипримарна и, значит, разрешима. Так как подгруппа $F(\Gamma)$ разрешима, то подгруппа B и, значит, подгруппа C' также разрешимы.

Допустим теперь, что подгруппа $C^{(q_1)}$ не абелева. По лемме 3.5 $\beta_{C^{(q_1)}}(1) = |A|+1$, а из леммы 3.8 легко следует, что характер $\beta_{C^{(q_1)}}$ неприводим и точен. Так как $C_{q_1} \subseteq Z(C^{(q_1)})$, то $C_{q_1} \subseteq Z(\beta_{C_{q_1}})$. Но по лемме 3.5 $Z(\beta_{C^{(q_1)}}) \subseteq Z(\beta_{N^{(q_1)}})$ и

$$Z(\beta_{N^{(q_1)}}) \subseteq C' \subseteq Z(\beta_1)_{N^{(q_1)}},$$

ибо $\beta_1(1) = 1$ в рассматриваемом случае. Поэтому по лемме 5 [6] $C_{q_1} \subseteq Z(N^{(q_1)})$. К подгруппе C' мы можем вновь применить лемму Бернсайда. Как и ранее получим противоречие с тем, что подгруппа C'' не разрешима.

Нам осталось рассмотреть случай, когда $\beta_{C^{(q_1)}}(1) = 1$ и $(\beta_1)_{C^{(q_1)}}(1) = 2$. Из леммы 3.9 вытекает, что, если $q \neq q_1 \in \pi(C')$, то $q_1 = 2$ или $q_1 = 3$. Поскольку по предположению подгруппа C'' не разрешима, то мы полагаем, что $q \in \pi(C'')$.

По лемме 3.8 $\beta_{C'} = 1_{C'}$, а неприводимый характер $(\beta_1)_{C'}$ точный. И так как подгруппа C' не разрешима, то можно доказать, что характер $(\beta_1)_{C'}$ импримитивный. По теореме 14.23 [2] $|C' : Z(C'')| = 60$, т. е. $C'/Z(C') \cong PSL(2;5)$. Отсюда и чуть выше сказанного вытекает, что $q = 5$ и $(C')_{q=5} \neq 1$. Следовательно, $2|A| + 1 = 5^{\alpha}$. Отсюда мы получаем, что

$$2|A| = 5^{\alpha} - 1 = (4 = 5 - 1)t, \quad t \in N,$$

если α – нечетное натуральное число и

$$2|A| = 5^{\alpha} - 1 = (5^{\alpha/2} - 1)(5^{\alpha/2} + 1),$$

если α – четное натуральное число. В обоих случаях мы видим, что левая часть не делится на 4, а правая часть делится на 4. И этот последний рассмотренный случай привел нас к противоречию.

Лемма доказана.

Лемма 3.11. *Если* $B = O_q(B)C$, *то подгруппа* C *разрешима и содержит абелеву холлову подгруппу* $S \neq 1$ *нечетного порядка.*

Доказательство. Так как подгруппа C' разрешима по лемме 3.10, то разрешима и подгруппа C. Следовательно она содержит холлову подгруппу S нечетного порядка, которая абелева по лемме 3.6. Так как характер $\varphi = \hat{\chi}_{O_q(B)}$ неприводим по лемме 3.6 и точен, то

$$1 \neq Z(O_q(B)) \subseteq Z(\Gamma) \subseteq S.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.12. $|B : C|$ *делится на такое простое число* s, *что* $s \neq q \in \pi(n)$.

Доказательство. Предположим, что $|B : C|$ – степень q. Тогда по лемме 2.9 [1] $B = O_q(B)C$.

Применим теперь леммы 3.5 и 3.11. Доказываемая теорема верна. Но это противоречит выбору группы Γ.

Лемма доказана.

Литература

1. *Ядченко А. А.* О разрешимости и факторизации некоторых π-разрешимых неприводимых линейных групп примарной степени. Часть I // Тр. Ин-та математики. 2022. Т. 30, № 1–2. С. 84–98.

2. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Harper and Row, 1968.

3. *Isaacs I. M.* Character theory of finite groups. New York: Academic Press, 1976.

4. *Dixon J.* The structure of linear groups. L.: Butler and Tanner Ltd., 1971.

5. *Ядченко А. А., Романовский А. В.* К проблеме Айзекса о конечных p-разрешимых линейных группах // Матем. заметки. 2001. Т. 69, Вып. 1. С. 144–152.

6. *Ядченко А. А.* О π-разрешимых неприводимых линейных группах с холловой TI-подгруппой нечетного порядка I // Тр. Ин-та математики. 2008. Т. 16, № 2. С. 118–130.

A. A. Yadchenko

On the solvability and factorization of some π-solvable irreducible linear groups of primary degree. Part II

Summary

The article is the second in a series of papers where for a set π of odd primes π-solvable finite irreducible complex linear groups of degree $2|H|+1$ whose Hall π-subgroups are TI-subgroups and are not normal in groups. The goal of this series is to prove the solvability and determine the factorization of such groups. The proof of the theorem is continued. Further properties of the minimal counterexample to the theorem are established.