

УДК 517.518.45

О СОПРЯЖЕННЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ ФУРЬЕ И ИХ АППРОКСИМАЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ

Н. Ю. Козловская, Е. А. Ровба

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
e-mail: kozlowskaya_natalya@tut.by, rovba.ea@gmail.com
Поступила 15.02.2023

В работе рассматриваются сопряженные рациональные тригонометрические ряды Фурье. Получено интегральное представление их частичных сумм и признак Дини сходимости данных рядов. Исследуются приближения функции, сопряженной к функции $|\sin x|^s$, $s > 0$, частичными суммами сопряженного рационального ряда Фурье. Для указанных приближений получены интегральное представление, поточечная и равномерная оценка. На основе полученной равномерной оценки исследуются полиномиальный случай, случай заданного числа геометрически различных полюсов и общий случай.

Введение. На сегодняшний день полиномиальные сопряженные тригонометрические ряды Фурье достаточно хорошо исследованы.

Рядом, сопряженным с тригонометрическим рядом

$$\sigma = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1)$$

называют ряд

$$\bar{\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} (-b_n \cos nx + a_n \sin nx). \quad (2)$$

Ряды (1) и (2) представляют собой действительную и мнимую части степенного ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) z^n \quad (3)$$

на единичной окружности $|z| = 1$.

Систематическое изучение свойств сопряженных тригонометрических рядов берет начало с опубликованной в 1911 г. работы У. Юнга [1], в которой было доказано, что если f – 2π -периодическая функция ограниченной вариации, то необходимым и достаточным условием сходимости сопряженного ряда $\bar{\sigma}(f)$ в точке x является существование предела

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(-\frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt \right),$$

который впоследствии стали называть сопряженной функцией $\bar{f}(x)$.

Теория рядов, сопряженных к полиномиальным рядам Фурье, и функций, сопряженных к суммируемым, включает в себя большое число интересных результатов. Со многими из них можно познакомиться, например, в монографии Н. К. Бари [2].

Рациональные сопряженные тригонометрические ряды Фурье были введены в работе А. А. Китбаляна [3]. В этой работе им также был исследован вопрос сходимости рациональных рядов Фурье и сопряженных рациональных рядов Фурье в метрике L_p .

В нашей работе получено интегральное представление для частичных сумм сопряженного рационального ряда Фурье, доказан признак Дини сходимости сопряженных рацио-

нальных рядов Фурье. Рассмотрены приближения функции, сопряженной к функции $|\sin x|^s$, частичными суммами сопряженных рациональных рядов Фурье.

Основная часть. Рассмотрим систему рациональных функций Такенаки–Мальмквиста

$$\varphi_0(z) = 1, \quad \varphi_n(z) = \frac{\sqrt{1-|\alpha_n|^2}}{1-\alpha_n z} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}, \quad (4)$$

$$\alpha_k \in \mathbb{C}, \quad \alpha_0 = 0, \quad |\alpha_k| < 1, \quad k = 1, 2, \dots, n-1; \quad n = 1, 2, \dots$$

Введем в рассмотрение систему функций

$$\varphi_0(z) = 1, \quad \operatorname{Re} \varphi_1(z), \quad \operatorname{Im} \varphi_1(z), \quad \operatorname{Re} \varphi_2(z), \quad \operatorname{Im} \varphi_2(z), \dots, \quad \operatorname{Re} \varphi_n(z), \quad \operatorname{Im} \varphi_n(z), \dots \quad (5)$$

Лемма 1. *Функции $\operatorname{Re} \varphi_n(e^{ix})$ и $\operatorname{Im} \varphi_n(e^{ix})$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, являются рациональными тригонометрическими функциями порядка не выше n .*

Доказательство леммы 1 основано на том, что рациональными функциями порядка n являются функции $\varphi_n(z)$, как это было показано в [4].

Лемма 2. *Система тригонометрических функций (5) является ортогональной на единичной окружности.*

Справедливость леммы 2 следует из ортогональности системы функций (4).

Пусть функция $f \in L_1(-\pi, \pi)$. Рассмотрим ряд Фурье по системе рациональных функций (5)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \operatorname{Re} \varphi_n(e^{ix}) + b_n \operatorname{Im} \varphi_n(e^{ix})), \quad (6)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{Re} \varphi_n(e^{it}) dt, \quad n = 0, 1, \dots; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{Im} \varphi_n(e^{it}) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Введем в рассмотрение следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-b_n \operatorname{Re} \varphi_n(e^{ix}) + a_n \operatorname{Im} \varphi_n(e^{ix})). \quad (7)$$

Ряд (7) естественно называть рядом Фурье, сопряженным с рядом (6) [3].

Рассмотрим n -ю частичную сумму сопряженного ряда Фурье

$$\overline{S}_n(x, f) = \sum_{k=1}^n (-b_k \operatorname{Re} \varphi_k(e^{ix}) + a_k \operatorname{Im} \varphi_k(e^{ix})).$$

Теорема 1. *Для частичной суммы $\overline{S}_n(x, f)$ ряда (7) справедливо представление*

$$\overline{S}_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{D}_n(x, t) dt, \quad (8)$$

где

$$\overline{D}_n(x, t) = \frac{1}{2 \sin \frac{x-t}{2}} \left(\cos \frac{x-t}{2} - \cos \lambda_n^+(x, t) \right)$$

– сопряженное ядро Дирихле,

$$\lambda_n^+(x, t) = \int_t^x \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k| \cos(u-\theta_k) + |\alpha_k|^2} \right) du, \quad \theta_k = \arg \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Доказательство. Очевидно,

$$\overline{S}_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=1}^n (-\operatorname{Re} \varphi_k(e^{ix}) \operatorname{Im} \varphi_k(e^{it}) + \operatorname{Im} \varphi_k(e^{ix}) \operatorname{Re} \varphi_k(e^{it})) dt.$$

Заметим, что если $\varphi_k(e^{it}) = a + ib$, $\varphi_k(e^{ix}) = c + id$, то

$$-bc + ad = \operatorname{Im}((a - ib)(c + id)) = \operatorname{Im}(\overline{\varphi_k(e^{it})} \varphi_k(e^{ix})),$$

откуда

$$\overline{S_n}(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n \left(\overline{\varphi_k(e^{it})} \varphi_k(e^{ix}) \right) dt.$$

Далее, на основании леммы 2 из [4] несложно получить, что

$$\sum_{k=1}^n \overline{\varphi_k(e^{it})} \varphi_k(e^{ix}) = \frac{e^{i(x-t)}}{1 - e^{i(x-t)}} (1 - \exp(i\lambda_n(x, t))),$$

$$\lambda_n(x, t) = \int_t^x \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k| \cos(u - \theta_k) + |\alpha_k|^2} du, \quad \theta_k = \arg \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Найдем мнимую часть полученного выражения – сопряженное ядро Дирихле:

$$\begin{aligned} \overline{D_n}(x, t) &= \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n \overline{\varphi_k(e^{it})} \varphi_k(e^{ix}) = \\ &= \operatorname{Im} \left(-\frac{1}{2i} \cdot \frac{\cos \frac{x-t}{2} + i \sin \frac{x-t}{2}}{\sin \frac{x-t}{2}} (1 - \cos(\lambda_n(x, t)) - i \sin(\lambda_n(x, t))) \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x-t}{2}} \left(\cos \frac{x-t}{2} - \cos(\lambda_n(x, t)) \cos \frac{x-t}{2} + \sin(\lambda_n(x, t)) \sin \frac{x-t}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x-t}{2}} \left(\cos \frac{x-t}{2} - \cos \lambda_n^+(x, t) \right), \end{aligned}$$

$$\lambda_n^+(x, t) = \int_t^x \left(\frac{1}{2} + \lambda_n(u) \right) du, \quad \lambda_n(u) = \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k| \cos(u - \theta_k) + |\alpha_k|^2}.$$

Отсюда и следует утверждение теоремы.

Признак Дини сходимости сопряженных рядов Фурье

Лемма 3. Пусть $\alpha_1 = 0$ и выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |\alpha_k|) = +\infty, \quad (9)$$

то для произвольной функции $\varphi(t) \in L_1[0, \pi]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \varphi(t) \exp(\pm i \lambda_n(x, t)) dt = 0$$

равномерно относительно x , $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $\varphi(t) \in L_1[-\pi, \pi]$ и $\varphi(t) = 0$ при $t \in [-\pi, 0]$. Тогда при выполнении условия (9) для любого $\varepsilon > 0$ существует рациональная функция [5]

$$R_{2n_0}(\xi) = \sum_{m=-n_0}^{-1} \frac{c_m}{1-\alpha_m \xi} + \sum_{m=1}^{n_0} \frac{c_m}{\xi-\alpha_m} + c_0, \quad (10)$$

$\xi = e^{it}$, $c_m \in \mathbb{C}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n_0$, такая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t) - R_{2n_0}(\xi)| dt < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi} \varphi(t) \exp(\pm i \lambda_n(x, t)) dt \right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t) - R_{2n_0}(\xi)| dt + \\ + \left| \int_{-\pi}^{\pi} R_{2n_0}(\xi) \exp(\pm i \lambda_n(x, t)) dt \right| &< 2\pi\varepsilon + \left| \int_{-\pi}^{\pi} R_{2n_0}(\xi) \exp(\pm i \lambda_n(x, t)) dt \right|. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим слагаемое

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} R_{2n_0}(\xi) \exp(\pm i \lambda_n(x, t)) dt \right|$$

из оценки (11). Поскольку [4]

$$\exp(i \lambda_n(x, t)) = \prod_{k=0}^n \frac{1 - \overline{\alpha_k} \xi}{\xi - \alpha_k} \prod_{k=0}^n \frac{z - \alpha_k}{1 - \alpha_k z}, \quad z = e^{ix},$$

то в силу представления (10) и того, что $\prod_{k=0}^n \left| \frac{z - \alpha_k}{1 - \alpha_k z} \right| = 1$, получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} R_{2n_0}(\xi) \exp(i \lambda_n(x, t)) dt \right| &\leq \sum_{m=-n_0}^{-1} |c_m| \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - \alpha_m \xi} \prod_{k=0}^n \frac{1 - \overline{\alpha_k} \xi}{\xi - \alpha_k} dt \right| + \\ + \sum_{m=1}^{n_0} |c_m| \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\xi - \alpha_m} \prod_{k=0}^n \frac{1 - \overline{\alpha_k} \xi}{\xi - \alpha_k} dt \right| &+ |c_0| \left| \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=0}^n \frac{1 - \overline{\alpha_k} \xi}{\xi - \alpha_k} dt \right|, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} R_{2n_0}(\xi) \exp(-i \lambda_n(x, t)) dt \right| &\leq \sum_{m=-n_0}^{-1} |c_m| \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - \alpha_m \xi} \prod_{k=0}^n \frac{\xi - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} \xi} dt \right| + \\ + \sum_{m=1}^{n_0} |c_m| \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\xi - \alpha_m} \prod_{k=0}^n \frac{\xi - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} \xi} dt \right| &+ |c_0| \left| \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=0}^n \frac{\xi - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} \xi} dt \right|. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим интегралы

$$\begin{aligned} I_{mn}^{(1)} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - \alpha_m \xi} \prod_{k=0}^n \frac{1 - \overline{\alpha_k} \xi}{\xi - \alpha_k} dt, \quad I_{mn}^{(2)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - \alpha_m \xi} \prod_{k=0}^n \frac{\xi - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} \xi} dt, \\ I_{mn}^{(3)} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\xi - \alpha_m} \prod_{k=0}^n \frac{1 - \overline{\alpha_k} \xi}{\xi - \alpha_k} dt, \quad I_{mn}^{(4)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\xi - \alpha_m} \prod_{k=0}^n \frac{\xi - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} \xi} dt, \quad m = 1, 2, \dots, n_0; \\ I_n^{(1)} &= \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=0}^n \frac{1 - \overline{\alpha_k} \xi}{\xi - \alpha_k} dt, \quad I_n^{(2)} = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=0}^n \frac{\xi - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} \xi} dt. \end{aligned}$$

В рассматриваемых интегралах выполним замену $\xi = e^{it}$ $\left(d\xi = i\xi dt, \quad dt = \frac{d\xi}{i\xi} \right)$. Будем иметь

$$I_{mn}^{(1)} = \frac{1}{i} \int_{|\xi|=1} \frac{1}{1 - \alpha_m \xi} \prod_{k=0}^n \frac{1 - \overline{\alpha_k} \xi}{\xi - \alpha_k} \frac{d\xi}{\xi} = 0, \quad I_{mn}^{(3)} = \frac{1}{i} \int_{|\xi|=1} \frac{1}{\xi - \alpha_m} \prod_{k=0}^n \frac{1 - \overline{\alpha_k} \xi}{\xi - \alpha_k} \frac{d\xi}{\xi} = 0,$$

$$I_n^{(1)} = \frac{1}{i} \int \prod_{|\xi|=1}^n \frac{1 - \overline{\alpha_k} \xi}{\xi - \alpha_k} \frac{d\xi}{\xi} = 0,$$

поскольку при $n > n_0$ подынтегральные функции этих интегралов аналитические вне контура $|\xi|=1$, и на бесконечности имеют нуль не ниже второго порядка;

$$I_{mn}^{(2)} = \frac{1}{i} \int \frac{1}{1 - \overline{\alpha_m} \xi} \prod_{k=1}^n \frac{\xi - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} \xi} d\xi = 0, \quad I_{mn}^{(4)} = \frac{1}{i} \int \frac{1}{\xi - \alpha_m} \prod_{k=1}^n \frac{\xi - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} \xi} d\xi = 0, \quad m \neq 0,$$

$$I_{0,n}^{(4)} = \frac{1}{i} \int \prod_{|\xi|=1}^n \frac{\xi - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} \xi} d\xi = 0, \quad I_n^{(2)} = \frac{1}{i} \int \prod_{|\xi|=1}^n \frac{\xi - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} \xi} d\xi,$$

поскольку при $n > n_0$ подынтегральные функции аналитичны внутри контура $|\xi|=1$.

Таким образом, из оценок (11)–(13) следует, что

$$\left| \int_0^\pi \varphi(t) \exp(\pm i \lambda_n(x, t)) dt \right| < 2\pi\varepsilon, \quad n > n_0,$$

а значит, выполняется утверждение леммы.

Для произвольной 2π -периодической функции $f(x) \in L_1[0, \pi]$ рассмотрим сопряженную с ней функцию [3]

$$\overline{f(x)} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt. \quad (14)$$

Теорема 2 (Признак Дини сходимости сопряженных рациональных рядов Фурье).

Пусть последовательность $\{a_k\}$ удовлетворяет условию (9), и

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_{n+k} = -\alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Если в точке x , $x \in \mathbb{R}$, сходятся интегралы

$$\int_0^\pi \frac{|f(x \pm t) - f(x)|}{t} dt,$$

то последовательность $\{\overline{S_{2n}}(x, f)\}$ частичных сумм сопряженного рационального ряда Фурье сходится в точке x к сопряженной функции (14).

Доказательство. Для 2π -периодической функции $f(x)$ имеем

$$\overline{S_{2n}}(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(f(x+t) \overline{D_{2n}(x, x+t)} + f(x-t) \overline{D_{2n}(x, x-t)} \right) dt.$$

Учитывая, что

$$\cos \lambda_{2n}^+(x, t) = \cos(\lambda_{2n}(x, t)) \cos \frac{x-t}{2} - \sin(\lambda_{2n}(x, t)) \sin \frac{x-t}{2},$$

получим

$$\begin{aligned} \overline{S_{2n}}(x, f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x+t) \left(\frac{\cos \frac{t}{2}}{-2 \sin \frac{t}{2}} + \frac{\cos \lambda_{2n}(x, x+t) \cos \frac{t}{2} + \sin \lambda_{2n}(x, x+t) \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} \right) dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x-t) \left(\frac{\cos \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{\cos \lambda_{2n}(x, x-t) \cos \frac{t}{2} - \sin \lambda_{2n}(x, x-t) \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} \right) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{f(x)} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x+t) \left(\frac{\cos \lambda_{2n}(x, x+t)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} + \sin \lambda_{2n}(x, x+t) \right) dt - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x-t) \left(\frac{\cos \lambda_{2n}(x, x-t)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \sin \lambda_{2n}(x, x-t) \right) dt, \\
&\quad \overline{S_{2n}}(x, f) = \overline{f(x)} + J_1 + J_2,
\end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(f(x+t) \frac{\cos \lambda_{2n}(x, x+t)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} - f(x-t) \frac{\cos \lambda_{2n}(x, x-t)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right) dt, \\
J_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x+t) \sin \lambda_{2n}(x, x+t) + f(x-t) \sin \lambda_{2n}(x, x-t)) dt.
\end{aligned}$$

Из леммы 3 следует, что

$$J_2 \Rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \tag{17}$$

Рассмотрим интеграл J_1 :

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x+t) - f(x-t)) \frac{\cos \lambda_{2n}(x, x+t)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt + \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
&+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x-t) \left(\frac{\cos \lambda_{2n}(x+t, x) - \cos \lambda_{2n}(x, x-t)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right) dt = I_1 + I_2, \\
I_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{(f(x+t) - f(x-t))}{t} \cos \lambda_{2n}(x, x+t) dt + \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) - f(x-t)) \cos \lambda_{2n}(x, x+t) \left(\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right) dt, \\
I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x-t) \left(\frac{\cos \lambda_{2n}(x+t, x) - \cos \lambda_{2n}(x, x-t)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right) dt.
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
&+ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) - f(x-t)) \cos \lambda_{2n}(x, x+t) \left(\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right) dt, \\
I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x-t) \left(\frac{\cos \lambda_{2n}(x+t, x) - \cos \lambda_{2n}(x, x-t)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right) dt.
\end{aligned} \tag{20}$$

Нетрудно показать, что функция, стоящая в скобках во втором интеграле равенства (19), непрерывна на $[0, \pi]$, а значит, принадлежит $L_1[0, \pi]$. На основании леммы 3 получим, что в точке x

$$I_1 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \tag{21}$$

Займемся интегралом I_2 . В интеграле

$$I = \int_0^\pi \frac{\cos \lambda_{2n}(x+t, x) - \cos \lambda_{2n}(x, x-t)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt \tag{22}$$

выполним замены $z = e^{ix}$, $\xi = e^{it}$. С учетом того, что

$$\exp\left(i \int_0^t \lambda_{2n}(u) du\right) = \prod_{k=1}^{2n} \frac{\xi - \alpha_k}{1 - \alpha_k \xi},$$

получим

$$I = \frac{1}{2} \int_C \frac{1-\xi}{(1+\xi)\xi} \left(\prod_{k=1}^{2n} \frac{\xi z - \alpha_k}{1 - \alpha_k \xi z} \frac{1 - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k} - \prod_{k=1}^{2n} \frac{z - \alpha_k}{1 - \alpha_k z} \frac{\xi - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k \xi} + \right. \\ \left. + \prod_{k=1}^{2n} \frac{1 - \overline{\alpha_k} \xi z}{\xi z - \alpha_k} \frac{z - \alpha_k}{1 - \alpha_k z} - \prod_{k=1}^{2n} \frac{1 - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k} \frac{z - \alpha_k \xi}{\xi - \alpha_k z} \right) d\xi = \frac{1}{2} (I^{(1)} + I^{(2)}), \quad C = \{\xi : \xi = e^{it}, \quad t \in (0, \pi)\},$$

где

$$I^{(1)} = \int_C \frac{1-\xi}{(1+\xi)\xi} \left(\prod_{k=1}^{2n} \frac{\xi z - \alpha_k}{1 - \alpha_k \xi z} \frac{1 - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k} - \prod_{k=1}^{2n} \frac{z - \alpha_k}{1 - \alpha_k z} \frac{\xi - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k \xi} \right) d\xi, \\ I^{(2)} = \int_C \frac{1-\xi}{(1+\xi)\xi} \left(\prod_{k=1}^{2n} \frac{1 - \overline{\alpha_k} \xi z}{\xi z - \alpha_k} \frac{z - \alpha_k}{1 - \alpha_k z} - \prod_{k=1}^{2n} \frac{1 - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k} \frac{z - \alpha_k \xi}{\xi - \alpha_k z} \right) d\xi.$$

При $\alpha_1 = 0$

$$I^{(1)} = \int_C \frac{1-\xi}{1+\xi} \left(\prod_{k=2}^{2n} \frac{\xi z - \alpha_k}{1 - \alpha_k \xi z} \frac{1 - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k} - \prod_{k=2}^{2n} \frac{z - \alpha_k}{1 - \alpha_k z} \frac{\xi - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k \xi} \right) d\xi.$$

Подынтегральная функция интеграла $I^{(1)}$ аналитична внутри контура $C \cup [-1, 1]$, в точке $\xi = -1$ имеем с учетом условия (15):

$$\lim_{\xi \rightarrow -1} \left(\prod_{k=1}^{2n} \frac{\xi z - \alpha_k}{1 - \alpha_k \xi z} \frac{1 - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k} - \prod_{k=1}^{2n} \frac{z - \alpha_k}{1 - \alpha_k z} \frac{\xi - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k \xi} \right) = \\ = \prod_{k=1}^{2n} \frac{z + \alpha_k}{1 + \alpha_k z} \frac{1 - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k} - \prod_{k=1}^{2n} \frac{z - \alpha_k}{1 - \alpha_k z} \frac{1 + \overline{\alpha_k} z}{z + \alpha_k} = 0.$$

Поэтому

$$I^{(1)} = - \int_{-1}^1 \frac{1-\xi}{1+\xi} \left(\prod_{k=2}^{2n} \frac{\xi z - \alpha_k}{1 - \alpha_k \xi z} \frac{1 - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k} - \prod_{k=2}^{2n} \frac{z - \alpha_k}{1 - \alpha_k z} \frac{\xi - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k \xi} \right) d\xi. \quad (23)$$

Подынтегральная функция интеграла $I^{(2)}$ аналитична вне контура $C \cup [-1, 1]$, при выполнении условия (15) в точке $\xi = -1$ имеем

$$\lim_{\xi \rightarrow -1} \left(\prod_{k=1}^{2n} \frac{1 - \overline{\alpha_k} \xi z}{\xi z - \alpha_k} \frac{z - \alpha_k}{1 - \alpha_k z} - \prod_{k=1}^{2n} \frac{1 - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k} \frac{z - \alpha_k \xi}{\xi - \alpha_k z} \right) = 0.$$

Поэтому

$$I^{(2)} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1-\xi}{(1+\xi)\xi} \left(\prod_{k=1}^{2n} \frac{1 - \overline{\alpha_k} \xi z}{\xi z - \alpha_k} \frac{z - \alpha_k}{1 - \alpha_k z} - \prod_{k=1}^{2n} \frac{1 - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k} \frac{z - \alpha_k \xi}{\xi - \alpha_k z} \right) d\xi + \\ + \int_1^{+\infty} \frac{1-\xi}{(1+\xi)\xi} \left(\prod_{k=1}^{2n} \frac{1 - \overline{\alpha_k} \xi z}{\xi z - \alpha_k} \frac{z - \alpha_k}{1 - \alpha_k z} - \prod_{k=1}^{2n} \frac{1 - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k} \frac{z - \alpha_k \xi}{\xi - \alpha_k z} \right) d\xi.$$

Выполним замену $\eta = \frac{1}{\xi}$, $d\xi = -\frac{1}{\eta^2} d\eta$, получим

$$I^{(2)} = \int_{-1}^1 \frac{\eta-1}{(\eta+1)\eta} \left(\prod_{k=1}^{2n} \frac{\eta - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k \eta} \frac{z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} z} - \prod_{k=1}^{2n} \frac{1 - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k} \frac{\eta z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} \eta z} \right) d\eta =$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{\eta-1}{(\eta+1)\eta} \left(\frac{1}{\eta} \prod_{k=2}^{2n} \frac{\eta - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k \eta} \frac{z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} z} - \frac{1}{\eta} \prod_{k=2}^{2n} \frac{1 - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k} \frac{\eta z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} \eta z} \right) d\eta,$$

поскольку $\alpha_1 = 0$. Отсюда с учетом формулы (22) найдем

$$I = \frac{1}{2} (I^{(1)} + I^{(2)}) = 0.$$

Таким образом, интеграл (20) может быть представлен в виде

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x-t) - f(x)) \left(\frac{\cos \lambda_{2n}(x+t, x) - \cos \lambda_{2n}(x, x-t)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right) dt.$$

и на основании леммы 3 можем заключить, что $I_2 \Rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, а потому, как следует из формул (18) и (21), интеграл J_1 в точке x сходится к нулю.

Отсюда с учетом представления (16), а также асимптотической оценки (15), получим, что последовательность частичных сумм $\overline{S_{2n}}(x, f)$ в точке x сходится к сопряженной функции $\overline{f(x)}$, что завершает доказательство теоремы.

Приближения функции, сопряженной к функции $|\sin x|^s$

Пусть

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0, \quad r = \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor; \quad \alpha_k \in [0, 1), \quad \alpha_k = -\alpha_{n+k}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad n > r. \quad (24)$$

Обозначим

$$\lambda_{2n}(u) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k| \cos(u - \arg \alpha_k) + |\alpha_k|^2}.$$

Очевидно, что при определенном выше выборе параметров

$$\lambda_{2n}(u) = 2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1 - \alpha_k^4}{1 - 2\alpha_k^2 \cos 2u + \alpha_k^4}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = |\sin x|^s$, $s > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Для сопряженной функции

$$\overline{f(x)} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin t|^s}{\operatorname{tg} \frac{t-x}{2}} dt$$

рассмотрим частичные суммы ее сопряженного тригонометрического рационального ряда Фурье (8).

Введем обозначение

$$\overline{\varepsilon_{2n}}(x, \alpha) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin t|^s}{\operatorname{tg} \frac{t-x}{2}} dt - \overline{S_{2n}}(x, |\sin x|^s), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Лемма 4. *Справедливо равенство*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \lambda_n^+(x, t)}{\sin \frac{x-t}{2}} dt = 0.$$

Доказательство. В рассматриваемом интеграле выполним замены $z = e^{ix}$, $\xi = e^{it}$.

С учетом того, что

$$\exp\left(i\int_0^t \lambda_n^+(u)du\right) = \xi^{1/2} \chi_n(\xi),$$

где

$$\chi_n(\xi) = \prod_{k=1}^n \frac{\xi - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} \xi},$$

получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \lambda_n^+(x, t)}{\sin \frac{x-t}{2}} dt = \int_C \prod_{k=1}^n \frac{\xi - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} \xi} \prod_{k=1}^n \frac{1 - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k} \frac{d\xi}{z - \xi} + \int_C \prod_{k=1}^n \frac{z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} z} \prod_{k=1}^n \frac{1 - \overline{\alpha_k} \xi}{\xi - \alpha_k} \frac{z d\xi}{\xi(z - \xi)}, \quad (25)$$

где $C = \{\xi : \xi = e^{it}, t \in (0, \pi)\}$.

Воспользуемся формулами Сохоцкого [6] для нахождения предельных значений $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ интеграла типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

при стремлении z к точке t контура L слева и справа от L соответственно:

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau,$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

С учетом того, что подынтегральная функция 1-го интеграла в равенстве (25) не имеет особых точек внутри контура C , а подынтегральная функция 2-го интеграла – вне контура C , получим

$$\begin{aligned} \int_C \prod_{k=1}^n \frac{\xi - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} \xi} \prod_{k=1}^n \frac{1 - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k} \frac{d\xi}{z - \xi} &= \pi i \left(-\prod_{k=1}^n \frac{\xi - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} \xi} \prod_{k=1}^n \frac{1 - \overline{\alpha_k} z}{z - \alpha_k} \right) \Big|_{\xi=z} = -\pi i, \\ \int_C \prod_{k=1}^n \frac{z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} z} \prod_{k=1}^n \frac{1 - \overline{\alpha_k} \xi}{\xi - \alpha_k} \frac{z d\xi}{\xi(z - \xi)} &= -\pi i \left(-\prod_{k=1}^n \frac{z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} z} \prod_{k=1}^n \frac{1 - \overline{\alpha_k} \xi}{\xi - \alpha_k} \frac{z}{\xi} \right) \Big|_{\xi=z} = \pi i. \end{aligned}$$

Отсюда и из равенства (25) следует утверждение леммы.

Теорема 3. Для приближений функции, сопряженной к функции $|\sin x|^s$, $s > 0$, частичными суммами сопряженных рациональных тригонометрических рядов Фурье справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon_{2n}}(x, \alpha) &= \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-t^2}{2t} \right)^s \frac{\chi_{2n}(t)}{t^2 - 2t \cos x + 1} \times \\ &\times \left(\sin x \cos \lambda_{2n}(0, x) + \frac{1-t \cos x}{t} \sin \lambda_{2n}(0, x) \right) dt, \quad n > \frac{s}{2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству соответствующей теоремы работы [7].

Теорема 4. Для приближений функции, сопряженной к функции $|\sin x|^s$, $s > 0$, частичными суммами сопряженных рациональных тригонометрических рядов Фурье справедливы следующие оценки:

$$\left| \overline{\varepsilon_{2n}}(x, \alpha) \right| \leq \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_{-1}^1 \left| \left(\frac{1-t^2}{2t} \right)^s \frac{\chi_{2n}(t)}{t} \right| \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 2t \cos x + 1}},$$

$$\left| \overline{\varepsilon_{2n}}(\alpha) \right| \leq \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2} (1-u)} |\tau_n(u)| du, \quad (27)$$

$$\text{где } \tau_n(u) = \prod_{k=1}^n \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}, \quad \beta_k = \frac{1 - \alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad n > \frac{s}{2}.$$

Доказательство. Так как справедливо неравенство $|a \cos x + b \sin x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$, $x \in \mathbb{R}$, то

$$\left| \sin x \cos \lambda_{2n}(0, x) + \frac{1 - t \cos x}{t} \sin \lambda_{2n}(0, x) \right| \leq \sqrt{\sin^2 x + \left(\frac{1 - t \cos x}{t} \right)^2} = \frac{\sqrt{t^2 - 2t \cos x + 1}}{|t|},$$

откуда на основании представления (26) будем иметь

$$\left| \overline{\varepsilon_{2n}}(x, \alpha) \right| \leq \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_{-1}^1 \left| \left(\frac{1-t^2}{2t} \right)^s \frac{\chi_{2n}(t)}{t} \right| \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 2t \cos x + 1}}.$$

Переходя в интеграле из неравенства выше к отрезку $[0, 1]$, получим

$$\left| \overline{\varepsilon_{2n}}(x, \alpha) \right| \leq \frac{2^{2-s}}{\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{s-1}}{t^{s+1}} |\chi_{2n}(t)| dt.$$

Выполним замену $\xi = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}$. В итоге будем иметь

$$\left| \overline{\varepsilon_{2n}}(x, \alpha) \right| \leq \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2} (1-u)} \left| \prod_{k=1}^n \left(\frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \right) \right| du,$$

$$\text{где } \beta_k = \frac{1 - \alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Полиномиальный случай

В полиномиальном случае $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, $|\tau_n(u)| = \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^n$. На основании оценки

(27) будем иметь

$$\left| \overline{\varepsilon_{2n}}(0) \right| \leq \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2} (1-u)} \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^n du.$$

Исследуем асимптотическое поведение интеграла в правой части последнего равенства. Представим его в виде

$$J_n = \int_0^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2} (1-u)} e^{n \ln \frac{1-u}{1+u}} du.$$

Для получения асимптотической оценки воспользуемся методом Лапласа. А именно, применим теорему Эрдейи [8]. Приведем ее формулировку.

Теорема Эрдейи. Пусть $I(x)$ – интеграл вида

$$I(x) = \int_a^b q(t) e^{xp(t)} dt,$$

где $p(t)$ – действительная функция действительной переменной, функция $q(t)$ может быть как комплекснозначной, так и действительнозначной, значение a конечное, b может быть как конечным, так и бесконечным.

Кроме того, пусть выполняются условия:

1) функция $p(t)$ достигает максимума при $t = a$, причем $p(t) < p(a)$ при $a < t \leq b$;

2) функции $p'(t)$ и $q(t)$ непрерывны в некоторой окрестности точки a , за исключением, возможно, самой точки a ;

3) интеграл $I(x)$ сходится абсолютно во всей области интегрирования при всех достаточно больших x ;

4) справедливы асимптотические равенства

$$p(t) \sim p(a) - P(t-a)^\mu, \quad t \rightarrow a+0, \quad q(t) \sim Q(t-a)^{\lambda-1}, \quad t \rightarrow a+0,$$

где P, μ, λ – положительные постоянные, а $Q \neq 0$ – действительная или комплексная постоянная; при этом первое из указанных равенств допускает дифференцирование.

Тогда

$$I(x) \sim \frac{Q}{\mu} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \frac{e^{xp(a)}}{(Px)^\mu}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (28)$$

Проверим выполнение условий указанной теоремы.

1. Найдем максимум функции $p(u) = \ln \frac{1-u}{1+u}$. Так как $p'(u) = -\frac{2}{1-u^2} < 0, \quad u \in [0,1)$, то функция $p(u)$ убывает на $[0,1)$, и значит, имеет максимум только в точке $u = 0$.

2. Функции $p'(u)$ и $q(u) = \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2}(1-u)}$ непрерывны в достаточно малой окрестности точки $u = 0$ (функция $q(u)$ – за исключением самой точки $u = 0$ при $s < 1$).

3. Интеграл $J(n)$ сходится при $n \geq \frac{s+1}{2}$, поскольку при таких n подынтегральная функция непрерывна при $u \in [0,1]$.

4. Выполняются асимптотические равенства

$$p(u) = \ln \frac{1-u}{1+u} \sim -2u, \quad u \rightarrow 0,$$

$$q(u) = \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{s/2}(1-u)} \sim u^{s-1}, \quad u \rightarrow 0,$$

откуда $P = 2, \mu = 1, Q = 1, \lambda = s$.

Тогда, согласно формуле (28),

$$J_n \sim \frac{\Gamma(s)}{(2n)^s}, \quad n \rightarrow \infty.$$

В результате получим

Следствие. Для полиномиальных приближений функции, сопряженной к функции $|\sin x|^s, \quad s > 0$, частичными суммами ее сопряженного ряда Фурье справедливо соотношение

$$|\overline{\varepsilon}_{2n}(0)| \leq \varepsilon_{2n}^*,$$

где

$$\varepsilon_{2n}^* = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \frac{\Gamma(s)}{(2n)^s} + o\left(\frac{1}{n^s}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Случай заданного числа геометрически различных полюсов

Пусть A_{2n} – множество точек $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$, которые удовлетворяют условиям (28). Положим $n > r, \quad r = \left\lceil \frac{s+1}{2} \right\rceil, \quad n_1 = n - r$ и q – заданное произвольное целое число,

$0 \leq q \leq n_1; \quad A_{2n, 2q}$ – множество точек $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}) \in A_{2n}$ таких, что среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ не более q различных, не равных нулю, и кратность каждой точки равна

$$m = \left\lceil \frac{n_1}{q+1} \right\rceil.$$

Обозначим также

$$\overline{\varepsilon_{2n,2q}} = \inf_{\alpha \in A_{2n,2q}} \overline{\varepsilon_{2n}}(\alpha).$$

На основе оценки (27) получим следующий результат.

Теорема 5. При произвольных целых n и q , $0 \leq q < n$, $n > r$, имеет место следующая оценка приближений функции, сопряженной к функции $|\sin x|^s$, $s > 0$, частичными суммами сопряженных рациональных тригонометрических рядов Фурье с заданным числом $2q$ геометрически различных полюсов в открытой комплексной плоскости:

$$\overline{\varepsilon_{2n,2q}} \leq C(s) \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \inf_{1 < t < \infty} \left(e^{-\frac{n}{2t}} + \left(\frac{q+1}{n} \right)^s \left(1 + \frac{t}{q+1} \right)^{-2qs} \right),$$

где $C(s)$ – некоторая положительная постоянная, которая зависит только от s .

Общий случай

Теорема 6. Для приближений функции, сопряженной к функции $|\sin x|^s$, $s > 0$, частичными суммами сопряженных рациональных тригонометрических рядов Фурье справедлива оценка

$$\overline{\varepsilon_{2n}} \leq C_1(s) \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \sqrt{n} e^{-\pi \sqrt{ns}},$$

где $C_1(s)$ – некоторая положительная постоянная, которая зависит только от s .

Доказательство теоремы 6 основано на оценке (27).

Литература

1. Young W. H. Konvergenzbedingungung fur die verwandte Reihe einer Fourierschen Reihe // Munchener Sitzungsberichte. 1911. Vol. 41. P. 261–371.
2. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
3. Китбалян А. А. Разложения по обобщенным тригонометрическим системам // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук. 1956. Т. 16, № 6. С. 3–24.
4. Джрбабян М. М. К теории рядов Фурье по рациональным функциям // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук. 1956. Т. 9, № 7. С. 3–28.
5. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
7. Казлоўская Н. Ю., Роўба Я. А. Аб апраксімацыі функцыі $|\sin x|^s$ частковымі сумаі трыганаметрычных рацыянальных шэрагаў Фур'е // Доклады Нац. акад. наук Беларуси. 2021. Т. 65, № 1. С. 11–17.
8. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М.: Физматгиз, 1962.

N. Ju. Kazlouskaya, Ya. A. Rovba

On conjugate rational trigonometric Fourier series and their approximation properties

Summary

The article considers conjugate rational trigonometric Fourier series. An integral representation of their partial sums and the Dini test for the convergence of the given series were obtained. The approximation of functions conjugate to $|\sin x|^s$, $s > 0$ by partial sums of conjugate rational trigonometric Fourier series is investigated. An integral representation, uniform and point estimates for the above-mentioned approximation were obtained. On the base of the uniform estimate polynomial, a fixed number of geometrically different poles, and general cases were studied.