Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 128–142

УДК 517.977 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-128–142
EDN: EPOORT

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ УПРАВЛЕНИИ С МИНИМАЛЬНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ЛИНЕЙНОЙ ТРЕХТЕМПОВОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ

А. И. Калинин, Л. И. Лавринович

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: kalininai@bsu.by, lavrinovich@bsu.by

Поступила: 26.08.2026 **Исправлена:** 14.09.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: малый параметр, сингулярно возмущенная система, оптимальное управление, асимптотические приближения, минимальная интенсивность управления

Аннотация. Рассматривается задача оптимизации переходного процесса в линейной сингулярно возмущенной системе с двумя группами быстрых переменных, которая состоит в нахождении многомерного управления с минимальной интенсивностью. Показано, что для построения приближенного (в асимптотическом смысле) решения этой задачи достаточно решить три невозмущенные задачи оптимального управления меньшей размерности.

ASYMPTOTICS OF SOLVING CONTROL PROBLEM WITH MINIMUM INTENSITY OF LINEAR THREE-TEMPO SINGULARLY PERTURBED SYSTEM

A. I. Kalinin, L. I. Lavrinovich

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: kalininai@bsu.by, lavrinovich@bsu.by

Received: 26.08.2026 **Revised:** 14.09.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: small parameter, singularly perturbed system, optimal control, asymptotic approximations, minimum control intensity

Abstract. The problem of optimizing the transient process in a linear singularly perturbed system with two groups of fast variables is considered, which consists in finding multidimensional control with minimal intensity. It is shown that to construct an approximate (in the asymptotic sense) solution to this problem, it is sufficient to solve three unperturbed optimal control problems of a smaller dimension.

1. Введение

В математической теории оптимальных процессов значительное внимание уделяется задачам оптимизации сингулярно возмущенных систем, содержащих малые параметры при части производных. Это вызвано эффективностью асимптотических методов решения таких задач, при применении которых исходная задача распадается на задачи оптимального управления меньшей размерности. Кроме того, асимптотический подход позволяет избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, которые являются жесткими. При интегрировании таких систем возникают серьезные трудности, выражающиеся в недопустимо большом времени счета и неизбежном накоплении вычислительных ошибок. В первых работах, посвященных задачам оптимального управления с сингулярными возмущениями, рассматривались динамические системы, содержащие только две группы переменных с существенно различными скоростями изменения, которые были названы медленными и быстрыми переменными (см. обзоры [1–4]). В дальнейшем в связи с потребностями приложений появились работы по оптимизации систем с несколькими группами быстрых переменных, которые содержали при производных параметры различных порядков малости. Их обзор содержится в [5].

Настоящая статья посвящена построению асимптотического приближения к решению задачи оптимизации переходного процесса в линейной трехтемповой сингулярно возмущенной системе с многомерными управлениями. Эта задача состоит в нахождении управления с минимальной интенсивностью. Под интенсивностью в данном случае понимается максимум евклидовой нормы значений управляющего воздействия. В прикладных задачах управление зачастую имеет смысл обобщенной силы, а интенсивность оценивает тогда наибольшее значение этой силы. Поэтому

рассматриваемую задачу называют задачей об управлении минимальной силой [6]. Подобные задачи занимают особое место среди типичных задач оптимизации динамических систем вследствие негладкости функционала качества. Они возникают в приложениях, когда большие значения управляющих воздействий либо технически нереализуемы, либо нежелательны из-за чрезмерных перегрузок, вызванных ускорениями.

Следует отметить, что аналогичная задача для двухтемповой системы была исследована в [7;8]. Подход к построению асимптотических приближений к решению в этих работах используется и в данном случае. Его суть состоит в построении асимптотических разложений оптимальной интенсивности и начальных значений (в конечный момент времени) сопряженных переменных. Принципиальное отличие состоит в том, что в указанных задачах используется классический вариант метода пограничных функций для двухтемповой сингулярно возмущенной системы [9], а в настоящей статье – метод пограничных функций для систем с несколькими группами быстрых переменных [10]. При этом старшие коэффициенты разложений оптимальной интенсивности и начальных значений сопряженных переменных формируются путем решения трех невозмущенных задач оптимального управления, а не двух, как это имело место в работах [7; 8].

2. Постановка задачи

В классе r-мерных управляющих воздействий $u(t) = (u_1(t), ..., u_r(t))$, $t \in T = [0, t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимального управления линейной стационарной системой:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 u,\ x(0) = x_* \neq 0, \\ \mu\dot{y} &= A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 u,\ y(0) = y_* \neq 0, \\ \mu^2\dot{z} &= A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 u,\ z(0) = z_* \neq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$x(t^*) = 0,\ y(t^*) = 0,\ z(t^*) = 0, \tag{2}$$

$$J(u) = \sup_{t \in T} \|u(t)\| \to \min, \tag{3}$$

где μ – малый положительный параметр; t^* – заданный конечный момент времени ($t^* > 0$); x – n_1-вектор медленных переменных; y, z – векторы быстрых переменных размерности n_2 и n_3 соответственно. Остальные элементы задачи имеют соответствующие размеры, $\|u\| = (u_1^2 + u_2^2 + \\ + ... + u_r^2)^{1/2}$ – евклидова норма вектора u.

Предположение 1. Матрицы C_3 и $B = B_2 - C_2 C_3^{-1} B_3$ устойчивые, т. е. действительные части всех их собственных значений отрицательны.

Уточним, что будем понимать под асимптотическими приближениями к решению рассмотренной задачи.

Определение 2.1. Управление $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in T$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка ($N = 0, 1, 2, \dots$), если оно переводит динамическую систему (1) в состояние $O(\mu^{N+1})$ и отклоняется по критерию качества (3) от оптимального управления на величину того же порядка малости.

В настоящей статье излагается и обосновывается алгоритм, с помощью которого для заданного числа N можно построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в рассмотренной задаче. Алгоритм опирается на конструктивное доказательство теоремы о существовании гладкого оптимального управления и его асимптотических свойствах. В работе также показывается, как можно использовать построенные асимптотические приближения для решения задачи (1)–(3) при заданном значении малого параметра.

В дальнейшем для сокращения записи будем использовать следующие обозначения:

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2/\mu & B_2/\mu & C_2/\mu \\ A_3/\mu^2 & B_3/\mu^2 & C_3/\mu^2 \end{pmatrix},\ D(\mu) = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2/\mu \\ D_3/\mu^2 \end{pmatrix}, X_* = \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \\ z_* \end{pmatrix}.$$

3. Первая базовая задача

Суть предлагаемого подхода к построению асимптотически субоптимальных управлений состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений (в момент t^*) сопряженных переменных. Старшие коэффициенты этих разложений определяются начальными значениями сопряженных переменных в трех невозмущенных задачах оптимального управления меньшей размерности.

Вычисления при построении асимптотических субоптимальных управлений начинается с решения вырожденной задачи

$$\begin{gathered} \dot{x} = A_0 x + D_0 u,\ x(0) = x_*,\ x(t^*) = 0, \\ J_1(u) = \sup_{t \in T} \|u(t)\| \to \min, \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} A_0 = A_1 - C_1 C_3^{-1} A_3 - (B_1 - C_1 C_3^{-1} B_3) B^{-1} (A_2 - C_2 C_3^{-1} A_3), \\ D_0 = D_1 - C_1 C_3^{-1} D_3 - (B_1 - C_1 C_3^{-1} B_3) B^{-1} D_4,\ D_4 = D_2 - C_2 C_3^{-1} D_3. \end{gathered} \tag{5}$$

В дальнейшем эту задачу будем называть *первой базовой*.

Предположение 2. Динамическая система в задаче (4) является вполне управляемой [6], т. е.

$$\operatorname{rank} \left(D_0,\ A_0 D_0,\ A_0^2 D_0,\ \ldots,\ A_0^{n_1 - 1} D_0 \right) = n_1.$$

Согласно полученным в [6, с. 161] результатам при выполнении предположения 2 в задаче (4) существует оптимальное управление $u_0(t)$, $t \in T$, причем евклидова норма его значений постоянна: $\|u_0(t)\| = L_0$, $t \in T$, и выполняется условие максимума

$$\Delta^{0\mathrm{T}}(t) u_0(t) = \max_{\|u\| \leqslant L_0} \Delta^{0\mathrm{T}}(t) u,\ t \in T, \tag{6}$$

где $\Delta^0(t) = D_0^{\mathrm{T}} \psi^0(t)$, а $\psi^0(t)$, $t \in T$, – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A_0^{\mathrm{T}} \psi,$$

стесненное краевым условием

$$\psi^{0\mathrm{T}}(t^*) F_0(0) x_* = -1. \tag{7}$$

Здесь $F_0(t)$, $t \in T$, – $(n_1 \times n_1)$-матричная функция, являющаяся решением начальной задачи

$$\dot{F}_0 = -F_0 A_0,\ F_0(t^*) = E_{n_1}. \tag{8}$$

При выполнении предположения 2 оптимальному управлению в первой базовой задаче соответствует, в силу принципа максимума, единственный вектор сопряженных переменных.

Предположение 3. Имеет место $\Delta^0(t) \neq 0$, $t \in T$.

Пусть $\lambda_0 = \psi^0(t^*)$, тогда $\Delta^0(t) = \Phi_0(t) \lambda_0$, где

$$\Delta^0(t) = \Phi_0^{\mathrm{T}}(t) \lambda_0, \tag{9}$$

где

$$\Phi_0(t) = F_0(t) D_0,\ t \in T. \tag{10}$$

Из (6) следует, что

$$u^0(t) = L_0 \Delta^0(t) / \|\Delta^0(t)\|,\ t \in T. \tag{11}$$

Обозначим через $x^0(t)$, $t \in T$, траекторию системы (4), порожденную управлением (11).

4. Вторая базовая задача

На втором этапе вычислений решается задача оптимального управления с бесконечной длительностью процесса:

$$\frac{dy}{ds} = By + D_4 u,\ y(0) = 0,\ \|u(s)\| \leqslant 1,\ s \leqslant 0,$$
$$y(-\infty) = -B^{-1}D_4\Delta^0(t^*)/\|\Delta^0(t^*)\|, \tag{12}$$
$$J_2(u) = \int_{-\infty}^{0} (\|\Delta^0(t^*)\| - \Delta^{0\mathrm{T}}(t^*)u(s))ds \to \min,$$

которую будем называть *второй базовой*.

Предположение 4. Динамическая система в задаче (12) является вполне управляемой [6], т. е.

$$\operatorname{rank}\left(D_4, BD_4, B^2D_4, \ldots, B^{n_2-1}D_4\right) = n_2.$$

Задача (12) обладает следующей особенностью: точка $(-B^{-1}D_4\Delta^0(t^*)/\|\Delta^0(t^*)\|)$ является положением равновесия динамической системы при управлении $u(s) \equiv \Delta^0(t^*)/\|\Delta^0(t^*)\|$, $s \leqslant 0$, которое обращает в нуль подынтегральное выражение в критерии качества. Отмеченное свойство вместе с предположениями 1 и 4 гарантирует существование допустимых управлений во второй базовой задаче. Отсюда, в свою очередь, следует, что эта задача имеет решение [11, теорема 4.7] и является нормальной. Последнее означает, что принцип максимума [12] можно сформулировать для задачи (12) следующим образом: пусть $u^*(s)$, $s \leqslant 0$, – оптимальное управление во второй базовой задаче, тогда

$$\Pi\Delta^{\mathrm{T}}(s)u^*(s) = \max_{|u|\leqslant 1} \Pi\Delta^{\mathrm{T}}(s)u,\ s \leqslant 0, \tag{13}$$

где $\Pi\Delta(s) = D_4^{\mathrm{T}}\Pi\psi(s) + \Delta^0(t^*)$, а $\Pi\psi(s)$, $s \leqslant 0$, – решение сопряженной системы

$$\frac{d\Pi\psi}{ds} = -B^{\mathrm{T}}\Pi\psi.$$

Пусть $\sigma_0 = \Pi\psi(0)$, тогда

$$\Pi\Delta(s) = \Pi\Phi^{\mathrm{T}}(s)\sigma_0 + \Delta^0(t^*), s \leqslant 0, \tag{14}$$

где

$$\Pi\Phi(s) = G(s)D_4, s \leqslant 0, \tag{15}$$

а $G(s)$, $s \leqslant 0$, – $(n_2 \times n_2)$-матричная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{dG}{ds} = -GB,\ G(0) = E_{n_2}. \tag{16}$$

Предположение 5. Выполняется условия $\Pi\Delta(s) \neq 0$, $s \leqslant 0$.

Тогда из (13) следует, что

$$u^*(s) = \Pi\Delta(s)/\|\Pi\Delta(s)\|,\ s \leqslant 0. \tag{17}$$

Обозначим через $y^*(s)$, $s \leqslant 0$, траекторию системы (12), порожденную управлением (17).

5. Третья базовая задача

Третья базовая задача имеет вид

$$\frac{dz}{d\tau} = C_3 z + D_3 u,\ z(0) = 0,\ z(-\infty) = -C_3^{-1}D_3\frac{\Pi\Delta(0)}{\|\Pi\Delta(0)\|},$$
$$J_3(u) = \int_{-\infty}^{0} (\|\Pi\Delta(0)\| - \Pi\Delta^{\mathrm{T}}(0)u)d\tau \to \min. \tag{18}$$

Предположение 6. Выполнено условие управляемости

$$\operatorname{rank}\left(D_3, C_3D_3, C_3^2D_3, \ldots, C_3^{n_3-1}D_3\right) = n_3.$$

В задаче (18) точка $(-C_3^{-1}D_3\Pi\Delta(0)/\|\Pi\Delta(0)\|)$ является положением равновесия динамической системы при управлении $u(\tau) \equiv \Pi\Delta(0)/\|\Pi\Delta(0)\|$, $\tau \leqslant 0$, которое обращает в нуль подынтегральное

выражение в критерии качества. Отмеченное свойство вместе с предположениями 1 и 6 гарантирует существование допустимых управлений в третьей базовой задаче. Отсюда, в свою очередь, следует, что эта задача имеет решение [11, теорема 4.7] и является нормальной. Последнее означает, что принцип максимума [12] можно сформулировать для задачи (18) следующим образом: пусть $u_*(\tau)$, $\tau \leqslant 0$, – оптимальное управление в третьей базовой задаче, тогда

$$\mathrm{Q}\Delta^{\mathrm{T}}(\tau)u_*(\tau) = \max_{|u|\leqslant 1} \mathrm{Q}\Delta^{\mathrm{T}}(\tau)u,\ \tau \leqslant 0, \tag{19}$$

где $\mathrm{Q}\Delta(\tau) = D_3^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}\psi(\tau) + \Pi\Delta(0)$, а $\mathrm{Q}\psi(\tau)$, $\tau \leqslant 0$, – решение сопряженной системы

$$\frac{d\mathrm{Q}\psi}{d\tau} = -C_3^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}\psi.$$

Пусть $\chi_0 = \mathrm{Q}\psi(0)$, тогда

$$\mathrm{Q}\Delta(\tau) = \mathrm{Q}\Phi^{\mathrm{T}}(\tau)\chi_0 + \Pi\Delta(0),\ \tau \leqslant 0, \tag{20}$$

где

$$\mathrm{Q}\Phi(\tau) = G_1(\tau)D_3, \tau \leqslant 0, \tag{21}$$

а $G_1(\tau)$, $\tau \leqslant 0$, – $(n_3 \times n_3)$-матричная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{dG_1}{d\tau} = -G_1C_3,\ G_1(0) = E_{n_3}. \tag{22}$$

Предположение 7. Выполняется условия $\mathrm{Q}\Delta(\tau) \neq 0$, $\tau \leqslant 0$.

Тогда из (19) следует, что

$$u_*(\tau) = \mathrm{Q}\Delta(\tau)/\|\mathrm{Q}\Delta(\tau)\|,\ \tau \leqslant 0. \tag{23}$$

Обозначим через $z_*(\tau)$, $\tau \leqslant 0$, траекторию системы (5), порожденную управлением (23).

Подчеркнем, что единственная информация о решении второй и третьей базовых задач, которая используется при построении асимптотически субоптимального управления, – это начальные значения η_0, ν_0 векторов сопряженных переменных. Нет необходимости строить оптимальные управления $u^*(s)$, $s \leqslant 0$, $u_*(\tau)$, $\tau \leqslant 0$, что, впрочем, и невозможно, если задача решается численно. Во второй и третьей базовых задачах гамильтониан вдоль оптимального управления равен нулю. Воспользовавшись этим свойством при $s = 0$ и $\tau = 0$, получаем условия, которым удовлетворяют векторы σ_0 и χ_0:

$$\|D_4^{\mathrm{T}}\sigma_0 + \Delta_0(t^*)\| = \|\Delta_0(t^*)\|,\ \|D_3^{\mathrm{T}}\chi_0 + \Pi\Delta(0)\| = \|\Pi\Delta(0)\|.$$

После решения базовых задач найдем векторы

$$\nu_0 = \sigma_0 - \left((B_1 - C_1C_3^{-1}B_3)B^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\lambda_0, \eta_0 = \chi_0 - \left(C_1C_3^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\lambda_0 - \left(C_2C_3^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\nu_0 \tag{24}$$

и сформируем матрицу

$$I_0 = \begin{pmatrix} S_1 & 0_{n_1\times n_2} & 0_{n_1\times n_3} & c_1 \\ S_2 & S_3 & 0_{n_2\times n_3} & c_2 \\ S_4 & S_5 & S_6 & c_3 \\ c_4^{\mathrm{T}} & 0_{n_2}^{\mathrm{T}} & 0_{n_3}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

размеров $(n_1 + n_2 + n_3 + 1) \times (n_1 + n_2 + n_3 + 1)$, блоки которой определяются формулами

$$S_1 = L_0 \int_0^{t^*} \frac{\Phi_0(t)(\|\Delta^0(t)\|^2E_r - \Delta^0(t)\Delta^{0\mathrm{T}}(t))\Phi_0^{\mathrm{T}}(t)}{\|\Delta^0(t)\|^3}dt,$$

$$S_2 = KS_1 + L_0 \int_{-\infty}^{0} \frac{\Pi\Phi(s)(\|\Pi\Delta(s)\|^2E_r - \Pi\Delta(s)\Pi\Delta^{\mathrm{T}}(s))(-P\Pi\Phi^{\mathrm{T}}(s) + D_0)^{\mathrm{T}}}{\|\Pi\Delta(s)\|^3}ds,$$

$$S_3 = L_0 \int_{-\infty}^{0} \frac{\Pi\Phi(s)(\|\Pi\Delta(s)\|^2E_r - \Pi\Delta(s)\Pi\Delta^{\mathrm{T}}(s))\Pi\Phi^{\mathrm{T}}(s)}{\|\Pi\Delta(s)\|^3}ds,$$

$$S_4 = MS_1 - C_3^{-1}B_3(S_2 - KS_1) +$$
$$+L_0\int_{-\infty}^{0}\frac{Q\Phi(\tau)\left(\|Q\Delta(\tau)\|^2E_r - Q\Delta(\tau)Q\Delta^{\mathrm{T}}(\tau)\right)\left(D_0^{\mathrm{T}} - \Pi\Phi^{\mathrm{T}}(0)P^{\mathrm{T}} + Q\Phi^{\mathrm{T}}(\tau)(C_1C_3^{-1})^{\mathrm{T}}\right)}{\|Q\Delta(\tau)\|^3}\,d\tau,$$

$$S_5 = -C_3^{-1}B_3S_3 + L_0\int_{-\infty}^{0}\frac{Q\Phi(\tau)\left(\|Q\Delta(\tau)\|^2E_r - Q\Delta(\tau)Q\Delta^{\mathrm{T}}(\tau)\right)\left(\Pi\Phi^{\mathrm{T}}(0) + Q\Phi^{\mathrm{T}}(\tau)(C_2C_3^{-1})^{\mathrm{T}}\right)}{\|Q\Delta(\tau)\|^3}\,d\tau,$$

$$S_6 = L_0\int_{-\infty}^{0}\frac{Q\Phi(\tau)(\|Q\Delta(\tau)\|^2E_r - Q\Delta(\tau)Q\Delta^{\mathrm{T}}(\tau))Q\Phi^{\mathrm{T}}(\tau)}{\|Q\Delta(\tau)\|^3}d\tau,$$

$$c_1 = \int_0^{t^*}\frac{\Phi_0(t)\Delta^0(t)}{\|\Delta^0(t)\|}dt = -F_0(0)x_*/L_0,$$

$$c_2 = Kc_1,\ c_3 = Mc_1,\ c_4 = F_0(0)x_*.$$

Здесь $K = -B^{-1}(A_2 - C_2C_3^{-1}A_3)$, $M = -C_3^{-1}(A_3 - B_3K)$, $P = -(B_1 - C_1C_3^{-1}B_3)B^{-1}$.

6. Асимптотический анализ решения исходной задачи

Прежде чем продолжить изложение алгоритма построения асимптотически субоптимальных управлений, сформулируем и докажем теорему, которая позволяет установить вид и асимптотические свойства решения задачи (1)–(3).

Обозначим через $\psi(t,\lambda,\nu,\eta,\mu)$, $t\in T$, $\lambda\in R^{n_1}$, $\nu\in R^{n_2}$, $\eta\in R^{n_3}$, решение сопряженной системы

$$\dot\psi = -A^{\mathrm{T}}(\mu)\psi,\ \psi(t^*) = (\lambda,\mu\nu,\mu^2\eta) \tag{26}$$

и введем в рассмотрение вектор-функцию

$$\Delta(t,\lambda,\nu,\eta,\mu) = D^{\mathrm{T}}(\mu)\psi(t,\lambda,\nu,\eta,\mu), \tag{27}$$

которую называют коуправлением.

Теорема 6.1. *При выполнении предположений* 1–7 *в задаче* (1)–(3) *с достаточно малым положительным* μ *существует оптимальное управление, которое представимо в виде*

$$u(t,\mu) = L(\mu)\Delta(t,\lambda,\nu,\eta,\mu)/\|\Delta(t,\lambda,\nu,\eta,\mu)\|,\ t\in T. \tag{28}$$

Для начальных значений сопряженных переменных и оптимальной интенсивности имеют место асимптотические разложения

$$\lambda(\mu)\sim\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\lambda_k,\ \nu(\mu)\sim\nu_0+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\nu_k,\ \eta(\mu)\sim\eta_0+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\eta_k,\ L(\mu)\sim L_0+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^kL_k. \tag{29}$$

Доказательство. Прежде чем перейти к доказательству теоремы, обратим внимание на то, что в разложениях (29) λ_0, L_0 суть начальное значение сопряженной переменной и оптимальная интенсивность в первой базовой задаче, а векторы ν_0, η_0 вычисляются по формулам (24).

В первую очередь убедимся, что при достаточно малом μ и векторах λ, ν, η, достаточно близких к λ_0, ν_0, η_0 соответственно, коуправление (27), рассматриваемое как функция временного аргумента t, не обращается в нуль на отрезке T. Заметим, что в силу (26) оно представимо в виде

$$\Delta^{\mathrm{T}}(t,\lambda,\nu,\eta,\mu) = (\lambda^{\mathrm{T}},\mu\nu^{\mathrm{T}},\mu^2\eta^{\mathrm{T}})F(t,\mu)D(\mu), \tag{30}$$

где $F(t,\mu)$, $t\in T$, – матричная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\dot F = -FA(\mu),\ F(t^*) = E_{n_1+n_2+n_3}. \tag{31}$$

Решение этого сингулярно возмущенного уравнения удобно представлять в блочном виде

$$F(t,\mu)=\begin{pmatrix} F_1(t,\mu) & F_2(t,\mu) & F_3(t,\mu)\\ F_4(t,\mu) & F_5(t,\mu) & F_6(t,\mu)\\ F_7(t,\mu) & F_8(t,\mu) & F_9(t,\mu)\end{pmatrix}, \tag{32}$$

где F_i, $i=\overline{1,9}$, – матрицы размеров $n_1\times n_1$, $n_1\times n_2$, $n_1\times n_3$, $n_2\times n_1$, $n_2\times n_2$, $n_2\times n_3$, $n_3\times n_1$, $n_3\times n_2$, $n_3\times n_3$ соответственно. С помощью метода пограничных функций [10] они могут быть разложены в асимптотические ряды:

$$\begin{gathered} F_i(t,\mu)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(F_{ik}(t)+\Pi_kF_i(s)+\mathrm{Q}_kF_i(\tau)),\\ s=(t-t^*)/\mu,\ \tau=(t-t^*)/\mu^2,\ t\in T,\ i=\overline{1,9}. \end{gathered} \tag{33}$$

Подчеркнем, что (33) – равномерные по $t\in T$ асимптотические разложения. Отметим как существенный факт также то, что для матричных функций $\Pi_kF_i(s)$, $s\leqslant 0$, $Q_kF_i(\tau)$, $\tau\leqslant 0$, называемых пограничными членами, имеют место оценки

$$\|\Pi_kF_i(s)\|\leqslant\beta_{1k}\exp(\gamma_{1k}s),\ \|\mathrm{Q}_kF_i(\tau)\|\leqslant\beta_{2k}\exp(\gamma_{2k}\tau) \tag{34}$$

для всех $i=\overline{1,9}$, $k=0,1,\ldots$, где β_{1k}, β_{2k}, γ_{1k}, γ_{2k} – положительные постоянные. Приведем несколько старших коэффициентов разложений (33), которые понадобятся при доказательстве теоремы:

$$\begin{gathered} F_{10}=F_0,\ F_{40}=KF_0,F_{70}=MF_0,\ F_{i0}=0,\ i=2,3,5,6,8,9,\\ F_{21}=F_0P,\ F_{51}=KF_0P,\ F_{81}=MF_0P,\ F_{i1}=0,\ i=3,6,9,\\ F_{32}=-F_0(C_1+PC_2)C_3^{-1},\ F_{62}=-KF_0(C_1+PC_2)C_3^{-1},\\ F_{92}=-MF_0(C_1+PC_2)C_3^{-1},\\ \Pi_0F_4=-GK,\Pi_0F_5=G,\ \Pi_0F_7=C_3^{-1}B_3GK,\ \Pi_0F_8=-C_3^{-1}B_3G,\\ \Pi_0F_i=0,\ i=1,2,3,6,9,\ \Pi_1F_2=-PG,\\ \Pi_1F_3=0,\ \Pi_1F_6=-GC_2C_3^{-1},\ \Pi_1F_9=C_3^{-1}B_3GC_2C_3^{-1},\ \Pi_2F_3=PGC_2C_3^{-1},\\ \mathrm{Q}_0F_i=0,\ i=\overline{1,6},\ \mathrm{Q}_0F_7=G_1C_3^{-1}A_3,\ \mathrm{Q}_0F_8=G_1C_3^{-1}B_3,\ \mathrm{Q}_0F_9=G_1,\\ \mathrm{Q}_1F_2=0,\mathrm{Q}_1F_3=0,\ \mathrm{Q}_1F_5=C_2C_3^{-1}G_1C_3^{-1}B_3,\\ \mathrm{Q}_1F_6=C_2C_3^{-1}G_1,\ \mathrm{Q}_2F_3=C_1C_3^{-1}G_1. \end{gathered} \tag{35}$$

Здесь F_0, G, G_1 – соответственно решения уравнений (8), (16), (22).

Введем в рассмотрение матричную функцию

$$\Phi(t,\mu)=F(t,\mu)D(\mu)=\begin{pmatrix} F_1(t,\mu)D_1+F_2(t,\mu)D_2/\mu+F_3(t,\mu)D_3/\mu^2\\ F_4(t,\mu)D_1+F_5(t,\mu)D_2/\mu+F_6(t,\mu)D_3/\mu^2\\ F_7(t,\mu)D_1+F_8(t,\mu)D_2/\mu+F_9(t,\mu)D_3/\mu^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Phi_1(t,\mu)\\ \Phi_2(t,\mu)\\ \Phi_3(t,\mu)\end{pmatrix}, \tag{36}$$

определенную на отрезке T. Из (15), (21) (32), (33), (35) следует, что имеют место равномерные по $t\in T$ асимптотические разложения

$$\begin{gathered} \Phi_1(t,\mu)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(\Phi_{1k}(t)+\Pi_k\Phi_1(s)+\mathrm{Q}_k\Phi_1(\tau)),\\ \Phi_2(t,\mu)-\Pi\Phi(s)/\mu\sim\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(\Phi_{2k}(t)+\Pi_k\Phi_2(s)+\mathrm{Q}_k\Phi_2(\tau)),\\ \Phi_3(t,\mu)-\mathrm{Q}\Phi(\tau)/\mu^2\sim\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(\Phi_{3k}(t)+\Pi_k\Phi_3(s)+\mathrm{Q}_k\Phi_3(\tau)), \end{gathered} \tag{37}$$

в которой

$$\begin{gathered} \Phi_{1k}=F_{1k}D_1+F_{2,k+1}D_2+F_{3,k+2}D_3,\ \Pi_k\Phi_1=\Pi_kF_1D_1+\Pi_{k+1}F_2D_2+\Pi_{k+2}F_3D_3,\\ \mathrm{Q}_k\Phi_1=\mathrm{Q}_kF_1D_1+\mathrm{Q}_{k+1}F_2D_2+\mathrm{Q}_{k+2}F_3D_3, \end{gathered}$$

$$\Phi_{2k} = F_{4k}D_1 + F_{5,k+1}D_2 + F_{6,k+2}D_3,\ \Pi_k\Phi_2 = \Pi_k F_4 D_1 + \Pi_{k+1}F_5 D_2 + \Pi_{k+2}F_6 D_3,$$
$$\mathrm{Q}_k\Phi_2 = \mathrm{Q}_k F_4 D_1 + \mathrm{Q}_{k+1}F_5 D_2 + \mathrm{Q}_{k+2}F_6 D_3,$$
$$\Phi_{3k} = F_{7k}D_1 + F_{8,k+1}D_2 + F_{9,k+2}D_3,\ \Pi_k\Phi_3 = \Pi_k F_7 D_1 + \Pi_{k+1}F_8 D_2 + \Pi_{k+2}F_9 D_3,$$
$$\mathrm{Q}_k\Phi_3 = \mathrm{Q}_k F_7 D_1 + \mathrm{Q}_{k+1}F_8 D_2 + \mathrm{Q}_{k+2}F_9 D_3.$$

Заметим, что в силу (10), (15), (21), (35) имеем

$$\begin{gathered}\Phi_{10}(t) = \Phi_0(t), \Phi_{20}(t) = K\Phi_0(t), \Phi_{30}(t) = M\Phi_0(t), t \in T,\\ \Pi_0\Phi_1(s) = -P\Pi\Phi(s),\ s \leqslant 0,\ \mathrm{Q}_0\Phi_1(\tau) = C_1C_3^{-1}\mathrm{Q}\Phi(\tau),\ \mathrm{Q}_1\Phi_2(\tau) = C_2C_3^{-1}\mathrm{Q}\Phi(\tau),\ \tau \leqslant 0.\end{gathered} \tag{38}$$

Как видно из (30), (36), коуправление представимо в виде

$$\Delta^{\mathrm{T}}(t,\lambda,\nu,\eta,\mu) = \lambda^{\mathrm{T}}\Phi_1(t,\mu) + \mu\nu^{\mathrm{T}}\Phi_2(t,\mu) + \mu^2\eta^{\mathrm{T}}\Phi_3(t,\mu),\ t \in T,$$

и, следовательно, разлагается в асимптотический ряд

$$\begin{gathered}\Delta(t,\lambda,\nu,\eta,\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(\Delta_k(t,\lambda,\nu,\eta) + \Pi_k\Delta(s,\lambda,\nu,\eta) + \mathrm{Q}_k\Delta(\tau,\lambda,\nu,\eta)),\\ s = (t-t^*)/\mu,\ \tau = (t-t^*)/\mu^2,\end{gathered} \tag{39}$$

где

$$\Delta_0^{\mathrm{T}}(t) = \lambda^{\mathrm{T}}\Phi_{10},\ \Pi_0\Delta^{\mathrm{T}}(s) = \lambda^{\mathrm{T}}\Pi_0\Phi_1(s) + \nu^{\mathrm{T}}\Pi\Phi(s),$$
$$\mathrm{Q}_0\Delta^{\mathrm{T}}(\tau) = \lambda^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}_0\Phi_1(\tau) + \nu^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}_1\Phi_2(\tau) + \eta^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}\Phi(\tau).$$

Разложение (39) будет равномерным в области $t \in T$, $\|(\lambda,\nu,\eta) - (\lambda_0,\nu_0,\eta_0)\| < \epsilon$, где ϵ – некоторое положительное число. Заметим, что из (9), (24), (38) следуют соотношения

$$\begin{gathered}\Delta_0(t,\lambda_0,\nu_0,\eta_0) = \Delta^0(t),\ t \in T,\ \Pi_0\Delta(s,\lambda_0,\nu_0,\eta_0) = \Pi\Phi^{\mathrm{T}}(s)\sigma_0,\ s \leqslant 0,\\ \mathrm{Q}_0\Delta(\tau) = \mathrm{Q}\Phi^{\mathrm{T}}(\tau)\chi_0, \tau \leqslant 0.\end{gathered} \tag{40}$$

Используя предположения 1, 3, 5, 7 с учетом равенств (14), (20) легко убедиться в том, что при достаточно малом μ выполнено условие $\Delta^0(t) + \Pi\Phi^{\mathrm{T}}((t-t^*)/\mu)\sigma_0 + \mathrm{Q}\Phi^{\mathrm{T}}((t-t^*)/\mu^2)\chi_0 \neq$ $\neq 0$, $t \in T$. Тогда, как видно из (39), (40), вектор-функция (27) отлична от нуля в области $t \in T$, $\|(\lambda,\nu,\eta) - (\lambda_0,\nu_0,\eta_0)\| < \epsilon_0$, $0 < \mu < \mu_0$, где ϵ_0, μ_0 – достаточно малые положительные числа.

В дальнейшем для сокращения записи будем использовать обозначения $\theta = (\lambda,\nu,\eta,L)$, $\theta_0 = (\lambda_0,\nu_0,\eta_0,L_0)$, где L – положительное число.

Рассмотрим управление $u(t,\theta,\mu) = L\Delta(t,\lambda,\nu,\eta,\mu)/\|\Delta(t,\lambda,\nu,\eta,\mu)\|$, $t \in T$, $\|(\lambda,\nu,\eta) -$ $-(\lambda_0,\nu_0,\eta_0)\| < \epsilon_0$, $0 < \mu < \mu_0$, $L > 0$, и обозначим через $X(t,\theta,\mu) = (x(t,\theta,\mu), y(t,\theta,\mu), z(t,\theta,\mu))$, $t \in T$, траекторию системы (1), им порожденную. Ниже будет показано, что вопрос о существовании оптимального управления в исходной задаче и о его асимптотических свойствах тесно связан с разрешимостью системы конечных уравнений

$$X(t^*,\theta,\mu) = 0,\ (\lambda,\mu\nu,\mu^2\eta)F_0(0,\mu)X_* + 1 = 0 \tag{41}$$

относительно неизвестных λ, ν, η, L при достаточно малом положительном μ. Для этого прежде всего убедимся, что левые части уравнений (41) допускают асимптотические разложения по целым степеням малого параметра, и получим формулы для коэффициентов разложений.

Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$R(\theta,\mu) = \begin{pmatrix} X(t^*,\theta,\mu) \\ (\lambda,\mu\nu,\mu^2\eta)F(0,\mu)X_* + 1 \end{pmatrix} \tag{42}$$

размерности $n_1 + n_2 + n_3 + 1$, что позволяет записать систему уравнений (41) в виде

$$R(\theta,\mu) = 0. \tag{43}$$

В силу формулы Коши и (31), (36) имеем

$$X(t^*,\theta,\mu) = F(0,\mu)X_* + \int_0^{t^*}\frac{\Phi(t,\mu)\Delta(t,\lambda,\nu,\eta,\mu)}{\|\Delta(t,\lambda,\nu,\eta,\mu)\|}dt.$$

Как было показано, блоки матриц $F(t,\mu)$, $\Phi(t,\mu)$ и вектор-функция $\Delta(t,\lambda,\nu,\mu)$ разлагаются в асимптотические ряды (см. (33), (37), (39)). Отсюда и из формул (34), (35) следует, что справедливо асимптотическое разложение

$$x(t^*,\theta,\mu)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k x_k(\theta),\ y(t^*,\theta,\mu)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k y_k(\theta),\ z(t^*,\theta,\mu)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k z_k(\theta), \tag{44}$$

в котором

$$x_0(\theta)=F_0(0)x_*+L\int_0^{t^*}\frac{\Phi_0(t)\Delta_0(t,\lambda)}{\|\Delta_0(t,\lambda)\|}\,dt,$$

$$y_0(\theta)=Kx_0(\theta)+L\int_{-\infty}^{0}\frac{\Pi\Phi(s)\delta_0(s)}{\|\delta_0(s)\|}\,ds, \tag{45}$$

$$z_0(\theta)=Mx_0(\theta)-C_3^{-1}B_3\big(y_0(\theta)-Kx_0(\theta)\big)+L\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{Q}\Phi(\tau)\delta_0^*(\tau)}{\|\delta_0^*(\tau)\|}\,d\tau,$$

$$\begin{gathered}x_1(\theta)=F_{11}(0)x_*+F_{21}(0)y_*+F_{31}(0)z_*+\\ +L\int_0^{t^*}\left(\frac{\Phi_{11}(t)\Delta_0(t,\lambda)}{\|\Delta_0(t,\lambda)\|}+\Phi_{10}(t)\left[\frac{\Delta_1(t,\lambda,\nu)}{\|\Delta_0(t,\lambda)\|}-\frac{\Delta_0(t,\lambda)\Delta_0^{\mathrm{T}}(t,\lambda)\Delta_1(t,\lambda,\nu)}{\|\Delta_0(t,\lambda)\|^3}\right]\right)dt+\\ +L\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{\big(\Phi_{10}(t^*)+\Pi_0\Phi_1(s)\big)\delta_0(s)}{\|\delta_0(s)\|}-\frac{\Phi_{10}(t^*)\Delta_0(t^*,\lambda)}{\|\Delta_0(t^*,\lambda)\|}\right)ds,\end{gathered} \tag{46}$$

$$\begin{gathered}y_1(\theta)=Kx_1(\theta)+B^{-1}KA_0x_0(\theta)+\\ +L\int_{-\infty}^{0}\Pi_0\Phi_2(s)\left[\frac{\delta_1(s)}{\|\delta_0(s)\|}-\frac{\delta_0(s)\delta_0^{\mathrm{T}}(s)\delta_1(s)}{\|\delta_0(s)\|^3}\right]ds-\\ -LC_2C_3^{-1}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{Q}\Phi(\tau)\left(\frac{\delta_0^*(\tau)}{\|\delta_0^*(\tau)\|}-\frac{\delta_0(0)}{\|\delta_0(0)\|}\right)d\tau,\end{gathered} \tag{47}$$

$$z_1(\theta)=-C_3^{-1}\big(A_3x_1(\theta)+B_3y_1(\theta)\big)+L\int_{-\infty}^{0}\mathrm{Q}\Phi(\tau)\left(\frac{\delta_0^*(\tau)}{\|\delta_0^*(\tau)\|}-\frac{\delta_0(0)}{\|\delta_0(0)\|}\right)d\tau. \tag{48}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\delta_0(s)=\Delta_0(t^*,\lambda)+\Pi_0\Delta(s,\lambda,\nu),\\ \delta_0^*(\tau)=\delta_0(0)+\mathrm{Q}_0\Delta(\tau,\lambda,\nu,\eta)=\Delta_0(t^*,\lambda)+\Pi_0\Delta(0,\lambda,\nu)+\mathrm{Q}_0\Delta(\tau,\lambda,\nu,\eta),\\ \delta_1(s)=\Delta_1(t^*,\lambda,\nu)+s\dot\Delta_0(t^*,\lambda)+\Pi_1\Delta(s,\lambda,\nu).\end{gathered} \tag{49}$$

Как видно из (33)–(35), (42), (44), имеет место асимптотическое разложение

$$R(\theta,\mu)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k R_k(\theta), \tag{50}$$

в котором

$$\begin{gathered}R_k(\theta)=\begin{pmatrix}X_k(t^*,\theta)\\ f_k(\theta)\end{pmatrix},\\ f_0(\theta)=\lambda^{\mathrm{T}}F_0(0)x_*+1,\ f_1(\theta)=\lambda^{\mathrm{T}}(F_{11}(0)x_*+F_0(0)Py_*)+\nu^{\mathrm{T}}KF_0(0)x_*,\\ f_k(\theta)=\lambda^{\mathrm{T}}(F_{1k}(0)x_*+F_{2k}(0)y_*+F_{3k}(0)z_*)+\nu^{\mathrm{T}}(F_{4,k-1}(0)x_*+F_{5,k-1}(0)y_*+F_{6,k-1}(0)z_*)+\\ +\eta^{\mathrm{T}}(F_{7,k-2}(0)x_*+F_{8,k-2}(0)y_*+F_{9,k-2}(0)z_*),\ k=2,3,4,\ldots.\end{gathered} \tag{51}$$

Положим $R(\theta,0)=R_0(\theta)$. Тогда вектор-функция $R(\theta,\mu)$ будет непрерывной вместе со своими частными производными по компонентам вектора θ в области $\|\theta-\theta_0\|<\epsilon_0$, $0\leqslant\mu<\mu_0$.

Из формул (7), (8), (10) (11), (14)–(17), (20)–(23), (38), (40), (45), (49) и (51) следует, что

$$x_0(\theta_0) = F_0(0)x_* + \int_0^{t^*} \Phi_0(t)u^0(t)dt = x(t^*) = 0,$$

$$y_0(\theta_0) = Kx_0(t^*) + L_0 \int_{-\infty}^{0} \Pi\Phi(s)u^*(s)ds = y^*(0) = 0,$$

$$z_0(\theta_0) = Mx^0(t^*) - C_3^{-1}B_3y^*(0) + L_0 \int_{-\infty}^{0} Q\Phi(\tau)u_*(\tau)\,d\tau = z_*(0) = 0,$$

$$f_0(\theta_0) = \psi^{0\mathrm{T}}(t^*)F_0(0)x_* + 1 = 0.$$

Тогда, как видно из (51), $R(\theta_0,0) = R_0(\theta_0) = 0$.

Непосредственным дифференцированием (45), (51), учитывая (38), (40), убеждаемся, что $\partial R(\theta_0,0)/\partial\theta = \partial R_0(\theta_0)/\partial\theta = I_0$ (см. (25)). Покажем, что эта матрица Якоби является невырожденной.

Сначала убедимся, что первые $n_1+n_2+n_3$ столбцов матрицы I_0 линейно независимы. Предположим противное. Тогда существуют такие векторы $\lambda \in R^{n_1}$, $\nu \in R^{n_2}$, $\eta \in R^{n_3}$, $(\lambda,\nu,\eta) \neq 0$, что

$$S_1\lambda = 0, S_2\lambda + S_3\nu = 0, S_4\lambda + S_5\nu + S_6\eta = 0, \tag{52}$$

$$\lambda^{\mathrm{T}}F_0(0)x_* = 0. \tag{53}$$

Пусть $\lambda \neq 0$, тогда имеем

$$\lambda^{\mathrm{T}}S_1\lambda = L_0 \int_0^{t^*} \frac{\|\Delta^0(t)\|^2\|\Delta(t,\lambda)\|^2 - (\Delta^{0\mathrm{T}}(t)\Delta(t,\lambda))^2}{\|\Delta^0(t)\|^3}dt,$$

где $\Delta(t,\lambda) = \Phi_0^{\mathrm{T}}(t)\lambda = D_0^{\mathrm{T}}F_0^{\mathrm{T}}(t)\lambda$, $t \in T$. В силу неравенства Коши–Буняковского–Шварца, подынтегральное выражение в этой формуле в любой момент времени неотрицательно, а интеграл равен нулю лишь в том случае, когда $\Delta(t,\lambda) = k(t)\Delta_0(t)$, $t \in T$, где $k(t)$ – скаляр. Однако при выполнении предположения 3 этот случай реализоваться не может, поскольку тогда для управления $u^0(t)$, $t \in T$, будет выполняться принцип максимума с вектором сопряженных переменных $\psi(t)$, $t \in T$, принимающим в момент t^* значение $\lambda_0 + \epsilon\lambda$, где ϵ – достаточно малое (по модулю) число. Действительно, коуправление, построенное по этому вектору, представимо в виде $\Delta(t) = D_0^{\mathrm{T}}\psi(t) = (1+\epsilon k(t))\Delta_0(t)$, $t \in T$, и вместе с тем, в силу (7), (53),

$$\psi^{\mathrm{T}}(t^*)F_0(0)x_* = (\lambda_0 + \epsilon\lambda)F_0(0)x_* = \psi^{0\mathrm{T}}(t^*)F_0(0)x_* = -1.$$

Таким образом, первое из равенств (52) влечет за собой $\lambda = 0$ и второе можно записать в виде $S_3\nu = 0$. Поскольку вторая базовая задача является нормальной, такое равенство имеет место лишь для $\nu = 0$. В этом можно убедиться с помощью рассуждений, аналогичных только что приведенным. Аналогично из третьего равенства в (52) следует, что $\eta = 0$. Итак, предположение о существовании ненулевого вектора (λ,ν,η), для которого справедливы равенства (52), (53), оказалось неверным. Поэтому первые $n_1+n_2+n_3$ столбцов матрицы (25) линейно независимы. Поскольку выполняется равенство $S_1\lambda_0 = 0$, то можно утверждать, что первые $n_1+n_2+n_3$ столбцов матрицы (25) ортогональны вектору $(\lambda_0,0)$ размерности $n_1+n_2+n_3+1$. Вместе с тем последний столбец этому вектору неортогонален, так как, в силу (7),

$$\lambda_0^{\mathrm{T}}c_1 = -\lambda_0^{\mathrm{T}}F_0(0)x_*/L_0 = -\psi^{0\mathrm{T}}(t^*)F_0(0)x_*/L_0 = 1/L_0 \neq 0.$$

Тогда все столбцы матрицы I_0 линейно независимы, что означает ее невырожденность.

Таким образом, для системы (43) или, что то же самое, (41) выполнены условия теоремы о неявной функции. Согласно этой теореме, в некоторой правосторонней окрестности нуля $0 \leqslant \leqslant \mu < \mu_1$ однозначно определены непрерывные функции $\lambda(\mu)$, $\nu(\mu)$, $\eta(\mu)$, $L(\mu)$, удовлетворяющие уравнениям (41) и условиям $\lambda(0) = \lambda_0$, $\nu(0) = \nu_0$, $\eta(0) = \eta_0$, $L(0) = L_0$.

Разложение (50) является равномерным в области $\|\theta - \theta_0\| < \epsilon_0$, причем его коэффициенты – бесконечно дифференцируемые функции. Тогда, для решения $\theta(\mu) = (\lambda(\mu),\nu(\mu),\eta(\mu),L(\mu))$ системы (43) будут иметь место асимптотические разложения (29).

Рассмотрим управление (28). Оно будет допустимым в исходной задаче с $\mu < \mu_1$, поскольку для порожденной им траектории $X(t,\theta(\mu),\mu) = (x(t,\theta(\mu),\mu),y(t,\theta(\mu),\mu),z(t,\theta(\mu),\mu))$, $t \in T$, системы (1) выполнено условие $X(t,\theta(\mu),\mu) = 0$. Это управление удовлетворяет принципу максимума

(см. [6]) с вектором сопряженных переменных $\psi(t,\lambda(\mu),\nu(\mu),\eta(\mu),\mu)$, $t \in T$, и, следовательно, является оптимальным. Теорема доказана. □

Заметим, что решение (28) задачи (1)–(3) с достаточно малым μ будет гладкой функцией времени, так как $\Delta(t,\lambda(\mu),\nu(\mu),\eta(\mu),\mu) \neq 0$, $t \in T$, $\mu < \mu_1$.

7. Построение асимптотически субоптимальных управлений

Вернемся к алгоритму построения асимптотически субоптимальных управлений в исходной задаче. Вектор-функция

$$u^0(t,\mu) = L_0\Delta(t,\lambda_0,\nu_0,\eta_0,\mu)/\|\Delta(t,\lambda_0,\nu_0,\eta_0,\mu)\|,\ t \in T,$$

построенная по формуле (27) путем интегрирования сопряженной системы (26) с $\lambda = \lambda_0$, $\nu = \nu_0$, $\eta = \eta_0$ будет асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка в задаче (1)–(3). Заметим, что ее можно сформировать непосредственно после решения базовых задач. Асимптотически субоптимальное управление N-го порядка ($N \geqslant 1$) имеет вид

$$u^{(N)}(t,\mu) = L^{(N)}(\mu)\frac{\Delta(t,\lambda^{(N)}(\mu),\nu^{(N)}(\mu),\eta^{(N)}(\mu),\mu)}{\|\Delta(t,\lambda^{(N)}(\mu),\nu^{(N)}(\mu),\eta^{(N)}(\mu),\mu)\|},\ t \in T, \tag{54}$$

где

$$\lambda^{(N)}(\mu) = \sum_{k=0}^{N}\mu^k\lambda_k,\ \nu^{(N)}(\mu) = \sum_{k=0}^{N}\mu^k\nu_k,\ \eta^{(N)}(\mu) = \sum_{k=0}^{N}\mu^k\eta_k,\ L^{(N)}(\mu) = \sum_{k=0}^{N}\mu^k L_k. \tag{55}$$

Для построения управления (54) нужно найти коэффициенты λ_k, ν_k, η_k L_k, $k = 1,2,\ldots,N$, разложений (29). Это можно сделать методом неопределенных коэффициентов, который описывается ниже.

Пусть $\theta_k = (\lambda_k,\nu_k,\eta_k,L_k)$, $k = 1,2,\ldots,N$, $\theta(N)(\mu) = \sum_{k=0}^{N}\mu^k\theta_k$. Разложим с помощью формулы Тейлора вектор-функцию по степеням μ до порядка N включительно и приравняем коэффициенты разложения к нулю (начиная с коэффициента при μ). В результате получим невырожденные системы линейных уравнений для вычисления векторов h_k, $k = 1,2,\ldots,N$:

$$\begin{gathered} I_0\theta_1 = -R_1(\theta_0), \\ I_0\theta_2 = -R_2(\theta_0) - \frac{\partial R_1(\theta_0)}{\partial\theta}\theta_1 - \frac{1}{2}\theta_1^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 R_0(\theta_0)}{\partial\theta}\theta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{56}$$

Матрица I_0 имеет вид (25). При вычислении правых частей систем (56) по формулам (45)–(49), (51) следует учитывать равенства (40).

Последовательно решая системы (56), находим векторы $\theta_k = (\lambda_k,\nu_k,\eta_k,L_k)$, $k = 1,2,\ldots,N$, и составляем полиномы (55). Это дает возможность путем интегрирования сопряженной системы (26) с $\lambda = \lambda^{(N)}(\mu)$, $\nu = \nu^{(N)}(\mu)$, $\eta = \eta^{(N)}(\mu)$ построить по формуле (27) управление (54). Сопряженная система является сингулярно возмущенной и, следовательно, жесткой. Чтобы избежать интегрирования жестких систем, вместо вектор-функции $\Delta(t,\lambda^{(N)}(\mu),\nu^{(N)}(\mu),\eta^{(N)}(\mu),\mu)$ можно воспользоваться ее асимптотическим приближением

$$\begin{gathered} \Delta^{(N)}(t,\mu) = \sum_{k=0}^{N}\mu^k(\Delta_k(t,\lambda^{(N)}(\mu),\nu^{(N)}(\mu),\eta^{(N)}(\mu)) + \Pi_k\Delta(s,\lambda^{(N)}(\mu),\nu^{(N)}(\mu),\eta^{(N)}(\mu)) + \\ +\mathrm{Q}_k\Delta(\tau,\lambda^{(N)}(\mu),\nu^{(N)}(\mu),\eta^{(N)}(\mu))), \\ s = (t-t^*)/\mu,\ \tau = (t-t^*)/\mu^2, t \in T. \end{gathered}$$

Вектор-функция $\overline{u}^{(N)}(t,\mu) = L^{(N)}(\mu)\Delta^{(N)}(t,\mu)/\|\Delta^{(N)}(t,\mu)\|$, $t \in T$, наряду с (54) будет асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка в исходной задаче. В частности, как следует из (14), (20), (40), асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка имеет вид

$$\overline{u}^{(0)}(t,\mu) = L_0 \frac{\Delta^0(t) + D_4^{\mathrm{T}}\Pi\psi((t-t^*)/\mu) + D_3^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}\psi((t-t^*)/\mu^2)}{\|\Delta^0(t) + D_4^{\mathrm{T}}\Pi\psi((t-t^*)/\mu) + D_3^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}\psi((t-t^*)/\mu^2)\|},\ t \in T. \tag{57}$$

В силу предположения 1, вектор-функции $\Pi\psi(s)$, $s \leqslant 0$, $\mathrm{Q}\psi(\tau)$, $\tau \leqslant 0$, экспоненциально стремятся к нулю соответственно при $s \to -\infty$, $\tau \to -\infty$. Поэтому при малом μ управление (57) будет существенно отличаться от решения (11) первой базовой задачи лишь в пограничном слое, т. е. в некоторой левосторонней окрестности точки t^*.

Построенные асимптотические приближения корней системы уравнений (43) можно использовать для точного решения этой системы, а значит, и рассмотренной задачи при заданном значении μ. Для этого нужно применить процедуру доводки (см. [13]), т. е. найти с помощью метода Ньютона корни уравнения (43), взяв в качестве начального приближения $\theta^{(N)}(\mu)$. Чтобы упростить вычисления, вместо матрицы $\partial R(\theta,\mu)/\partial\theta$ можно воспользоваться ее приближением I_0.

8. Пример

В качестве примера рассмотрим задачу, которая является моделью процесса управления горизонтальным прямолинейным движением двух тел с существенно различными малыми массами и упругой связью:

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1 = y,\ \dot{x}_2 = z, \\
\mu\dot{y} = -kx_1 + kx_2 - c_1 y + d_1 u_1,\ \mu^2\dot{z} = kx_1 - kx_2 - c_2 z + d_2 u_2, \\
x_1(0) = x_{*1},\ x_2(0) = x_{*2},\ y(0) = y_*,\ z(0) = z_*, \\
x_1(t^*) = x_2(t^*) = y(t^*) = z(t^*) = 0, \\
J(u) = \sup_{t\in[0,t^*]} (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} \to \min.
\end{gathered} \tag{58}$$

Все постоянные в этой задаче положительны, при этом $\mu \ll 1$. Предположение 1 в данном случае выполнено.

Построим асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка в задаче (58) при конкретных значениях малого параметра в случае, когда $k = 1$, $c_1 = 3$, $c_2 = 1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $t^* = 5$, $x_{*1} = 5$, $x_{*2} = 2$, $y_* = -3$, $z_* = 1$.

Первая базовая задача имеет вид

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}u_1,\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + 2u_2,\ x_1(0) = 5,\ x_2(0) = 2, \\
x_1(5) = x_2(5) = 0,\ J_1(u) = \sup_{t\in[0,5]} (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} \to \min.
\end{gathered} \tag{59}$$

Легко убедиться, что предположение 2 в задаче (59) выполнено. Вектор коуправления имеет вид

$$\Delta^0(t) = \begin{pmatrix} -0,058700 - 0,034981e^{-\frac{4}{3}(5-t)} \\ -0,117500 + 0,209886e^{-\frac{4}{3}(5-t)} \end{pmatrix}, \quad t \in [0,5].$$

Предположение 3 также выполнено.

Оптимальное управление в первой базовой задаче имеет вид

$$u_1^0(t) = -\frac{0,059995(e^{-\frac{4}{3}(5-t)} + 1,680914)}{\sqrt{0,017287 - 0,045251e^{-\frac{4}{3}(5-t)} + 0,045276e^{-\frac{8}{3}(5-t)}}},$$

$$u_2^0(t) = \frac{0,359970(e^{-\frac{4}{3}(5-t)} - 0,560305)}{\sqrt{0,017287 - 0,045251e^{-\frac{4}{3}(5-t)} + 0,045276e^{-\frac{8}{3}(5-t)}}}.$$

Оптимальная интенсивность управления $L_0 = 1,715078$. После решения задачи (59) формируется вторая базовая задача

$$\begin{gathered}\frac{dy}{ds} = -3y + u_1,\ y(0) = 0, \|u(s)\| \leqslant 1, s \leqslant 0,\\ y(-\infty) = 0,237340,\ J_2(u) = \int_{-\infty}^{0}((\|\Delta^0(5)\| - \Delta^{0\mathrm{T}}(5)u(s)))ds \to \min.\end{gathered} \tag{60}$$

Динамическая система во второй базовой задаче вполне управляема.

Вектор $\Pi\Delta(s)$ имеет вид

$$\Pi\Delta(s) = \begin{pmatrix} 0,187362e^{3s} - 0,093681 \\ 0,092386 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, предположение 5 выполняется.

Оптимальное управление в задаче (60) представимо в виде

$$u_1^*(s) = \frac{0,187362e^{3s} - 0,093681}{\sqrt{(0,187362e^{3s} - 0,093681)^2 + 0,008535}},$$
$$u_2^*(s) = \frac{0,092386}{\sqrt{(0,187362e^{3s} - 0,093681)^2 + 0,008535}}.$$

Третья базовая задача имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{dz}{d\tau} = -z + 2u_2,\ z(0) = 0, \|u(\tau)\| \leqslant 1, \tau \leqslant 0,\\ z(-\infty) = 1,40434,\ J_3(u) = \int_{-\infty}^{0}(\|\Pi\Delta(0)\| - \Pi\Delta(0)^{\mathrm{T}}u)d\tau \to \min.\end{gathered} \tag{61}$$

Динамическая система в ней также является вполне управляемой. Вектор $\mathrm{Q}\Delta(\tau)$ имеет вид

$$\mathrm{Q}\Delta(\tau) = \begin{pmatrix} 0,093681 \\ -0,092386(2e^{\tau} - 1) \end{pmatrix}, \quad \tau \leqslant 0.$$

Следовательно, предположение 7 выполняется. Оптимальное управление в задаче (61) представимо в виде

$$u_{*1}(\tau) = \frac{0,093681}{\sqrt{0,008776 + 0,008535(2e^{\tau} - 1)^2}},$$
$$u_{*2}(\tau) = \frac{-0,092386(2e^{\tau} - 1)}{\sqrt{0,008776 + 0,008535(2e^{\tau} - 1)^2}}, \quad \tau \leqslant 0.$$

Согласно (57) управление

$$\begin{aligned}\overline{u}_1^{(0)}(t) &= 1,715078\frac{-0,058700 - 0,034981e^{-\frac{4}{3}(5-t)} + 0,187362e^{\frac{3(t-5)}{\mu}}}{\|N(t,\mu)\|},\\ \overline{u}_2^{(0)}(t) &= 1,715078\frac{-0,117500 + 0,209886e^{-\frac{4}{3}(5-t)} - 0,184772e^{\frac{t-5}{\mu^2}}}{\|N(t,\mu)\|},\end{aligned} \tag{62}$$

где

$$\|N(t,\mu)\|^2 = 0,017252 - 0,045216e^{-\frac{4}{3}(5-t)} + 0,045276e^{-\frac{8}{3}(5-t)} - 0,021996e^{\frac{3(t-5)}{\mu}} +$$
$$+0,043421e^{\frac{t-5}{\mu^2}} + 0,035105e^{\frac{6(t-5)}{\mu}} + 0,034141e^{\frac{2(t-5)}{\mu^2}} - 0,013108e^{-\frac{4}{3}(5-t)+\frac{3(t-5)}{\mu}} - 0,077562e^{-\frac{4}{3}(5-t)+\frac{t-5}{\mu^2}}$$

будет асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка в задаче (58).

Для оценки качества построенных асимптотических приближений к решению задачи (58) были найдены состояния $x_1(t^*,\mu)$, $x_2(t^*,\mu)$, $y(t^*,\mu)$, $z(t^*,\mu)$, в которые управление (62) переводит динамическую систему при конкретных значениях малого параметра. В частности, оказалось, что

$$\begin{array}{lll} x_1(5,\ 0,1) = -0,054552 & x_1(5,\ 0,025) = -0,013983 & x_1(5,\ 0,01) = -0,000257 \\ x_2(5,\ 0,1) = -0,026138 & x_2(5,\ 0,025) = 0,000876 & x_2(5,\ 0,01) = 0,001988 \\ y(5,\ 0,1) = 0,035885 & y(5,\ 0,025) = 0,015468 & y(5,\ 0,01) = 0,001140 \\ z(5,\ 0,1) = 0,342795 & z(5,\ 0,025) = 0,111720 & z(5,\ 0,01) = 0,002810. \end{array}$$

Результаты вычислений приведены с точностью до 10^{-6}.

9. Заключение

В статье предложены вычислительные процедуры построения асимптотических приближений к решению рассмотренной задачи, которые не требуют интегрирования сингулярно возмущенных систем. При реализации предложенных алгоритмов исходная задача оптимального управления распадается на три невозмущенные задачи меньшей размерности. Такая декомпозиция позволяет эффективно решать задачи оптимизации динамических систем с большим числом фазовых переменных. В статье также показывается, как можно использовать построенные асимптотические приближения для решения рассмотренной задачи при заданных значениях малого параметра.

Применяемая методика позволяет исследовать задачи, в которых имеется несколько групп быстрых переменных с иерархией скоростей по целым степеням малого параметра. При этом число задач, на которые распадается исходная задача, равно количеству групп разнотемповых переменных. Такое обобщение вносит в алгоритм непринципиальные изменения, которые легко прослеживаются на примере рассмотренной задачи. В то же время это приводит к громоздким формулам. Следует также отметить, что развитие полученных результатов на нестационарные системы с достаточно гладкими коэффициентами не вызывает принципиальных трудностей.

Заметим, что если в задаче (1)–(3) положить $n_3 = 0$, то при построении асимптотически субоптимальных управлений решаются только первая и вторая базовые задачи. Эти управления совпадают с теми, что построены в [7; 8].

Литература

1. *Дмитриев М. Г., Курина Г. А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // Автомат. и телемех. 2006. № 1. С. 3–51.

2. *Калинин А. И.* Асимптотика решений возмущенных задач оптимального управления // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 104–114.

3. *Zhang Y., Naidu D. S., Cai C., Zou Y.* Singular perturbation and time scales in control theories and applications. An overview 2002–2012 // Int. J. Information and Systems Sciences. 2014. Vol. 9, N 1. P. 1–36.

4. *Kokotovic P. V., Khalil H. K.* Singular Perturbations in Systems and Control. New York: IEEE Press, 1986.

5. *Курина Г. А., Калашникова М. А.* Сингулярно возмущенные задачи с разнотемповыми быстрыми переменными // Автомат. и телемех. 2022. № 11. С. 3–61.

6. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

7. *Калинин А. И.* Построение субоптимального решения сингулярно возмущенной задачи об управлении с минимальной интенсивностью // Автомат. и телемех. 2013. № 1. С. 47–58.

8. *Калинин А. И.* Асимптотический метод решения квазилинейной задачи об управлении минимальной силой // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С. 414–424.

9. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

10. *Васильева А. Б.* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1963. Т. 3, № 4. С. 611–642.

11. *Carlson D. A., Haurie F.* Infinite horizon optimal control // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Vol. 290. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

12. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.

13. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Конструктивные методы оптимизации. Минск: Университетское, 1984. Ч. 2.

References

1. Dmitriev M. G., Kurina G. A. Singular perturbations in control problems. *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 1, pp. 1–43.

2. Kalinin A. I. Asymptotics of solutions to perturbed optimal control problems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 1994, vol. 33, no. 6, pp. 102–111.

3. Zhang Y., Naidu D. S., Cai C., Zou Y. Singular perturbation and time scales in control theories and applications. An overview 2002–2012. *International Journal of Information and Systems Sciences*, 2014, vol. 9, no. 1, pp. 1–36.

4. Kokotovic P. V., Khalil H. K. *Singular Perturbations in Systems and Control*. New York, IEEE Press, 1986.

5. Kurina G. A., Kalashnikova M. A. Singularly perturbed problems with multi-rate fast variables. *Automation and Remote Control*, 2022, vol. 83, no. 11, pp. 1651–1695.

6. Krasovskii N. N. *Theory of Control of Motion*. Moscow, Nauka Publ., 1968 (in Russian).

7. Kalinin A. I. Construction of a suboptimal solution of a singularly perturbed minimum-intensity control problem. *Automation and Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 1, pp. 38–48.

8. Kalinin A. I. Asymptotic method of solving a quasilinear minimum-force control problem. *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 3, pp. 407–417.

9. Vasil'eva A. B., Butuzov V. F. *Asymptotic Expansions of Solutions of Singularly Perturbed Equations*. Moscow, Nauka Publ., 1973 (in Russian).

10. Vasil'eva A. B. Asymptotic methods in the theory of ordinary differential equations with small parameters multiplying the highest derivatives. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1963, vol. 3, no. 4, pp. 811–853.

11. Carlson D. A., Haurie F. *Infinite Horizon Optimal Control*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 290, Berlin, Springer-Verlag, 1987.

12. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York, Pergamon Press, 1964.

13. Gabasov R., Kirillova F. M. *Constructive Methods of Optimization*. Part 2. Minsk, Universitetskoe Publ., 1984 (in Russian).