Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 143–147

УДК 517.934 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-143–147
EDN: FLJSJT

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО СОСТОЯНИЮ И ЕЕ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА

В. В. Крахотко, Г. П. Размыслович

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: Krakhotko46@bk.ru, razmysl@bsu.by

Поступила: 14.09.2026 **Исправлена:** 07.10.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: управляемость, линейные системы, системы с запаздыванием по состоянию, дискретные системы

Аннотация. Доказан критерий относительной управляемости линейной стационарной системы с постоянным запаздыванием по состоянию и ее дискретного аналога при помощи предельного перехода от дискретной системы к непрерывной. Указаны отличия определяющих уравнений непрерывной и дискретной систем.

RELATIVE CONTROLABILITY OF A CONTINUOUS SYSTEM WITH STATE DELAY AND ITS DISCRETE ANALOGUE

V. V. Krakhotko, G. P. Razmyslovich

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: Krakhotko46@bk.ru, razmysl@bsu.by

Received: 14.09.2026 **Revised:** 07.10.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: controllability, linear systems, systems with delay on state, discrete systems

Abstract. A criterion for the relative controllability of a linear time-invariant system with constant delay as well as its discrete-time analog is established by means of a limiting transition from the discrete-time system to the continuous-time one. The differences between the governing equations for the continuous-time and discrete-time systems are identified.

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + bu(t),\ t \geqslant 0, \tag{1}$$
$$x_0(\cdot) = \{x(t) = \varphi(t),\ t \in [-h,0]\},$$

где x, b – n-векторы; u – скаляр; A, A_1 – матрицы соответствующих размерностей; $h > 0$ – число (запаздывание); $\varphi(t)$ – кусочно-непрерывная n-вектор-функция.

Ясно, что при каждом кусочно-непрерывном управлении $u(t)$, $|u(t)| \leqslant L$, $L > 0$, и при заданном начальном условии $x_0(\cdot)$ решение системы (1) определяется однозначным образом.

Система (1) относительно управляема [1], если для любого n-вектора c и любой n-вектор-функции $\varphi(t)$, $t \in [-h,0]$, найдутся момент времени T, $(n-1)h \leqslant T < +\infty$, и число L, $0 \leqslant L < +\infty$, и кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $|u(t)| \leqslant L$ такие, что решения системы (1), порожденные этим управлением, удовлетворяют условиям $x(t) = \varphi(t)$ при $t \in [-h,0]$ и $x(T) = c$.

Для решения задачи относительной управляемости системы (1) рассмотрим дискретную систему

$$x(t_{k+1}) = (E_n + \varepsilon A)x(t_k) + \varepsilon A_1 x(t_{k-m_\varepsilon}) + \varepsilon bu(t_k), \tag{2}$$

где $k = \overline{0,N}$; $\varepsilon = T/N$ – период (интервал) квантования; $m_\varepsilon = \left[\frac{h}{\varepsilon}\right]$ ($[a]$ – антье числа a); $t_{k+1} = t_k + \varepsilon$, $t_0 = 0$. Будем считать, что начальные условия для системы (2) таковы: $x(t_k) = \varphi(t_k)$, $k = 0, -1, \ldots, -m_\varepsilon$.

Непосредственно подстановкой убеждаемся, что решение системы (2) имеет вид

$$x(t_k) = F(t_{k-1}, t_{-1})\varphi(0) + \sum_{j=-m_\varepsilon}^{-1} F(t_{k-1}, t_{j+m_\varepsilon})A_1\varphi(t_j)\varepsilon + \sum_{j=0}^{k-1} F(t_{k-1}, t_j)bu(t_j)\varepsilon,\ k = \overline{0,N}. \tag{3}$$

Матричная функция $F(t_k,t_j)$ является решением рекуррентного уравнения

$$F(t_k,t_j)=F(t_k,t_{j+1})(E_n+\varepsilon A)+F(t_k,t_{j+1+m_\varepsilon})A_1\varepsilon,$$
$$F(t_k,t_k)=E_n,\ F(t_k,t_j)=0,\ j>k.$$

В работе [2] показано, что дискретная система (2) относительно управляема тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\operatorname{rank}\{X(t_k),\ k=1,2,\ldots,n(m_\varepsilon+1)\}=n,$$

где $X(t_k)$ – решение определяющего уравнения системы (2)

$$X(t_{k+1})=(E_n+\varepsilon A)X(t_k)+\varepsilon A_1X(t_{k-m_\varepsilon})+\varepsilon bU(t_k),\ k\geqslant 0,$$
$$X(t_k)=0,\ k\leqslant 0;\ U(0)=1,\ U(t_k)=0,\ k\neq 0.$$

Будем считать, что $T=n(m_\varepsilon+1)\varepsilon$. Для получения основного результата, докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Для любого k, $k=\overline{1,N}$ верна следующая формула:*

$$X(t_k)=\sum_{i=0}^{d_k}\sum_{j=i}^{k-1-im_\varepsilon}C^j_{k-1-im_\varepsilon}\varepsilon^jX_{j+1}(ih)\varepsilon. \tag{4}$$

Здесь $d_k=\big[\dfrac{k-1}{m_\varepsilon+1}\big]$; $C^j_{k-1-im_\varepsilon}$ – биномиальные коэффициенты; $X_{j+1}(ih)$ – решение определяющего уравнения непрерывной системы (1)

$$X_{j+1}(ih)=AX_j(ih)+A_1X_j((i-1)h)+bU_j(ih), \tag{5}$$

при условиях $X_j(ih)=0,\ j\leqslant 0\vee i\leqslant 0;\ U_0(0)=1,\ U_j(ih)=0,\ j\neq 0\vee i\neq 0$.

Доказательство. Действительно, пусть $k=1$, тогда

$$X(t_1)=X_1(0)=b\varepsilon,$$

т. е. формула (4) справедлива.

Пусть $k>1$. Предположим, что формула (4) верна для $k=p$. Докажем, что она будет верна при $k=p+1$. Имеем

$$X(t_{p+1})=(E_n+\varepsilon A)X(t_p)+\varepsilon A_1X(t_{p-m_\varepsilon})=(E_n+\varepsilon A)\sum_{i=0}^{d_p}\sum_{j=i}^{p-1-im_\varepsilon}C^j_{p-1-im_\varepsilon}\varepsilon^jX_{j+1}(ih)\varepsilon+$$
$$+\varepsilon A_1\sum_{i=0}^{d_{p-m_\varepsilon}}\sum_{j=i}^{p-m_\varepsilon-1-im_\varepsilon}C^j_{p-1-(i+1)m_\varepsilon}\varepsilon^jX_{j+1}(ih)\varepsilon.$$

Отсюда с учетом (5) получаем, что

$$X(t_{p+1})=\sum_{i=0}^{d_{p+1}}\sum_{j=i}^{p-im_\varepsilon}C^j_{p-im_\varepsilon}\varepsilon^jX_{j+1}(ih)\varepsilon.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2. *Для того чтобы при любом ε, $0<\varepsilon\leqslant\frac{h}{n}$, выполнялось равенство*

$$\operatorname{rank}\Big\{X(t_k)=\sum_{i=0}^{d_k}\sum_{j=i}^{k-1-im_\varepsilon}C^j_{k-1-im_\varepsilon}\varepsilon^jX_{j+1}(ih)\varepsilon;\ k=\overline{1,n(m_\varepsilon+1)}\Big\}=n, \tag{6}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rank}\big\{X_{j+1}(ih),\ i=\overline{0,n-1};\ j=\overline{i,n-1}\big\}=n. \tag{7}$$

Доказательство. Необходимость. Заметим, что при любом ε, $0<\varepsilon\leqslant\frac{h}{n}$, в левой части (4) при изменении k будут присутствовать векторы $X_{j+1}(ih)$, $j=\overline{i,l}$; $l\geqslant n-1$; $i=\overline{0,n-1}$.

Пусть выполняется условие (6). Допустим от противного, что условие (7) не выполняется. Это означает, что существует вектор g_0, $||g_0||\neq 0$, такой, что

$$g_0'X_{j+1}(ih)=0,\ j=\overline{i,n-1};\ i=\overline{0,n-1}. \tag{8}$$

В силу результатов работы [3] имеем

$$X_{j+1}(ih)=\sum_{\beta=0}^{i}\sum_{s=\beta}^{n-1}\mu_{s\beta}^{ji}X_{s+1}(\beta h),\ i=\overline{0,n-1},\ j=\overline{0,n-1},$$
$$\mu_{s\beta}^{ji}=1,\ \text{при } j=s,\ i=\beta,\ j\leqslant n-1,\ \mu_{s\beta}^{ji}=0,\ \text{при } j\neq s\vee i\neq\beta,\ j\leqslant n-1. \tag{9}$$

Тогда из (6) получаем

$$X(t_k)=\sum_{i=0}^{d_k}\sum_{j=i}^{k-1-im_\varepsilon}C_{k-1-im_\varepsilon}^{j}\varepsilon^{j}X_{j+1}(ih)\varepsilon=\sum_{i=0}^{d_k}\sum_{j=i}^{n-1}X_{j+1}(ih)\Big(\sum_{s=i}^{d_k}\sum_{\beta=s}^{k-1-sm_\varepsilon}C_{k-1-sm_\varepsilon}^{\beta}\varepsilon^{\beta}\mu_{ji}^{\beta s}\Big)\varepsilon=$$
$$=\sum_{i=0}^{d_k}\sum_{j=i}^{n-1}X_{j+1}(ih)a_{ij}^{k}\varepsilon, \tag{10}$$

где $a_{ji}^{k}=\sum\limits_{s=i}^{d_k}\sum\limits_{\beta=s}^{k-1-sm_\varepsilon}C_{k-1-sm_\varepsilon}^{\beta}\varepsilon^{\beta}\mu_{ji}^{\beta s}$.

Следовательно, для вектора g_0 в силу (8) справедливы следующие равенства:

$$g_0'X(t_k)=g_0'\sum_{i=0}^{d_k}\sum_{j=i}^{n-1}X_{j+1}(ih)a_{ij}^{k}\varepsilon=\sum_{i=0}^{d_k}\sum_{j=i}^{n-1}g_0'X_{j+1}(ih)a_{ij}^{k}\varepsilon=0$$

при $k=\overline{1,n(m_\varepsilon+1)}$.

Последние равенства возможны лишь при нулевом векторе g_0. Что противоречит предположению, что вектор g_0 ненулевой. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполняется условие (7). От противного предположим, что (6) не выполняется. Тогда существует n-вектор g_0, $||g_0||\neq 0$, такой, что

$$g_0'\sum_{i=0}^{d_k}\sum_{j=i}^{n-1}X_{j+1}(ih)a_{ij}^{k}\varepsilon=0,\ k=\overline{1,n(m_\varepsilon+1)}. \tag{11}$$

Таким образом, имеем систему алгебраических уравнений относительно $\dfrac{n(n+1)}{2}$ неизвестных

$$g_0'X_{j+i}(ih),\ j=\overline{i,n-1};\ i=\overline{0,n-1}.$$

Введем в рассмотрение вектор Y длины $\dfrac{n(n+1)}{2}$ вида

$$Y=\big(g_0'X_1(0),\dots,g_0'X_n(0),g_0'X_2(h),\dots,g_0'X_n(h),\dots,g_0'X_n((n-1)h)\big).$$

Тогда система (11) запишется в виде

$$MY=0, \tag{12}$$

где $M-$ матрица размерностей $n(m_\varepsilon+1)\times\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Далее из системы (12) выделяем подсистему, которая получается при k, $pm_\varepsilon+p+1\leqslant k\leqslant pm_\varepsilon+n$; $p=0,1,\dots,n-1$. Обозначим полученную подсистему

$$\overline{M}Y=0.$$

Здесь $\overline{M}-$ квадратная матрица размерностей $\dfrac{n(n+1)}{2}\times\dfrac{n(n+1)}{2}$. В силу (9), (10) определитель этой подсистемы отличен от нуля.

Действительно, матрица $\overline{M}$ является нижней блочно-треугольной матрицей, где на главной диагонали блоки $(M_{11},M_{22},\dots,M_{nn})$ и каждый блок M_{ii} имеет размерность $(n-i+1)\times(n-i+1)$, причем

$$M_{11}=\begin{bmatrix}\varepsilon & 0 & \dots & 0\\ C_1^0\varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ C_{n-1}^0\varepsilon & C_{n-1}^1\varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^n\end{bmatrix},\ M_{22}=\begin{bmatrix}\varepsilon^2 & 0 & \dots & 0\\ C_2^1\varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ C_{n-1}^1\varepsilon^2 & C_{n-1}^2\varepsilon^3 & \dots & \varepsilon^n\end{bmatrix},\dots,M_{nn}=[\varepsilon^n].$$

Значит, что $\det(\bar{M}) \neq 0$. Тогда система (12) имеет только нулевое решение $Y = 0$, т. е. $g_0' X_{j+1}(ih) = 0$, $j = \overline{i, n-1}$, $i = \overline{0, n-1}$.

Последние равенства противоречат равенству (7). Лемма доказана. □

Таким образом, из лемм следует, что дискретная система (2) относительно управляема для любых ε, $0 < \varepsilon \leqslant \frac{h}{n}$, тогда и только тогда, когда выполняется условие (7).

Допустим дискретная система (2) относительно управляема при любых ε, $0 < \varepsilon \leqslant \frac{h}{n}$. Тогда выполняется условие (7). Пусть в (7) ранг набирается на векторах

$$X_{j_s^\nu}(\nu h),\ s = 1, 2, \ldots, p_\nu;\ p_\nu \leqslant n - \nu;\ \nu = 0, 1, \ldots, n-1;\ \sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu = n. \tag{13}$$

Из формул (3), (10) имеем, что задача относительной управляемости дискретной системы (2) сводится к задаче разрешимости системы алгебраических уравнений относительно $u(t_k)$, $k = \overline{0, n(m_\varepsilon + 1) - 1}$:

$$\sum_{k=1}^{n(m_\varepsilon+1)} \sum_{i=0}^{d_{n(m_\varepsilon+1)-k+1}} \sum_{j=i}^{n-1} X_{j+1}(ih) a_{ij}^{n(m_\varepsilon+1)-k+1} u(t_{k-1})\varepsilon = c(\varepsilon), \tag{14}$$

где $c(\varepsilon) = c - F(t_{n(m_\varepsilon+1)-1}, t_{-1})\varphi(t_0) - \sum_{k=-m_\varepsilon}^{-1} F(t_{n(m_\varepsilon+1)-1}, t_{k+m_\varepsilon}) A_1 \varphi(t_k)\varepsilon$, c – любой n-вектор.

В зависимости от того, на каких векторах (13) набирается ранг в (7), фиксируем на отрезке $[0, T]$ n точек $\tau_1, \ldots, \tau_n$, $(\tau_n = T)$.

Таким образом, на отрезке $[T-h, T]$ выбирается в соответствии с (13), p_0 точек, а на отрезке $[T-2h, T-h] - p_1$ точек и т. д. Заметим, что p_0 – степень минимального многочлена матрицы A.

Пусть $\alpha_q = \dfrac{\tau_q}{\varepsilon}$, тогда положим $u(t_k) = u(t_{\alpha_q})$, $k = \alpha_{q-1} + 1, \alpha_{q-1} + 2, \ldots, \alpha_q$; $q = \overline{1, n}$.

Значит, из (14) имеем

$$c(\varepsilon) = \sum_{q=1}^{n} \sum_{k=\alpha_{q-1}+1}^{\alpha_q} \sum_{i=0}^{d_{n(m_\varepsilon+1)-k+1}} \sum_{j=i}^{n-1} X_{j+i}(ih) a_{ij}^{n(m_\varepsilon+1)-k+1} u(t_{\alpha_q})\varepsilon.$$

В силу (13) последняя система алгебраических уравнений при любых ε, $0 < \varepsilon \leqslant \frac{h}{n}$, имеет решение относительно $u(t_{\alpha_q})$, $q = \overline{1, n}$.

Среди этих решений выберем решение $u_\varepsilon(t_{\alpha_q})$, $|u_\varepsilon(t_{\alpha_q})| \leqslant L$ (для каждой n-вектор функции $\varphi(t)$, $t \in [-h, 0)$ и каждого n-вектора c найдется L [4]).

Последовательность значений ε выбираем таким образом, чтобы последовательность $\{t_k, k \geqslant 0\}$ содержала фиксированные точки τ_q, $q = \overline{1, n}$.

Последовательность $\{u_\varepsilon(t_{\alpha_q}), q = \overline{1, n}\}$, $0 < \varepsilon \leqslant \frac{h}{n}$, ограничена, т. е. из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, не ограничивая общности считаем, что

$$u_\varepsilon(t_{\alpha_q}) \text{ стремится к } u(\tau_q),\ q = \overline{1, n},$$

при ε стремящемся к нулю.

Тогда из последовательности $\{x_\varepsilon(t_k), k = \overline{1, n}\}$ можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность, т. е. $x_\varepsilon(t_k)$ равномерно стремится к $x(t)$ при $\varepsilon \to 0$, и следовательно, подпоследовательность $x_\varepsilon(t_{n(m_\varepsilon+1)})$ равномерно стремится к $x(T) = c$.

Таким образом, если выполняется условие (7), то непрерывная система (1) относительно управляема.

Наоборот, пусть непрерывная система (1) относительно управляема, но условие (7) не выполняется. Это означает, что дискретная система (2) не является управляемой при любом ε, $0 < \varepsilon \leqslant \frac{h}{n}$. Так как критерий (7) не выполняется, то существует n-вектор q_0, $||q_0|| \neq 0$, такой, что

$$q_0' X_{j+i}(ih) = 0,\ j = \overline{i, n-1},\ i = \overline{0, n-1}.$$

Следовательно, для вектора q_0' выполняется условие

$$q_0'F(t_{N-1},t_k)b = q_0' \sum_{i=0}^{d_{N-k}} \sum_{j=i}^{N-k-im_\varepsilon} C_{N-k-im_\varepsilon}^{j} \varepsilon^j X_{j+i}(ih) = 0,\ k = \overline{0,N-1}.$$

Переходим в последних равенствах к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$q_0'F(T,t)b \equiv 0,\ t \in [0,T],$$

что противоречит предположению об относительной управляемости системы (1). Здесь $F(T,t)$ – решение уравнения

$$d(F(T,t))/dt = -F(T,t)A - F(T,t+h)A_1,$$
$$F(T,T-0) = E_n, F(T,t) \equiv 0,\ t \geqslant T-0.$$

Таким образом верна теорема.

Теорема 1. *Для относительной управляемости непрерывной системы* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (7).

Следовательно, исходя из полученных выше результатов непрерывная система (1) относительно управляема тогда и только тогда, когда для любого ε, $0 < \varepsilon \leqslant \dfrac{h}{n}$, дискретная система (2) относительно управляема.

Отметим следующее.

Замечание 1. *При любом* ε, $0 < \varepsilon \leqslant \frac{h}{n}$, *дискретная система* (2) *относительно управляема вместе с непрерывной системой* (1).

Замечание 2. *Описанный подход к задаче относительной управляемости системы* (1) *позволяет выяснить вопрос, в силу каких причин определяющее уравнение для системы с запаздыванием отличается от определяющего уравнения дискретной системы.*

Для дискретной системы (2) *решения определяющего уравнения распределяются на отрезке* $[0,T]$ *обычным образом. При уменьшении* ε *оказывается, что все линейно-независимые векторы* $\{X(t_k)\}$ *будут лежать на отрезках длины* h. *Следовательно, при* $\varepsilon \to 0$ *получаем, что линейно-независимые векторы будут концентрироваться около точек* ih, $i \geqslant 0$. *Таким образом, в определенных точках* ih, $i \geqslant 0$, *соберутся все линейно-независимые векторы. Отсюда следует, что определяющее уравнение для системы с запаздыванием должно учитывать этот факт, т. е. у решений определяющего уравнения появляется второй индекс, а именно* $X_j(ih)$, *где* i *характеризует точки* ih, $i \geqslant 0$.

Литература

1. *Крахотко В. В., Игнатенко В. В.* Об одном доказательстве критерия относительной управляемости для систем с запаздыванием // Вестник БГУ. Сер. 1. 1977. № 3. С. 64–65.

2. *Крахотко В. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М., Минюк С. А.* Теория управляемости линейных дискретных систем. III. Системы с последействием //Дифференц. уравн. 1972. Т. 8, № 7. С. 1284–1291.

3. *Шкляр Б. Ш.* К проблеме относительной управляемости систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа. // Дифференц. уравн. 1974. Т. X, № 8. С. 1443–1450.

4. *Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М.* Оптимизация линейных систем. Мн.: БГУ, 1973. 248 с.

References

1. Krakhotko V. V., Ignatenko V, V. On a proof of the criterion relative controllability systems with delay. *Vestnik BSU*, 1977, vol. 1, no. 3, pp. 64–65 (in Russian).

2. Krakhotko V. V., Gabasov R. F., Kirillova F. M., Minyik S. A. Theory controllability linear discrete systems. III Systems with consequence. *Differen. equations*, 1972, vol. 8, no. 7, pp. 1284–1291 (in Russian).

3. Shklyar B. Sh. On problem of relative controllability systems with deviating argument of neutral type. *Differen. equations*, 1974, vol. X, no. 8, pp. 1443–1450 (in Russian).

4. Gabasov R. F., Kirillova F. M. *Optimization Linears System.* Minsk, BSU, 1973. 248 p. (in Russian).