Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 167–171

УДК 517.925.7 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-167–171
EDN: KFEKAM

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ТРЕХМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КУБИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В. В. Цегельник

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь
e-mail: tsegvv@bsuir.by

Поступила: 20.08.2026 **Исправлена: 08.09.2026** **Принята: 14.10.2026**

Ключевые слова: первый интеграл, обобщенная система Рабиновича–Фабриканта, тест Пенлеве, хаотическое поведение

Аннотация. Исследованы аналитические свойства решений обобщенной системы Рабиновича–Фабриканта, связанной с моделями нелинейной физики и обладающей определенными качественными свойствами при значениях входящих в нее параметров.

ANALYTICAL PROPERTIES OF SOLUTIONS OF THREE-DIMENSIONAL DYNAMICAL SYSTEM WITH CUBIC NONLINEARITIES

V. V. Tsegel'nik

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus
e-mail: tsegvv@bsuir.by

Received: 20.08.2026 **Revised: 08.09.2026** **Accepted: 14.10.2026**

Keywords: first integral, generalized Rabinovich–Fabrikant system, Painlevé test, chaotic behavior

Abstract. The analytical properties of solutions of the generalized Rabinovich–Fabrikant system related to models of nonlinear physics and possessing certain qualitative properties at the values of its parameters are investigated.

1. Введение

Система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \big[p(x^2+z)+q(-y^2+3z)-1\big]y+ax,\\ \dot{y} &= \big[p(-x^2+3z)+q(y^2+z)+1\big]x+ay,\\ \dot{z} &= -2z\big[b+(p+q)xy\big] \end{aligned} \tag{1}$$

(обобщенная система Рабиновича–Фабриканта [1] с неизвестными функциями x, y, z независимой переменной t; a, b, p, q – произвольные фиксированные параметры) моделирует процесс нелинейного взаимодействия волн в плазме. При стандартных значениях $a = 0,87$, $b = 1,1$ в модели (1) при $p = 1$, $q = 0$, известной как модель Рабиновича–Фабриканта [2], наблюдается детерминированный хаос, а ее притягивающее множество представляет собой странный аттрактор [3].

Новые качественные свойства решений системы (1) в случае $p = 1$, $q = 0$, т. е. системы Рабиновича–Фабриканта

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y(x^2+z-1)+ax,\\ \dot{y} &= x(-x^2+3z+1)+ay,\\ \dot{z} &= -2z(b+xy), \end{aligned} \tag{2}$$

получены в [4] с учетом новых подходов к исследованию динамических систем, изложенных в [5]. В частности, указано существование в (2) скрытых хаотических аттракторов при определенных значениях a и b.

На основании известной гипотезы [6] о несовместимости выполнения для системы свойства Пенлеве с хаотичностью ее поведения, актуальным является исследование аналитических свойств решений систем (1), (2). Под свойством Пенлеве (в предположении, что независимая переменная t является комплексной) будем понимать отсутствие у общего решения системы подвижных критических особых точек [7; 8], т. е. возможность наличия только подвижных полюсов.

2. Анализ решений системы (1)

Одним из алгоритмов, обеспечивающих проверку выполнения условий, необходимых для наличия у решений дифференциального уравнения (системы) свойства Пенлеве, является формальный тест Пенлеве [9; 10] (алгоритм Ковалевской [11]). Применительно к системам дифференциальных уравнений, представленным в полиномиальном виде

$$x_i' Q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \tau) = P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \tau), \qquad i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

где $\tau = t - t_0$, t_0 – произвольная точка области в $G \subset \mathbb{C}$, а P_i, Q_i – полиномы от x_1, $x_2, \ldots, x_n$ с аналитическими по τ коэффициентами; $' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$, тест представляет собой последовательное выполнение следующих шагов [12].

1. Определяются наименьшие возможные степени переменной в формальных разложениях i-х компонент решения системы уравнений (3) вида

$$x_i = \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} \tau^{j-p_i}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4}$$

С этой целью и для определения пар $(\mathbf{c_0}, \mathbf{p})$, $\mathbf{c_0} = (c_{10}, c_{20}, \ldots, c_{n0})$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, в систему (3) подставляются выражения (4). Если не все $c_{i0} = 0$ и полученные $p_i \in \mathbb{N}$, то первый шаг пройден и анализ системы может быть продолжен. Отметим, что случай целого отрицательного p_i заменой $x_i \to x_i^{-1}$, а случай $p_i = 0$ заменой $x_i = c_{i0} + x_i^{-1}$ сводится к предыдущему рассмотрением преобразованной системы (3).

2. Второй шаг теста связан с отысканием индексов Фукса для каждой пары значений $(\mathbf{c_0}, \mathbf{p})$. Индексами Фукса или резонансами называются номера j_r коэффициентов c_{ij} в разложениях i-х компонент решения (4), для которых коэффициенты c_{ij_r} содержат произвольный параметр.

Индексы Фукса определяются подстановкой выражений $x_i \sim c_{i0}\tau^{-p_i} + \beta_i \tau^{r-p_i}$, $i = \overline{1,n}$, в ведущие члены уравнений системы (3). Ведущими (доминантными) членами i-го уравнения системы (3) называются мономы системы (3), которые в результате подстановки (4) в (3) определяют в i-м уравнении наименьшие степени τ.

Приравнивая выражения, линейные относительно β_k ($k = \overline{1,n}$), нулю, получаем систему линейных алгебраических уравнений. Определитель матрицы коэффициентов этой системы, приравненный к нулю, определяет уравнение резонансов $Q(r) = 0$. В случае, когда для каждой пары $(\mathbf{c_0}, \mathbf{p})$ все корни уравнения резонансов являются целыми, а отличные от -1 и, возможно, от нуля, – положительными числами, второй шаг формального теста считается пройденным.

3. Если все коэффициенты в разложении (4) могут быть определены и число произвольных среди них коэффициентов равно $n-1$, то считается, что система дифференциальных уравнений проходит третий шаг, а вместе с ним проходит и весь формальный тест Пенлеве.

Применение к системе (1) формального теста Пенлеве приводит к следующему заключению.

Теорема 2.1. *Система* (1) *в случае* $q \neq 0$ *не проходит формальный тест Пенлеве и, следовательно, не обладает свойством Пенлеве.*

Теорема 2.2. *Система* (1) *при* $a = -b$ *имеет первый интеграл*

$$x^2 + y^2 + 4z = Ce^{2at}, \tag{5}$$

где C *– произвольная постоянная.*

Для доказательства достаточно исключить из (5) константу C, используя уравнения системы (1).

Следствие 2.3. *Система* (1) *в случае* $a = b = 0$ *имеет автономный интеграл*

$$x^2 + y^2 + 4z = C.$$

Теорема 2.4. *Система* (1) *при* $a = b = 0$ *не обладает хаотическим поведением.*

В силу следствия систему (1) можно свести к двумерной автономной системе. Но согласно [13] решения автономной системы с двумерным фазовым пространством не могут быть хаотическими.

Теорема 2.5. *Система* (1) *при* $p = -q$ *имеет* 2 *первых интеграла*

$$x^2 + y^2 = He^{2at}, \quad z = Ke^{-2bt}, \tag{6}$$

где H, K *– произвольные постоянные.*

Для доказательства достаточно в (6) исключить постоянную H с учетом первых двух уравнений системы (1) и проинтегрировать третье уравнение с учетом $p = -q$.

Замечание 2.6. *Система* (1) *обладает свойством симметрии относительно замены переменных* $x \to -x$, $y \to -y$, $z \to z$ [1].

3. Анализ решений системы (2)

Теорема 3.1. *Система* (2) *ни при каких значениях параметров* a, b *не проходит формальный тест Пенлеве.*

Теорема 3.2. *Система* (2) *при* $a = 0$ *имеет решения вида*

$$x = \frac{x_{-1}}{\tau^{1/2}} + x_1\tau^{1/2} + x_3\tau^{3/2} + \cdots, \tag{7}$$

$$y = \frac{ix_{-1}}{\tau^{1/2}} + y_1\tau^{1/2} + y_3\tau^{3/2} + \cdots, \tag{8}$$

$$z = z_0\tau + z_1\tau^2 + \cdots, \tag{9}$$

где $\tau = t - t_0$, $x_{-1}^2 = i/2$, $i^2 = -1$, t_0, z_0, x_1 (y_1) *– произвольные постоянные, причем* $\frac{3}{2}x_1 - \frac{iy_1}{2} = -ix_{-1}$. *Ряды* (7)–(9) *сходятся в области* $0 < |\tau| < \rho$, $\rho > 0$.

В том, что разложения (7)–(9) зависят от трех произвольных постоянных, легко убедиться непосредственной подстановкой рядов в уравнения системы (2). Для доказательства сходимости разложений (7)–(9) достаточно ввести преобразования

$$\tau = s^2, \quad x = \frac{1}{s}\big(x_{-1} + u_1(s)\big), \quad y = \frac{1}{s}\big(ix_{-1} + u_2(s)\big), \quad z = s^2\big(z_0 + u_3(s)\big),$$

переводящие систему (2) в систему Брио и Буке, и воспользоваться следующим результатом (см. [14, с. 272, теорема A12]).

Если система Брио и Буке

$$su_j' = f_j(s, u_1, u_2, \ldots, u_n), \qquad ' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s},$$

с аналитическими в некоторой окрестности точки $s = u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 0$ функциями f_j, $j = \overline{1,n}$, с условиями $f_j(0,0,\ldots,0) = 0$ допускает формальное решение

$$u_j(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk}s^k, \quad c_{jk} \in \mathbb{C}, \tag{10}$$

то разложение (10) сходится в области $0 < |s| < \rho_1$, $\rho_1 > 0$.

Замечание 3.3. *Система* (2) *в случае* $a = b = 0$ *сохраняет свой вид при следующих преобразованиях:*

а) $x(t) \to -x(-t)$, $y(t) \to y(-t)$, $z(t) \to z(-t)$,

б) $x(t) \to x(-t)$, $y(t) \to -y(-t)$, $z(t) \to z(-t)$.

4. Заключение

В работе исследованы некоторые аналитические свойства решений обобщенной системы дифференциальных уравнений Рабиновича–Фабриканта. Показано, что решения обобщенной системы Рабиновича–Фабриканта не удовлетворяют тесту на свойство Пенлеве. Указаны значения параметров, при которых как обобщенная система Рабиновича–Фабриканта, так и система Рабиновича–Фабриканта не обладают хаотическим поведением. Установлено, что решения системы Рабиновича–Фабриканта при значении параметра $a = 0$ удовлетворяют тесту на слабое свойство Пенлеве.

Литература

1. *Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В.* Обобщенная система Рабиновича–Фабриканта: уравнения и динамика // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 1. С. 7–29.

2. *Рабинович М. И., Фабрикант А. Л.* Стохастическая автомодуляция волн в неравновесных средах // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1979. Т. 77, № 2. С. 617–629.

3. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006.

4. *Danca M. F., Feskan M., Kuznetsov N., Chen G.* Looking more closely to the Rabinovich–Fabrikant system // Int. J. Bifurc. Chaos. 2016. Vol. 26, N 2. Art. 1650038.

5. *Леонов Г. А., Кузнецов Н. В.* Скрытые колебания в динамических системах: шестнадцатая проблема Гильберта, гипотезы Айзермана и Кальмана, скрытые аттракторы в контурах Чуа // Современная математика. Фундаментальные направления. 2012. Т. 45. С. 105–121.

6. *Гориэли А.* Интегрируемость и сингулярность. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006.

7. *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ГНТИУ, 1939.

8. *Громак В. И., Лукашевич Н. А.* Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Минск: Университетское, 1990.

9. *Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H.* A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. II // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21. P. 715–721.

10. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М.: Мир, 1987.

11. *Ковалевская С. В.* Научные работы. М.: АН СССР, 1948.

12. *Грищук Е. В., Громак В. И.* К теории нелинейных систем дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2010. № 3. С. 25–30.

13. *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.

14. *Gromak V. I., Laine I., Shimomura S.* Painlevé differential equations in the complex plane. Berlin: de Gruyter, 2002.

References

1. Kuznetsov S. P., Turukina L. V. Generalized Rabinovich–Fabrikant system: equations and its dynamics. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics*, 2022, vol. 30, no. 1, pp. 7–29 (in Russian).

2. Rabinovich M. I., Fabrikant A. L. Stochastic self-samomudulation of waves in nonequilibrium media. *Sov. Phys. JETP*, 1979, vol. 77, no. 2, pp. 617–629 (in Russian).

3. Kuznetsov S. P. *Dynamical Chaos*. Moscow, Fizmatlit, 2006 (in Russian).

4. Danca M. F., Feskan M., Kuznetsov N., Chen G. Looking more closely to the Rabinovich–Fabrikant system. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 2016, vol. 26, no. 2, art. 1650038.

5. Leonov G. A., Kuznetsov N. V. Hidden oscillations in dynamical systems. 16 Hilbert's problem, Aizerman's and Kalman's conjectures, hidden attractors in Chua's circuits. *Modern Mathematics. Fundamental Direction*, 2012, vol. 45, pp. 105–121 (in Russian).

6. Goriely A. *Integrability and Singularity*. Moscow, Izhevsk, Institute for Computer Research, 2006 (in Russian).

7. Ince E. L. *Ordinary differential equations*. Kharkov, GNTIU, 1939 (in Russian).

8. Gromak V. I., Lukashevich N. A. *The Analytic Solutions of the Painlevé Equations*. Minsk, Universitetskoye, 1990 (in Russian).

9. Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. II. *J. Math. Phys.*, 1980, vol. 21, pp. 715–721.

10. Ablowitz M. J., Segur H. *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. Moscow, Mir, 1987 (in Russian).

11. Kowalevskaya S. V. *Scientific Works*. Moscow, Academiya nauk SSSR, 1948 (in Russian).

12. Gritsuk E. V., Gromak V. I. On the theory of nonlinear systems of differential equations with the Painlevé property. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2010, no. 3, pp. 25–30 (in Russian).

13. Moon F. C. *Chaotic Vibrations*. Moscow, Mir, 1990 (in Russian).

14. Gromak V. I., Laine I., Shimomura S. *Painlevé Differential Equations in the Complex Plane*. Berlin, de Gruyter, 2002.