Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 155–166

УДК 517.977 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-155–166
EDN: JHUQCK

ЗАДАЧА НАЗНАЧЕНИЯ КОНЕЧНОГО СПЕКТРА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ТИПА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ВЫХОДУ

В. Е. Хартовский, О. М. Китурко

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь
e-mail: hartovskij@grsu.by, kiturko.om@gmail.com

Поступила: 07.09.2026 **Исправлена:** 24.09.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: линейная автономная система нейтрального типа с запаздыванием, наблюдаемый сигнал, конечный спектр, регулятор, обратная связь по состоянию, обратная связь по выходу, наблюдатель, принцип разделения

Аннотация. Для линейных автономных систем нейтрального типа исследована задача назначения конечного спектра при помощи регуляторов с сосредоточенными запаздываниями и обратной связью по выходу. Установлена связь между разрешимостью этой задачи в классе регуляторов с обратной связью по состоянию и в классе регуляторов с обратной связью по выходу. Рассмотрен регулятор на основе наблюдателя, для которого в рамках задачи назначения конечного спектра обоснован принцип разделения.

FINITE SPECTRUM ASSIGNMENT PROBLEM FOR LINEAR NEUTRAL-TYPE SYSTEMS IN THE CLASS OF DIFFERENTIAL-DIFFERENCE OUTPUT-FEEDBACK CONTROLLERS

V. E. Khartovskii, O. M. Kiturko

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus
e-mail: hartovskij@grsu.by, kiturko.om@gmail.com

Received: 07.09.2026 **Revised:** 24.09.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: linear autonomous neutral-type systems with delay, observed signal, finite spectrum, controller, state feedback, output feedback, observer, separation principle

Abstract. We investigate the finite spectrum assignment problem for linear autonomous neutral-type systems using output-feedback controllers with lumped delays. We establish a connection between the solvability of this problem in the class of state feedback controllers and in the class of output feedback controllers. Finally, we consider an observer-based controller and validate the separation principle within the framework of the finite spectrum assignment problem.

1. Введение

Классическая задача модального управления (размещения полюсов) для конечномерных линейных систем вида $\dot{x} = Ax + Bu$ решается выбором обратной связи $u = Kx$ такой, что спектр матрицы $A + BK$ совпадает с заданным набором чисел. При условии полной управляемости пары (A, B) это возможно для любого наперед заданного множества корней характеристического уравнения [1]. Этот результат является одним из фундаментальных инструментов в теории управления.

Для систем с запаздыванием ситуация существенно сложнее [2–14]. Это связано с тем, что характеристическая функция является квазиполиномом, который имеет счетное множество корней. Поэтому задача модального управления формулируется как задача управления коэффициентами характеристического квазиполинома [2–6].

Параллельно широкое распространение получил метод стабилизации, основанный на задаче назначения конечного спектра (finite spectrum assignment) [7–10]. Суть ее – за счет обратной связи наделить систему наперед заданным конечным спектром, состоящим, как правило, из чисел с отрицательными действительными частями.

Известно [6], что система с запаздыванием в общем случае может содержать конечное число корней характеристического уравнения, исключить из спектра которые возможно только при

помощи распределенных запаздываний в обратной связи. Поэтому при использовании методов модального управления или назначения конечного спектра в общем случае привлекаются интегральные регуляторы. При практической реализации интегральных регуляторов замена распределенных запаздываний численными квадратурами может вызвать появление нежелательных неустойчивых полюсов, и, как следствие, потерю устойчивости [15; 16]. Этот феномен, описанный, например, в [16], требует использования специальных методов дискретизации для сохранения робастности замкнутой системы. Некоторые подходы к решению указанной проблемы можно найти в [15–17].

Избежать трудностей реализации распределенных запаздываний позволяет использование дифференциально-разностных регуляторов. Эффективные методы проектирования таких регуляторов на базе канонических форм развиты в статьях [2; 3] и впоследствии модифицированы в работах [5; 14] (см. также библиографию в цитируемых [2; 3; 5; 14]). К недостаткам этих работ следует отнести необходимость наличия полной информации о состоянии системы, которая в приложениях не всегда доступна. В связи с этим представляет интерес развитие методов построения дифференциально-разностных регуляторов с обратной связью по выходу [18].

В представленной работе для линейных систем нейтрального типа предложен подход к решению задачи назначения конечного спектра дифференциально-разностными регуляторами с обратной связью, формируемой на основании наблюдаемого выхода, что принципиально отличает ее от цитированных ранее [2–5; 14].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 даются основные определения и обосновывается корректность поставленной задачи. В разделе 3 формулируются необходимые и достаточные условия разрешимости задачи назначения системе любого наперед заданного спектра регулятором с обратной связью по состоянию. В разделе 4 приводится основной результат, позволяющий построить дифференциально-разностные регуляторы с обратной связью по выходу. В разделе 5 описывается конструкция регулятора на основе наблюдателя и формулируется принцип разделения.

Работа поддержана в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция–2030».

2. Постановка задачи

Исследуемый объект управления описывается линейной автономной дифференциально-разностной системой нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} D_i \dot{x}(t-ih) = \sum_{i=0}^{m} \Big(A_i x(t-ih) + B_i u(t-ih) \Big), \tag{1}$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{m} C_i x(t-ih), \quad t > 0, \tag{2}$$

где x – решение этой системы; u – управление; y – наблюдаемый выходной сигнал (выход); $h = \mathrm{const} > 0$; $D_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $C_i \in \mathbb{R}^{l\times n}$.

Определим для системы (1) начальное условие

$$x(t) = \eta(t), \quad u(t) \equiv 0, \quad t \in [-mh, 0]. \tag{3}$$

Здесь $\eta \in \widetilde{\mathbf{C}}^1\big([-mh,0],\mathbb{R}^n\big)$, где $\widetilde{\mathbf{C}}^1(\cdot)$ – класс непрерывных функций, имеющих кусочно-непрерывную производную. Для уравнения (1) при заданных управлении $u(t), t > 0$, и начальном условии (3) существует единственное непрерывное решение, имеющее кусочно-непрерывную производную.

Пусть $\mathbb{R}^{r\times m}[\lambda]$ – множество матриц размера $r \times m$, элементы которых суть полиномы переменной λ с действительными коэффициентами; λ_h – оператор сдвига, т. е. $\lambda_h^j f(t) = f(t-jh)$ (f – функция, $j \geqslant 0$ – целое число); $I_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ – единичная матрица.

Введем полиномиальные матрицы

$$D(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i D_i, \quad A(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i, \quad C(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i C_i, \quad B(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i B_i$$

и перепишем уравнения (1), (2) в операторном виде

$$\big(I_n - D(\lambda_h)\big)\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + B(\lambda_h)u(t), \tag{4}$$

$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t > 0. \tag{5}$$

В дальнейшем будем использовать запись исходной системы (1), (2) в виде (4), (5).

Обозначим $W(p,\lambda) = p\big(I_n - D(\lambda)\big) - A(\lambda)$, $W(p,e^{-ph})$ – характеристическая матрица однородной ($u \equiv 0$) системы (4). Спектр системы (4) состоит из счетного числа корней характеристического уравнения $\det W(p,e^{-ph}) = 0$. Квазиполином $\det W(p,e^{-ph})$ представим в виде $\det W(p,e^{-ph}) = \sum_{i=0}^{n} p^i q_i(e^{-ph})$, где $q_i(\cdot)$ – некоторые полиномы, причем $q_n(0) = 1$. Если $q_n(\lambda) \equiv 1$, то квазиполином $\det W(p,e^{-ph})$ называют квазиполиномом запаздывающего типа, в противном случае – нейтрального типа. Понятно, что квазиполином запаздывающего типа соответствует линейной автономной системе запаздывающего типа. Такая система получается, например, если в (4) матрица $D(\lambda)$ является нулевой (обратим внимание, что это условие не является необходимым для того, чтобы у системы вида (4) характеристический квазиполином имел запаздывающий тип). Наиболее простому случаю системы (4) с точки зрения ее анализа соответствует ситуация, когда все $q_i(\lambda) = \text{const}$, т. е. характеристическая функция $\det W(p,e^{-ph})$ является полиномом. Кроме того, для возможных приложений желательно, чтобы корни полинома $\det W(p,e^{-ph})$ имели наперед заданные отрицательные действительные части, что обеспечит не только асимптотическую устойчивость, но и заданную скорость сходимости решения к нулю.

В настоящей работе исследуется задача выбора для системы (4), (5) управления u в виде такого дифференциально-разностного регулятора с обратной связью, который имеет сугубо сосредоточенные запаздывания, а характеристическая функция замкнутой системы является наперед заданным полиномом. При этом обратная связь входит в регулятор в виде наблюдаемого выхода (5).

Введем два класса динамических дифференциально-разностных регуляторов с обратной связью по состоянию и по выходу:

1) класс динамических дифференциально-разностных регуляторов с обратной связью по состоянию

$$\begin{aligned} u(t) &= \big(R_{11}(\lambda_h) + p_D Q_{11}(\lambda_h)\big)x(t) + \big(R_{12}(\lambda_h) + p_D Q_{12}(\lambda_h)\big)z_1(t), \\ \dot{z}_1(t) &= \big(R_{21}(\lambda_h) + p_D Q_{21}(\lambda_h)\big)x(t) + \big(R_{22}(\lambda_h) + p_D Q_{22}(\lambda_h)\big)z_1(t), \quad t > \widehat{t}_1, \end{aligned} \tag{6}$$

где $z_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ – вспомогательная переменная; $p_D = d/(dt)$ – оператор дифференцирования по переменной t; $R_{11}(\lambda), Q_{11}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times n}[\lambda]$, $R_{12}(\lambda), Q_{12}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times n_1}[\lambda]$, $R_{21}(\lambda), Q_{21}(\lambda) \in \in \mathbb{R}^{n_1\times n}[\lambda]$, $R_{22}(\lambda), Q_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}[\lambda]$;

$$\widehat{t}_1 = h\max\big\{m, \deg B(\lambda)R_{11}(\lambda), \deg B(\lambda)Q_{11}(\lambda), \deg R_{21}(\lambda), \deg Q_{21}(\lambda)\big\};$$

2) класс динамических дифференциально-разностных регуляторов с обратной связью по выходу

$$\begin{aligned} u(t) &= \big(L_{12}(\lambda_h) + p_D K_{12}(\lambda_h)\big)z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) &= \big(L_{21}(\lambda_h) + p_D K_{21}(\lambda_h)\big)y(t) + \big(L_{22}(\lambda_h) + p_D K_{22}(\lambda_h)\big)z_2(t), \quad t > \widehat{t}_2, \end{aligned} \tag{7}$$

где $z_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ – вспомогательная переменная, $L_{12}(\lambda), K_{12}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times n_2}[\lambda]$, $L_{21}(\lambda), K_{21}(\lambda) \in \in \mathbb{R}^{n_2\times l}[\lambda]$, $L_{22}(\lambda), K_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}[\lambda]$;

$$\widehat{t}_2 = h\Big(\max\big\{\deg L_{21}(\lambda), \deg K_{21}(\lambda)\big\} + m\Big).$$

Определим отрезки последействия для замкнутых систем (4), (6) и (4), (5), (7) соответственно:

$$\widehat{h}_1 = h\max\big\{m, \deg B(\lambda)R_{1j}(\lambda), \deg B(\lambda)Q_{1j}(\lambda), \deg R_{2j}(\lambda), \deg Q_{2j}(\lambda),\ j = 1,2\big\},$$

$$\widehat{h}_2 = h\max\big\{m, \deg B(\lambda)K_{12}(\lambda), \deg B(\lambda)L_{12}(\lambda), \deg K_{2j}(\lambda), \deg L_{2j}(\lambda),\ j = 1,2\big\}.$$

Для существования единственного решения системы (4), (6) при $t > \widehat{t}_1$ и системы (4) , (5), (7) при $t > \widehat{t}_2$ добавим начальные условия соответственно:

$$z_1(t) = \widehat{z}_1(t), \quad t \in [\widehat{t}_1 - \widehat{h}_1, \widehat{t}_1], \tag{8}$$

$$z_2(t) = \widehat{z}_2(t), \quad t \in [\widehat{t}_2 - \widehat{h}_2, \widehat{t}_2], \tag{9}$$

при этом считаем, что $u(t) \equiv 0$, $t \leqslant \widehat{t}_1$, в случае регулятора (6) и $u(t) \equiv 0$, $t \leqslant \widehat{t}_2$, в случае регулятора (7). Функции $\widehat{z}_1(t), \widehat{z}_2(t)$ в соотношениях (8) и (9) выбираются любыми непрерывными, имеющими кусочно-непрерывную производную.

Далее для краткости описанные классы регуляторов вида (6) и (7) будем соответственно называть классом регуляторов I и классом регуляторов II.

Замечание 2.1. *Для того чтобы объяснить использование термина «обратная связь по состоянию» поясним, что в контексте настоящей статьи под состоянием системы нейтрального типа понимаем непрерывную функцию, определенную на отрезке, равном длине последействия системы, и имеющую кусочно-непрерывную производную. В частности, для однородной ($u = 0$) системы* (4) *это элемент класса* $\widetilde{\mathbf{C}}^1([-mh, 0], \mathbb{R}^n)$, *для замкнутых систем* (4), (6) *и* (4), (5), (7) *это элементы классов* $\widetilde{\mathbf{C}}^1([-\widehat{h}_1, 0], \mathbb{R}^{n+n_1})$ *и* $\widetilde{\mathbf{C}}^1([-\widehat{h}_2, 0], \mathbb{R}^{n+n_2})$ *соответственно.*

Рассмотрим регуляторы (6) и (7). Определим характеристические матрицы $W_1(p, e^{-ph})$ и $W_2(p, e^{-ph})$ замкнутых систем (4), (6) и (4), (5), (7) соответственно, где

$$W_1(p,\lambda) = \begin{bmatrix} W(p,\lambda) - B(\lambda)\big(pQ_{11}(\lambda) + R_{11}(\lambda)\big) & -B(\lambda)\big(pQ_{12}(\lambda) + R_{12}(\lambda)\big) \\ -pQ_{21}(\lambda) - R_{21}(\lambda) & p\big(I_{n_1} - Q_{22}(\lambda)\big) - R_{22}(\lambda) \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$W_2(p,\lambda) = \begin{bmatrix} W(p,\lambda) & -B(\lambda)\big(pK_{12}(\lambda) + L_{12}(\lambda)\big) \\ -\big(pK_{21}(\lambda) + L_{21}(\lambda)\big)C(\lambda) & p\big(I_{n_2} - K_{22}(\lambda)\big) - L_{22}(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Пусть $\mathbb{R}^0_\alpha[p]$ ($\alpha \in \mathbb{N}$) – множество приведенных полиномов с действительными коэффициентами, степени которых равны α.

Определение 2.2. Систему (4) (систему (4), (5)) назовем точно спектрально приводимой в классе регуляторов I (в классе регуляторов II) если существует $k_1 \in \mathbb{N}$ (существует $k_2 \in \mathbb{N}$) такое, что для любого полинома $d(p) \in \mathbb{R}^0_\alpha[p]$, $\alpha \geqslant k_1$ ($\alpha \geqslant k_2$), найдется регулятор вида (6), где $n_1 = \alpha - n$ (вида (7), где $n_2 = \alpha - n$) такой, что $\det W_1(p,\lambda) = d(p)$ $\Big(\det W_2(p,\lambda) = d(p)\Big)$.

Определим матрицы

$$\widetilde{D}_1(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) - B(\lambda)Q_{11}(\lambda) & -B(\lambda)Q_{12}(\lambda) \\ -Q_{21}(\lambda) & I_{n_1} - Q_{22}(\lambda) \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{D}_2(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) & -B(\lambda)K_{12}(\lambda) \\ -K_{21}(\lambda)C(\lambda) & I_{n_2} - K_{22}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим регулятор (6). Если найдутся $i, j \in \{1, 2\}$ такие, что $Q_{ij}(0) \neq 0$, то в общем случае замкнутая система (4), (6) может оказаться дифференциально-алгебраической (по-другому, вырожденной или гибридной) системой. То же самое относится и к регулятору (7). Однако если регуляторы (6) и (7) те, о которых говорится в определении 2.2, то за счет условия $n_1 = \alpha - n$ и $n_2 = \alpha - n$ замкнутые системы (4), (6) и (4), (7) будут линейными автономными системами нейтрального типа с конечным спектром, т. е. будут выполняться условия

$$\det \widetilde{D}_1(0) \neq 0, \det \widetilde{D}_2(0) \neq 0. \tag{12}$$

Лемма 2.3. *Пусть существует* $\alpha \in \mathbb{N}$ *и регулятор* (6) *(регулятор* (7)*) такой, что* $W_1(p,\lambda) = d(p)$ $\big(W_2(p,\lambda) = d(p)\big)$, $d(p) \in \mathbb{R}^0_\alpha$. *Тогда имеют место соотношения* (12).

Доказательство. Докажем лемму 2.3 для случая регулятора (6). Запишем равенство $\det W_1(p,\lambda) = d(p)$ в виде

$$\det\big(p\widetilde{D}_1(\lambda) + \widetilde{A}_1(\lambda)\big) = p^{n+n_1} + \sum_{i=0}^{n+n_1-1} \widetilde{d}_i p^i, \tag{13}$$

где $\widetilde{A}(\lambda) = W_1(p,\lambda) - p\widetilde{D}_1(\lambda)$, $d(p) = p^{n+n_1} + \sum_{i=0}^{n+n_1-1} \widetilde{d}_i p^i$, $\widetilde{d}_i \in \mathbb{R}$.

Предположим, что $\det\widetilde{D}_1(0)=0$. Тогда найдутся невырожденные матрицы Ξ_1, Ξ_2 такие, что $\Xi_1\widetilde{D}_1(0)\Xi_2=\operatorname{diag}\left[\widehat{D},0_{\widehat{n}\times\widehat{n}}\right]$, где $0_{k_1\times k_2}$ – нулевой блок размера $k_1\times k_2$, $\widehat{n}=n+n_1-\operatorname{rank}\widetilde{D}_1(0)$. Полагая в равенстве (13) $\lambda=0$, выводим соотношение

$$\det\begin{bmatrix}p\widehat{D}-\widehat{A}_{11} & -\widehat{A}_{12}\\ -\widehat{A}_{21} & -\widehat{A}_{22}\end{bmatrix}=\det(\Xi_1\Xi_2)\Big(p^{n+n_1}+\sum_{i=0}^{n+n_1-1}\widetilde{d}_ip^i\Big),\tag{14}$$

где $\widehat{A}_{ij}$ – блоки матрицы $\Xi_1\widetilde{A}_1(0)\Xi_2$ подходящего размера, $\Xi_1\widetilde{A}_1(0)\Xi_2=\left[\widehat{A}_{ij}\right]_{i,j=1,2}$. Очевидно, что равенство (14) выполняться не может. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения леммы 2.3 для случая регулятора (6).

Доказательство леммы 2.3 в случае регулятора (7) проводится аналогично. □

3. Вспомогательные результаты

В статье [5] и монографии [14, с. 346] приводятся необходимые и достаточные условия модальной управляемости в классе дифференциально-разностных регуляторов, т. е. содержащих сугубо сосредоточенные запаздывания. Распространить эти условия на задачу назначения конечного спектра в классе регуляторов I не составляет сложностей. Поэтому доказательство следующих утверждений, ввиду отсутствия принципиальных трудностей, не приводится.

Теорема 3.1. *Если система* (4), (5) *точно спектрально приводима в классе регуляторов* I, *то выполняются два условия*

$$\operatorname{rank}\left[W(p,e^{-ph}),B(e^{-ph})\right]=n\quad\forall p\in\mathbb{C};\tag{15}$$

$$\operatorname{rank}\left[I_n-D(\lambda),B(\lambda)\right]=n\quad\forall\lambda\in\mathbb{C}.\tag{16}$$

Замечание 3.2. *Условия* (15), (16) *представляют собой критерий модальной управляемости в классе регуляторов с распределенным запаздыванием* [4].

В силу того, что выполняется условие (16), существует (в общем случае не единственная) $N(\lambda)\in\mathbb{R}^{(r+r_0)\times(n+r_0)}[\lambda]$ ($r_0\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ – некоторое число), обеспечивающая выполнение условия

$$\det\Gamma(\lambda)\equiv 1.\tag{17}$$

Здесь

$$\Gamma(\lambda)=\begin{bmatrix}I_n-D(\lambda)-B(\lambda)N_{11}(\lambda) & -B(\lambda)N_{12}(\lambda)\\ -N_{21}(\lambda) & I_{r_0}-N_{22}(\lambda)\end{bmatrix},$$

$N(\lambda)=\left[N_{ij}(\lambda)\right]_{i,j=1}^{2}$, $N_{11}(\lambda)\in\mathbb{R}^{r\times n}[\lambda]$, $N_{12}(\lambda)\in\mathbb{R}^{r\times r_0}[\lambda]$, $N_{21}(\lambda)\in\mathbb{R}^{r_0\times n}[\lambda]$, $N_{22}(\lambda)\in\mathbb{R}^{r_0\times r_0}[\lambda]$. Различные методы построения матрицы $N(\lambda)$ описаны в [14, с. 228].

Замечание 3.3. *Равенство* $r_0=0$ *означает, что матрица* (17) *имеет вид*

$$\Gamma(\lambda)=\left[I_n-D(\lambda)-B(\lambda)N(\lambda)\right].$$

Обозначим $\Pi(\lambda)=(\Gamma(\lambda))^{-1}$. Заметим, что на основании тождества (17) матрица $\Pi(\lambda)$ является полиномиальной. Разобьем эту матрицу на блоки: $\Pi(\lambda)=\left[\Pi_{ij}(\lambda)\right]_{i,j=1}^{2}$, $\Pi_{11}(\lambda)\in\mathbb{R}^{n\times n}[\lambda]$, $\Pi_{12}(\lambda)\in$ $\in\mathbb{R}^{n\times r_0}[\lambda]$, $\Pi_{21}(\lambda)\in\mathbb{R}^{r_0\times n}[\lambda]$, $\Pi_{22}(\lambda)\in\mathbb{R}^{r_0\times r_0}[\lambda]$.

Определим матрицы $F(\lambda)=A(\lambda)\Pi_{11}(\lambda)$, $G(\lambda)=\left[B(\lambda),A(\lambda)\Pi_{12}(\lambda)\right]$.

Теорема 3.4. *Пусть система* (4) *точно спектрально приводима в классе регуляторов* I. *Тогда, какова бы ни была полиномиальная матрица* $N(\lambda)$, *обеспечивающая тождество* (17), *выполняется условие*

$$\operatorname{rank}\left[G(\lambda),F(\lambda)G(\lambda),\ldots,F^{n-1}(\lambda)G(\lambda)\right]=n.\tag{18}$$

Рассмотрим матрицу, стоящую в левой части (18). Пусть $g_i(\lambda)$, $i=\overline{1,r+r_0}$, – i-й столбец матрицы $G(\lambda)$.

Теорема 3.5. *Для того чтобы система* (4) *была точно спектрально приводимой в классе регуляторов* I, *достаточно существования таких* $k_0 \in \mathbb{N}\,(k_0 \leqslant n)$, *вектор-столбцов* $g_{i_j}(\lambda)$, $j = \overline{1,k_0}$, *и чисел* $\theta_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,k_0}$, $\theta_1 + \ldots + \theta_{k_0} = n$, *что матрица*

$$\left[g_{i_1}(\lambda), F(\lambda)g_{i_1}(\lambda), \ldots, F^{\theta_1-1}(\lambda)g_{i_1}(\lambda), \ldots, g_{i_{k_0}}(\lambda), \ldots, F^{\theta_{k_0}-1}(\lambda)g_{i_{k_0}}(\lambda)\right] \tag{19}$$

является унимодулярной.

Замечание 3.6. *Напомним, что квадратная полиномиальная матрица называется унимодулярной, если она обратима над кольцом многочленов.*

Кратко поясним идею [14, с. 346] построения регулятора класса I, который обеспечит равенство характеристической функции замкнутой системы заданному полиному.

Определим регулятор в виде

$$\begin{aligned} u(t) &= N_{11}(\lambda_h)\dot{x}(t) + N_{12}(\lambda_h)\dot{x}_1(t) + v_1(t), \\ \dot{x}_1(t) &= N_{21}(\lambda_h)\dot{x}(t) + N_{22}(\lambda_h)\dot{x}_1(t) + v_2(t), \end{aligned} \tag{20}$$

где x_1 – вспомогательная переменная; $v = \operatorname{col}[v_1, v_2]$ – новое управление, подлежащее дальнейшему определению. Заметим, что в силу (17) однородная ($v = 0$) система (4), (20) имеет характеристический квазиполином запаздывающего типа. Далее в системе (4), (20) перейдем к новой переменной

$$X(t) = \Gamma(\lambda_h)\begin{bmatrix} x(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix}. \tag{21}$$

В силу (17) замена переменных (21) является обратимой.

Замечание 3.7. *Заметим, что обратимость оператора* $\Gamma(\lambda_h)$ *понимается в следующем смысле: если* $Y_1(t) = \Gamma(\lambda_h)Y_2(t)$, $t \geqslant \bar{t}$ ($Y_1(t), Y_2(t)$ – *произвольные непрерывные функции), то* $Y_2(t) = \Gamma^{-1}(\lambda_h)Y_1(t)$, $t \geqslant \bar{t} + h\deg\Gamma(\lambda)$.

После введения новой переменной согласно (21), получаем систему запаздывающего типа

$$\dot{X}(t) = A_\Pi(\lambda_h)X(t) + B_I(\lambda)v(t). \tag{22}$$

Здесь $A_\Pi(\lambda) = \operatorname{diag}\left[A(\lambda), 0_{r_0\times r_0}\right]\Pi(\lambda)$, $B_I(\lambda) = \operatorname{diag}\left[B(\lambda), I_{r_0}\right]$.

Дальнейший процесс синтеза регуляторов класса I для системы (22) заключается в приведении пары матриц $\big(A_\Pi(\lambda), B_I(\lambda)\big)$ к канонической форме из [3], а условие (19) представляют собой условие существования для этой канонической формы подходящего регулятора.

4. Редукция основной задачи

Введем вспомогательную линейную систему нейтрального типа

$$\big(I_n - \Psi_1(\lambda_h)\big)\dot{\chi}(t) = \Psi_0(\lambda_h)\chi(t) + \Upsilon_\omega(\lambda_h)\omega(t), \tag{23}$$

где χ – решение уравнения (23); ω – управление, $\Psi_1(\lambda) = \big(D(\lambda)\big)'$, $\Psi_0(\lambda) = \big(A(\lambda)\big)'$, $\Upsilon_\omega(\lambda) = \big(C(\lambda)\big)'$ (символ «$'$» (штрих) обозначает операцию транспонирования). Решение уравнения (23) однозначно определяется начальным условием

$$\chi(t) = \widetilde{\eta}(t), \quad \omega(t) \equiv 0, \quad t \in [-mh, 0],$$

где $\widetilde{\eta} \in \widetilde{\mathbf{C}}^1\big([-mh,0], \mathbb{R}^n\big)$.

Определим для системы (23) регулятор из класса регуляторов I

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \big(\widetilde{R}_{11}(\lambda_h) + p_D\widetilde{Q}_{11}(\lambda_h)\big)\chi(t) + \big(\widetilde{R}_{12}(\lambda_h) + p_D\widetilde{Q}_{12}(\lambda_h)\big)\chi_1(t), \\ \dot{\chi}_1(t) &= \big(\widetilde{R}_{21}(\lambda_h) + p_D\widetilde{Q}_{21}(\lambda_h)\big)\chi(t) + \big(\widetilde{R}_{22}(\lambda_h) + p_D\widetilde{Q}_{22}(\lambda_h)\big)\chi_1(t), \end{aligned} \tag{24}$$

где $\chi_1 \in \mathbb{R}^{\widetilde{n}_1}$ – вспомогательная переменная; $\widetilde{R}_{11}(\lambda), \widetilde{Q}_{11}(\lambda) \in \mathbb{R}^{l\times n}[\lambda]$, $\widetilde{R}_{12}(\lambda), \widetilde{Q}_{12}(\lambda) \in \mathbb{R}^{l\times\widetilde{n}_1}[\lambda]$, $\widetilde{R}_{21}(\lambda), \widetilde{Q}_{21}(\lambda) \in \mathbb{R}^{\widetilde{n}_1\times n}[\lambda]$, $\widetilde{R}_{22}(\lambda), \widetilde{Q}_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{\widetilde{n}_1\times\widetilde{n}_1}[\lambda]$. Обозначим

$$\widetilde{W}(p,\lambda) = p\big(I_n - \Psi_1(\lambda)\big) - \Psi_0(\lambda).$$

Пусть $\widetilde{W}_1(p,e^{-ph})$ – характеристическая матрица замкнутой системы (23), (24),

$$\widetilde{W}_1(p,\lambda)=\begin{bmatrix}\widetilde{W}(p,\lambda)-\Upsilon_\omega(\lambda)\big(p\widetilde{Q}_{11}(\lambda)+\widetilde{R}_{11}(\lambda)\big) & -\Upsilon_\omega(\lambda)\big(p\widetilde{Q}_{12}(\lambda)+\widetilde{R}_{12}(\lambda)\big)\\ -p\widetilde{Q}_{21}(\lambda)-\widetilde{R}_{21}(\lambda) & p\big(I_{\tilde{n}_1}-\widetilde{Q}_{22}(\lambda)\big)-\widetilde{R}_{22}(\lambda)\end{bmatrix}. \tag{25}$$

Теорема 4.1. *Для того чтобы система* (4), (5) *была точно спектрально приводима в классе регуляторов* II *необходимо и достаточно, чтобы системы* (4) *и* (23) *одновременно были точно спектрально приводимы в классе регуляторов* I.

Доказательство. Необходимость. Считаем, что система (4), (5) точно спектрально приводима в классе регуляторов II. Пусть регулятор (7) обеспечивает для матрицы (11) равенство $\det W_2(p,\lambda)=d(p)$, где $d(p)\in\mathbb{R}^0_\alpha[p,\lambda]$, $\alpha\geqslant k_2$, – произвольный, но фиксированный полином.

1) Заменим в регуляторе (7) функцию $y(t)$ выражением $C(\lambda_h)x(t)$. После такой замены регулятор (7) будет иметь вид регулятора (6), т. е. получили, что система (4) точно спектрально приводима в классе регуляторов I, а в определении свойства точной спектральной приводимости в классе регуляторов I можно положить (см. определение 2.2) $k_1=k_2$.

2) Используя регулятор (7) строим регулятор (24), полагая

$$\widetilde{Q}_{11}(\lambda)=\widetilde{R}_{11}(\lambda)=0,\quad \widetilde{Q}_{21}(\lambda)=\big(B(\lambda)K_{12}(\lambda)\big)',\quad \widetilde{R}_{21}(\lambda)=\big(B(\lambda)L_{12}(\lambda)'\big),$$
$$\widetilde{Q}_{12}(\lambda)=\big(K_{21}(\lambda)\big)',\quad \widetilde{R}_{12}(\lambda)=\big(L_{21}(\lambda)\big)',\quad \widetilde{Q}_{22}(\lambda)=\big(K_{22}(\lambda)\big)',\quad \widetilde{R}_{22}(\lambda)=\big(L_{22}(\lambda)\big)'.$$

Легко видеть, что в этом случае будет выполняться равенство $\Big(\widetilde{W}_1(p,\lambda)\Big)'=W_2(p,\lambda)$, откуда следует соотношение $\det\widetilde{W}_1(p,\lambda)=d(p)$. Это значит, что система (23) точно спектрально приводима в классе регуляторов I. Необходимость доказана.

Достаточность. Считаем, что системы (4) и (23) точно спектрально приводимы в классе регуляторов I . Пусть число k_1 из определения 2.2 для системы (4) равно k_{11}, а для системы (23) равно k_{12}. В определении свойства точной спектральной приводимости в классе регуляторов II положим $k_2=k_{11}+k_{12}$. Зафиксируем произвольный полином $d(p)\in\mathbb{R}^0_\alpha[p]$, где $\alpha\geqslant k_2$. Покажем, как для этого полинома построить регулятор (7), обеспечивающий равенство $\det W_2(p,\lambda)=d(p)$.

Представим полином $d(p)$ в виде произведения $d(p)=d_1(p)d_2(p)$, $d_i(p)\in\mathbb{R}^0_{\alpha_i}[p]$, $\alpha_i\geqslant k_{1i}$, $i=1,2$. В силу того, что системы (4) и (23) точно спектрально приводимы в классе регуляторов I, существуют регуляторы (6) и (24) такие, что выполняются следующие равенства:

$$\det W_1(p,\lambda)=d_1(p),\quad \det\widetilde{W}_1(p,\lambda)=d_2(p). \tag{26}$$

Для компактной записи последующих рассуждений в регуляторах (6) и (24) обозначим

$$P_{ij}(p,\lambda)=L_{ij}(\lambda)+pK_{ij}(\lambda),\quad \widetilde{P}_{ij}(p,\lambda)=\Big(\widetilde{L}_{ji}(\lambda)+p\widetilde{K}_{ji}(\lambda)\Big)'. \tag{27}$$

В этом случае матрицу (10) и матрицу, транспонированную по отношению к матрице (25), можем записать соответственно в следующем виде:

$$\begin{gathered}W_1(p,\lambda)=\begin{bmatrix}W(p,\lambda)-B(\lambda)P_{11}(p,\lambda) & -B(\lambda)P_{12}(p,\lambda)\\ -P_{21}(p,\lambda) & pI_{n_1}-P_{22}(p,\lambda)\end{bmatrix},\\ \big(\widetilde{W}_1(p,\lambda)\big)'=\begin{bmatrix}W(p,\lambda)-\widetilde{P}_{11}(p,\lambda)C(\lambda) & -\widetilde{P}_{12}(p,\lambda)\\ -\widetilde{P}_{21}(p,\lambda)C(\lambda) & pI_{\tilde{n}_1}-\widetilde{P}_{22}(p,\lambda)\end{bmatrix}.\end{gathered} \tag{28}$$

Определим регулятор

$$\begin{gathered}u(t)=P_{11}(p_D,\lambda_h)\varphi_2(t)+P_{12}(p_D,\lambda_h)\varphi_1(t),\\ \dot\varphi_1(t)=P_{21}(p_D,\lambda_h)\varphi_2(t)+P_{22}(p_D,\lambda_h)\varphi_1(t),\\ \dot\varphi_2(t)=\big(A(\lambda_h)+p_DD(\lambda_h)+\widetilde{P}_{11}(p_D,\lambda_h)C(\lambda_h)\big)\varphi_2(t)+\widetilde{P}_{12}(p_D,\lambda_h)\varphi_3(t)+\\ +B(\lambda_h)\big(P_{11}(p_D,\lambda_h)\varphi_2(t)+P_{12}(p_D,\lambda_h)\varphi_1(t)\big)-\widetilde{P}_{11}(p_D,\lambda_h)y(t),\\ \dot\varphi_3(t)=\widetilde{P}_{21}(p_D,\lambda_h)C(\lambda_h)\varphi_2(t)+\widetilde{P}_{22}(p_D,\lambda_h)\varphi_3(t)-\widetilde{P}_{21}(p_D,\lambda_h)y(t).\end{gathered} \tag{29}$$

Здесь φ_i – вспомогательные переменные. Обозначим:

$$\Phi_{12}(p,\lambda)=\left[P_{12}(p,\lambda),P_{11}(p,\lambda),0_{r\times\widetilde{n}_1}\right],$$

$$\Phi_{22}(p,\lambda)=\begin{bmatrix} P_{22}(p,\lambda) & P_{21}(p,\lambda) & 0_{n_1\times\widetilde{n}_1}\\ B(\lambda)P_{12}(p,\lambda) & A(\lambda)+p_D D(\lambda)+\widetilde{P}_{11}(p,\lambda)C(\lambda)+B(\lambda)P_{11}(p,\lambda) & \widetilde{P}_{12}(p,\lambda)\\ 0_{\widetilde{n}_1\times n_1} & \widetilde{P}_{21}(p,\lambda)C(\lambda) & \widetilde{P}_{22}(p,\lambda)\end{bmatrix},$$

$$\Phi_{21}(p,\lambda)=\begin{bmatrix}0_{n_1\times l}\\ \widetilde{P}_{11}(p,\lambda)\\ \widetilde{P}_{21}(p,\lambda)\end{bmatrix}.$$

В регуляторе (7) положим

$$z=\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix},\quad L_{ij}(\lambda)=\Phi_{ij}(0,\lambda),\quad K_{ij}(\lambda)=\frac{1}{p}\big(\Phi_{ij}(p,\lambda)-L_{ij}(\lambda)\big) \tag{30}$$

(напомним, что в силу (27) степени переменной p в матрицах $P_{ij}(p,\lambda)$ не превосходят единицы).

Покажем теперь, что регулятор (7) с матрицами из соотношений (30) действительно обеспечивает замкнутой системе (4), (7) равенство $\det W_2(p,\lambda)=d_1(p)d_2(p)$. Будем использовать запись регулятора (7) в виде (29). Тогда матрица (11) в данном случае примет следующий вид (ниже для того, чтобы уместить полиномиальные матрицы по ширине страницы, аргументы в блоках матриц опустим):

$$W_2(p,\lambda)=\begin{bmatrix} W & -BP_{12} & -BP_{11} & 0_{n\times\widetilde{n}_1}\\ 0_{n_1\times n} & pI_{n_1}-P_{22} & -P_{21} & 0_{n_1\times\widetilde{n}_1}\\ \widetilde{P}_{11}C & -BP_{12} & W-\widetilde{P}_{11}C-BP_{11} & -\widetilde{P}_{12}\\ \widetilde{P}_{21}C & 0_{\widetilde{n}_1\times n_1} & -\widetilde{P}_{21}C & pI_{\widetilde{n}_1}-\widetilde{P}_{22}\end{bmatrix}. \tag{31}$$

Определим матрицу

$$E=\begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times n_1} & 0_{n\times n} & 0_{n\times\widetilde{n}_1}\\ 0_{n_1\times n} & I_{n_1} & 0_{n_1\times n} & 0_{n_1\times\widetilde{n}_1}\\ -I_n & 0_{n\times n_1} & I_n & 0_{n\times\widetilde{n}_1}\\ 0_{\widetilde{n}_1\times n} & 0_{\widetilde{n}_1\times n_1} & 0_{\widetilde{n}_1\times n} & I_{\widetilde{n}_1}\end{bmatrix}.$$

Учитывая вид матриц (10), (28), непосредственным перемножением проверяем, что

$$\begin{aligned} EW_2(p,\lambda)E^{-1}&=\begin{bmatrix} W-BP_{11} & -BP_{12} & -BP_{11} & 0_{n\times\widetilde{n}_1}\\ -P_{21} & pI_{n_1}-P_{22} & -P_{21} & 0_{n\times\widetilde{n}_1}\\ 0_{n\times n} & 0_{n\times\widetilde{n}_1} & W-\widetilde{P}_{11}C & -\widetilde{P}_{12}\\ 0_{\widetilde{n}_1\times n} & 0_{\widetilde{n}_1\times n_1} & -\widetilde{P}_{21} & pI_{\widetilde{n}_1}-\widetilde{P}_{22}\end{bmatrix}=\\ &=\begin{bmatrix} W_1(p,\lambda) & \widehat{W}(p,\lambda)\\ 0_{(n+\widetilde{n}_1)\times(n+\widetilde{n}_1)} & \big(\widetilde{W}_1(p,\lambda)\big)'\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{32}$$

где

$$\widehat{W}(p,\lambda)=\begin{bmatrix}-B(\lambda)P_{11}(p,\lambda) & 0_{n\times\widetilde{n}_1}\\ -P_{21}(p,\lambda) & 0_{n\times\widetilde{n}_1}\end{bmatrix}.$$

Из соотношений (26), (32) и очевидного равенства $\det E=1$ следует, что $\det W_2(p,\lambda)=d_1(p)d_2(p)$. Теорема доказана. □

Таким образом, согласно доказательству теоремы 4.1, для построения регулятора (7), обеспечивающего замкнутой системе (4), (7) спектр, совпадающий с корнями полинома $d(p)=d_1(p)d_2(p)$ (а также и соответствующая кратность), достаточно решить две задачи построения регуляторов из класса регуляторов I, обеспечивающих замкнутым системам (4), (6) и (23), (24) спектр, определяемый корнями полиномов $d_1(p)$ и $d_2(p)$ соответственно. После этого регулятор (7) «собирается» в соответствии с формулами (29). Вопрос существования и построения регуляторов из класса регуляторов I обсуждался в разделе 3.

5. Принцип разделения

В статье [19] для систем нейтрального типа (4) при условии $\sum_{i=0}^{m}\|D_i\|<1$ и стабилизирующих регуляторов, не содержащих в обратной связи производную решения, доказан принцип разделения. Данный принцип утверждает, что задача синтеза динамического регулятора по выходу, стабилизирующего замкнутую систему, распадается на две независимые подзадачи: 1) стабилизация системы при наличии полной информации о состоянии (синтез регулятора с обратной связью по состоянию); 2) построение наблюдателя, дающего асимптотическую оценку текущего состояния (или его прогноза) по измеряемому выходу. При этом результирующий спектр замкнутой системы является объединением спектра, полученного в первой подзадаче, и спектра ошибки оценивания, что позволяет решать их последовательно и независимо. В приведенной ранее теореме 4.1 показано, что при проектировании регуляторов класса II ситуация значительно упрощается: задача синтеза динамического регулятора по выходу разбивается на две независимые подзадачи вида 1). При этом проектировать наблюдатель не требуется, хотя его можно синтезировать, как показано ниже, на основе части расчетов при построении регулятора вида (7). Тем не менее, принцип разделения в общепринятом варианте (например, как в [19]) допускает распространение также и на задачу назначения конечного спектра для системы (4). Его формулировка позволяет для назначения конечного спектра при помощи обратной связи, определяемой наблюдаемым выходом (5), использовать методы, отличные от изложенных в настоящей статье. Сформулируем его в общем случае и без предположения $\sum_{i=0}^{m}\|D_i\|<1$.

Начнем с задачи проектирования наблюдателя. Условия существования регулятора с обратной связью по состоянию из раздела 3 легко переносятся на задачу существования наблюдателя, описываемого системой нейтрального типа, которая содержит сугубо сосредоточенные запаздывания и имеет наперед заданный конечный спектр. Поясним это подробнее.

Предположим, что для заданного полинома $d_2(p)\in\mathbb{R}^0_\alpha[p]$ построен регулятор (24), обеспечивающий замкнутой системе (23), (24) конечный спектр, определяемый корнями полинома $d_2(p)$, т. е. $\det\widetilde{W}_1(p,\lambda)=d_2(p)$ (матрица $\widetilde{W}_1(p,\lambda)$ определяется формулой (25)). Считаем, что полином $d_2(p)$ имеет все корни с отрицательными действительными частями.

Используя матрицы регулятора (24), сформируем наблюдатель, определяемый следующей системой нейтрального типа:

$$\begin{aligned}\big(I_n-D(\lambda_h)\big)\dot\zeta_1(t)&=A(\lambda_h)\zeta_1(t)+\big(\widetilde{R}_{11}(\lambda_h)+p_D\widetilde{Q}_{11}(\lambda_h)\big)'C(\lambda_h)\zeta_1(t)+\\&+\big(\widetilde{R}_{21}(\lambda_h)+p_D\widetilde{Q}_{21}(\lambda_h)\big)'\zeta_2(t)-\big(\widetilde{R}_{11}(\lambda_h)+p_D\widetilde{Q}_{11}(\lambda_h)\big)'y(t)+B(\lambda_h)u(t),\\\dot\zeta_2(t)&=\big(\widetilde{R}_{12}(\lambda_h)+p_D\widetilde{Q}_{12}(\lambda_h)\big)'C(\lambda_h)\zeta_1(t)+\big(\widetilde{R}_{22}(\lambda_h)+p_D\widetilde{Q}_{22}(\lambda_h)\big)'\zeta_2(t)-\\&\quad-\big(\widetilde{R}_{12}(\lambda_h)+p_D\widetilde{Q}_{12}(\lambda_h)\big)'y(t),\quad t>t_0.\end{aligned}\tag{33}$$

Здесь $\zeta=\operatorname{col}[\zeta_1,\zeta_2]$ – решение системы (33), $t_0=\beta_0\widehat{h}$, $\beta_0=\max\big\{\deg\widetilde{R}_{1j}(\lambda),\deg\widetilde{Q}_{1j}(\lambda),\,j=1,2\big\}$, остальные обозначения описаны в доказательстве теоремы 4.1. Начальное условие для системы (33) имеет вид

$$\zeta(t)=\psi(t),\quad t\in[t_0-\beta_1\widehat{h},t_0],\tag{34}$$

где $\beta_1=\max\big\{\deg A(\lambda),\deg\widetilde{R}_{1i}(\lambda)C(\lambda),\deg\widetilde{Q}_{1i}(\lambda)C(\lambda),\deg\widetilde{R}_{2i}(\lambda),\deg\widetilde{Q}_{2i}(\lambda),\,i=1,2\big\}$, $\psi\in\widetilde{\mathbf{C}}^1\big([t_0-\beta_1\widehat{h},t_0],\mathbb{R}^{n+\tilde n_1}\big)$. Функция ψ в (34) может быть выбрана любой из указанного класса.

В качестве оценки решения x системы (4) возьмем векторную компоненту ζ_1 решения $\operatorname{col}[\zeta_1,\zeta_2]$ системы (33). Обозначим $\varepsilon=\zeta_1-x$. Легко видеть, что ошибка ε есть векторная компонента системы

$$\begin{aligned}\big(I_n-D(\lambda_h)\big)\dot\varepsilon(t)&=A(\lambda_h)\varepsilon(t)+\big(\widetilde{R}_{11}(\lambda_h)+p_D\widetilde{Q}_{11}(\lambda_h)\big)'C(\lambda_h)\varepsilon(t)+\\&\quad+\big(\widetilde{R}_{21}(\lambda_h)+p_D\widetilde{Q}_{21}(\lambda_h)\big)'\zeta_2(t),\\\dot\zeta_2(t)&=\big(\widetilde{R}_{12}(\lambda_h)+p_D\widetilde{Q}_{12}(\lambda_h)\big)'C(\lambda_h)\varepsilon(t)+\big(\widetilde{R}_{22}(\lambda_h)+p_D\widetilde{Q}_{22}(\lambda_h)\big)'\zeta_2(t),\quad t>t_0.\end{aligned}\tag{35}$$

Обозначим $W_3(p,e^{-ph})$ – характеристическая матрица наблюдателя (33) (системы (35)). Очевидно, что $W_3(p,\lambda) = \left(\widetilde{W}_1(p,\lambda)\right)'$.

Следствие 5.1. *Следующие два утверждения равносильны:*

1) *для системы* (23) *найдется* $k_3 \in \mathbb{N}$ *такое, что при любом заданном* $d_2(p) \in \mathbb{R}^0_\alpha[p]$, $\alpha \geqslant k_3$, *существует регулятор* (24), *обеспечивающий равенство* $\det \widetilde{W}_1(p,\lambda) = d_2(p)$;

2) *для системы* (4), (5) *найдется* $k_3 \in \mathbb{N}$ *такое, что при любом заданном* $d_2(p) \in \mathbb{R}^0_\alpha[p]$, $\alpha \geqslant k_3$, *существует наблюдатель* (33) *такой, что* $\det W_3(p,\lambda) = d_2(p)$.

Таким образом, если для системы (23) существует регулятор (24), обеспечивающий равенство $\widetilde{W}_1(p,\lambda) = d_2(p)$, то можно за счет выбора полинома $d_2(p)$ обеспечить системе (35) асимптотическую (а в силу конечности спектра и экспоненциальную) устойчивость и задать скорость стремления к нулю ошибки оценки ε. Необходимые и достаточные условия существования для любого полинома $d_2(p)$ наблюдателя (33) с условием $W_3(p,\lambda) = d_2(p)$ в силу следствия 5.1 следуют из раздела 3.

Предположим теперь, что имеются произвольные регулятор вида (6) и наблюдатель вида (33), для которых выполняются соотношения $\det W_1(p,\lambda) = d_1(p)$ и $\det \widetilde{W}_3(p,\lambda) = d_2(p)$ соответственно.

Перепишем регулятор (6) в виде

$$\begin{aligned} u(t) &= \big(R_{11}(\lambda_h) + p_D Q_{11}(\lambda_h)\big)\zeta_1(t) + \big(R_{12}(\lambda_h) + p_D Q_{12}(\lambda_h)\big)z_1(t), \\ \dot{z}_1(t) &= \big(R_{21}(\lambda_h) + p_D Q_{21}(\lambda_h)\big)\zeta_1(t) + \big(R_{22}(\lambda_h) + p_D Q_{22}(\lambda_h)\big)z_1(t). \end{aligned} \tag{36}$$

Связка (36), (33) называется регулятором на основе наблюдателя. Обобщим принцип разделения из работы [19] на случай системы (4) в виде следующего утверждения.

Следствие 5.2. *Система* (4), *замкнутая регулятором на основе наблюдателя* (36), (33), *имеет характеристический полином, равный* $d_1(p)d_2(p)$.

Для доказательства достаточно выписать характеристическую матрицу системы (4), (36), (33) и для характеристической матрицы такой расширенной системы провести те же рассуждения, что и для матрицы (31) из доказательства достаточности условий теоремы 4.1.

Замечание 5.3. *Утверждение следствия* 5.2 *не изменится, если полиномы* $d_1(p), d_2(p)$ *заменить на квазиполиномы* $d_1(p,e^{-ph}) = \sum_{i=0}^{n_1} p^i \upsilon_{1i}(e^{-ph})$, $d_2(p,e^{-ph}) = \sum_{i=0}^{\widetilde{n}_1} p^i \upsilon_{2i}(e^{-ph})$ ($\upsilon_{ij}(\lambda)$ – *полиномы, причем* $\upsilon_{1n_1}(0) = 1$, $\upsilon_{2\widetilde{n}_1}(0) = 1$) *с корнями, также имеющими отрицательные действительные части. Однако в этом случае следует иметь ввиду, что если* $\upsilon_{1n_1}(\lambda)$ *или* $\upsilon_{2\widetilde{n}_1}(\lambda)$ *не равны тождественно единице, то из асимптотической устойчивости полученной замкнутой системы нейтрального типа экспоненциальная устойчивость в общем случае не следует.*

6. Заключение

Для линейных автономных систем нейтрального типа предложено решение задачи назначения конечного спектра на основе неполных измерений, определяемых наблюдаемым выходным сигналом. При этом разработанные конструкции регуляторов не содержат распределенного запаздывания, что важно при их практической реализации. Разработанный метод синтеза основан на решении двух однотипных задач построения регуляторов с обратной связью по состоянию. Попутно в рамках исследуемой задачи сформулирован принцип разделения, позволяющий строить регуляторы на основе наблюдателей. Это позволяет привлекать для решения задач синтеза регуляторов с обратной связью по выходу другие известные в литературе методы конструирования регуляторов с обратной связью по состоянию и наблюдателей.

Регуляторы (6), (7) и наблюдатель (33) содержат операции дифференцирования переменных x, y исходной (разомкнутой) системы. Хорошо известно, что операция дифференцирования непрерывных функций, имеющих кусочно-непрерывную производную, является чувствительной к ошибкам. С другой стороны, можно показать [4], что оператор дифференцирования в регуляторах (6), (7) и наблюдателе (33) для класса систем нейтрального типа является структурно неустранимым. Поэтому актуальным остается вопрос разработки эффективной аппроксимации оператора дифференцирования в (6), (7) и (33) в рамках практической реализации регуляторов и наблюдателей.

Литература

1. *Wonham W. M.* Linear Multivariable Control. New York: Springer, 1974. https://doi.org/10.1007/978-3-662-22673-5

2. *Марченко В. М.* Управление системами с последействием в шкалах линейных регуляторов по типу обратной связи // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 1003–1017. https://doi.org/10.1134/s0012266111070111

3. *Марченко В. М., Якименко А. А.* О модальном управлении многовходных систем с запаздывающим аргументом нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 11. С. 1534–1543. https://doi.org/10.1134/S0012266108110116

4. *Метельский А. В., Хартовский В. Е.* Критерии модальной управляемости линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 11. С. 1506–1521. https://doi.org/10.1134/S0012266116110070

5. *Хартовский В. Е.* Модальная управляемость линейных систем нейтрального типа в классах дифференциально-разностных регуляторов // Автоматика и телемеханика. 2017. № 11. С. 3–19. https://doi.org/10.1134/S0005117917110017

6. *Метельский А. В.* Модальная управляемость дифференциальной системы с запаздыванием по неполному выходу // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 11. С. 1508–1517. https://doi.org/10.1134/S0012266118110095

7. *Manitius A. Z., Olbrot A. W.* Finite spectrum assignment problem for systems with delays // IEEE Transactions on Automatic Control. 1979. Vol. 24, N 4. P. 541–552. https://doi.org/10.1109/TAC.1979.1102124

8. *Watanabe K.* Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays // IEEE Trans. Autom. Control. 1986. Vol. AC–31, N 6. P. 543–550. https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104336

9. *Wang Q. G., Lee T. H., Tan K. K.* Finite Spectrum Assignment Controllers for Time Delay Systems. London: Springer, 1995.

10. *Bhat K., Koivo H.* Model characterizations of controllability and observability in time delay systems // IEEE Trans. Automatic Control. 1976. Vol. 21, N 2, P. 292–293.

11. *Pandolfi L.* Stabilization of neutral functional differential equations // J. Optim. Theory Appl. 1976. Vol. 20, N 2. P. 191–204. https://doi.org/10.1007/BF01767451

12. *Hao Z., Hu G.-D., Li H.* Controller based on spectral decomposition for neutral delay systems // Acta Automat. Sinica. 2010. Vol. 36, N 4. P. 615–619.

13. *Хартовский В. Е.* Финитная стабилизация и назначение конечного спектра единым регулятором по неполным измерениям для линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 5. С. 686–706. https://doi.org/ 10.31857/S0374064124050093

14. *Хартовский В. Е.* Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей. Гродно: ГрГУ, 2022. 500 с.

15. *Mirkin L.* On the approximation of distributed-delay control laws // Systems & Control Letters. 2004. Vol. 51, N 5. P. 331–342. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2003.09.010

16. *Mondié, S., Michiels W.* Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. Vol. 48, N 12. P. 2207–2212. https://doi.org/10.1109/TAC.2003.820147

17. *Lu, H., Di Loreto M., Eberard D., Simon J. P.* Approximation of distributed delays // Systems & Control Letters. 2014. Vol. 66. P. 16–21. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2014.01.001

18. *Хартовский В. Е.* Финитная стабилизация на основе неполных измерений не полностью управляемых систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2025. Т. 61, № 10. С. 1416–1440. https://doi.org/10.1134/S0012266125100118

19. *Hu G.-D.* An observer-based stabilizing controller for linear neutral delay systems // Siberian Mathematical Journal. 2022. Vol. 63, N 4. P. 789–800. https://doi.org/10.1134/S003744662204019X

References

1. Wonham W. M. *Linear Multivariable Control*. New York, Springer, 1974. https://doi.org/10.1007/978-3-662-22673-5

2. Marchenko V. M. Control of systems with aftereffect in scales of linear controllers with respect to the type of feedback. *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 7, pp. 1014–1028. https://doi.org/10.1134/s0012266111070111

3. Marchenko V. M., Yakimenko A. A. Modal control of multi-input systems of neutral type with retarded argument. *Differential Equations*, 2008, vol. 44, no. 11, pp. 1595–1604. https://doi.org/10.1134/S0012266108110116

4. Metel'skii A. V., Khartovskii V. E. Criteria for modal controllability of linear systems of neutral type. *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 11, pp. 1506–1521 (in Russian). https://doi.org/10.1134/S0012266116110070

5. Khartovskii V. E. Modal controllability of linear systems of neutral type in classes of difference-differential controllers. *Automation and Remote Control*, 2017, no. 11, pp. 3–19 (in Russian). https://doi.org/10.1134/S0005117917110017

6. Metel'skii A. V. Modal controllability of a differential system with delay with respect to incomplete output. *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 11, pp. 1508–1517 (in Russian). https://doi.org/10.1134/S0012266118110095

7. Manitius A. Z., Olbrot A. W. Finite spectrum assignment problem for systems with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, vol. 24, no. 4, pp. 541–552. https://doi.org/10.1109/TAC.1979.1102124

8. Watanabe K. Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1986, vol. AC-31, no. 6, pp. 543–550. https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104336

9. Wang Q. G., Lee T. H., Tan K. K. *Finite Spectrum Assignment Controllers for Time Delay Systems*. London, Springer, 1995.

10. Bhat K., Koivo H. Model characterizations of controllability and observability in time delay systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1976, vol. 21, no. 2, pp. 292–293.

11. Pandolfi L. Stabilization of neutral functional differential equations. *J. Optim. Theory Appl.*, 1976, vol. 20, no. 2, pp. 191–204. https://doi.org/10.1007/BF01767451

12. Hao Z., Hu G.-D., Li H. Controller based on spectral decomposition for neutral delay systems. *Acta Automat. Sinica*, 2010, vol. 36, no. 4, pp. 615–619.

13. Khartovskii V. E. Finite stabilization and finite spectrum assignment by a single controller with incomplete measurements for linear systems of neutral type. *Differential Equations*, 2024, vol. 60, no. 5, pp. 686–706 (in Russian). https://doi.org/10.1134/S0012266124050093

14. Khartovskii V. E. *Control of Linear Systems of Neutral Type: Qualitative Analysis and Implementation of Feedback*. Grodno, GrSU, 2022. 500 p. (in Russian).

15. Mirkin L. On the approximation of distributed-delay control laws. *Systems & Control Letters*, 2004, vol. 51, no. 5, pp. 331–342. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2003.09.010

16. Mondié S., Michiels W. Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, vol. 48, no. 12, pp. 2207–2212. https://doi.org/10.1109/TAC.2003.820147

17. Lu H., Di Loreto M., Eberard D., Simon J. P. Approximation of distributed delays. *Systems & Control Letters*, 2014, vol. 66, pp. 16–21. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2014.01.001

18. Khartovskii V. E. Finite stabilization based on incomplete measurements for not fully controllable systems of neutral type. *Differential Equations*, 2025, vol. 61, no. 10, pp. 1624–1647. https://doi.org/10.1134/S0012266125100118

19. Hu G.-D. An observer-based stabilizing controller for linear neutral delay systems. *Siberian Mathematical Journal*, 2022, vol. 63, no. 4, pp. 789–800. https://doi.org/10.1134/S003744662204019X