*Национальная академия наук Беларуси*
*Труды Института математики. 2023. Том 31. № 1. С. 81–87*

*УДК 517.958*

# Математическое рассмотрение одной задачи о продольном ударе по упругому стержню с упругим закреплением на конце

**В. И. Корзюк, Я. В. Рудько**

*Белорусский государственный университет*
*e-mail: korzyuk@bsu.by, janycz@yahoo.com*
*Поступила 06.04.2021*

Настоящая работа посвящена построению и строгому обоснованию решения краевой задачи о продольном ударе по однородному упругому стержню постоянного поперечного сечения в случае, когда один из его концов жестко закреплен, а второй конец имеет на конце линейный упругий элемент и подвергся удару некоторым грузом.

**1. Введение.** В теории колебаний для дифференциальных уравнений возникают краевые задачи, связанные с теорией удара по стержням. Эти задачи имеют не только прикладной, но и чисто математический интерес [1, 2]. В опубликованных к настоящему времени работах (например, [3, 4]), которые посвящены исследованию разрешимости задач о продольном ударе по конечным стержням, предполагается, что концы стержня жестко закреплены или свободны. Что касается аналогичных задач для случая, когда концы стержня имеют упругое закрепление, опубликованных работ об ударе по стержням с построением решения в явном аналитическом виде и с полным и строгим математическим обоснованием решений, по-видимому, не имеется (по крайней мере, авторам статьи неизвестны).

Настоящая работа посвящена построению и строгому обоснованию решения краевой задачи о продольном ударе по однородному упругому стержню постоянного поперечного сечения в случае, когда один из его концов жестко закреплен, а второй конец имеет на конце линейный упругий элемент и подвергся удару некоторым грузом. Близкими к данной статье являются работы [3, 4].

**2. Постановка задачи.** Пусть в начальный момент времени $t = 0$ однородный упругий стержень $0 \le x \le l$ постоянного поперечного сечения, конец которого $x = 0$ жестко закреплен, а конец $x = l$ имеет линейный упругий элемент на конце, подвергся удару некоторым грузом по концу $x = l,$ причем в дальнейшем груз остается в соприкосновении со стержнем. Тогда, пренебрегая весом стержня как силы и его возможными вертикальными отклонениями, для определения смещений $u(t, x)$ сечений стержня нужно найти решение уравнения

$$(\partial_t^2 - a^2\partial_x^2)u(t,x) = 0, \quad 0 < t < \infty, \quad 0 < x < l, \tag{1}$$

при начальных условиях

$$u(0,x) = 0, \quad 0 \le x \le l, \quad \partial_t u(0,x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < l, \\ v, & x = l, \end{cases} \tag{2}$$

и граничных условиях

$$u(t,0) = 0, \quad (h + k\partial_x + m\partial_t^2)u(t,l) = 0, \quad 0 \le t < \infty. \tag{3}$$

В задаче (1)–(3) $a^2 = E\rho^{-1}$ (для определенности, $a > 0$), $E$ – модуль упругости стержня, $\rho$ – плотность материала стержня, $h > 0,$ $k > 0,$ $m > 0$ – физические постоянные, характеризующие закрепление конца $x = l$ стержня и $v \in \mathbb{R}$ – физическая постоянная, характеризующая скорость ударившего груза.

Отметим, что значения производных в условиях (2) и (3) задачи (1)–(3) следует понимать не в смысле предельного перехода, а в смысле их значений в точках соответствующих отрезков.

**3. Построение формального решения.** Применив к задаче (1)–(3) метод контурного интеграла [5], ее формальное решение можно представить в виде

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\oint\limits_{\Gamma_n}\frac{amv\,\mathrm{sh}\left(\frac{px}{a}\right)\exp(pt)}{\Delta(p)}dp, \tag{4}$$

где $\Delta(p)=kp\,\mathrm{ch}\left(\frac{pl}{a}\right)+a\left(h+mp^2\right)\mathrm{sh}\left(\frac{pl}{a}\right)$, $\Gamma_n$ $(n\in\mathbb{N})$ – последовательность расширяющихся замкнутых контуров в комплексной $p$-плоскости, которые будут описаны позже.

Исследуем корни уравнения $\Delta(p)=0$, записав его в виде

$$\frac{\alpha\omega}{\omega^2-\beta}=\mathrm{tg}(\omega), \tag{5}$$

или

$$\left[\begin{array}{l}\alpha\omega\,\mathrm{ctg}(\omega)=\omega^2-\beta,\\ \qquad\omega=0,\end{array}\right. \tag{6}$$

где $\alpha=\dfrac{kl}{a^2m}$, $\beta=\dfrac{hl^2}{a^2m}$, $p=\dfrac{ai\omega}{l}$.

Следуя [6], можно показать, что уравнение (5) имеет только действительные корни, причем отрицательные равны положительным по абсолютной величине. Качественную их картину можно увидеть, если построить графики функций $y_1(x)=\alpha x\,\mathrm{ctg}(x)$ и $y_2(x)=x^2-\beta$ (рисунок).

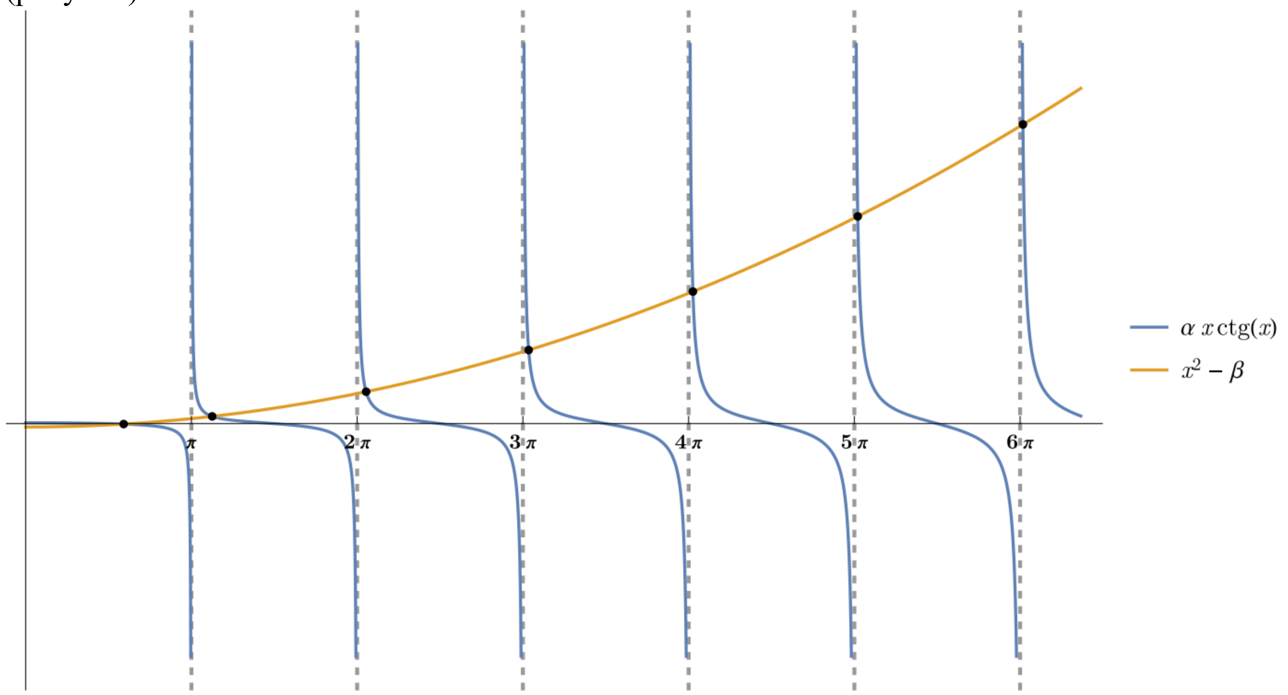


Рис. Графики функций $y_1(x)=\alpha x\,\mathrm{ctg}(x)$ и $y_2(x)=x^2-\beta$ при $\alpha=1$, $\beta=4$

Пусть $\omega_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ – положительные корни уравнения (5), занумерованные в порядке возрастания. Из графиков (см. рисунок) видно, что для достаточно больших значений $n$ имеет место равенство

$$\omega_n=(n-1)\pi+\varepsilon_n, \tag{7}$$

где $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$. Подставив (7) в (5), получим, что $\dfrac{\alpha((n-1)\pi+\varepsilon_n)}{((n-1)\pi+\varepsilon_n)^2-\beta}=\mathrm{tg}(\varepsilon_n)$. Отсюда следует, что при достаточно больших $n$

$$\varepsilon_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha((n-1)\pi+\varepsilon_n)}{((n-1)\pi+\varepsilon_n)^2-\beta}\right) = \frac{\alpha}{\pi(n-1)} - \frac{\alpha\varepsilon_n}{\pi^2(n-1)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \tag{8}$$

Полагая $\varepsilon_n = \dfrac{A}{n-1} + \dfrac{B}{(n-1)^2} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, подставим последнюю величину в левую и правую части равенства (8). Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях величины $\dfrac{1}{n-1}$ получим, что $A = \dfrac{\alpha}{\pi} \neq 0$, $B = 0$, и, следовательно, равенство (7) можно записать в виде

$$\omega_n = \pi(n-1) + \frac{\alpha}{\pi(n-1)} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \tag{9}$$

Таким образом, корнями уравнения $\Delta(p) = 0$ являются числа

$$p_n = \frac{a\,i\omega_n}{l},\ p_{-n} = -\frac{a\,i\omega_n}{l} \ \text{ и } \ p_0 = 0 \quad (n > 0). \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует, что корни уравнения $\Delta(p) = 0$ лежат внутри полосы $-h \le \mathfrak{Re}(p) \le h$ ($0 < h < \infty$). Возьмем в качестве последовательности контуров $\Gamma_n$ в формуле (4) контуры в виде прямоугольников с вершинами в точках $h + i\pi n$, $-h + i\pi n$, $-h - i\pi n$, $h - i\pi n$.

Вычислим на основании известной теоремы о вычетах интеграл в (4), получим, что

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname*{Res}_{p=p_n} \frac{amv\,\mathrm{sh}\left(\frac{px}{a}\right)\exp(pt)}{kp\,\mathrm{ch}\left(\frac{pl}{a}\right) + a\left(h+mp^2\right)\mathrm{sh}\left(\frac{pl}{a}\right)} = \tag{11}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2almv\sin\left(\frac{at\omega_n}{l}\right)\sin\left(\frac{x\omega_n}{l}\right)}{(a^2m(\omega_n)^2 - l(k+hl))\cos(\omega_n) + (kl+2a^2m)\omega_n\sin(\omega_n)}.$$

Функция (11) представляет собой формальное решение задачи (1)–(3) в виде обобщенного тригонометрического ряда.

**4. Обоснование решения и его свойства.** В силу разрыва во втором из начальных условий (2) задача (1)–(3) не имеет классического решения, поэтому речь будет идти об обобщенном решении.

**Определение.** *Функция u является обобщенным решением задачи* (1)–(3), *если она непрерывна в* $\overline{Q} = [0,\infty)\times[0,l]$, *имеет в* $\overline{Q}$ *почти всюду непрерывные производные первого порядка, а производные второго порядка представляются в области* $Q = (0,\infty)\times(0,l)$ *обобщенными тригонометрическими рядами, суммируемыми почти всюду методом Чезаро первого порядка (класс таких функций обозначим через* $\mathcal{W}$*) и удовлетворяет почти всюду в* $Q$ *уравнению* (1) *и всюду начальным условиям* (2) *и граничным условиям* (3).

Покажем, что задача (1)–(3) имеет обобщенное в смысле определения и исследуем его свойства.

Приступим к исследованию сходимости рядов для $u(t,x)$, $\partial_t u(t,x)$, $\partial_x u(t,x)$, $\partial_t^2 u(t,x)$, $\partial_t\partial_x u(t,x)$ и $\partial_x^2 u(t,x)$.

Подставив в $\sin\left(\dfrac{x\omega_n}{l}\right)$ и $\cos\left(\dfrac{x\omega_n}{l}\right)$ вместо $\omega_n$ их значения (9), получим для достаточно больших значений $n$ следующие асимптотические представления для указанных выше величин

$$\sin\left(\frac{x\omega_n}{l}\right)=\sin\left(\frac{\pi(n-1)x}{l}\right)+\frac{\alpha x}{\pi(n-1)l}\cos\left(\frac{\pi(n-1)x}{l}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{12}$$

$$\cos\left(\frac{x\omega_n}{l}\right)=\cos\left(\frac{\pi(n-1)x}{l}\right)-\frac{\alpha x}{\pi(n-1)l}\sin\left(\frac{\pi(n-1)x}{l}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{13}$$

Аналогично можно получить асимптотические представления

$$\sin\left(\frac{at\omega_n}{l}\right)=\sin\left(\frac{\pi(n-1)at}{l}\right)+\frac{\alpha at}{\pi(n-1)l}\cos\left(\frac{\pi(n-1)at}{l}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{14}$$

$$\cos\left(\frac{at\omega_n}{l}\right)=\cos\left(\frac{\pi(n-1)at}{l}\right)-\frac{\alpha at}{\pi(n-1)l}\sin\left(\frac{\pi(n-1)at}{l}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{15}$$

и асимптотическое представление

$$\frac{2almv}{(a^2m(\omega_n)^2-l(k+hl))\cos(\omega_n)+(kl+2a^2m)\omega_n\sin(\omega_n)}=\frac{2(-1)^{(n-1)}lv}{a(n-1)^2\pi^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right). \tag{16}$$

Взяв $n$-й член ряда (11) в правой части равенств, подставим вместо входящих туда величин их асимптотические представления (12), (14) и (16) и, тогда получим, что он в $\overline{Q}$ имеет порядок малости $\frac{1}{n^2}$. Следовательно, ряд для $u$, состоящий из непрерывных функций в $\overline{Q}$, равномерно сходится в $\overline{Q}$, и $u$ является непрерывной функцией на том множестве. Поэтому ряд, стоящий справа в (11), можно почленно дифференцировать сколько угодно раз по $t$ и $x$ в смысле обобщенных функций [7], и суммы полученных после дифференцирования рядов будут слабыми обобщенными производными функции $u$ в $\overline{Q}$. Продифференцировав левую и правую части равенства (11), частные производные функции $u$ до второго порядка включительно запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a^2mv\omega_n\cos\left(\frac{at\omega_n}{l}\right)\sin\left(\frac{x\omega_n}{l}\right)}{(a^2m(\omega_n)^2-l(k+hl))\cos(\omega_n)+(kl+2a^2m)\omega_n\sin(\omega_n)}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2amv\omega_n\sin\left(\frac{at\omega_n}{l}\right)\cos\left(\frac{x\omega_n}{l}\right)}{(a^2m(\omega_n)^2-l(k+hl))\cos(\omega_n)+(kl+2a^2m)\omega_n\sin(\omega_n)}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2a^3mvl^{-1}(\omega_n)^2\sin\left(\frac{at\omega_n}{l}\right)\sin\left(\frac{x\omega_n}{l}\right)}{(a^2m(\omega_n)^2-l(k+hl))\cos(\omega_n)+(kl+2a^2m)\omega_n\sin(\omega_n)}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2amvl^{-1}(\omega_n)^2\sin\left(\frac{at\omega_n}{l}\right)\sin\left(\frac{x\omega_n}{l}\right)}{(a^2m(\omega_n)^2-l(k+hl))\cos(\omega_n)+(kl+2a^2m)\omega_n\sin(\omega_n)}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a^2mvl^{-1}(\omega_n)^2\cos\left(\frac{at\omega_n}{l}\right)\cos\left(\frac{x\omega_n}{l}\right)}{(a^2m(\omega_n)^2-l(k+hl))\cos(\omega_n)+(kl+2a^2m)\omega_n\sin(\omega_n)}. \tag{21}$$

Подставим в правые части равенств (17)–(21) вместо входящих туда под знаком суммы величин их асимптотические представления (12)–(16), тогда после ряда преобразований получим, что

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\phi_t(t,x)+\frac{2v}{\pi}S^{(1)}(t,x), \tag{22}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)=\phi_x(t,x)+\frac{2v}{a\pi}S^{(2)}(t,x), \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)=\phi_{tt}(t,x)-\frac{2av}{l}S^{(*)}(t,x)-\frac{2a^2tv\alpha}{\pi l^2}S^{(1)}(t,x)-\frac{2avx\alpha}{\pi l^2}S^{(2)}(t,x), \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)=\phi_{xx}(t,x)-\frac{2v}{al}S^{(*)}(t,x)-\frac{2tv\alpha}{\pi l^2}S^{(1)}(t,x)-\frac{2vx\alpha}{a\pi l^2}S^{(2)}(t,x), \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}(t,x)=\phi_{tx}(t,x)+\frac{2v}{l}S^{(**)}(t,x)-\frac{2atv\alpha}{\pi l^2}S^{(2)}(t,x)-\frac{2vx\alpha}{\pi l^2}S^{(1)}(t,x), \tag{26}$$

где $\phi_t$, $\phi_x$, $\phi_{tt}$, $\phi_{xx}$, $\phi_{tx}$ – некоторые непрерывные в $\overline{Q}$ функции,

$$S^{(1)}(t,x)=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}\cos\left(\frac{at\pi(n-1)}{l}\right)\sin\left(\frac{x\pi(n-1)}{l}\right), \tag{27}$$

$$S^{(2)}(t,x)=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}\sin\left(\frac{at\pi(n-1)}{l}\right)\cos\left(\frac{x\pi(n-1)}{l}\right), \tag{28}$$

$$S^{(*)}(t,x)=-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{at\pi(n-1)}{l}\right)\sin\left(\frac{x\pi(n-1)}{l}\right), \tag{29}$$

$$S^{(**)}(t,x)=-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cos\left(\frac{at\pi(n-1)}{l}\right)\cos\left(\frac{x\pi(n-1)}{l}\right). \tag{30}$$

Известно [3, 4], что суммы рядов (27) и (28) терпят конечные разрывы на лежащих в $\overline{Q}$ отрезках, которые мы обозначим через $\mathcal{M}$, прямых линий $x+at=(2m+1)l$ и $x-at=-(2m+1)l$ ($m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$), причем значения этих сумм на отрезках $\mathcal{M}$ равны соответственно полусуммам предельных значений, которые принимают величины $S^{(1)}(t,x)$ и $S^{(2)}(t,x)$ при стремлении сверху и снизу к точкам отрезков $\mathcal{M}$ по путям, не касательным к отрезкам $\mathcal{M}$, а ряды (29) и (30) суммируются в $\overline{Q}$ вне отрезков $\mathcal{M}$ к $0$ и $-1/2$ соответственно методом Чезаро первого порядка. Следует отметить, что прямые $x+at=(2m+1)l$ и $x-at=-(2m+1)l$ ($m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$) являются характеристиками уравнения (1).

Для дальнейшего удобно ввести обозначения: пусть функция $v$ терпит конечные разрывы на лежащих в некоторой области дугах некоторых кривых линий, тогда через $v|^{+}$ и $v|^{-}$ будем обозначать соответственно предельные значения, которые принимает функция при стремлении сверху и снизу к точкам указанных выше дуг по дугам, не касательным к этим путям.

Из указанных выше свойств сумм рядов (27)–(30) и равенств (22)–(26) получаем, что а) частные производные $\partial_t u$ и $\partial_x u$ терпят на отрезках $\mathcal{M}$ конечные разрывы, которые соответственно равны $(\partial_t u|^{+}+\partial_t u|^{-})/2$ и $(\partial_x u|^{+}+\partial_x u|^{-})/2$; б) ряды, представляющие $\partial_t^2 u$, $\partial_t\partial_x u$ и $\partial_x^2 u$, суммируются в $\overline{Q}$ вне отрезков $\mathcal{M}$ к непрерывным функциям методом Чезаро первого порядка.

Непосредственной подстановкой ряда (11) в уравнение (1) с учетом свойств б) можно убедиться, что уравнение (1) удовлетворяется в $\overline{Q}$ вне отрезков $\mathcal{M}$, т. е. удовлетворяется почти всюду. Аналогично, учитывая свойства а), можно проверить удовлетворение всюду первого из начальных условий (2) и граничных условий (3), причем, как следует из (29) и (24) ряд для частной производной $\partial_t^2 u$ на полупрямой $x=l$, $t\geq 0$, сходится в обычном смысле и его сумма на этой прямой испытывает разрывы первого рода. Выполнение второго из начальных условий (2) проверяется с помощью равенства [8]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2v\omega_n\sin(\omega_n x/l)}{(2+\alpha)\omega_n\sin(\omega_n)+(\omega_n^2-\alpha-\beta)\cos(\omega_n)}=\begin{cases}0, & 0\leq x<l,\\ v, & x=l.\end{cases} \tag{31}$$

Из полученных выше результатов следует, что имеет место теорема.

**Теорема.** *Задача* (1)–(3) *имеет обобщенное в смысле определения решение* $u$, *представимое в виде* (11), *непрерывное в* $\overline{Q}$ *и обладающее указанными выше свойствами а) и б).*

Вычислим величину $w_0 = E\lim\limits_{t\to 0}\lim\limits_{x\to l}\partial_x u(t,x)$ (напряжение, возникающее в сечении $x=l$ в момент удара). Так как $\partial_x u$ при $t=0$ обращается в нуль, что видно из (18), то из (23) и (28) следует, что

$$w_0 = E\lim_{t\to 0}\lim_{x\to l}\frac{2v}{a\pi}S^{(2)}(t,x). \tag{32}$$

Из свойств суммы $S^{(2)}$ ряда (28) следует [3, 4], что во внутренних точках отрезка $[(t=0, x=l),\ (t=2l/a, x=l)]$ $S^{(2)}(t,x) = -\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{at}{l}-1\right)$, поэтому из (32) получаем

$$w_0 = \frac{2vE}{a\pi}\lim_{t\to 0}\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{at}{l}\right) = v\sqrt{\rho E}.$$

**5. Единственность решения.** Будем говорить, что две функции, разрывные на некотором подмножестве $V$ замкнутого множества $\overline{D}$, имеют на множестве $V$ одинаковые разрывы (конечные или бесконечные или конечные и бесконечные одновременно), если их разность в $\overline{D}$ является непрерывной функцией. Докажем, что в классе $\mathcal{W}$ задача (1)–(3) не может иметь двух решений $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, обладающих тем свойством, что частные производные до второго порядка включительно от этих функций имеют одинаковые разрывы.

Предположим, что задача (1)–(3) имеет два решения $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, обладающие указанными выше свойствами. Пусть $u = u^{(2)} - u^{(1)}$. Тогда производные $\partial_t u$, $\partial_x u$, $\partial_t^2 u$, $\partial_t\partial_x u$ и $\partial_x^2 u$ обращаются в нуль на лежащих в области в $\overline{Q}$ отрезках прямых линий $x+at=(2m+1)l$ и $x-at=-(2m+1)l$ ($m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$), т. е. функция $u$ будет из класса $C^2(\overline{Q})$. Кроме того, функция $u$ будет решением задачи (1), (3) с добавлением однородных начальных условий

$$u(0,x) = \partial_t u(0,x) = 0,\quad 0\le x\le l. \tag{33}$$

Функции $u$, определяемой как решение задачи (1), (3), (33), сопоставим функцию «энергии» $E$

$$E(t) = \frac{a^2 m}{2k}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,l)\right)^2 + \frac{a^2 h}{2k}\big(u(t,l)\big)^2 + \frac{1}{2}\int_0^l\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2\right]dx. \tag{34}$$

Продифференцируем равенство (34) и запишем результат в виде

$$E'(t) = \frac{a^2 m}{k}\frac{\partial u}{\partial t}(t,l)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,l) + \frac{a^2 h}{k}u(t,l)\frac{\partial u}{\partial t}(t,l) + \tag{35}$$
$$+\int_0^l\left[\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + a^2\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}(t,x)\right]dx.$$

Интегрируя по частям правую часть равенства (35), получаем

$$E'(t) = \frac{a^2}{k}\frac{\partial u}{\partial t}(t,l)\left(m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,l) + hu(t,l) + \frac{\partial u}{\partial x}(t,l)\right) - a^2\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)\frac{\partial u}{\partial t}(t,0) +$$
$$+\int_0^l\left[\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\right)\right]dx.$$

Теперь, пользуясь (1) и (3) ($\partial_t u(t,0)=0$ следует из $u(t,0)=0$), получаем что $E'(t)=0.$ Значит $E(t)=\mathrm{const}.$ Из начального условия $u(0,x)=0$ вычисляем $\partial_x u(0,x)=0.$ В таком случае имеет место равенство $E(0)=0.$ А значит, $E\equiv 0.$ Отсюда следует, что $\partial_t u = \partial_x u = 0$ в $\overline{Q}$, т. е. $u\equiv\mathrm{const}$ в $\overline{Q}$. Так как $u\in C(\overline{Q})$, то из $u\equiv\mathrm{const}$ и (33) следует, что $u\equiv 0$ в $\overline{Q}$. Из последнего результата и равенства $u=u^{(2)}-u^{(1)}$ следует $u^{(1)}\equiv u^{(2)}$ в $\overline{Q}$.

**6. Заключение.** В статье было построено методом контурного интеграла обобщенное непрерывное решение в виде обобщенного тригонометрического ряда смешанной задачи для одномерного однородного волнового уравнения в полуполосе, моделирующей колебания упругого стержня, который имеет один жестко закрепленный конец и упруго закрепленный второй конец и подвергся удару по упруго закрепленному концу. Также было строго обосновано существование и единственность такого решения.

## Литература


1. *Лазарян В. А.* О динамических усилиях в упряжных приборах однородных поездов при сопротивлениях относительным перемещениям экипажей // Тр. Днепропетр. ин-та инженеров ж.-д. транспорта. 1950. Вып. 20. С. 3–32.
2. *Тверитин А. Н.* Математическое рассмотрение простейшей краевой задачи, связанной с теорией продольного удара по упруговязкому стержню с опертыми концами // Тр. Днепропетр. ин-та инженеров ж.-д. транспорта. 1953. Вып. 23. С. 24–60.
3. *Гайдук С. И.* О некоторых задачах, связанных с теорией продольного удара по стержням // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 26, № 5. С. 865–880.
4. *Гайдук С. И.* Математическое рассмотрение одной задачи о продольном ударе по релаксирующему стержню // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 26, № 4. С. 668–685.
5. *Расулов М. Л.* Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964. – 464 с.
6. *Тверитин А. Н.* Исследование трансцендентного уравнения $\mu \operatorname{ctg} \mu = \alpha\mu^2 - \gamma$ // Тр. Днепропетр. ин-та инженеров ж.-д. транспорта. 1958. Вып. 26. С. 349–367.
7. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. – 320 с.
8. *Тверитин А. Н.* Рассмотрение рядов, связанных с уравнением $\mu \operatorname{ctg} \mu = \alpha\mu^2 - \gamma$ // Тр. Днепропетр. ин-та инженеров ж.-д. транспорта. 1958. Вып. 26: Подвижной состав и энергетическое хозяйство железных дорог. С. 368–411.



**V. I. Korzyuk, J. V. Rudzko**


**A mathematical investigation of one problem of the longitudinal impact on an elastic rod with an elastic attachment at the end**


**Summary**

The present work is devoted to the construction and the rigorous justification of the solution of a boundary value problem of the longitudinal impact on a homogeneous elastic rod of a constant cross-section in the case when one of its ends is rigidly fixed, and the other end has a linear elastic element at the end and was subjected to the impact by some load.