Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 148–154

УДК 517.925.42 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-148–154
EDN: GVUZFF

ИЗОХРОНЫ СИСТЕМ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ, НЕ ЗАВИСЯЩИЕ ОТ НЕГО

А. Е. Руденок, М. Н. Василевич

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: roudenok@bsu.by, vasilevich.m@gmail.com

Поступила: 16.09.2026 **Исправлена:** 05.10.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: система с малым параметром, центр, фокус, изохронность, изохроны, система с квадратичными нелинейностями

Аннотация. Рассматривается автономная система на плоскости с параметром λ, обычно называемым малым, и особой точкой центр либо фокус в начале координат. Предполагается, что в этой особой точке система изохронная. Также предполагается, что ее изохроны, т. е. прообразы радиальных прямых при переходе от рассматриваемой системы к системе с равномерной изохронностью, не зависят от параметра λ. Таким образом, в настоящей статье параметр λ может принимать любые действительные значения и, в этом смысле, не является малым.

Строятся системы с квадратичными нелинейностями в правой части, удовлетворяющие этим требованиям. Найдены изохроны этих систем. Строятся фазовые портреты полученных изохронных фокусов и их изохрон.

ISOCHRONES OF SYSTEMS WITH A SMALL PARAMETER THAT ARE INDEPENDENT OF IT

A. E. Roudenok, M. N. Vasilevich

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: roudenok@bsu.by, vasilevich.m@gmail.com

Received: 16.09.2026 **Revised:** 05.10.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: system with a small parameter, center, focus, isochronicity, isochrones, system with quadratic nonlinearities.

Abstract. We consider an autonomous system on the plane involving a parameter λ, commonly referred to as a small parameter, and with a singular point (either a center or a focus) at the origin. It is assumed that the system is isochronous at this singular point. We also assume that its isochrones – defined as the pre-images of radial lines under the transformation from the system under consideration to a system with uniform isochronicity – are independent of the parameter λ. Thus, in this paper, the parameter λ may take on any real value and, in that sense, is not actually small.

We construct systems with quadratic nonlinearities in the right-hand side that satisfy these requirements and determine their isochrones. Phase portraits of the resulting isochronous foci and their isochrones are also constructed.

1. Введение

Рассматриваем систему

$$\dot{x} = -y + \lambda x + f(x,y) + \lambda g(x,y), \quad \dot{y} = x + \lambda y + p(x,y) + \lambda q(x,y), \tag{1}$$

где f, g, p, q – голоморфные в окрестности особой точки $O(0,0)$ функции, начинающиеся со степеней $\geqslant 2$. Система (1) имеет грубый фокус, устойчивый, если $\lambda < 0$, неустойчивый, если $\lambda > 0$, и центр или негрубый фокус, если $\lambda = 0$.

Систему (1) можно рассматривать как систему, полученную возмущением системы

$$\dot{x} = -y + f(x,y), \quad \dot{y} = x + p(x,y), \tag{2}$$

если $|\lambda|$ достаточно мал и параметр λ при этом называется малым параметром. Для систем (1) обычно рассматривается задача: найти оценку на параметры системы, при которых она имеет в окрестности особой точки предельные циклы, рождающиеся из траекторий системы (2). Эта задача решается методом функции Мельникова [1].

Рассмотрим случай, когда система (1) изохронная.

Определение 1. Система (1) изохронная, если существует преобразование вида

$$u = x + U(x,y), \quad v = y + V(x,y), \tag{3}$$

где $V(x,y), U(x,y)$ – голоморфные в окрестности начала координат функции, начинающиеся со степеней $\geqslant 2$, переводящее систему (1) в систему с равномерной изохронностью.

Определение 2. Система

$$du/dt = -v + \lambda u + P(u,v), \quad dv/dt = u + \lambda v + Q(u,v) \tag{4}$$

равномерно изохронная, если выполняется условие

$$vP(u,v) - uQ(u,v) = 0. \tag{5}$$

Определение 3 [2–7]. Изохронами изохронной системы (1) называются прообразы радиальных прямых при замене (3), переводящей систему (1) в систему (4) с условием (5), т. е. семейство кривых

$$\Gamma_k : \{y + V(x,y) = k(x + U(x,y)),\ k \in (-\infty,\infty)\} \bigcup \{x + U(x,y) = 0\}. \tag{6}$$

Рассматриваем случай, когда преобразование (3) не зависит от параметра λ, или, что тоже, уравнения изохрон (6) не зависят от устойчивости или неустойчивости особой точки $O(0,0)$ системы, включая случай $\lambda = 0$, когда особая точка системы (1) может быть центром, а также от отсутствия или наличия предельного цикла [6], рождающегося из траекторий системы (2). На практике, когда нужно смоделировать изохронную систему (1), смещение параметра λ от истинного влияет как на траектории системы, так и на изохроны, которые ограничивают временные отрезки на траекториях. Если изохроны не зависят от значений λ, то и временные отрезки на траекториях не зависят от λ. В этом состоит практический смысл таких систем.

2. Изохроны систем с однородными нелинейностями, не зависящие от параметра λ

Рассмотрим систему (1) для которой предполагаем, что f, g, p, q – многочлены степени n, начинающиеся со степеней $\geqslant 2$, λ – параметр, не обязательно малый.

Теорема 1. *Для того чтобы система* (1) *была изохронной и ее изохроны не зависели от параметра* λ*, необходимо и достаточно, чтобы функции* $p(x,y), q(x,y), f(x,y), g(x,y)$ *были связаны равенствами*

$$p(x,y) = -x + \left(1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2 + (y - f(x,y))\left(\frac{v}{u}\right)'_x\right) / \left(\frac{v}{u}\right)'_y,$$

$$q(x,y) = -y - \left((x + g(x,y))\left(\frac{v}{u}\right)'_x\right) / \left(\frac{v}{u}\right)'_y, \tag{7}$$

где функции u, v *имеют вид* (3).

Следствие 1. *Семейство изохрон системы* (1)

$$\frac{v(x,y)}{u(x,y)} = k, \quad k \in R$$

является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + q(x,y)}{x + g(x,y)}. \tag{8}$$

Доказательство. *Необходимость.* Потребуем, чтобы (3) было нормализующим преобразованием, т. е. чтобы выполнялось условие

$$S = vP - uQ = 0, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} P &= u'_x(-y + \lambda x + f(x,y) + \lambda g(x,y)) + u'_y(x + \lambda y + p(x,y) + \lambda q(x,y)) + v, \\ Q &= v'_x(-y + \lambda x + f(x,y) + \lambda g(x,y)) + v'_y(x + \lambda y + p(x,y) + \lambda q(x,y)) - u \end{aligned} \tag{10}$$

– производные от функций (3) в силу системы (1). Так как уравнения изохрон не зависят от λ, то выражение S при подстановке (10) в (9), также не зависит от λ, и поэтому коэффициенты S при степенях λ равны нулю. Получим систему

$$yf - xp + xU - pU + U^2 + yV + fV + V^2 + xyU'_y + ypU'_y + xVU'_y + pVU'_y - x^2V'_y -$$
$$-xpV'_y - xUV'_y - pUV'_y - y^2U'_x + yfU'_x - yVU'_x + fVU'_x + xyV'_x - xfV'_x + yUV'_x - fUV'_x = 0,$$
$$yg - xq - yU - qU + xV + gV + y^2U'_y + yqU'_y + yVU'_y + qVU'_y - xyV'_y - xqV'_y -$$
$$-yUV'_y - qUV'_y + xyU'_x + ygU'_x + xVU'_x + gVU'_x - x^2V'_x - xgV'_x - xUV'_x - gUV'_x = 0.$$

Из этой системы выразим

$$p(x,y) = \frac{(x+U)\left(U - xV'_y + yV'_x - fV'_x\right) + (y+V)\left(V + xU'_y - yU'_x + f\left(1+U'_x\right)\right)}{(x+U)\left(1+V'_y\right) - (y+V)U'_y},$$

$$q(x,y) = \frac{(x+U)\left(V - yV'_y - xV'_x - gV'_x\right) + (y+V)\left(-U + yU'_y + xU'_x + g\left(1+U'_x\right)\right)}{(x+U)\left(1+V'_y\right) - (y+V)U'_y}.$$

Нетрудно показать, учитывая (3), что эти функции можно представить в виде (7).

Достаточность. Пусть выполняются условия (7). Тогда, если подставить (7) в (1) и вычислить производные от функций (3) в силу полученной системы, то для полученных при этом функций P, Q, как легко показать, будет выполняться условие (5).

Докажем теперь следствие теоремы. Из формул (7) следует, что справедливы следующие равенства:

$$\left(\frac{v}{u}\right)'_x \Big/ \left(1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2\right) = -\frac{y+q}{(x+g)(x+p) + (y-f)(y+q)},$$
$$\left(\frac{v}{u}\right)'_y \Big/ \left(1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2\right) = \frac{x+g}{(x+g)(x+p) + (y-f)(y+q)}.$$

Отсюда получим

$$\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{v}{u}\right)\right)'_x = -\frac{y+q}{(x+g)(x+p) + (y-f)(y+q)},$$
$$\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{v}{u}\right)\right)'_y = \frac{x+g}{(x+g)(x+p) + (y-f)(y+q)},$$
$$\left(\operatorname{arctg}\left[\frac{v}{u}\right]\right)'_x \Big/ \left(-\left(\operatorname{arctg}\left[\frac{v}{u}\right]\right)'_y\right) = \frac{y+q}{x+g}.$$

Очевидно, что последнее равенство доказывает справедливость следствия. □

Замечание 1. *В статье* [2] *показано, что при построении изохронных систем с фокусом целесообразно строить их по изохронам с заданными свойствами, так как условие быть изохронной накладывает на систему с фокусом слабые ограничения.*

Поэтому логичным будет следующее условие.

Условие 1. *Условимся всюду в дальнейшем, что для изохронных систем* (1) *с полиномами в правых частях нормализующее преобразование* (3) *полиномиальное.*

Теорема 2. *Предположим, что полиномиальная система* (1) *изохронная, уравнение ее изохрон не зависит от* λ *и нормализующее преобразование* (3) *полиномиальное. Тогда выполняются условия*

$$q(x,y) = -y + vu'_x - uv'_x,$$
$$g(x,y) = -x - vu'_y + uv'_y, \tag{11}$$
$$(x + p(x,y))(x + g(x,y)) - (-y + f(x,y))(y + q(x,y)) = u^2 + v^2. \tag{12}$$

Доказательство. Запишем дифференциальное уравнение изохрон $\frac{v(x,y)}{u(x,y)} = k$, где k – произвольная постоянная

$$\frac{dy}{dx} = \frac{vu'_x - uv'_x}{-vu'_y + uv'_y}. \tag{13}$$

Приравнивая правые части (8) и (13) и учитывая, что это несократимые рациональные дроби, получим равенства (11). Из равенств (7) и (11) легко получить, как следствие, равенство (12). □

Следствие 2. *При выполнении условия* 1 *функции* $u(x,y), v(x,y)$ *в* (3) *являются многочленами степени* $\leqslant n$.

Доказательство. Доказательство следует из равенства (12), т. к. если предположить, что хотя бы одна из функций, u или v, имеет степень больше n, то в (12) в левой части получим функцию степени $\leqslant n$, а в правой части функцию степени больше n. □

Замечание 2. *Под степенью функции* $h(x,y)$ *мы здесь понимаем степень функции* $h(x,z\,x)$ *по переменной* x.

3. Изохроны систем с квадратичными нелинейностями, не зависящие от параметра λ

Теорема 3. *Для того чтобы при выполнении условия* 1 *уравнение изохрон системы* (1) *с квадратичными в правой части нелинейностями не зависело от* λ, *необходимо и достаточно, чтобы системы и их полиномиальные нормализующие преобразования* (3) *представлялись в одном из видов*

$$1)\ \frac{dx}{dt} = -y + x\lambda + Ax^2 + Mxy - \frac{1}{2}Mx^2\lambda, \frac{dy}{dt} = x + y\lambda - \frac{Mx^2}{2} + 4Axy + 2My^2 - x\left(Ax + My\right)\lambda;$$
$$u = x - \frac{Mx^2}{2},\ \ v = y + Ax^2;$$

$$2)\ \frac{dx}{dt} = -y + x\lambda + Kx^2 - \frac{Ky^2}{4} + \frac{1}{2}Kxy\lambda, \frac{dy}{dt} = x + y\lambda + \frac{Kxy}{2} + \frac{1}{4}Ky^2\lambda;\quad u = x,\ \ v = y + \frac{Ky^2}{4};$$

$$3)\ \frac{dx}{dt} = -y + x\lambda + \frac{\left(4A^2 + M^2\right)x^2}{4A} + Mxy - \frac{M^2y^2}{16A} + \frac{Mx\left(-4Ax + My\right)\lambda}{8A},$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y\lambda + \frac{Mx^2}{2} + \frac{\left(32A^2 + M^2\right)xy}{8A} - \frac{\left(4Ax - My\right)\left(4Ax + My\right)\lambda}{16A};\ \ u = x,\ v = y + \frac{\left(4Ax - My\right)^2}{16A};$$

$$4)\ \frac{dx}{dt} = -y + x\lambda + \frac{B\left(b^2 + 16c^2\right)x^2}{4bc} - \frac{\left(b^2 + 4Bc + 8c^2\right)xy}{2c} +$$
$$+ \frac{\left(b^2 - Bc\right)y^2}{b} + \frac{\left(bx + 2cy\right)\left(b^2x + 4Bcx - 2bcy\right)\lambda}{4bc},$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y\lambda - \frac{\left(-b^2 + 4Bc\right)x^2}{4c} + \frac{\left(b^2B + 2b^2c + 2Bc^2\right)xy}{bc} -$$
$$- \frac{\left(b^2 + c^2\right)y^2}{c} + \frac{\left(bx + 2cy\right)\left(-bBx + 2b^2y + 2Bcy\right)\lambda}{4bc};$$
$$u = x + \frac{\left(bx + 2cy\right)^2}{4c},\ \ v = y + \frac{B\left(bx + 2cy\right)^2}{4bc};$$

$$5)\ \frac{dx}{dt} = -y + x\lambda + Cx^2 - 2cxy - Cy^2 + \left(cx^2 + 2Cxy - cy^2\right)\lambda,$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y\lambda + cx^2 + 2Cxy - cy^2 - \left(Cx^2 - 2cxy - Cy^2\right)\lambda;\ \ u = x + c\left(x^2 + y^2\right),\ v = y + C\left(x^2 + y^2\right).$$

Здесь a, b, c, A, B, C, K, M – параметры системы.

Доказательство. Пусть

$$u(x,y) = x + ax^2 + bxy + cy^2, v(x,y) = y + Ax^2 + Bxy + Cy^2. \tag{14}$$

Подставляя эти функции в равенства (11) и требуя, чтобы полученные функции g и q были однородными многочленами второй степени, получим, условия

$$b - C - N = 0,\ \ 2a - 2B - 3c - M + n = 0,\ \ -3A - 2b + 2C - K + m = 0,\ \ -a + B + k = 0, \tag{15}$$

и функции

$$g(x,y) = -cy^2 + x^2(a+B) + 2Cxy, \quad q(x,y) = (b+C)y^2 - Ax^2 + 2axy. \tag{16}$$

Пусть

$$p(x,y) = kx^2 + mxy + ny^2, \quad f(x,y) = Kx^2 + Mxy + Ny^2. \tag{17}$$

Подставляя эти функции в (12) и требуя выполнения условий (15), получим идеал

$$j = \{-b^2 + 2ac - 2Bc - 4c^2 - cM,\ -2ab - 3Ac - 4bc - 2aC + 2BC + 8cC - cK - bM + CM,$$
$$-2a^2 + Ab - b^2 + B^2 + 4Bc + 3AC + 4bC - 4C^2 - bK + CK - aM + BM,$$
$$3aA + AB + 2bB - 4BC - aK + BK + AM,$$
$$-A^2 - B^2 + AK,\ (-Ab + aB),\ (-Bc + bC),\ (-Ac + aC)\}.$$

Для того чтобы вычислить базис Гребнера этого идеала, рассмотрим два случая:
Случай 1. $c = 0,\ \ b = 0$. Базис Гребнера идеала j в этом случае есть

$$g1 = \{A(A-K)K\left(4A^2 - 4AK + M^2\right), A(A-K)\left(4A^2 - 4AK + M^2\right)\left(A^2 + 9AK + 5K^2 + M^2\right),$$
$$A(A-K)K(2B+M), A(A-K)\left(6A^2B + 6ABK + 6BK^2 + 7A^2M - AKM + 3K^2M + M^3\right),$$
$$-AK\left(2A^2 - 2AK - BM\right), -A\left(2A^3 + 2A^2K - 4AK^2 - 3ABM - AM^2 + KM^2\right),$$
$$-A\left(2A^2B - 2BK^2 + 3A^2M - 2AKM - K^2M - BM^2\right), A^2 + B^2 - AK,$$
$$-A\left(A^2 - 4AC + 4CK - K^2 - BM\right), A(AB - BK + AM + 2CM - KM), A^3 - AK^2 - ABM + CM^2,$$
$$C(2B+M), -\left((A-C)(A+4C-K)K^2\right), -A(A+4C-K)K(A-4C+3K),$$
$$A^2B + ABK - A^2M + 8C^2M + AKM - 2CKM, -A^3 - 12AC^2 + 16C^3 - 4C^2K + AK^2 + ABM,$$
$$K(4AB + 2aK - 2BK + AM - 4CM), 3aA + AB - aK + BK + AM + 2CM,$$
$$-17A^3 - 144AC^2 + 48A^2K + 108ACK + 48C^2K - 31AK^2 - 12CK^2 + 21ABM + 8aKM -$$
$$-8BKM + 4AM^2, aB, aC, 2a^2 + A^2 - 3AC + 4C^2 - AK - CK + aM - BM\}.$$

Многообразие этого идеала, совместно с условием $b = c = 0$:

$$w1 = \{\{c=0,\ b=0,\ a=0,\ A=0,\ B=0,\ C=0\},$$
$$\left\{c=0,\ b=0,\ a=-\frac{M}{2},\ B=0,\ C=0,\ K=A\right\},$$
$$\left\{c=0,\ b=0,\ a=0,\ A=0,\ B=0,\ C=\frac{K}{4},\ M=0\right\},$$
$$\left\{c=0,\ b=0,\ a=0,\ B=-\frac{M}{2},\ C=\frac{M^2}{16A},\ K=\frac{4A^2+M^2}{4A}\right\},$$
$$\{c=0,\ b=0,\ a=0,\ B=0,\ C=A,\ K=A,\ M=0\}\}.$$

Случай 2. $M = \frac{-b^2+2ac-2Bc-4c^2}{c}$. Базис Гребнера идеала J в этом случае есть

$$g2 = \{A^2 + B^2 - AK,\ \ cC(A+4C-K)\left(2AC - C^2 - AK\right),$$
$$c(2A-7C)(A+4C-K)\left(2AC - C^2 - AK\right),\ \ Bc(A+4C-K)\left(2AC - C^2 - AK\right), \ldots\}.$$

Мы не приводим полностью этот базис из-за его громоздкости.
Многообразие этого идеала, совместно с условием этого случая:

$$w2 = \left\{\left\{M = -\frac{b^2+4Bc+8c^2}{2c},\ a = \frac{b^2}{4c},\ A = \frac{bB}{4c},\ C = \frac{Bc}{b},\ K = \frac{B\left(b^2+16c^2\right)}{4bc}\right\},\right.$$

$$\left\{M=-\frac{b^2+8c^2}{2c},\ A=0,\ a=\frac{b^2}{4c},\ B=0,\ \ C=0,\ K=0\right\},$$

$$\{M=-2c,\ a=c,\ A=C,\ b=0,\ B=0,\ K=C\}\}.$$

Подставляя многообразия w_1, w_2 в систему (1) с функциями (16), (17) и нормализующее преобразование (14), получим системы 1)–5) теоремы вместе с их нормализующими преобразованиями.

Ниже приведены траектории систем 1), 2) теоремы 3 и графики ее изохрон.

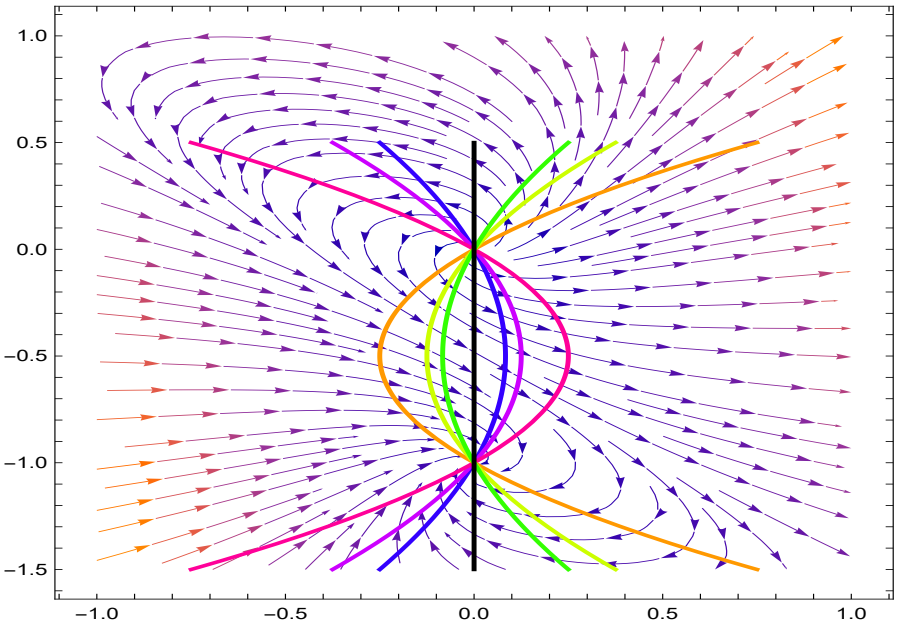


Рис. 1. Траектории и изохроны системы 1)

На рис. 1 кроме особой точки изохронного фокуса $O(0,0)$ имеется еще одна особая точка $O_1(1/10,1/100)$, для которых изохронами являются те же изохроны, что и для $O(0,0)$.

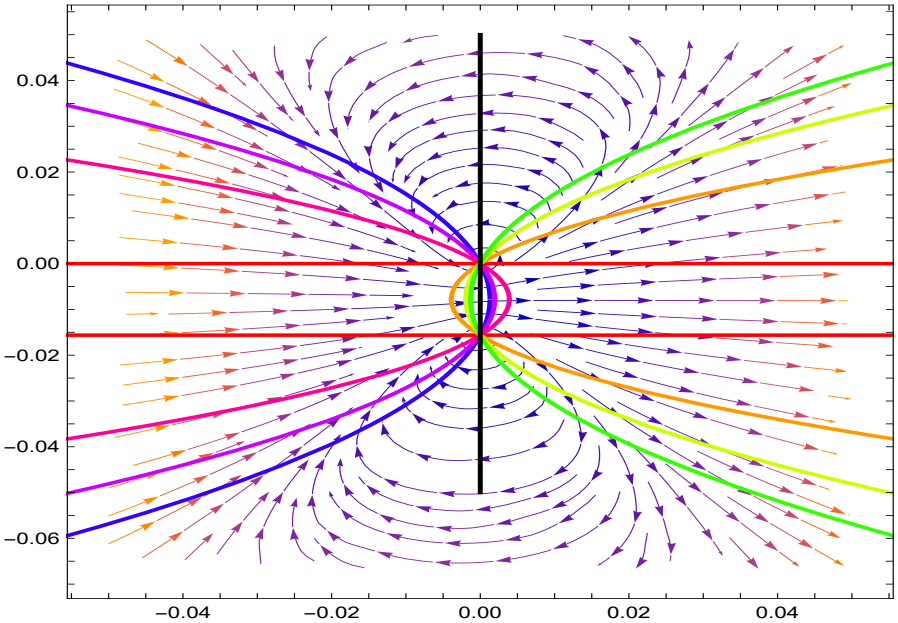


Рис. 2. Траектории и изохроны системы 2)

На рис. 2 кроме особой точки сильно изохронного фокуса $O(0,0)$ четвертого порядка, т. е., изохронами этой системы являются оси координат [5], имеется еще один сильно изохронный фокус $O_2(0,-1/64)$ четвертого порядка, для которого изохронами, кроме горизонтальной изохроны, являются те же изохроны, что и для $O(0,0)$.

Литература

1. *Zoladek H.* Quadratic systems with center and their perturbations // Differential Equations. 1994. Vol. 109. P. 223–273.

2. *Руденок А. Е., Василевич М. Н.* Об изохронах грубого фокуса // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2025. № 2. С. 16–29.

3. *Руденок А. Е., Василевич М. Н.* О сильной изохронности грубого фокуса // XIV Белорусская математическая конференция, посвященная 65-летию института математики НАН Беларуси: материалы Международной научной конференции, Минск, 28 октября – 1 ноября 2024 г.: в 3 ч. Минск: Беларуская навука, 2024. Ч. 2. С. 70–71.

4. *Руденок А. Е., Василевич М. Н.* О сильной изохронности негрубого фокуса // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: материалы V Международной научной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения чл.-кор. АН БССР Е. А. Иванова и доц. Н. И. Бриша. Минск, 17–19 декабря 2024 г. Минск: БГУ, 2025. С. 30–32.

5. *Василевич М. Н.* О существовании трех сильно изохронных четвертого порядка центров // XXI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2023): материалы Международной конференции, Могилев, 23–27 мая 2023 г. Могилев, 2023. Ч. 1. С. 71–73.

6. *Руденок А. Е.* О предельных циклах, рождающихся из траекторий центра // XXII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2026): материалы Международной конференции, Гродно, 18–22 мая 2026 г. Гродно, 2026. Ч. 1. С. 77–79.

7. *Руденок А. Е., Василевич М. Н.* Изохронные системы с нелинейностями третьей степени, изохроны которых не зависят от параметра, определяющего устойчивость особой точки // XXII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2026): материалы Международной конференции, Гродно, 18–22 мая 2026 г. Гродно, 2026. Ч. 1. С. 79–81.

References

1. Zoladek H. Quadratic systems with center and their perturbations. *Differential Equations*, 1994, vol. 109, pp. 223–273.

2. Rudenok A. E., Vasilevich M. N. On isochrones of a rough focus. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics. Informatics*, 2025, no. 2, pp. 16–29 (in Russian).

3. Rudenok A. E., Vasilevich M. N. On strong isochronicity of a rough focus. *XIV Belarusian Mathematical Conference dedicated to the 65th anniversary of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus: proceedings of the international scientific conference*, Minsk, October 28 – November 1, 2024. In three parts. Part 2. Minsk, Belaruskaya Navuka, 2024, pp. 70–71 (in Russian).

4. Rudenok A. E., Vasilevich M. N. On strong isochronicity of a non-rough focus. *Mathematical Modeling and Differential Equations: proceedings of the V International Scientific Conference dedicated to the 100th anniversary of the birth of Corresponding Member of the Academy of Sciences of the BSSR E. A. Ivanov and Assoc. Prof. N. I. Brish.* Minsk, December 17–19, 2024. Minsk, BSU, 2025, pp. 30–32 (in Russian).

5. Vasilevich M. N. On the existence of three strongly isochronous fourth-order centers. *XXI International Scientific Conference on Differential Equations (Erugin Readings – 2023): Proceedings of the international conference*. Mogilev, May 23–27, 2023. Part 1. Mogilev, 2023, pp. 71–73 (in Russian).

6. Rudenok A. E. On limit cycles born from trajectories of a center. *XXII International Scientific Conference on Differential Equations (Erugin Readings – 2026): Proceedings of the international conference.* Grodno, May 18–22, 2026. Part 1. Grodno, 2026, pp. 77–79 (in Russian).

7. Rudenok A. E., Vasilevich M. N. Isochronous systems with third-degree nonlinearities whose isochrones do not depend on the parameter determining the stability of the singular point. *XXII International Scientific Conference on Differential Equations (Erugin Readings – 2026): Proceedings of the international conference*. Grodno, May 18–22, 2026. Part 1. Grodno, 2026, pp. 79–81 (in Russian).