Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 172–186

УДК 517.977 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-172–186
EDN: MFZAZM

К ПОТОЧЕЧНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

О. Б. Цехан

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
e-mail: tsekhan@grsu.by

Поступила: 15.09.2026 **Исправлена:** 01.10.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: сингулярно возмущенные системы, системы с запаздыванием, поточечная управляемость, робастная управляемость, декомпозиция, малый параметр

Аннотация. Для линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием в состоянии вводятся, сопоставляются и анализируются различные понятия поточечной управляемости, различающиеся зависимостью финального момента времени и управления от малого параметра, ограниченностью управления и точностью попадания в заданные точки. Установлена иерархия введенных понятий. Выявлена структура оператора поточечной управляемости, которая обосновывает связь между робастной и равномерной по малому параметру μ управляемостью. Доказаны достаточные декомпозиционные условия робастной поточечной управляемости, выраженные через матрицы управляемости медленной и быстрой подсистем. Теоретические результаты проиллюстрированы примерами.

ON POINTWISE CONTROLLABILITY OF A LINEAR TIME-INVARIANT SINGULARLY PERTURBED SYSTEM WITH DELAY

O. B. Tsekhan

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus
e-mail: tsekhan@grsu.by

Received: 15.09.2026 **Revised:** 01.10.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: singularly perturbed systems, time-delay systems, pointwise controllability, robust controllability, defining equations, decomposition, small parameter

Abstract. Different notions of pointwise controllability are introduced, compared and analyzed for a linear time-invariant singularly perturbed system with state delay. These notions differ in the dependence of the terminal time and control on the small parameter, the boundedness of the control, and the accuracy of hitting prescribed points. A hierarchy of the introduced notions is established. The structure of the pointwise controllability operator is revealed, which justifies the relationship between robust and μ-uniform controllability. Sufficient decomposition conditions for robust controllability, expressed in terms of the controllability matrices of the slow and fast subsystems, are proved. The theoretical results are illustrated by examples.

1. Введение

Управляемость относится к важнейшим структурным свойствам динамических систем и выражает возможность регулирования динамики системы. Для систем с запаздыванием понятия управляемости оказываются более разнообразными, чем для систем без запаздывания, в связи с бесконечномерностью пространства состояний. Например, наряду с относительной (евклидовой) управляемостью [1; 2], обеспечивающей перевод траектории системы в заданную точку евклидова пространства, вводится поточечная управляемость [3], означающая способность управления обеспечить прохождение траектории системы через любой заданный набор точек фазового пространства в заданные моменты времени, отсчитываемые от некоторого конечного момента t_1. Эти два типа управляемости характеризуют управляемость по конечномерной проекции фазового состояния систем с запаздыванием. Для стационарной системы с одним запаздыванием условия поточечной управляемости в терминах решений определяющих уравнений получены в [3]. В работе [4] этот результат был распространен на системы с произвольным числом запаздываний. Там же получен

критерий поточечной управляемости в терминах классической матрицы управляемости Калмана для некоторой специальной параметризованной системы без запаздывания, что позволило свести бесконечномерную задачу управляемости к проверке конечномерного критерия. В работе [5] установлена эквивалентность поточечной управляемости и слабой модальной управляемости, что связало задачу управления траекторией с проблемой размещения спектра и создало основу для перехода к исследованию бесконечномерной управляемости систем с запаздыванием.

Системы дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных являются математическими моделями, отражающими наличие нескольких взаимосвязанных подпроцессов с существенно различными временными масштабами, и относятся к классу сингулярно возмущенных систем (СВС) [6–10]. В связи с наличием в динамике СВС разнотемповых движений, наряду с управляемостью по всем переменным, возникают задачи управляемости отдельно по медленным и быстрым переменным. Кроме того, при исследовании СВС стремятся к получению условий, гарантирующих наличие у системы тех или иных свойств для всех достаточно малых значений параметра сингулярности, что соответствует стандартному пониманию робастности по отношению к параметрам системы [11]. Отметим, что проблема робастности и исследования свойств в условиях параметрической неопределенности активно развивалось в работах И. В. Гайшуна и его школы [12; 13].

В работах исследователей школы Р. Ф. Габасова, Ф. М. Кирилловой предложен и развивается аппарат определяющих уравнений, который позволяет выразить ранговые условия управляемости в терминах решений рекуррентных матричных уравнений, строящихся непосредственно по параметрам исходной системы. Впервые такой подход предложен в [1] для стационарных систем с запаздыванием и распространен далее [2; 14] для исследования управляемости и наблюдаемости других систем, в том числе с запаздыванием и сингулярно возмущенных систем. В работе [15] методом определяющих уравнений получены необходимые и достаточные условия поточечной управляемости и поточечной наблюдаемости линейных стационарных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием при фиксированном значении малого параметра μ, а также достаточные условия, справедливые для всех достаточно малых μ. Однако систематический анализ различных понятий поточечной управляемости параметрического семейства сингулярно возмущенных систем ранее не проводился.

Настоящая работа развивает результаты [15]. Вводятся, сопоставляются и анализируются различные понятия поточечной управляемости параметрического семейства систем, учитывающие зависимость конечного момента времени и управления от μ, ограниченность управления, точность прохождения траектории через заданные точки. Установлена иерархия введенных понятий.

Развиваемый в настоящей работе подход к анализу поточечной управляемости дополняет исследования автора по построению асимптотических аппроксимаций решений сингулярно возмущенных систем с запаздыванием методом расщепляющего преобразования [16–18] и используется для получения независимых от малого параметра и справедливых для всех достаточно малых его значений условий поточечной управляемости как по всей совокупности переменных, так и отдельно по медленным переменным в терминах управляемости двух систем меньшей размерности, чем исходная. Теоретические результаты проиллюстрированы примерами.

2. Постановка задачи. Понятия поточечной управляемости

2.1. Система управления. Задачи

Рассматривается линейная стационарная сингулярно возмущенная система с запаздыванием в состоянии (ЛССВСЗ)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{10}x(t) + A_{11}x(t-h) + A_{20}y(t) + A_{21}y(t-h) + B_1u(t), \\ \mu\dot{y}(t) &= A_{30}x(t) + A_{31}x(t-h) + A_4y(t) + B_2u(t), \quad t \geqslant 0, \end{aligned} \tag{1}$$

с нулевыми начальными условиями

$$x(\theta) = 0, \quad y(\theta) = 0, \quad \theta \in [-h, 0), \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0. \tag{2}$$

Здесь $h = \text{const} > 0$ – запаздывание; μ – малый параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$; $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \in \mathbb{R}^{n_2}$, $u \in \mathbb{R}^r$; A_{ij} $(i = 1,2,3,\ j = 0,1)$, A_4, B_1, B_2 – постоянные матрицы подходящих размеров; $u(t)$ – кусочно-непрерывная на $T = [0, t_1], t_1 > 0$, r-вектор-функция управления. Через $PC([0,t_1], \mathbb{R}^r)$ обозначим пространство таких функций, снабженное супремум-нормой $\|u\|_{PC} = \sup_{t\in[0,t_1]} \|u(t)\|$.

Для целей исследования нам понадобятся другие представления ЛССВСЗ (1). Определим оператор запаздывания e^{-ph}, где p – оператор дифференцирования, и введем матричные операторы

$$\mathbf{A}_1(e^{-ph}) = A_{10} + A_{11}e^{-ph}, \quad \mathbf{A}_2(e^{-ph}) = A_{20} + A_{21}e^{-ph}, \quad \mathbf{A}_3(e^{-ph}) = A_{30} + A_{31}e^{-ph}. \tag{3}$$

Тогда систему (1) можно записать в компактной форме:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}_1(e^{-ph})x(t) + \mathbf{A}_2(e^{-ph})y(t) + B_1u(t), \\ \mu\dot{y}(t) &= \mathbf{A}_3(e^{-ph})x(t) + A_4y(t) + B_2u(t),\ t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4}$$

При фиксированном $\mu > 0$ наряду с (3) введем матричные операторы

$$\mathbf{A}(\mu, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1(e^{-ph}) & \mathbf{A}_2(e^{-ph}) \\ \mu^{-1}\mathbf{A}_3(e^{-ph}) & \mu^{-1}A_4 \end{pmatrix}, \quad B(\mu) = \begin{pmatrix} B_1 \\ \mu^{-1}B_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $n = n_1 + n_2$, $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $M(\mu) = \text{diag}\{E_{n_1},\ \mu^{-1}E_{n_2}\}$. Введем матрицы $A^0(\mu) = M(\mu)A^0, A^1(\mu) = M(\mu)A^1, B(\mu) = M(\mu)B,$ где

$$A^0 = \begin{pmatrix} A_{10} & A_{20} \\ A_{30} & A_4 \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{31} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда задачу (1), (2) можно записать в виде

$$\begin{gathered} \dot{z}(t) = A^0(\mu)z(t) + A^1(\mu)z(t-h) + B(\mu)u(t), \\ z(\theta) = 0, \quad \theta \in [-h, 0), \quad z(0) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Если малый параметр μ принимает всевозможные значения из интервала $(0, \mu^0]$, то получаем μ-*параметрическое семейство систем управления* (5), которое однозначно определяется матрицами A^0, A^1, B и границей μ^0 интервала значений малого параметра. Обозначим семейство через $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^0}$.

С исходной ЛССВСЗ (1) связаны вырожденная (медленная) подсистема и система пограничного слоя (быстрая подсистема). Определим их.

Предположим, что матрица A_4 обратима. Положим $u(t) = 0, t < 0$. Тогда для ЛССВСЗ (1) с нулевыми начальными условиями (2) вырожденная подсистема имеет вид

$$\begin{gathered} \dot{x}_s(t) = A_{s0}x_s(t) + A_{s1}x_s(t-h) + B_{s0}u(t) + B_{s1}u(t-h), t \geqslant 0, \\ x_s(\theta) = 0, \quad \theta \in [-h, 0], \end{gathered} \tag{6}$$

где $A_{si} = A_{1i} - A_{20}A_4^{-1}A_{3i}, L_i = A_4^{-1}A_{3i}, i = 0,1, B_{s0} = B_1 - A_{20}A_4^{-1}B_2, B_{s1} = -A_{21}A_4^{-1}B_2$.

Система пограничного слоя (быстрая подсистема) в растянутой шкале времени $\tau = t/\mu$ имеет вид

$$\frac{d}{d\tau}y_f(\tau) = A_4y_f(\tau) + B_2u(\mu\tau), \quad y_f(0) = 0, \quad \tau \geqslant 0. \tag{7}$$

Медленная подсистема (6) является n_1-мерной системой с запаздыванием в состоянии и управлении; быстрая подсистема (7) является n_2-мерной системой без запаздывания.

Задачи. Для линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием в состоянии (1) ввести и установить связи между различными понятиями поточечной управляемости, различающиеся тем, зависит ли финальный момент времени t_1 от μ, ограничена ли норма управления, зависит ли само управление от μ и является ли попадание управляемой траектории в заданные точки точным или приближенным; вывести декомпозиционные условия, сводящие проверку управляемости всей системы к проверке управляемости ее медленной (6) и быстрой (7) подсистем.

2.2. Понятия поточечной управляемости

Пусть γ – фиксированное натуральное число. Для системы (1) при фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ следуя работам [4; 15; 19] введем определение.

Определение 2.1 [15]. При фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ ЛССВСЗ (1) называется μ-*поточечно* $\{x, y\}$-*управляемой*, если для любого конечного набора точек $Z = \{(x_j \in \mathbb{R}^{n_1}, y_j \in \mathbb{R}^{n_2}),\ j = \overline{0,\gamma}\}$ и любых неотрицательных чисел $\beta_j : 0 = \beta_0 < \cdots < \beta_\gamma$ существуют $t_1 \in [\beta_\gamma, +\infty)$ и кусочно-непрерывное управление $u_\mu(t;Z)$, $t \geqslant 0$, такие, что соответствующее решение $(x(t;\mu,u_\mu(t;Z)), y(t;\mu,u_\mu(t;Z)))$, $t \geqslant 0$, системы (1) с нулевыми начальными условиями (2) удовлетворяет равенствам

$$\begin{pmatrix} x(t_1 - \beta_j;\mu,u_\mu) \\ y(t_1 - \beta_j;\mu,u_\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}, \quad j = \overline{0,\gamma}. \tag{8}$$

Продемонстрируем зависимость μ-поточечной $\{x, y\}$-управляемости от значений параметра μ. Заметим, что система без запаздывания (частный случай системы (1) при $A_{i1} = 0$, $i = 1,2,3$) поточечно управляема тогда и только тогда, когда она полностью управляема по Калману.

Пример 2.2. Для системы $\dot{x}_1(t) = x_2(t) + u(t), \dot{x}_2(t) = 2u(t), \mu\dot{y}(t) = x_1(t) - y(t) + 0{,}08\,u(t), t \geqslant 0$, матрица управляемости имеет вид $P(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0{,}08/\mu & 1/\mu - 0{,}08/\mu^2 & 2/\mu - 1/\mu^2 + 0{,}08/\mu^3 \end{pmatrix}$. Непосредственное вычисление дает $\det P(\mu) = -4\frac{2\mu^2 - \mu + 0{,}08}{\mu^3} \neq 0$ при всех $\mu > 0$, кроме $\mu = 0{,}1$ и $\mu = 0{,}4$. Следовательно, эта система является μ-поточечно управляемой при каждом $\mu > 0$, $\mu \neq 0{,}1$, $\mu \neq 0{,}4$, но не является μ-поточечно управляемой при $\mu = 0{,}1$ и $\mu = 0{,}4$.

Пример обосновывает существенность введения следующего понятия.

Определение 2.3. Семейство систем $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^0}$ называется *робастно поточечно* $\{x, y\}$-*управляемым*, если для любого $\mu \in (0, \mu^0]$ соответствующая система является μ-поточечно $\{x, y\}$-управляемой.

Для примера 2.2 любое семейство систем $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^0}$ с $\mu^0 < 0{,}1$ робастно управляемо.

Термин *робастная управляемость* естественным образом расширяет классическое понятие управляемости на случай параметрической неопределенности. Содержательно робастная управляемость характеризует способность параметрического семейства систем $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^0}$ сохранять свойство управляемости при вариациях параметра μ во всем допустимом диапазоне $(0, \mu^0]$, что соответствует стандартному пониманию робастности по отношению к параметрам системы [11].

Заметим, что в определении 2.3 финальный момент времени t_1, вообще говоря, зависит от μ и норма управления $u_\mu(t;Z)$ может быть неограничена при $\mu \to 0$. При этом требуется точное попадание в заданные точки Z в моменты времени $t_1 - \beta_j$, $j = \overline{0,\gamma}$.

Обозначим пространство целевых точек $Z = \{(x_j \in \mathbb{R}^{n_1}, y_j \in \mathbb{R}^{n_2}),\ j = \overline{0,\gamma}\}$ (набор точек из $\mathbb{R}^n$) через $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^{n(\gamma+1)}$. Норму в $\mathcal{Z}$ определим как $\|Z\| = \max_{0 \leqslant j \leqslant \gamma} \|Z_j\|$, где $\|Z_j\|$ – евклидова норма вектора $Z_j = (x_j, y_j)$ в $\mathbb{R}^n$.

Ослабление требования точного попадания приводит к понятию асимптотической поточечной управляемости, в котором допускается погрешность попадания в заданные значения.

Определение 2.4. Семейство систем $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^0}$ называется μ^k-*асимптотически поточечно* $\{x, y\}$-*управляемым (с t_1, зависящим от μ)*, если для любого набора точек $Z \in \mathcal{Z}$ и любых $0 = \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_\gamma$ существуют $t_1 \in [\beta_\gamma, +\infty)$, вообще говоря, зависящий от μ, константа $K > 0$, не зависящая от μ, Z и j, и кусочно-непрерывное управление $u_\mu(t;Z)$ такие, что для любого $\mu \in (0, \mu^0]$ решение задачи (1), (2) с управлением $u_\mu(t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\left\| \begin{pmatrix} x(t_1 - \beta_j;\mu,u_\mu) \\ y(t_1 - \beta_j;\mu,u_\mu) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} \right\| \leqslant K\,\mu^k\,\|Z\|, \quad j = \overline{0,\gamma}. \tag{9}$$

Определение μ^k-асимптотической поточечной управляемости означает, что при $\mu \to 0$ погрешность попадания в заданные значения стремится к нулю со скоростью μ^k, причем константа в оценке (9) не зависит от выбора целевых точек Z и от индекса j. При этом момент времени t_1 может зависеть от μ, но оценка погрешности остается равномерной по μ и Z. Таким образом,

данное свойство гарантирует равномерное по Z и j стремление к точной поточечной управляемости в пределе при $\mu \to 0^+$.

В определениях 2.1, 2.3 и 2.4 финальный момент времени t_1 может зависеть от μ, а норма управления может быть неограничена при $\mu \to 0$. Далее введем определения, усиливающие введенные выше понятия по следующим аспектам: *единый момент времени:* существует $t_1 \geqslant 0$, не зависящий от μ и от набора точек Z; *ограниченность управления:* норма $\|u_\mu\|_{L_\infty[0,t_1]}$ ограничена константой, не зависящей от μ (и, возможно, от Z).

Определение 2.5. Семейство систем $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^0}$ называется μ^k-*асимптотически поточечно* $\{x,y\}$-*управляемым (с фиксированным* t_1*)*, если для любого набора точек $Z \in \mathcal{Z}$ и любых $0 = \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_\gamma$ существуют момент времени $t_1 \in [\beta_\gamma, +\infty)$, не зависящий от μ , константа $K > 0$, не зависящая от μ и Z, такие что для любого $\mu \in (0, \mu^0]$ найдется кусочно-непрерывное управление $u_\mu(t;Z)$ такое, что решение задачи (1), (2) с управлением $u_\mu(t)$ удовлетворяет неравенствам (9).

Определение 2.6. Семейство систем $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^0}$ называется μ-*равномерно (относительно u) поточечно* $\{x,y\}$-*управляемым*, если для любого набора точек $Z \in \mathcal{Z}$ и любых неотрицательных чисел $0 = \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_\gamma$ существует константа $C(Z) > 0$ такая, что для каждого $\mu \in (0, \mu^0]$ найдется кусочно-непрерывное управление u_μ такое, что решение задачи (1), (2) с управлением $u_\mu(t)$ удовлетворяет равенствам (8) для некоторого $t_1 \in [\beta_\gamma, +\infty)$, вообще говоря, зависящего от μ и Z, и $\|u_\mu\|_{L_\infty[0,t_1]} \leqslant C(Z)$.

В определении 2.6 финальный момент времени t_1, вообще говоря, зависит от μ, однако норма $u_\mu(t;Z)$ ограничена при $\mu \to 0$.

Определение 2.7. Семейство систем $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^0}$ называется *равномерно по* μ *(относительно* t_1 *и u) поточечно* $\{x,y\}$-*управляемым*, если для любого набора точек $Z \in \mathcal{Z}$ и любых неотрицательных чисел $0 = \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_\gamma$ существуют момент времени $t_1 \in [\beta_\gamma, +\infty)$ и константа $c > 0$, не зависящие от μ и Z, такие, что для любого $\mu \in (0, \mu^0]$ найдется кусочно-непрерывное управление $u_\mu(t;Z)$, $t \geqslant 0$, такое, что решение задачи (1), (2) с управлением $u_\mu(t)$ удовлетворяет равенствам (8), причем управление $u_\mu(t;Z)$ может быть выбрано таким образом, что $\|u_\mu(\cdot;Z)\|_{L_\infty[0,t_1]} \leqslant c\,\|Z\|$,

В определении 2.7 финальный момент времени t_1 не зависит от μ и норма $u_\mu(t;Z)$ ограничена при $\mu \to 0$.

Если в каком-либо из определений 2.1, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 управление может быть выбрано не зависящим от параметра μ, то соответствующее свойство будем называть *идеальной поточечной* $\{x,y\}$-*управляемостью* в соответствующем смысле.

Если во введенных выше определениях условие для y опущено, т. е. требуется только $x(t_1 - \beta_j) = x_j$, $j = \overline{0,\gamma}$, то ЛССВСЗ (1) называется *поточечно x-управляемой* в соответствующем смысле.

Очевидно, что идеальная управляемость влечет обычную (неидеальную) управляемость в том же смысле, поскольку класс допустимых управлений сужается: если существует управление, не зависящее от μ, то оно, в частности, является допустимым и в исходном определении. Обратное, вообще говоря, неверно.

В таблице приведено сравнение введенных понятий поточечной управляемости по основным характеристикам.

Сравнение понятий поточечной управляемости

Понятие	t_1 от μ	t_1 от Z	Ограниченность u	Точность
μ-Поточечная (определение 2.1)	Да	Да	Нет	Точное
Робастная поточечная (определение 2.3)	Да	Да	Нет	Точное
μ^k-Асимптотически поточечная с фикс. t_1 (определение 2.5)	Нет	Нет	Нет	Приближ. $O(\mu^k)$
μ^k-Асимптотически поточечная с завис. t_1 (определение 2.4)	Да	Да	Нет	Приближ. $O(\mu^k)$
μ-Равномерная поточечная (определение 2.6)	Да	Да	Да ($C(Z)$)	Точное
Равномерно по μ поточечная (определение 2.7)	Нет	Нет	Да ($c\|Z\|$)	Точное

2.3. Отношения между понятиями поточечной управляемости

Непосредственно из определений следует, что для ЛССВСЗ (1) введенные понятия управляемости образуют следующую иерархию:

$$\text{равномерная по } \mu \Rightarrow \mu\text{-равномерная} \Rightarrow \text{робастная} \Rightarrow \mu\text{-поточечная}.$$

Кроме того, робастная $\Rightarrow$ μ^k-асимптотическая (с t_1, зависящим от набора целевых точек). Все обратные импликации, вообще говоря, неверны.

Понятия идеальной и поточечной x-управляемости не образуют самостоятельных ступеней в иерархии: идеальная управляемость – усиление каждого из введенных свойств (управление не зависит от μ), x-управляемость – ослабление (требование на y опущено). Идеальная управляемость влечет обычную в том же смысле, а $\{x,y\}$-управляемость влечет x-управляемость; обратные импликации, вообще говоря, неверны.

Контрпример для обратной импликации μ-*поточечная* $\not\Rightarrow$ *робастная* приведен в примере 2.2.

Приведем пример, который демонстрирует, что из робастной управляемости не следует равномерная по μ управляемость.

Пример 2.8. Рассмотрим семейство

$$\dot{x} = x + y + u(t), \quad x(0) = 0, \quad \mu\dot{y} = y + u(t), \quad y(0) = 0, \quad \mu \in (0, \mu^0]. \tag{10}$$

Матрица управляемости Калмана $K = \begin{pmatrix} 1 & 1+\frac{1}{\mu} \\ \frac{1}{\mu} & \frac{1}{\mu^2} \end{pmatrix}$ невырождена ($\det K = -\frac{1}{\mu} \neq 0$), имеет ранг 2 при любом $\mu > 0$. Следовательно, система полностью управляема по Калману при каждом $\mu > 0$. Поскольку для систем без запаздывания полная управляемость эквивалентна поточечной управляемости, семейство $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^0}$ (10) является *робастно поточечно управляемым* (в смысле определения 2.3) для любого $\mu^0 > 0$.

Покажем, что семейство (10) не является *равномерно по* μ *(относительно* t_1 *и* u*) поточечно управляемым* (в смысле определения 2.7) ни при каком μ^0.

Зафиксируем $\gamma = 1$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 1$, и целевые точки $z_1 = (0,0)$ в момент $t_1 - 1$ и $z_0 = (1,0)$ в момент t_1, $\|Z\| = 1$, где $t_1 \geqslant 1$ – произвольное число, не зависящее от μ. Заметим, что из требований попадания в эти точки следуют равенства $x(t_1 - 1) = y(t_1 - 1) = 0$ и $x(t_1) = 1$, $y(t_1) = 0$.

Предположим противное: пусть существуют не зависящие от μ константа $c > 0$ и время $t_1 \geqslant 1$ такие, что для любого $\mu \in (0, \mu^0]$ найдется управление u_μ с

$$\|u_\mu\|_{L_\infty[0,t_1]} \leqslant c\|Z\| =: M, \tag{11}$$

переводящее траекторию в z_0 в момент t_1 и в z_1 в момент $t_1 - 1$.

Из (10) имеем $u = \mu\dot{y} - y$ и $\dot{x} = x + \mu\dot{y}$, откуда при $x(t_1 - 1) = 0$ получаем $x(t) = \mu \int_{t_1-1}^{t} e^{t-s}\dot{y}(s)\,ds$, $t \in [t_1 - 1, t_1]$. Интегрируя по частям и учитывая $y(t_1 - 1) = y(t_1) = 0$, находим $x(t_1) = \mu \int_{t_1-1}^{t_1} e^{t_1-s} y(s)\,ds$, т. е. $\int_{t_1-1}^{t_1} e^{t_1-s} y(s)\,ds = \frac{1}{\mu}$. С другой стороны, из $\mu\dot{y} = y + u$ при $y(t_1 - 1) = 0$ имеем $y(s) = \frac{1}{\mu} \int_{t_1-1}^{s} e^{\frac{s-\theta}{\mu}} u(\theta)\,d\theta$. Подставляя в полученное выше соотношение и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\int_{t_1-1}^{t_1} u(\theta)\left(e^{\frac{t_1-\theta}{\mu}} - e^{t_1-\theta}\right)d\theta = \frac{1-\mu}{\mu}. \tag{12}$$

Из $y(t_1) = 0$ следует $\int_{t_1-1}^{t_1} e^{\frac{t_1-\theta}{\mu}} u(\theta)\,d\theta = 0$, поэтому (12) дает равенство $\int_{t_1-1}^{t_1} e^{t_1-\theta} u(\theta)\,d\theta = -\frac{1-\mu}{\mu}$. Оценивая его с помощью (11), получаем

$$\frac{1-\mu}{\mu} = \left|\int_{t_1-1}^{t_1} e^{t_1-\theta} u(\theta)\,d\theta\right| \leqslant M \int_{t_1-1}^{t_1} e^{t_1-\theta}\,d\theta = M(e-1).$$

При $\mu \to +0$ левая часть $\frac{1-\mu}{\mu} \to +\infty$, а правая $M(e-1)$ постоянна. Получили противоречие, следовательно равномерной по μ управляемости нет.

Следующая теорема показывает, что из μ^k-асимптотической поточечной управляемости семейства $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^0}$ следует робастная поточечная управляемость некоторого его сужения $\{A^0, A^1, B\}_{\mu_1}$, где $0 < \mu_1 \leqslant \mu^0$.

Зафиксируем моменты $0 = \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_\gamma$. При фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ и $t_1 > 0$ введем линейный оператор

$$\mathcal{W}_\mu : PC([0,t_1],\mathbb{R}^r) \to \mathbb{R}^{n(\gamma+1)},$$

который каждому кусочно-непрерывному на $[0,t_1]$ управлению u ставит в соответствие вектор значений решения задачи (1), (2) (в моменты $t_1 - \beta_j$):

$$\mathcal{W}_\mu(u) = \begin{pmatrix} z(t_1-\beta_0;\mu,u) \\ z(t_1-\beta_1;\mu,u) \\ \vdots \\ z(t_1-\beta_\gamma;\mu,u) \end{pmatrix}, \quad z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Из определения 2.3 следует, что робастная поточечная $\{x,y\}$-управляемость семейства $\{A^0,A^1,B\}_{\mu^0}$ эквивалентна сюръективности оператора $\mathcal{W}_\mu$ (13) для каждого $\mu \in (0,\mu^0]$.

Теорема 2.9. *Пусть семейство систем* $\{A^0,A^1,B\}_{\mu^0}$ (1) *является* μ^k*-асимптотически поточечно* $\{x,y\}$*-управляемым (с зависящим от* μ t_1*) с константой* $K > 0$*. Тогда его сужение* $\{A^0,A^1,B\}_{\mu_1}$ *на интервал* $(0,\mu_1]$ *является робастно поточечно* $\{x,y\}$*-управляемым в классе кусочно-непрерывных управлений, где* $\mu_1 = \min\{\mu^0, \frac{1}{2}K^{-1/k}\}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\mu \in (0,\mu_1]$. Тогда $K\mu^k < 1$. Для произвольного $Z \in \mathcal{Z}$ определим последовательность $\{Z_m\}_{m=0}^\infty$ следующим образом:

$$Z_0 = Z, \quad Z_{m+1} = Z_m - \mathcal{W}_\mu(u_\mu(\cdot;Z_m)), \quad m = 0,1,2,\ldots, \tag{14}$$

где $u_\mu(\cdot;Z_m) \in PC([0,t_1],\mathbb{R}^r)$ – управление из определения 2.4. Из (9) тогда имеем

$$\|Z_{m+1}\| = \|Z_m - \mathcal{W}_\mu(u_\mu(\cdot;Z_m))\| \leqslant K\mu^k\|Z_m\|. \tag{15}$$

Применяя (15) последовательно, получаем

$$\|Z_m\| \leqslant (K\mu^k)^m\|Z\| \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Так как $K\mu^k < 1$, из (16) следует, что

$$\|Z_m\| \to 0 \quad \text{при } m \to \infty. \tag{17}$$

Из определения Z_{m+1} (14) имеем $\mathcal{W}_\mu(u_\mu(\cdot;Z_m)) = Z_m - Z_{m+1}$, поэтому для частичных сумм верно $\sum\limits_{m=0}^{N-1} \mathcal{W}_\mu(u_\mu(\cdot;Z_m)) = Z - Z_N$. Переходя к пределу при $N \to \infty$ и используя (17), получаем $Z = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \mathcal{W}_\mu(u_\mu(\cdot;Z_m))$.

Таким образом, Z является пределом (в норме $\mathcal{Z}$) частичных сумм ряда, каждое слагаемое которого принадлежит $\operatorname{Im}\mathcal{W}_\mu$, где $\operatorname{Im}\mathcal{W}_\mu = \{\mathcal{W}_\mu(u) : u \in PC([0,t_1],\mathbb{R}^r)\}$. Следовательно, $Z \in \overline{\operatorname{Im}\mathcal{W}_\mu}$, где замыкание берется в $\mathcal{Z}$. Так как Z был выбран произвольно, получаем $\mathcal{Z} \subseteq \overline{\operatorname{Im}\mathcal{W}_\mu}$.

Оператор $\mathcal{W}_\mu : PC([0,t_1],\mathbb{R}^r) \to \mathcal{Z}$ является линейным. Так как он действует в конечномерное пространство $\mathcal{Z}$, его образ является подпространством конечной размерности. Следовательно, $\operatorname{Im}\mathcal{W}_\mu$ замкнуто в $\mathcal{Z}$, и с учетом $Z \in \overline{\operatorname{Im}\mathcal{W}_\mu}$, получаем $\operatorname{Im}\mathcal{W}_\mu = \mathcal{Z}$, т. е. оператор $\mathcal{W}_\mu$ сюръективный, а значит, система поточечно управляема при данном μ.

Так как $\mu \in (0,\mu_1]$ было выбрано произвольно, значит, семейство систем $\{A^0,A^1,B\}_{\mu_1}$ является робастно поточечно $\{x,y\}$-управляемым. □

Заметим, что из доказательства теоремы 2.9 следует, что μ_1 можно взять любым из интервала $(0,K^{-1/k})$.

Для доказательства теоремы о связи между робастной и равномерной по μ поточечной управляемостью нам понадобится следующая лемма.

Зафиксируем моменты $t_j = t_1 - \beta_j$, $j = \overline{0,\gamma}$, и обозначим $\tau_j = \frac{t_j}{\mu}$.

Лемма 2.10 (О структуре оператора поточечной управляемости). *Пусть характеристические числа матрицы* A_4 *отрицательны:* $\operatorname{Re}\lambda(A_4) < 0$*. Для системы* (1), (2) *оператор поточечной управляемости* $\mathcal{W}_\mu$ *допускает представление*

$$\mathcal{W}_\mu = \mathcal{W}_0 + R_\mu, \quad \|R_\mu\|_{\mathcal{L}(PC,\mathcal{Z})} \leqslant C\mu, \tag{18}$$

где $\mathcal{W}_0 : PC([0,t_1],\mathbb{R}^r) \to \mathcal{Z}$ *– линейный оператор, определяемый через решения медленной и быстрой подсистем в растянутом времени:*

$$\mathcal{W}_0(u) = \begin{pmatrix} x_s(t_0) \\ y_f(\tau_0) - L_0 x_s(t_0) - L_1 x_s(-h) \\ \vdots \\ x_s(t_\gamma) \\ y_f(\tau_\gamma) - L_0 x_s(t_\gamma) - L_1 x_s(t_\gamma - h) \end{pmatrix},$$

где $x_s(\cdot)$ *– решение вырожденной системы* (6)*;* $y_f(\cdot)$ *– решение системы пограничного слоя* (7)*.*

Доказательство. Согласно теореме об аппроксимации 0-го порядка [18; 20, формулы (17), (18)], для любого управления u решение исходной системы имеет вид

$$\begin{aligned} x_\mu(t) &= x_s(t) + \mu\,\varepsilon_x(t,\mu), \\ y_\mu(t) &= y_f\left(\frac{t}{\mu}\right) - L_0 x_s(t) - L_1 x_s(t-h) + \mu\,\varepsilon_y(t,\mu), \end{aligned} \tag{19}$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ равномерно ограничены на $[0,t_1]$.

По определению оператора $\mathcal{W}_\mu$ (13):

$$\mathcal{W}_\mu(u) = \big(x_\mu(t_0)',\, y_\mu(t_0)',\, \ldots,\, x_\mu(t_\gamma)',\, y_\mu(t_\gamma)'\big)'.$$

Здесь и далее $'$ (штрих) означает операцию транспонирования. Подставляя (19), получаем

$$\mathcal{W}_\mu(u) = \mathcal{W}_0(u) + \mu\big(\varepsilon_x(t_0,\mu)',\, \varepsilon_y(t_0,\mu)',\, \ldots,\, \varepsilon_x(t_\gamma,\mu)',\, \varepsilon_y(t_\gamma,\mu)'\big)'.$$

Обозначим второе слагаемое через $R_\mu(u)$. Оператор R_μ линеен как разность линейных операторов $\mathcal{W}_\mu$ и $\mathcal{W}_0$. Согласно теореме об аппроксимации 0-го порядка [20, теорема, формула (17)–(18)], остаточные члены $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ равномерно ограничены на $[0,t_1]$, причем константа C в оценке не зависит от u. Следовательно, $\|R_\mu\|_{\mathcal{L}(PC,\mathcal{Z})} \leqslant C\mu$. □

Теорема 2.11. *Пусть* $\mathrm{Re}\lambda(A_4) < 0$*. Если семейство систем* $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^0}$ *является робастно поточечно* $\{x,y\}$*-управляемым и оператор* $\mathcal{W}_0$ *из представления* (18) *сюръективен, то существует* $\mu^* \in (0,\mu^0]$ *такое, что сужение* $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^*}$ *семейства на интервал* $(0,\mu^*]$ *является равномерно по* μ *(относительно* t_1 *и* u*) поточечно* $\{x,y\}$*-управляемым.*

Доказательство. Из определения 2.3 робастной управляемости следует, что для каждого $\mu \in (0,\mu^0]$ оператор $\mathcal{W}_\mu$ сюръективен. Согласно лемме 2.10, при выполнении предположения теоремы оператор $\mathcal{W}_0$ не содержит μ как параметр. При этом возмущение R_μ удовлетворяет оценке $\|R_\mu\|_{\mathcal{L}(PC,\mathcal{Z})} \leqslant C\mu$ (для краткости далее используем обозначение $\|R_\mu\| := \|R_\mu\|_{\mathcal{L}(PC,\mathcal{Z})}$). Поскольку $\mathcal{Z}$ конечномерно, а $\mathcal{W}_0$ сюръективен, он имеет ограниченный правый обратный $\mathcal{W}_0^+$ с нормой $\|\mathcal{W}_0^+\| < +\infty$.

Выберем $\mu^* \in (0,\mu^0]$ так, чтобы $\mu^* = \min\left(\mu^0,\, \frac{1}{2C\|\mathcal{W}_0^+\|}\right)$, где C – константа из оценки (18). Тогда для каждого $\mu \in (0,\mu^*]$ верно $\|R_\mu\| \leqslant C\mu \leqslant C\mu^* \leqslant \frac{1}{2\|\mathcal{W}_0^+\|}$, так что $\|R_\mu\|\,\|\mathcal{W}_0^+\| \leqslant \frac{1}{2} < 1$.

Пусть $\mathcal{W}_0^+$ – правый обратный к $\mathcal{W}_0$, т. е. $\mathcal{W}_0\mathcal{W}_0^+ = I$. Положим $\mathcal{W}_\mu^+ = \mathcal{W}_0^+(I + R_\mu\mathcal{W}_0^+)^{-1}$. Тогда $\mathcal{W}_\mu\mathcal{W}_\mu^+ = (\mathcal{W}_0 + R_\mu)\mathcal{W}_0^+(I + R_\mu\mathcal{W}_0^+)^{-1} = (I + R_\mu\mathcal{W}_0^+)(I + R_\mu\mathcal{W}_0^+)^{-1} = I$, так что $\mathcal{W}_\mu^+$ – правый обратный к $\mathcal{W}_\mu$. При $\|R_\mu\|\,\|\mathcal{W}_0^+\| < 1$ ряд Неймана для $(I + R_\mu\mathcal{W}_0^+)^{-1}$ сходится, и

$$\|\mathcal{W}_\mu^+\| \leqslant \|\mathcal{W}_0^+\|\frac{1}{1 - \|R_\mu\|\,\|\mathcal{W}_0^+\|}. \tag{20}$$

Таким образом, для каждого $\mu \in (0,\mu^*]$ и любого $Z \in \mathcal{Z}$ управление $u_\mu = \mathcal{W}_\mu^+ Z$ удовлетворяет $\mathcal{W}_\mu u_\mu = Z$, $\|u_\mu\|_{L_\infty} \leqslant \|\mathcal{W}_\mu^+\| \cdot \|Z\|$. В силу (20) существует константа $K = \frac{\|\mathcal{W}_0^+\|}{1 - C\mu^*\|\mathcal{W}_0^+\|}$, не зависящая от μ и Z, такая, что $\|u_\mu\|_{L_\infty} \leqslant K\|Z\|$ для всех $\mu \in (0,\mu^*]$.

Момент времени t_1 фиксирован при определении оператора $\mathcal{W}_0$ и не зависит ни от μ, ни от Z. Следовательно, по определению 2.7 сужение $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^*}$ является равномерно по μ (относительно t_1 и u) поточечно $\{x,y\}$-управляемым на интервале $(0,\mu^*]$. □

3. Условия робастной поточечной управляемости

Для формулировки условий поточечной управляемости непосредственно по исходной сингулярно возмущенной системе управления (1) введем определяющие уравнения по правилам, аналогичным [14] (здесь t – аргумент определяющих уравнений):

$$\begin{aligned} X^m_{k+1}(t) &= A_{10}X^m_k(t) + A_{11}X^m_k(t-h) + A_{20}Y^m_k(t) + A_{21}Y^m_k(t-h) + B_1U^m_k(t),\\ Y^{m+1}_{k+1}(t) &= A_{30}X^m_k(t) + A_{31}X^m_k(t-h) + A_4Y^m_k(t) + B_2U^m_k(t), \quad t>0, \end{aligned} \tag{21}$$

где $X^m_{k+1}(jh) \in \mathbb{R}^{n_1\times r}$, $Y^{m+1}_{k+1}(jh) \in \mathbb{R}^{n_2\times r}$, с начальными условиями

$$\begin{aligned} &X^m_k(t) = 0_{n_1\times r}, \quad m<k \text{ или } k\leqslant 0 \text{ или } t\leqslant 0,\\ &Y^m_k(t) = 0_{n_2\times r}, \quad m\leqslant k \text{ или } k\leqslant 0 \text{ или } t\leqslant 0,\\ &U^0_0(0) = E_r, \quad U^m_k(t) = 0_{r\times r}, \quad k\neq 0,\ m\neq 0. \end{aligned}$$

Здесь и далее запись типа $\left[M_{ij}, i=\overline{1,I}, j=\overline{1,J}\right]$, $M_{ij}\in\mathbb{R}^{k\times l}$, обозначает $k\times IJ$-матрицу следующей структуры:

$$[M_{11}, M_{21}, \ldots, M_{I1}, M_{12}, M_{22}, \ldots, M_{I2}, \ldots, M_{IJ}].$$

Применение критерия из [4] (в форме, использующей определяющие уравнения (21) [15, теорема 1]), при фиксированном $\mu>0$ к системе (1) приводит к утверждению.

Предложение 3.1 [15]. *Система* (1) μ*-поточечно* $\{x,y\}$*-управляема тогда и только тогда, когда существует число* $\kappa(\mu)\geqslant 0$ *такое, что*

$$\operatorname{rank} P(\kappa(\mu),\mu) = n, \tag{22}$$

где

$$P(\kappa(\mu),\mu) \triangleq \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^k \kappa(\mu)^j \sum_{m=0}^k \mu^{-m} X^m_{k+1}(jh),\ k=\overline{0,n-1} \\ \sum_{j=0}^k \kappa(\mu)^j \sum_{m=0}^k \mu^{-m-1} Y^{m+1}_{k+1}(jh),\ k=\overline{0,n-1} \end{bmatrix},$$

а $X^m_{k+1}(jh)$ *и* $Y^{m+1}_{k+1}(jh)$, $k=\overline{0,n-1}$, $m=\overline{0,k}$, $j=\overline{0,k}$, *– решения определяющих уравнений* (21).

Матрица управляемости в условии (22) зависит от μ как через коэффициенты системы, так и через параметр $\kappa(\mu)$.

Следующая лемма показывает, что на некотором сужении интервала $(0,\mu^0]$ параметр κ в условии (22) можно выбрать не зависящим от μ.

Лемма 3.2 (О выборе κ_0, не зависящего от μ). *Если для каждого* $\mu\in(0,\mu^0]$ *существует* $\kappa(\mu)\geqslant 0$ *такое, что выполнено* (22), *то существуют* $\kappa_0\geqslant 0$, *не зависящее от* μ, *и* $\mu^*\in(0,\mu^0]$ *такие, что* $\operatorname{rank} P(\kappa_0,\mu) = n$ *для всех* $\mu\in(0,\mu^*]$.

Доказательство. Умножим $P(\kappa,\mu)$ слева на невырожденную при $\mu>0$ матрицу $D(\mu) = \mu^{n-1}\operatorname{diag}\{E_{n_1}, \mu E_{n_2}\}$. В результате получим матрицу $\widetilde{P}(\kappa,\mu)\triangleq D(\mu)P(\kappa,\mu)$, все элементы которой – полиномы по κ и μ с неотрицательными степенями μ. Поскольку матрица $D(\mu)$ невырождена при $\mu>0$, то

$$\operatorname{rank}\widetilde{P}(\kappa,\mu) = \operatorname{rank} P(\kappa,\mu) \quad \text{для всех } \mu>0. \tag{23}$$

Обозначим все миноры порядка n матрицы $\widetilde{P}(\kappa,\mu)$ через $q_1(\kappa,\mu),\ldots,q_N(\kappa,\mu)$. Каждый q_k, $k=\overline{1,N}$, – полином по κ и μ с постоянными коэффициентами. Определим полином двух переменных

$$F(\kappa,\mu) = \sum_{k=1}^N q_k(\kappa,\mu)^2. \tag{24}$$

Условие $\operatorname{rank}\widetilde{P}(\kappa,\mu) = n$ означает, что хотя бы один из миноров $q_k(\kappa,\mu)$, $k=\overline{1,N}$, отличен от нуля, поэтому

$$\operatorname{rank}\widetilde{P}(\kappa,\mu) = n \iff F(\kappa,\mu)>0. \tag{25}$$

Из (23), (25) и предположения леммы следует, что для каждого $\mu\in(0,\mu^0]$ существует $\kappa(\mu)\geqslant 0$ с $F(\kappa(\mu),\mu)>0$, а значит, $F\not\equiv 0$ как полином от двух переменных.

Обозначим $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ множество неотрицательных вещественных чисел. Рассмотрим F в виде полинома по μ с коэффициентами из кольца $\mathbb{R}[\kappa]$ полиномов по κ: $F(\kappa,\mu)=\sum_{i=0}^{d} a_i(\kappa)\mu^i$, $a_i\in\mathbb{R}[\kappa]$. Предположим противное: для каждого $\kappa\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ полином $F(\kappa,\mu)$ тождественно равен нулю по μ. Тогда $a_i(\kappa)=0$ для всех $i=0,\dots,d$ и всех $\kappa\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Отсюда следует $a_i\equiv 0$ для всех i. Но тогда $F\equiv 0$ как полином от двух переменных, что противоречит $F\not\equiv 0$. Следовательно, существует $\kappa_0\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, при котором $q(\mu)\triangleq F(\kappa_0,\mu)$ – ненулевой полином по μ.

Из (24) следует $q\geqslant 0$. Значит, множество $\{\mu\in(0,\mu^0]: q(\mu)>0\}$ непусто. Обозначим через $0<\mu_1<\mu_2<\dots<\mu_s$ положительные корни q (если их нет, считаем $s=0$). Положим $\mu^*=\mu_1/2$, если $s\geqslant 1$, и $\mu_1\leqslant\mu^0$, $\mu^*=\mu^0$, если $s=0$ или $\mu_1>\mu^0$. Тогда $\mu^*\in(0,\mu^0]$ и на интервале $(0,\mu^*]$ нет положительных корней q, а значит, $q(\mu)>0$ для всех $\mu\in(0,\mu^*]$, что с учетом (25) и (23) эквивалентно $\operatorname{rank}P(\kappa_0,\mu)=n$ для всех $\mu\in(0,\mu^*]$. □

Из предложения 3.1 с учетом леммы 3.2 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.3. *Если существуют* $\kappa_0\geqslant 0$ *и* $\mu^*\in(0,\mu^0]$ *такие, что* $\operatorname{rank}P(\kappa_0,\mu)=n$ *для всех* $\mu\in(0,\mu^*]$, *то семейство* $\{A^0,A^1,B\}_{\mu^*}$ *робастно поточечно* $\{x,y\}$*-управляемо.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\mu\in(0,\mu^*]$. По условию $\operatorname{rank}P(\kappa_0,\mu)=n$, значит, при $\kappa(\mu)=\kappa_0$ выполнено условие критерия из предложения 3.1 и система является μ-поточечно $\{x,y\}$-управляемой при данном μ. Поскольку $\mu\in(0,\mu^*]$ выбрано произвольно, система является μ-поточечно $\{x,y\}$-управляемой для каждого $\mu\in(0,\mu^*]$, что согласно определению (2.3) робастной поточечной $\{x,y\}$-управляемости завершает доказательство. □

Теорема 3.3 дает достаточные условия робастной поточечной управляемости, выраженные через матрицу $P(\kappa,\mu)$, построенную по решениям определяющих уравнений. Однако непосредственная проверка этого условия требует вычисления решений определяющих уравнений размерности $n_1\times r, n_2\times r$ вплоть до порядка $n-1$, что для систем высокой размерности может быть трудоемким. Кроме того, значение μ может быть неизвестно, при этом сингулярно возмущенные системы изначально моделируют процессы с естественным разделением на медленные и быстрые движения, поэтому важно получить условия управляемости, выраженные непосредственно через подсистемы медленных и быстрых переменных. Ниже устанавливаются не зависящие от μ достаточные декомпозиционные условия робастной поточечной управляемости, сформулированные в терминах управляемости вырожденной системы (6) и системы пограничного слоя (7).

Обозначим через $P_\xi(\kappa)$ матрицу управляемости Калмана для параметризованной системы $(A_{s0}+\kappa A_{s1}, B_{s0})$, связанной с вырожденной системой (6):

$$P_\xi(\kappa)=\begin{pmatrix}B_{s0} & (A_{s0}+\kappa A_{s1})B_{s0} & \dots & (A_{s0}+\kappa A_{s1})^{n_1-1}B_{s0}\end{pmatrix}, \tag{26}$$

а через P_η – матрицу управляемости Калмана для быстрой подсистемы (7):

$$P_\eta=\begin{pmatrix}B_2 & A_4B_2 & \dots & A_4^{n_2-1}B_2\end{pmatrix}. \tag{27}$$

Теорема 3.4. *Пусть* $\operatorname{Re}\lambda(A_4)<0$. *Если при некотором* $\kappa\geqslant 0$ *выполняется условие*

$$\operatorname{rank}P_\xi(\kappa)=n_1, \tag{28}$$

то существует $\mu_s^*>0$ *такое, что семейство ЛССВСЗ* $\{A^0,A^1,B\}_{\mu_s^*}$ *робастно поточечно x-управляемо. Если к тому же выполняется условие*

$$\operatorname{rank}P_\eta=n_2, \tag{29}$$

то существует $\mu_f^*>0$ *такое, что семейство ЛССВСЗ* $\{A^0,A^1,B\}_{min\{\mu_s^*,\mu_f^*\}}$ *робастно поточечно* $\{x,y\}$*-управляемо.*

Доказательство. Применим к задаче (4), (2) невырожденное преобразование переменных состояния (см. [20, формула (13)]): $z(t)=\mathcal{K}(\mu,e^{-ph})\zeta(t)$, $\zeta=(\xi',\eta')'$, $\xi(t)\in\mathbb{R}^{n_1}$, $\eta(t)\in\mathbb{R}^{n_2}$, $t\geqslant 0$, где матричный оператор $\mathcal{K}(\mu,e^{-ph})$ выражается через матрицы системы (1) (см. [20, формулы (12), (14)]).

В результате получаем эквивалентную систему вида (5) относительно новых переменных ζ, матрицы которой имеют асимптотический вид

$$\begin{aligned} A_{\xi\eta}(\mu, e^{-ph}) &= \begin{pmatrix} A_\xi(\mu, e^{-ph}) + O(\mu) & O(\mu) \\ O(\mu) & \frac{1}{\mu}(A_\eta(\mu, e^{-ph}) + O(\mu)) \end{pmatrix}, \\ B_{\xi\eta}(\mu, e^{-ph}) &= \begin{pmatrix} B_\xi(\mu, e^{-ph}) + O(\mu) \\ \frac{1}{\mu}(B_\eta(\mu, e^{-ph}) + O(\mu)) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{30}$$

где $A_\xi(\mu, e^{-ph}) = A_{s0} + A_{s1}e^{-ph}$, $B_\xi(\mu, e^{-ph}) = B_{s0}$, $A_\eta(\mu, e^{-ph}) = A_4$, $B_\eta(\mu, e^{-ph}) = B_2$, а $O(\mu)$ обозначает матрицы соответствующих размеров, элементы которых имеют порядок $O(\mu)$.

Поскольку невырожденное преобразование не меняет управляемости системы, то, согласно критерию (теорема 3.3), μ-поточечная $\{x, y\}$-управляемость исходной системы эквивалентна существованию $\kappa \geqslant 0$ такого, что $\operatorname{rank} P_{\xi\eta}(\kappa, \mu) = n$, где $P_{\xi\eta}(\kappa, \mu)$ – матрица управляемости Калмана для параметризованной системы $\{A^0_{\xi\eta}(\mu) + \kappa A^1_{\xi\eta}(\mu), B_{\xi\eta}(\mu)\}$, связанной с преобразованной системой $\{A^0_{\xi\eta}(\mu), A^1_{\xi\eta}(\mu), B_{\xi\eta}(\mu)\}$:

$$P_{\xi\eta}(\kappa, \mu) = \begin{pmatrix} B_{\xi\eta}(\mu) & \big(A^0_{\xi\eta}(\mu) + \kappa A^1_{\xi\eta}(\mu)\big)B_{\xi\eta}(\mu) & \dots & \big(A^0_{\xi\eta}(\mu) + \kappa A^1_{\xi\eta}(\mu)\big)^{n-1} B_{\xi\eta}(\mu) \end{pmatrix}.$$

Подставляя сюда асимптотические представления (30) и раскрывая степени матрицы $A^0_{\xi\eta}(\mu) + \kappa A^1_{\xi\eta}(\mu)$, получаем, что матрица $P_{\xi\eta}(\kappa, \mu)$ имеет блочную структуру

$$P_{\xi\eta}(\kappa, \mu) = \begin{pmatrix} P_{\xi\xi}(\kappa, \mu) & P_{\xi\eta}(\kappa, \mu) \\ P_{\eta\xi}(\kappa, \mu) & P_{\eta\eta}(\kappa, \mu) \end{pmatrix},$$

где $P_{\xi\xi}(\kappa, \mu) \in \mathbb{R}^{n_1 \times rn_1}$, $P_{\xi\eta}(\kappa, \mu) \in \mathbb{R}^{n_1 \times rn_2}$, $P_{\eta\xi}(\kappa, \mu) \in \mathbb{R}^{n_2 \times rn_1}$, $P_{\eta\eta}(\kappa, \mu) \in \mathbb{R}^{n_2 \times rn_2}$, при этом справедливы асимптотические представления для каждого блока:

$$\begin{aligned} P_{\xi\xi}(\kappa, \mu) &= P_\xi(\kappa) + O(\mu), & P_{\xi\eta}(\kappa, \mu) &= O(\mu), \\ P_{\eta\xi}(\kappa, \mu) &= \mu^{-n_1} O(\mu), & P_{\eta\eta}(\kappa, \mu) &= \mu^{-n_1}\big(P_\eta + O(\mu)\big), \end{aligned} \tag{31}$$

где $P_\xi(\kappa)$ и P_η определены в (26) и (27).

Умножим теперь матрицу $P_{\xi\eta}(\kappa, \mu)$ слева на невырожденную диагональную матрицу $N(\mu) = \operatorname{diag}\{E_{n_1}, \mu^{n_1} E_{n_2}\}$. Тогда получаем матрицу $\bar{P}_{\xi\eta}(\kappa, \mu) = N(\mu) P_{\xi\eta}(\kappa, \mu)$, для которой с учетом (31), справедливо

$$\bar{P}_{\xi\eta}(\kappa, \mu) = \begin{pmatrix} P_\xi(\kappa) + O(\mu) & O(\mu) \\ O(\mu) & P_\eta + O(\mu) \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Матрица $N(\mu)$ невырождена при $\mu > 0$, поэтому $\operatorname{rank} P_{\xi\eta}(\kappa, \mu) = \operatorname{rank} \bar{P}_{\xi\eta}(\kappa, \mu) \quad \forall \mu > 0$.

Из (32) видно, что $\bar{P}_{\xi\eta}(\kappa, \mu)$ является малым аддитивным возмущением блочно-диагональной матрицы $\bar{P}^{(0)}_{\xi\eta}(\kappa) = \operatorname{diag}\{P_\xi(\kappa), P_\eta\}$. При этом $\operatorname{rank} \bar{P}^{(0)}_{\xi\eta}(\kappa) = \operatorname{rank} P_\xi(\kappa) + \operatorname{rank} P_\eta$.

Предположим сначала, что выполнено условие (28). Тогда из (32) следует, что для всех достаточно малых $\mu > 0$ верхний левый блок матрицы $\bar{P}_{\xi\eta}(\kappa, \mu)$ имеет полный ранг n_1 по столбцам. Следовательно, $\operatorname{rank} \bar{P}_{\xi\eta}(\kappa, \mu) \geqslant n_1$. Это означает, что система управляема по медленным переменным ξ, т. е. существует $\mu^*_s > 0$ такое, что семейство ЛССВСЗ $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^*_s}$ робастно поточечно x-управляемо.

Если к тому же выполнено условие (29), то из (31) следует, что для всех достаточно малых $\mu > 0$ нижний правый блок матрицы $\bar{P}_{\xi\eta}(\kappa, \mu)$ также имеет полный ранг n_2 по столбцам.

Докажем, что тогда $\operatorname{rank} \bar{P}_{\xi\eta}(\kappa, \mu) = n_1 + n_2 = n$ для всех достаточно малых $\mu > 0$.

Предположим противное: пусть существует ненулевой вектор $(g_1', g_2')'$ такой, что $\bar{P}_{\xi\eta}(\kappa, \mu)(g_1', g_2')' = 0$. В силу блочной структуры (31) это эквивалентно системе

$$(P_\xi(\kappa) + O(\mu))g_1 + O(\mu)g_2 = 0, \quad O(\mu)g_1 + (P_\eta + O(\mu))g_2 = 0.$$

Поскольку P_η имеет полный ранг по столбцам, из второго уравнения при достаточно малых μ следует $g_2 = 0$. Тогда из первого уравнения получаем $(P_\xi(\kappa) + O(\mu))g_1 = 0$, что в силу полного ранга $P_\xi(\kappa)$ влечет $g_1 = 0$. Получили противоречие. Следовательно, $\operatorname{rank} \bar{P}_{\xi\eta}(\kappa, \mu) = n$ для всех достаточно малых $\mu > 0$, а значит, $\operatorname{rank} P_{\xi\eta}(\kappa, \mu) = n$.

По критерию из теоремы 3.3 это означает, что существует $\mu^* > 0$ такое, что семейство ЛССВСЗ $\{A^0, A^1, B\}_{\mu^*}$ является робастно поточечно $\{x,y\}$-управляемым на интервале $(0,\mu^*]$. $\square$

4. Примеры

Приведем примеры, иллюстрирующие полученные условия робастной поточечной $\{x,y\}$-управляемости.

Пример 4.1. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = y(t) + u(t),$$
$$\mu\dot{y}(t) = -y(t) + x(t-h) + u(t), \quad t \geqslant 0.$$

Решения определяющих уравнений (21): $X_1^0(0) = 1, Y_1^1(0) = 1, X_2^1(0) = 1, Y_2^1(0) = 0, Y_2^1(h) = = 1, Y_2^2(0) = -1, Y_2^2(h) = -1$.

Матрица $\widetilde{P}(\kappa,\mu)$ из леммы 3.2 имеет вид $\widetilde{P}(\kappa,\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 1+\kappa \\ \mu & -(1+\kappa) \end{pmatrix}$, причем $\operatorname{rank}\widetilde{P}(\kappa,\mu) = 2$ при всех $\mu > 0$, $\kappa \geqslant 0$, а значит, $\operatorname{rank}P(\kappa,\mu) = 2$, и по теореме 3.3 любое семейство является робастно поточечно $\{x,y\}$-управляемым.

Пример 4.2. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = x(t-h) + u(t),$$
$$\mu\dot{y}(t) = -y(t), \quad t \geqslant 0.$$

Решения определяющих уравнений (21): $X_1^0(0) = 1, Y_1^1(0) = 0, X_2^0(0) = 0, X_2^0(h) = 1, Y_2^1(0) = = 0, Y_2^2(0) = 0$. Матрица $P(\kappa,\mu)$ имеет вид $P(\kappa,\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rank}P(\kappa,\mu) = 1 < 2 \quad \forall\mu > 0, \forall\kappa \geqslant 0$. Следовательно, по теореме 3.1 с учетом определения 2.3 любое семейство не является робастно поточечно $\{x,y\}$-управляемым.

Пример 4.3. Рассмотрим систему вида (1) с параметрами: $n_1 = 2, n_2 = 1, r = 2$, $A_{10} = = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_{20} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_{30} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, A_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = -2, B_1 = = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$. Условия теоремы 3.4 выполнены: $\operatorname{Re}\lambda(A_4) = -2 < 0$.

Матрицы медленной подсистемы: $A_{s0} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix}, A_{s1} = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}, B_{s0} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$.

Проверим условие (28) при $\kappa = 1$: $A_{s0} + \kappa A_{s1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 5/2 \end{pmatrix}$. Матрица управляемости медленной подсистемы: $P_s = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 3 & 3 \\ 1/2 & 3/2 & 7/2 & 9/2 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rank}P_s = 2 = n_1$, значит, условие (28) выполнено.

Проверим условие (29) для быстрой подсистемы: $P_f = B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, $\operatorname{rank}P_f = 1 = n_2$, условие (29) также выполнено.

Таким образом, по теореме 3.4 существует $\mu^* > 0$ такое, что семейство систем является робастно поточечно $\{x,y\}$-управляемым для всех $\mu \in (0,\mu^*]$.

5. Заключение

В работе для линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием введены и сопоставлены понятия μ-поточечной, робастной, μ^k-асимптотической, μ-равномерной и равномерной по μ поточечной управляемости (определения 2.1–2.7). Установлена их иерархия и показано, что обратные импликации, вообще говоря, неверны (примеры 2.2, 2.8). Доказано, что μ^k-асимптотическая поточечная управляемость эквивалентна робастной на некотором сужении интервала допустимых μ (теорема 2.9).

Доказан технический результат – лемма 3.2 о выборе κ_0, не зависящего от μ: в ранговом условии (предложение 3.1) параметр κ может быть выбран единым для всех достаточно малых μ, что

позволяет получать условия поточечной управляемости, не зависящие от малого параметра. Установлена асимптотическая структура оператора поточечной управляемости (лемма 2.10), на основе которой доказано, что робастная поточечная управляемость влечет μ-равномерную на некотором сужении интервала μ (теорема 2.11). Получены не зависящие от μ достаточные декомпозиционные условия, выраженные через матрицы управляемости медленной и быстрой подсистем (теорема 3.4) и сводящие проверку управляемости системы размерности $n_1 + n_2$ к проверке управляемости двух подсистем меньшей размерности. Приведенные примеры иллюстрируют полученные результаты.

Поточечная управляемость как многоточечная краевая задача естественно возникает в задачах, где требуется обеспечить попадание объекта в заданные состояния в несколько фиксированных моментов времени. Такие задачи характерны для прецизионной робототехники, согласованного управления мультиагентными системами, а также для модального управления, где она эквивалентна слабой модальной управляемости [5].

Заметим, что введенные в работе новые понятия управляемости применимы и к произвольным системам, зависящим от параметра. Однако характер соотношений между свойствами, а также условия их наличия могут отличаться от установленных в настоящей работе. Их выявление требует дополнительных исследований.

Результаты допускают обобщение на системы с несколькими запаздываниями, переменным или распределенным запаздыванием, на задачи поточечной наблюдаемости, а также на нестационарные сингулярно возмущенные системы с запаздыванием. В дальнейшем предполагается установить остальные связи между введенными понятиями поточечной управляемости и получить условия их реализации.

Работа поддержана Гродненским государственным университетом имени Янки Купалы в рамках программы «Конвергенция–2030».

Литература

1. *Кириллова Ф. М., Чуракова С. В.* Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием // Доклады АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1260–1263.

2. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. 507 с.

3. *Минюк С. А.* Две задачи управляемости для линейной системы с последействием // Вестник БГУ. Серия 1. 1972. № 1. С. 8–11.

4. *Марченко В. М., Московска Б. П., Симеонова Ю. С.* Поточечная управляемость систем с последействием // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14, № 7. С. 1324–1327.

5. *Марченко В. М.* Модальное управление в системах с последействием // Автоматика и телемеханика. 1988. № 11. С. 73–84.

6. *Kokotovic P. V., O'Malley R. E., Sannuti P.* Singular perturbations and order reduction in control theory – an overview // Automatica. 1976. Vol. 12, N 2. P. 123–132.

7. *Kokotović P. V., Khalil H. K., O'Reilly J.* Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design. Philadelphia: SIAM, 1999. xv, 371 p. (Classics in Applied Mathematics; Vol. 25).

8. *Дмитриев М. Г., Курина Г. А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.

9. *Калинин А. И.* Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. Минск: Экоперспектива, 2000. 183 с.

10. *Glizer V. Y.* Controllability of singularly perturbed linear time delay systems. Cham: Birkhäuser, 2021. XII, 419 p. (Systems & Control: Foundations & Applications).

11. *Гайшун И. В., Горячкин В. В.* Робастная и интервальная наблюдаемость двухпараметрических дискретных систем с интервальными коэффициентами // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2016. № 2. С. 6–9.

12. *Гайшун И. В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. Мн.: Институт математики НАН Беларуси. 1999.

13. *Астровский А. И., Гайшун И. В.* Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений. Минск: Беларуская навука, 2013.

14. *Копейкина Т. Б., Цехан О. Б.* Об управляемости линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем в пространстве состояний // Известия РАН. Техническая кибернетика. 1993. № 3. С. 40–46.

15. *Цехан О. Б.* Условия поточечной управляемости и поточечной наблюдаемости линейных стационарных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Труды Института математики. 2021. Т. 29, № 1–2. С. 138–148.

16. *Tsekhan O.* Approximation of the solution based on the decoupling transformation of linear time-varying singularly perturbed system with delay // Dynamic Control and Optimization (DCO 2021). Springer Proc. in Mathematics & Statistics. 2022. Vol. 407. P. 77–97.

17. *Цехан О. Б.* Асимптотическая аппроксимация решения одной линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2024. Т. 14, № 1. С. 37–47.

18. *Цехан О. Б.* Асимптотические аппроксимации решений одного класса линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем управления с постоянным запаздыванием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35, № 4. С. 578–600.

19. *Копейкина Т. Б.* Об управляемости линейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 9. С. 1508–1518.

20. *Цехан О. Б.* Асимптотическая аппроксимация решений одного класса нестационарных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (AMADE 2024): Труды 11-го международного научного семинара. Минск: БГУ, 2024. С. 108–114.

References

1. Kirillova F. M., Churakova S. V. Relative controllability of linear dynamical systems with delay. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1967, vol. 174, no. 6, pp. 1260–1263 (in Russian).

2. Gabasov R., Kirillova F. M. *Qualitative Theory of Optimal Processes*. Moscow, Nauka Publ., 1971. 507 p. (in Russian).

3. Minyuk S. A. Two controllability problems for a linear system with aftereffect. *Vestnik BGU. Seriya 1*, 1972, no. 1, pp. 8–11 (in Russian).

4. Marchenko V. M., Moskovska B. P., Simeonova Yu. S. Pointwise controllability of systems with aftereffect. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1978, vol. 14, no. 7, pp. 1324–1327 (in Russian).

5. Marchenko V. M. Modal control in systems with aftereffect. *Avtomatika i Telemekhanika*, 1988, no. 11, pp. 73–84 (in Russian).

6. Kokotovic P. V., O'Malley R. E., Sannuti P. Singular perturbations and order reduction in control theory – an overview. *Automatica*, 1976, vol. 12, no. 2, pp. 123–132.

7. Kokotović P. V., Khalil H. K., O'Reilly J. *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*. Philadelphia, SIAM, 1999. xv, 371 p. (Classics in Applied Mathematics; vol. 25).

8. Dmitriev M. G., Kurina G. A. Singular perturbations in control problems. *Avtomatika i Telemekhanika*, 2006, no. 1, pp. 3–51 (in Russian).

9. Kalinin A. I. *Asymptotic Methods for Optimization of Perturbed Dynamical Systems*. Minsk, Ekoperspektiva Publ., 2000, 183 p. (in Russian).

10. Glizer V. Y. *Controllability of Singularly Perturbed Linear Time Delay Systems*. Cham, Birkhäuser, 2021. XII, 419 p. (Systems & Control: Foundations & Applications).

11. Gaishun I. V., Goryachkin V. V. Robust and interval observability of two-parameter discrete systems with interval coefficients. *Vestsi NAN Belarusi. Ser. Fiz.-Mat. Navuk*, 2016, no. 2, pp. 6–9 (in Russian).

12. Gaishun I. V. *Introduction to the Theory of Linear Nonstationary Systems*. Minsk, Institute of Mathematics of the NAS of Belarus Publ., 1999 (in Russian).

13. Astrovskii A. I., Gaishun I. V. *Linear Systems with Quasi-Differentiable Coefficients: Controllability and Observability of Motions*. Minsk, Belaruskaya Navuka Publ., 2013 (in Russian).

14. Kopeikina T. B., Tsekhan O. B. On controllability of linear nonstationary singularly perturbed systems in the state space. *Izvestiya RAN. Tekhnicheskaya Kibernetika*, 1993, no. 3, pp. 40–46 (in Russian).

15. Tsekhan O. B. Conditions of pointwise controllability and pointwise observability of linear time-invariant singularly perturbed systems with delay. *Trudy Instituta Matematiki*, 2021, vol. 29, no. 1–2, pp. 138–148 (in Russian).

16. Tsekhan O. Approximation of the solution based on the decoupling transformation of linear time-varying singularly perturbed system with delay. *Dynamic Control and Optimization (DCO 2021). Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, 2022, vol. 407, pp. 77–97.

17. Tsekhan O. B. Asymptotic approximation of the solution of a linear nonstationary singularly perturbed system with constant delay. *Vesnik GrDU imya Yanki Kupaly. Ser. 2, Matematyka. Fizika. Informatyka, Vylichalnaya Tekhnika i Kirawanne*, 2024, vol. 14, no. 1, pp. 37–47 (in Russian).

18. Tsekhan O. B. Asymptotic approximations of solutions of a class of linear nonstationary singularly perturbed control systems with constant delay. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, no. 4, pp. 578–600 (in Russian).

19. Kopeikina T. B. On controllability of linear singularly perturbed systems with delay. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1989, vol. 25, no. 9, pp. 1508–1518 (in Russian).

20. Tsekhan O. B. Asymptotic approximation of solutions of a class of nonstationary singularly perturbed systems with delay. *Analytical Methods of Analysis and Differential Equations (AMADE 2024): Proceedings of the 11th International Scientific Seminar*. Minsk, BGU Publ., 2024, pp. 108–114 (in Russian).