Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 111–127

УДК 517.977 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-111–127
EDN: CSIBWG

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ, СОПРОВОЖДАЮЩИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ

Н. М. Дмитрук

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: dmitrukn@bsu.by

Поступила: 03.08.2026 **Исправлена:** 27.08.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: линейная система, неопределенность, информационное множество, оптимальное наблюдение, гарантированное управление, линейное программирование

Аннотация. Исследованы два класса задач оптимального наблюдения, которые возникают в связи с задачей оптимального гарантированного управления линейными системами по неточным и неполным измерениям состояний. Линейные задачи оптимального наблюдения связаны с построением оптимальных гарантирующих программ и позволяют получать оценки информационных множеств, описывающих совместимые с записанными измерениями состояния. Задачи априорного оптимального наблюдения связаны с построением многократно замыкаемых стратегий управления и определением наихудших будущих информационных множеств. Эти задачи представляют собой специальные многоуровневые задачи математического программирования, для которых в работе разработана рекуррентная процедура их сведения к задачам линейного программирования большой размерности. Предложенные алгоритмы ориентированы на использование в системах оптимального гарантированного управления в реальном времени.

OPTIMAL OBSERVATION PROBLEMS ACCOMPANYING MEASUREMENT OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

N. M. Dmitruk

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: dmitrukn@bsu.by

Received: 03.08.2026 **Revised:** 27.08.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: linear system, uncertainty, information set, optimal observation, guaranteed control, linear programming

Abstract. Two classes of optimal observation problems arising in the context of optimal robust control of linear systems under inaccurate and incomplete state measurements are investigated. Linear optimal observation problems are associated with the construction of optimal guaranteed open-loop controls and provide estimates of information sets that describe states consistent with measurements obtained. A priori optimal observation problems are related to the synthesis of multiple-closable control strategies and the determination of the worst-case future information sets. These problems are formulated as specific multi-level mathematical programming problems, for which a recurrent procedure for their reduction to large-scale linear programming problems is developed. The proposed algorithms are oriented towards real-time applications in optimal guaranteed control systems.

1. Введение

Проблема управления динамическими системами в условиях неполной и неточной информации о текущем состоянии является одной из центральных в современной теории управления. В ситуациях, когда присутствующие в системе неопределенности, такие как неизвестные начальные состояния, внешние возмущения, ошибки измерений, имеют нестохастическую природу и известны лишь границы их изменения, наиболее адекватным является гарантированный подход к задачам оценивания и управления [1; 2]. В рамках этого подхода неопределенность состояния системы описывается информационным множеством – совокупностью всех векторов состояния, совместимых с записанными измерениями и заданными априорными ограничениями на неопределенные величины.

Задачи оптимального наблюдения в таких системах связаны с построением внешних или внутренних аппроксимаций информационного множества эллипсоидами, параллелотопами или

полиэдрами [1–4]. Однако в задачах оптимального управления по измерениям знать информационное множество или его аппроксимацию, как правило, не требуется, а формулировки задач оптимального наблюдения диктуются целями управления, а именно ограничениями на состояния и типом критерия качества [5–8]. При этом сложность решаемых задач наблюдения существенно зависит от используемого класса управлений.

В настоящей работе исследуются два типа задач оптимального наблюдения, сопровождающих задачи оптимального гарантированного управления по измерениям, для которых основные теоретические результаты были получены в работе [8]. Первый тип – линейные задачи наблюдения – связан с построением оптимальных гарантирующих программ, для которых требуется вычислять оценки информационного множества по реализовавшимся к текущему моменту времени измерениям [6; 9; 10]. Второй тип – задачи априорного наблюдения – возникает при синтезе многократно замыкаемых стратегий управления [7; 8], для которых требуется прогнозировать информационные множества в будущие моменты времени.

Основное внимание в статье уделено конструктивным методам решения указанных задач. Показано, что исходные многоуровневые постановки задач априорного наблюдения могут быть сведены к задачам линейного программирования или аппроксимированы ими. Разработанная рекуррентная процедура позволяет строить эффективные алгоритмы для систем управления, функционирующих в реальном времени, как в статье [8].

2. Система наблюдения и информационное множество

На промежутке времени $[0,t_f]$ рассмотрим линейную стационарную систему вида

$$\dot{x} = Ax + Bu + Mw, \;\; x(0) \in \mathscr{X}_0, \;\; t \in [0,t_f], \tag{1}$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние; $u = u(t) \in \mathbb{R}^r$ – управление; $w = w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ – возмущение в момент времени t; матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$; $M \in \mathbb{R}^{n\times n_w}$ заданы.

Предполагается, что управление $u(t), t \in [0,t_f]$, реализуется как известная дискретная функция с периодом квантования h ($h = t_f/\mathcal{N}$, $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$): $u(t) \equiv u(s)$, $t \in [s, s+h[$, $s \in \Delta = \{0,h,\ldots,t_f - h\}$, принимающая значения в множестве $U = \{u \in \mathbb{R}^r : u_{\min} \leqslant u \leqslant u_{\max}\}$, $u_{\min}, u_{\max} \in \mathbb{R}^r$, $u_{\min} < u_{\max}$. В разделе 3 для системы (1) будет сформулирована задача оптимального управления, по решению которой находятся управляющие воздействия для системы (1), однако для рассматриваемых в работе задач наблюдения конкретная реализация управления считается заданной.

Начальное состояние системы (1) известно с точностью до ограниченного множества $\mathscr{X}_0 \subset \subset \mathbb{R}^n$; будем считать, что оно имеет вид

$$\mathscr{X}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \; x = x_0 + Gz, \; z \in \mathscr{Z}\}, \tag{2}$$

где $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – заданный вектор; $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ – неизвестный вектор параметров начального состояния;

$$\mathscr{Z} = \{z \in \mathbb{R}^{n_z} : d_{\min} \leqslant z \leqslant d_{\max}\};$$

$d_{\min}, d_{\max} \in \mathbb{R}^{n_z}$; $d_{\min} \leqslant d_{\max}$; $G \in \mathbb{R}^{n\times n_z}$.

Относительно возмущений в системе (1) будем считать, что они реализуются в виде кусочно-непрерывной функции, принимающей значения в множестве W:

$$w(t) \in W = \{w \in \mathbb{R}^{n_w} : \|w\|_\infty \leqslant w_{\max}\}, \;\; t \in [0,t_f],$$

где $\|w\|_\infty = \max_i |w_i|$, $w_{\max} > 0$. В качестве частного случая будем обращаться к системам, в которых возмущение отсутствует, т. е. $M = 0$.

Будем вести наблюдение за поведением системы (1), обрабатывая записываемые в дискретные моменты времени $s \in \hat{\Delta} = \{h, 2h, \ldots, t_f\}$ сигналы линейного измерительного устройства

$$y(s) = Cx(s) + \xi(s), \; s \in \hat{\Delta}, \tag{3}$$

где $y(s) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – измерение; $\xi(s) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – ошибка измерения в момент времени s;

$$\xi(s) \in \Xi = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_y} : \; \|\xi\|_\infty \leqslant \xi_{\max}\}, \;\; s \in \hat{\Delta};$$

$C \in \mathbb{R}^{n_y\times n}$ – заданная матрица; $\xi_{\max} > 0$.

Таким образом, в системе (1), (3) источниками неопределенности являются возмущение $w(t)$, $t \in [0,t_f]$; вектор параметров начального состояния $z \in \mathscr{Z}$ и ошибки измерения $\xi(s) \in \Xi$, $s \in \hat{\Delta}$. Все перечисленные неопределенности имеют нестохастическую природу; такие неопределенности в теории управления называются множественными. Они порождают множественную неопределенность состояния системы (1) в каждый момент времени, которую можно описать с помощью *информационного множества* [1; 2; 11].

Далее при некотором фиксированном $\tau \in \hat{\Delta}$ используются следующие обозначения: $\hat{\mathcal{W}}(\tau)$ – совокупность всех возмущений $\hat{w}(\cdot) = (\hat{w}(t), t \in [0,\tau[)$, которые могут реализоваться на промежутке времени $[0,\tau[$; $\mathcal{W}(\tau)$ – совокупность всех «будущих» возмущений на промежутке $[\tau,t_f]$; $\hat{\Delta}(\tau) = \{h, 2h, \ldots, \tau\}$.

2.1. Информационное множество

Пусть в реальном процессе управления реализовался вектор параметров начального состояния z^*, а к моменту времени $\tau \in \hat{\Delta}$ – возмущения $w^*(\cdot) \in \hat{\mathcal{W}}(\tau)$ и ошибки $\xi^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}(\tau)$ (эти величины остаются неизвестными наблюдателю), на систему подано управление $u^*(t)$, $t \in [0,\tau[$.

Наряду с системой (1) будем рассматривать соответствующие ей детерминированную систему управления

$$\dot{x}^* = Ax^* + Bu^*(t), \;\; x^*(0) = x_0, \;\; t \in [0,\tau], \tag{4}$$

и содержащую неопределенности систему

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Mw, \;\; \hat{x}(0) = Gz, \;\; z \in \mathscr{Z}, \;\; w(t) \in W, \;\; t \in [0,t_f]. \tag{5}$$

Траекторию системы (4) будем обозначать $x^*(t)$, $t \in [0,\tau]$, – эта траектория может быть вычислена, поскольку заданы начальное состояние x_0 и управление $u^*(t)$, $t \in [0,\tau[$. Траекторию системы (5) при фиксированных z, $w(t)$, $t \in [0,t_f]$, обозначим через $\hat{x}(t|\,0,z,w)$, $t \in [0,t_f]$.

Тогда измерения, которые будут записаны в рассматриваемом процессе к моменту времени $\tau \in \hat{\Delta}$, можно представить в виде

$$y^*(s) = Cx^*(s) + C\hat{x}(s|\,0,z^*,w^*) + \xi^*(s), \;\; s \in \hat{\Delta}(\tau).$$

Определение 2.1. Будем говорить, что вектор параметров начального состояния $z \in \mathscr{Z}$ и возмущение $\hat{w}(\cdot) \in \hat{\mathcal{W}}(\tau)$ *совместимы* с управлением $u^*(t)$, $t \in [0,\tau[$, и измерениями $y^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}(\tau)$, если найдутся такие ошибки измерения $\xi(s) \in \Xi$, $s \in \hat{\Delta}(\tau)$, что

$$y^*(s) = Cx^*(s) + C\hat{x}(s|\,0,z,\hat{w}) + \xi(s), \;\; s \in \hat{\Delta}(\tau). \tag{6}$$

Пусть $\Omega^*(\tau)$ – множество всех пар $(z,\hat{w})$, совместимых с $y^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}(\tau)$. С учетом (6),

$$\Omega^*(\tau) := \big\{(z,\hat{w}) \in \mathscr{Z} \times \hat{\mathcal{W}}(\tau) : y^*(s) - Cx^*(s) - C\hat{x}(s|\,0,z,\hat{w}) \in \Xi, \; s \in \hat{\Delta}(\tau)\big\}.$$

Множество $\Omega^*(\tau)$ всегда непусто, поскольку пара из реализовавшихся в рассматриваемом процессе значений z^*, $w^*(t)$, $t \in [0,\tau[$, совместима с записанным сигналом $y^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}(\tau)$.

Положим

$$\hat{y}^*(s) := y^*(s) - Cx^*(s), \;\; s \in \hat{\Delta}(\tau),$$

и будем называть такой сигнал *очищенным*. Очищенный сигнал $\hat{y}^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}$, совпадает с сигналом, который был бы записан в системе наблюдения (5), (3) при реализовавшихся z^*, w^*, ξ^*. С помощью очищенного сигнала $\hat{y}^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}(\tau)$, установим, что $\Omega^*(\tau)$ не зависит от управления $u^*(t)$, $t \in [0,\tau[$:

$$\Omega^*(\tau) = \big\{(z,\hat{w}) \in \mathscr{Z} \times \hat{\mathcal{W}}(\tau) : \; \hat{y}^*(s) - C\hat{x}(s|\,0,z,\hat{w}) \in \Xi, \; s \in \hat{\Delta}(\tau)\big\}.$$

Определение 2.2. Множество $\mathscr{X}^*(\tau)$, $\tau \in \hat{\Delta}$, построенное по правилу

$$\mathscr{X}^*(\tau) := \big\{x^*(\tau) + \hat{x}(\tau|\,0,z,\hat{w}) : (z,\hat{w}) \in \Omega^*(\tau)\big\}, \tag{7}$$

будем называть *информационным множеством* системы (1), (3) в момент времени $\tau \in \hat{\Delta}$. Информационное множество в момент времени $\tau = 0$ есть $\mathscr{X}^*(0) = \mathscr{X}_0$.

По определению, $\mathscr{X}^*(\tau)$ получено сдвигом на вектор $x^*(\tau)$ множества

$$\hat{\mathscr{X}}^*(\tau) = \big\{\hat{x}(\tau|\,0,z,\hat{w}) : (z,\hat{w}) \in \Omega^*(\tau)\big\}, \tag{8}$$

которое можно трактовать как информационное множество системы наблюдения (5), (3) в момент τ. Нетрудно видеть, что множество $\hat{\mathscr{X}}^*(\tau)$, а следовательно, и информационное множество $\mathscr{X}^*(\tau)$, является выпуклым компактом [1; 2].

2.2. Динамика информационных множеств

Кроме информационного множества $\mathscr{X}^*(\tau)$ (или $\hat{\mathscr{X}}^*(\tau)$), которое вычисляется по записанным измерениям $y^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}(\tau)$, нас будет интересовать прогноз будущих информационных множеств на некоторой наперед заданной сетке моментов времени из $\hat{\Delta}$.

Пусть до начала процесса управления зафиксированы $N \geqslant 1$ моментов времени $t_1 < \ldots < t_N$, $t_j \in \hat{\Delta}$, $j = 1, \ldots, N$. Они разбивают интервал управления $[0, t_f]$ на $N+1$ промежуток $[t_j, t_{j+1}[$, $j = 0, 1, \ldots, N$, где считается, что $t_0 = 0$, $t_{N+1} = t_f$.

Для $j = 0, 1, \ldots, N$ обозначим: $\hat{\Delta}_j = \{t_j + h, \ldots, t_{j+1}\}$; $\mathcal{N}_j = |\hat{\Delta}_j|$; $w_j(\cdot) = (w_j(t), t \in [t_j, t_{j+1}[)$ – возмущение на $[t_j, t_{j+1}[$, $\mathcal{W}_j = \{w_j(\cdot) : w_j(t) \in W, t \in [t_j, t_{j+1}[\}$ – множество возмущений на $[t_j, t_{j+1}[$.

Пусть Ω_j – множество пар $(z, \hat{w}) \in \mathscr{Z} \times \hat{\mathcal{W}}(t_j)$, совместимых с некоторым очищенным сигналом $\hat{y}(s)$, $s \in \hat{\Delta}(t_j)$, записанным к моменту t_j:

$$\Omega_j = \Omega_j(\hat{y}) = \{(z, \hat{w}) \in \mathscr{Z} \times \hat{\mathcal{W}}(t_j) : \ \hat{y}(s) - C\hat{x}(s|0, z, \hat{w}) \in \Xi, \ s \in \hat{\Delta}(t_j)\}.$$

Нас будут интересовать сигналы $\hat{y}_j(\cdot) = (\hat{y}_j(s), s \in \hat{\Delta}_j)$, которые могут быть получены в системе наблюдения (5), (3) на $\hat{\Delta}_j$, если в момент t_j реализовалось множество Ω_j, а также множество Ω_{j+1} к моменту t_{j+1}, его связь с Ω_j и сигналом $\hat{y}_j(\cdot)$.

Множество всех возможных сигналов измерения в системе (5), (3) на $\hat{\Delta}_j$ обозначим $\mathcal{Y}_j$:

$$\mathcal{Y}_j := \{\hat{y}_j(\cdot) : \ \hat{y}_j(s) = C\hat{x}(s|0, z, (\hat{w}, w_j)) + \xi(s), \ \xi(s) \in \Xi, \ s \in \hat{\Delta}_j, \ \ (z, \hat{w}) \in \Omega_j, \ \ w_j(\cdot) \in \mathcal{W}_j\},$$

где $(\hat{w}, w_j) = (\hat{w}(\cdot), w_j(\cdot)) \in \hat{\mathcal{W}}(t_{j+1})$ – возмущение на промежутке $[0, t_{j+1}]$, разбито на $\hat{w}(\cdot) \in \hat{\mathcal{W}}(t_j)$ – возмущение на промежутке времени $[0, t_j[$, и $w_j(\cdot) \in \mathcal{W}_j$ – возмущение на $[t_j, t_{j+1}[$. Множество $\mathcal{Y}_j$, вообще говоря, зависит от Ω_j, однако для упрощения записи эту зависимость явно указывать не будем.

Если в момент времени t_j реализовалось множество Ω_j, а на $\hat{\Delta}_j$ получены измерения $\hat{y}_j(\cdot) \in \mathcal{Y}_j$, то в момент времени t_{j+1} будет реализовано множество

$$\Omega_{j+1} = \Omega(t_{j+1}|t_j, \Omega_j, \hat{y}_j(\cdot)) = \{(z, (\hat{w}, w_j)) \in \mathscr{Z} \times \hat{\mathcal{W}}(t_{j+1}) : \\ \hat{y}_j(s) - C\hat{x}(s|0, z, (\hat{w}, w_j)) \in \Xi, \ s \in \hat{\Delta}_j, (z, \hat{w}) \in \Omega_j, \ w_j(\cdot) \in \mathcal{W}_j\},$$

которое состоит из пар $(z, (\hat{w}, w_j))$ с $(z, \hat{w}) \in \Omega_j$ и совместимых с $\hat{y}_j(\cdot)$.

Пусть теперь $\hat{\mathscr{X}}_j = \{\hat{x}(t_j|0, z, w) : (z, w) \in \Omega_j\}$ – информационное множество системы наблюдения (5), (3) в момент времени t_j. По $\hat{\mathscr{X}}_j$ определим информационное множество этой системы в момент t_{j+1}:

$$\hat{\mathscr{X}}(t_{j+1}|t_j, \hat{\mathscr{X}}_j, \hat{y}_j) = \{\hat{x}(t_{j+1}|0, z, \hat{w}) : (z, \hat{w}) \in \Omega(t_{j+1}|t_j, \Omega_j, \hat{y}_j)\}. \tag{9}$$

Задачи оптимального наблюдения состоят в получении некоторых оценок текущих (в момент времени τ) информационных множеств $\mathscr{X}^*(\tau)$, $\hat{\mathscr{X}}^*(\tau)$, или оценки наихудшего (в некотором смысле) будущего информационного множества (9). Вид этих оценок зависит от целей использования информационных множеств на практике. В частности, в данной работе информационное множество – важный элемент задачи оптимального гарантированного управления по измерениям [8], и указанные оценки напрямую связаны с целями управления. В связи с этим в следующем разделе приведем постановку такой задачи управления и покажем, какие формулировки задач оптимального наблюдения согласуются с целями управления.

3. Оптимальное гарантированное управление линейными системами по измерениям

Рассмотрим задачу оптимального управления системой (1) по неточным дискретным измерениям выходного сигнала измерительного устройства (3).

Поставим задачу о нахождении на промежутке $[\tau,t_f]$ такого дискретного ограниченного управления, которое гарантированно переводит все состояния системы (1) из информационного множества (7) в момент времени τ при всех возмущениях $w(\cdot)\in\mathcal{W}(\tau)$ на терминальное множество $X_f=\{x\in\mathbb{R}^n : Hx\leqslant g\}$, при минимуме гарантированного значения линейного терминального критерия качества $c^\top x(t_f)$. Здесь $H\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $g\in\mathbb{R}^m$, $c\in\mathbb{R}^n$ – заданные матрица и векторы.

Эту задачу будем называть задачей оптимального гарантированного управления системой (1) по измерениям (3). Далее рассмотрим поставленную задачу в двух классах управлений: 1) в классе гарантирующих программ; 2) в классе многократно замыкаемых стратегий управления.

3.1. Оптимальное управление в классе гарантирующих программ

Простейший класс управлений в теории оптимального гарантированного управления составляют гарантирующие программы. Программное управление на промежутке $[\tau,t_f]$ – это функция времени $u(t)$, $t\in[\tau,t_f]$, одна для всех возможных возмущений, планируется до начала процесса управления и по его ходу не корректируется. При вычислении программы не используется информация о возможном поступлении измерений состояний системы в будущем.

Задача построения оптимальной гарантирующей программы в момент времени τ, в который реализовалось информационное множество (7), имеет вид [8]

$$\begin{gathered}\min_{u}\ \max_{\varkappa\in\hat{\mathscr{X}}^*(\tau),w\in\mathcal{W}(\tau)}\ c^\top x(t_f),\\ \dot{x}=Ax+Bu+Mw,\ \ x(\tau)=x^*(\tau)+\varkappa,\ \ u(t)\in U,\ \ t\in[\tau,t_f],\\ x(t_f)\in X_f\ \ \forall\,\varkappa\in\hat{\mathscr{X}}^*(\tau),\ \ \forall\,w(\cdot)\in\mathcal{W}(\tau).\end{gathered}\tag{10}$$

Линейность системы (1), терминальных ограничений и критерия качества позволяют свести минимаксную задачу (10), содержащую неопределенности, к детерминированной задаче оптимального управления. Для этого следует оценить наихудшие реализации неопределенностей в ограничениях и критерии качества. Например, i-е терминальное ограничение, $i=1,\dots,m$, выполняется при всех возмущениях $w(\cdot)\in\mathcal{W}(\tau)$ тогда и только тогда, когда

$$\max_{\varkappa\in\hat{\mathscr{X}}^*(\tau),w\in\mathcal{W}(\tau)} h_i^\top\left[e^{A(t_f-\tau)}\big(x^*(\tau)+\varkappa\big)+\int_\tau^{t_f}e^{A(t_f-t)}\big(Bu(t)+Mw(t)\big)\,dt\right]\leqslant g_i,$$

где $h_i^\top$ – i-я строка матрицы H; g_i – i-я компонента вектора g.

В неравенстве выше выделяется задача максимизации

$$\max_{\varkappa\in\hat{\mathscr{X}}^*(\tau),w\in\mathcal{W}(\tau)} h_i^\top\left[e^{A(t_f-\tau)}\varkappa+\int_\tau^{t_f}e^{A(t_f-t)}Mw(t)\,dt\right],$$

которую с учетом вида (8) информационного множества $\hat{\mathscr{X}}^*(\tau)$ можно представить в виде

$$\hat{\mu}_i\big(\tau,\Omega^*(\tau)\big):=\max_{(z,\hat{w})\in\Omega^*(\tau),w\in\mathcal{W}(\tau)} h_i^\top\hat{x}\big(t_f|\,0,z,(\hat{w},w)\big).\tag{11}$$

Полагая $h_{m+1}:=c$, задачу оценки наихудшего значения критерия качества в (10) также можно представить в виде (11).

Таким образом, задача (10) построения оптимальной гарантирующей программы на промежутке $[\tau,t_f]$ в задаче оптимального гарантированного управления по измерениям эквивалентна следующей детерминированной задаче оптимального управления:

$$\begin{gathered}\min_{u}\ c^\top x(t_f)+\hat{\mu}_{m+1}\big(\tau,\Omega^*(\tau)\big),\\ \dot{x}=Ax+Bu,\ \ x(\tau)=x^*(\tau),\ \ u(t)\in U,\ \ t\in[\tau,t_f],\\ h_i^\top x(t_f)\leqslant g_i-\hat{\mu}_i\big(\tau,\Omega^*(\tau)\big),\ \ i=1,\dots,m.\end{gathered}\tag{12}$$

Оценка вида (11) порождает первый тип задач оптимального наблюдения – линейные задачи оптимального наблюдения, которые исследуются в настоящей работе в разделе 4.

3.2. Оптимальное управление в классе многократно замыкаемых стратегий управления

Второй тип задач оптимального наблюдения, которые будем называть задачами априорного оптимального наблюдения, возникает в связи с задачами построения оптимальных многократно замыкаемых стратегий управления [7; 8; 12] в задаче оптимального гарантированного управления по измерениям. В отличие от программных управлений из подраздела 3.1, стратегии управления учитывают поступление информации о поведении системы в будущем и позволяют корректировать управление в зависимости от этой информации. В частности, в работах [7; 8; 12] предполагается, что в моменты $t_1, \ldots, t_N$, которые называются моментами замыкания, будет оцениваться информационное множество и выбираться новое управление для системы (1). Приведем необходимые определения и предположения из [8].

Для $j = 0, 1, \ldots, N$ обозначим: $\Delta_j = \{t_j, t_j + h, \ldots, t_{j+1} - h\}$; $u_j(\cdot) = (u_j(t), t \in [t_j, t_{j+1}[)$ – управление, $\mathcal{U}_j = \{u_j(\cdot) : u_j(t) \in U, t \in [t_j, t_{j+1}[\}$ – множество доступных управлений на $[t_j, t_{j+1}[$; $\mathscr{X}_j = x_j + \hat{\mathscr{X}}_j$ – информационное множество состояний системы (1) в момент t_j, $x_j \in \mathbb{R}^n$;

$$\mathbb{X}(t_{j+1} | t_j, \mathscr{X}_j, u_j) = \left\{ \mathscr{X}(t_{j+1} | t_j, \mathscr{X}_j, u_j, \hat{y}_j) : \hat{y}_j \in \mathcal{Y}_j \right\}$$

– совокупность всех возможных информационных множеств в момент времени t_{j+1}, если в момент t_j информационное множество было $\mathscr{X}_j$ и на промежутке $[t_j, t_{j+1}[$ к системе (1) применялось управление $u_j(\cdot)$:

$$\mathscr{X}(t_{j+1} | t_j, \mathscr{X}_j, u_j, \hat{y}_j) = e^{A(t_{j+1} - t_j)} x_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{A(t_{j+1} - t)} B u_j(t)\, dt + \hat{\mathscr{X}}(t_{j+1} | t_j, \hat{\mathscr{X}}_j, \hat{y}_j).$$

Предположение 3.1. Предположим, что в каждый момент t_j, $j = 1, \ldots, N$, в зависимости от реализовавшегося в процессе управления информационного множества $\mathscr{X}^*(t_j)$ можно выбрать новое управление $u_j\big(t | \mathscr{X}^*(t_j)\big) \in U$, $t \in [t_j, t_{j+1}[$, и применить его к системе (1) до момента t_{j+1}.

Поскольку информационные множества $\mathscr{X}^*(t_j)$, $j = 1, \ldots, N$, заранее (до начала процесса управления) не известны, то решение задачи оптимального гарантированного управления системой (1) по неточным измерениям (3) будем искать в виде *стратегии управления* с моментами замыкания $t_1, \ldots, t_N$ как функции произвольных позиций $(t_j, \mathscr{X}_j)$, $j = N - 1, \ldots, 0$.

Определение 3.1. Для позиции $(t_j, \mathscr{X}_j)$, $j = N - 1, \ldots, 0$, стратегией управления с $N - j$ моментами замыкания t_{j+1}, …, t_N на промежутке $[t_j, t_f]$ назовем совокупность

$$\pi_{N-j}(t_j, \mathscr{X}_j) = \left\{ u_j(\cdot | \mathscr{X}_j);\ \pi_{N-j-1}(t_{j+1}, \mathscr{X}_{j+1}), \mathscr{X}_{j+1} \in \mathbb{X}(t_{j+1} | t_j, \mathscr{X}_j, u_j) \right\},$$

состоящую из управления $u_j(\cdot | \mathscr{X}_j) \in \mathcal{U}_j$ на $[t_j, t_{j+1}[$ и семейства стратегий $\pi_{N-j-1}(t_{j+1}, \mathscr{X}_{j+1})$ с $N - j - 1$ моментами замыкания, определенных для всех возможных позиций $(t_{j+1}, \mathscr{X}_{j+1})$ процесса управления в момент замыкания t_{j+1}. При $j = N$ считаем, что стратегия $\pi_0(t_N, \mathscr{X}_N)$ совпадает с управлением $u_N(\cdot | \mathscr{X}_N) \in \mathcal{U}_N$.

Аналогично определяется стратегия с $N - j$ моментами замыкания t_{j+1}, …, t_N для позиции $\big(\tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big)$ при $\tau \in \Delta_j$:

$$\pi_{N-j}(\tau, \mathscr{X}^*(\tau)) = \left\{ u_j\big(\cdot \,|\, \tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big);\ \pi_{N-j-1}(t_{j+1}, \mathscr{X}_{j+1}), \mathscr{X}_{j+1} \in \mathbb{X}\big(t_{j+1} | \tau, \mathscr{X}^*(\tau), u_j\big) \right\},$$

где управление $u_j\big(\cdot \,|\, \tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big)$ определено на промежутке $[\tau, t_{j+1}[$; $\mathbb{X}\big(t_{j+1} | \tau, \mathscr{X}^*(\tau), u_j\big)$ – совокупность всех возможных информационных множеств в момент времени t_{j+1}, если в момент τ информационное множество было $\mathscr{X}^*(\tau)$ и на промежутке $[\tau, t_{j+1}[$ к системе (1) применялось управление $u_j\big(\cdot \,|\, \tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big)$.

Траекторию системы (1) на промежутке $[\tau, t_f]$, $\tau \in \Delta_j$, соответствующую начальному состоянию $x(\tau) = \varkappa \in \mathscr{X}^*(\tau)$, стратегии $\pi_{N-j}\big(\tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big)$ и возмущению $w(\cdot) = \big(w_j(\cdot), \ldots, w_N(\cdot)\big)$, будем обозначать

$$x(\cdot | \tau, \varkappa, \pi_{N-j}, w) = \big(x(t | \tau, \varkappa, \pi_{N-j}, w), t \in [\tau, t_f]\big)$$

и определять (в соответствии с предположением 3.1) как последовательное непрерывное решение систем

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_j\big(t | \tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big) + Mw_j(t),\ x(\tau) = \varkappa,\ t \in [\tau, t_{j+1}[,$$
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_k\big(t | \mathscr{X}(t_k)\big) + Mw_k(t),\ \ t \in [t_k, t_{k+1}[,\ k = j+1, \ldots, N.$$

Определение 3.2. Для позиции $\big(\tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big)$, $\tau \in \Delta_j$, стратегия управления $\pi_{N-j}\big(\tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big)$ называется допустимой, если выполняется включение

$$x(t_f|\,\tau, \varkappa, \pi_{N-j}, w) \in X_f \;\; \forall \varkappa \in \mathscr{X}^*(\tau), \forall w(\cdot) \in \mathcal{W}(\tau).$$

Определение 3.3. Для позиции $\big(\tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big)$, $\tau \in \Delta_j$, допустимая стратегия $\pi^0_{N-j}\big(\tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big)$ оптимальна, если она является решением задачи

$$\min_{\pi_{N-j}} \max_{\varkappa \in \mathscr{X}^*(\tau), w \in \mathcal{W}(\tau)} c^\top x(t_f|\,\tau, \varkappa, \pi_{N-j}, w).$$

В работе [8] показано, что управление $u^0_j\big(\cdot\,|\,\tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big)$ в составе оптимальной стратегии $\pi^0_{N-j}\big(\tau, \mathscr{X}^*(\tau)\big)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{gathered} \min_{\alpha, u_j} \alpha, \\ \dot{x} = Ax + Bu_j, \;\; x(\tau) = x^*(\tau), \;\; u_j(t) \in U, \;\; t \in [\tau, t_{j+1}], \\ \Phi_{j+1} x(t_{j+1}) - \lambda_{j+1}\alpha \leqslant g_{j+1} - \mu_j\big(\tau, \Omega^*(\tau)\big), \end{gathered} \tag{13}$$

где $\Phi_{j+1} \in \mathbb{R}^{m_{j+1} \times n}$, λ_{j+1}, g_{j+1} – некоторые матрица и векторы (см. правила построения в [8]); оценки $\mu_j\big(\tau, \Omega^*(\tau)\big) = \big(\mu_{ji}\big(\tau, \Omega^*(\tau)\big), i = 1, \ldots, m_{j+1}\big)^\top$ определяются рекуррентно по формулам

$$\mu_{ji}\big(\tau, \Omega^*(\tau)\big) = \max_{\hat{y}_j \in \mathcal{Y}_j(\tau)} p^\top_{j+1,i} \mu_{j+1}\big(t_{j+1}, \Omega(t_{j+1}|\,\tau, \Omega^*(\tau), \hat{y}_j)\big), \;\; i = 1, \ldots, m_{j+1}; \tag{14}$$

$$\begin{gathered} \mu_{ki}\big(t_k, \Omega_k\big) = \max_{\hat{y}_k \in \mathcal{Y}_k} p^\top_{k+1,i} \mu_{k+1}\big(t_{k+1}, \Omega(t_{k+1}|\,t_k, \Omega_k, \hat{y}_k)\big), \;\; i = 1, \ldots, m_{k+1}, \\ k = N-1, \ldots, j+1; \end{gathered} \tag{15}$$

$$\mu_{Ni}(t_N, \Omega_N) := \hat{\mu}_i(t_N, \Omega_N) = \max_{(z,w) \in \Omega_N, w_N \in \mathcal{W}_N} h_i^\top \hat{x}\big(t_f|\,0, z, (w, w_N)\big), \;\; i = 1, \ldots, m+1; \tag{16}$$

$\mathcal{Y}_j(\tau)$ – сужение $\mathcal{Y}_j$ на промежуток $[\tau, t_{j+1}[$; векторы $p^\top_{ki}$ – строки матриц P_k с неотрицательными элементами, связанных с матрицами Φ_k соотношениями

$$\Phi_k = P_k \Phi_{k+1} e^{A(t_{k+1} - t_k)}, \;\; k = 1, \ldots, N, \;\; \Phi_{N+1} := \begin{pmatrix} H \\ c^\top \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times n}.$$

Задачи вида (14), (15) будем называть задачами априорного оптимального наблюдения. Их исследование продолжится в разделе 5.

Дальнейшее исследование сосредоточено на разработке конструктивных методов решения задач оптимального наблюдения (11) и (14), (15), необходимых для практической реализации методов построения оптимальных гарантирующих программ и оптимальных стратегий управления, которые обоснованы в работах [6; 8].

4. Линейная задача оптимального наблюдения

Как отмечалось в подразделе 3.1, первый тип задач наблюдения, рассматриваемых в работе в связи с проблемой оптимального гарантированного управления по измерениям, направлен на получение линейных оценок информационного множества $\mathscr{X}^*(\tau)$ в заданном направлении. В общем виде такие оценки можно определить как результат решения задачи на максимум

$$\gamma^*(\tau, \phi) = \max \;\; \phi^\top \hat{x}, \;\; \hat{x} \in \hat{\mathscr{X}}^*(\tau), \tag{17}$$

где $\phi \in \mathbb{R}^n$ – заданный вектор. Задачи вида (17) будем называть линейными задачами оптимального наблюдения.

Нетрудно видеть, что задача (11) связана с задачей (17) следующим образом:

$$\hat{\mu}_i\big(\tau, \Omega^*(\tau)\big) = \gamma^*\big(\tau, \phi_i(\tau)\big) + \gamma_i(\tau), \tag{18}$$

где $\phi_i(t)^\top = h_i^\top e^{A(t_f - t)}$; $\gamma_i(\tau) = w_{\max} \int_\tau^{t_f} ||\phi_i(t)^\top M||_1 \, dt$ – оценка наихудшей реализации возмущения на промежутке $[\tau, t_f]$. При отсутствии в системе (1) возмущения имеем $\hat{\mu}_i\big(\tau, \Omega^*(\tau)\big) = \gamma^*\big(\tau, \phi_i(\tau)\big)$.

Действительно, записывая формулу Коши для терминального состояния $\hat{x}\big(t_f|\,0,z,(\hat{w},w)\big)$ в (11) и учитывая независимость переменных оптимизации $(z,\hat{w})\in\Omega^*(\tau), w\in\mathcal{W}(\tau)$, получим

$$\hat{\mu}_i\big(\tau,\Omega^*(\tau)\big)=\max_{(z,\hat{w})\in\Omega^*(\tau),w\in\mathcal{W}(\tau)} h_i^\top\Big[e^{At_f}Gz+\int_0^\tau e^{A(t_f-t)}M\hat{w}(t)dt+\int_\tau^{t_f}e^{A(t_f-t)}Mw(t)dt\Big]=$$

$$=\max_{(z,\hat{w})\in\Omega^*(\tau)} h_i^\top e^{A(t_f-\tau)}\Big[e^{A\tau}Gz+\int_0^\tau e^{A(\tau-t)}M\hat{w}(t)dt\Big]+\max_{w\in\mathcal{W}(\tau)}\int_\tau^{t_f}h_i^\top e^{A(t_f-t)}Mw(t)dt=$$

$$=\max_{(z,\hat{w})\in\Omega^*(\tau)}\phi_i(\tau)^\top\hat{x}(\tau|\,0,z,\hat{w})+\int_\tau^{t_f}\max_{w\in W}\phi_i(t)^\top Mw\,dt=\gamma^*\big(\tau,\phi_i(\tau)\big)+w_{\max}\int_\tau^{t_f}||\phi_i(t)^\top M||_1\,dt.$$

Рассмотрим линейную задачу оптимального наблюдения (17) в простейшем случае, когда возмущения в системе отсутствуют, и неопределенность содержится только в параметрах начального состояния и ошибках измерения [9]. В этом случае обозначим через $\hat{x}(t|\,0,z)$ – состояние в момент времени t системы $\dot{\hat{x}}=A\hat{x}$, $\hat{x}(0)=Gz$, $t\in[0,t_f]$, и определим множество параметров начального состояния, совместимых с измерениями $\hat{y}^*(s)$, $s\in\hat{\Delta}(\tau)$:

$$\Omega^*(\tau)=\big\{z\in\mathscr{Z}:\ \hat{y}^*(s)-C\hat{x}(s|\,0,z)\in\Xi,\ s\in\hat{\Delta}(\tau)\big\}. \tag{19}$$

Задачу (17) с учетом (19) можно представить в виде

$$\begin{gathered}\gamma^*(\tau,\phi)=\max_z\ \phi^\top\hat{x}(\tau),\\ \dot{\hat{x}}=A\hat{x},\ \ \hat{x}(0)=Gz,\ \ t\in[0,\tau],\\ \hat{y}^*(s)-C\hat{x}(s)\in\Xi,\ s\in\hat{\Delta}(\tau),\\ z\in\mathscr{Z}.\end{gathered} \tag{20}$$

Явная формула для вычисления траектории $\hat{x}(t|\,0,z)=e^{At}Gz$, $t\in[0,t_f]$, позволяет записать (20) как задачу линейного программирования:

$$\begin{gathered}\gamma^*(\tau,\phi)=\max_z\ q^\top z,\\ \underline{\xi}(s)\leqslant -D(s)z\leqslant\bar{\xi}(s),\ \ s\in\hat{\Delta}(\tau),\\ d_{\min}\leqslant z\leqslant d_{\max},\end{gathered} \tag{21}$$

где $q^\top:=\phi^\top e^{A\tau}G$, $D(s):=Ce^{As}G$, $\underline{\xi}(s):=-\mathbb{1}\xi_{\max}-\hat{y}^*(s)$, $\bar{\xi}(s):=\mathbb{1}\xi_{\max}-\hat{y}^*(s)$, $s\in\hat{\Delta}$, $\mathbb{1}=(1,\dots,1)^\top$.

При $\phi=\phi_i(\tau)$, как в (18), получим, что $q^\top=h_i^\top e^{At_f}G$ не зависит от момента времени τ.

В работах [9; 10] разработаны специальные методы решения задач линейного программирования вида (21) с учетом их структуры, следующей из динамики системы в постановке (20). Методы представляют собой модификацию двойственного адаптивного метода решения задач линейного программирования [13].

Далее рассмотрим линейную задачу оптимального наблюдения (17) при наличии возмущений. В подробной записи эта задача имеет вид

$$\begin{gathered}\gamma^*(\tau,\phi)=\max\ \phi^\top\hat{x}(\tau),\\ \dot{\hat{x}}=A\hat{x}+Mw,\ \ \hat{x}(0)=Gz,\ \ w(t)\in W,\ \ t\in[0,\tau],\\ \hat{y}^*(s)-C\hat{x}(s)\in\Xi,\ s\in\hat{\Delta}(\tau),\\ z\in\mathscr{Z},\end{gathered} \tag{22}$$

и может трактоваться как задача оптимального управления системой (5), в которой в качестве управления выступает возмущение $w(\cdot)$ с подвижным левым концом траектории и промежуточными фазовыми ограничениями.

Следуя работе [14], предложим для (22) аппроксимирующую задачу линейного программирования, оптимальное значение которой будет доставлять верхнюю оценку значения $\gamma^*(\tau,\phi)$.

Для состояния $\hat{x}(s|\,0,z,w)$ системы (5) запишем

$$\hat{x}(s|\,0,z,w)=e^{As}Gz+\int_0^s e^{A(s-t)}Mw(t)dt=e^{As}Gz+\sum_{\theta\in\hat{\Delta}(s)}e^{A(s-\theta)}\upsilon(\theta),$$

где величины

$$\upsilon(\theta) := \int_{\theta-h}^{\theta} e^{A(\theta-t)} M w(t) dt \in \mathbb{R}^n, \ \ \theta \in \hat{\Delta}(\tau), \tag{23}$$

будем называть агрегированными переменными. Поскольку в задаче (22) нет необходимости в поиске функции $w(\cdot)$, а лишь в вычислении $\gamma^*(\tau,\phi)$, то переход к оптимизации по агрегированным переменным оправдан. Теперь вместо ограниченной функции $w(t)$, $t \in [0,\tau]$, требуется искать конечный набор агрегированных переменных $\upsilon(\theta)$, $\theta \in \hat{\Delta}(\tau)$.

Нетрудно видеть [2], что для возмущений $w(t) \in W$, $t \in [\theta-h,\theta]$, соответствующая агрегированная переменная (23) будет точкой множества достижимости системы (5) на промежутке $[\theta-h,\theta]$ с тривиальным начальным условием $\hat{x}(\theta-h)=0$. Поскольку исследуемая система наблюдения является стационарной, множество достижимости не зависит от момента времени θ и совпадает с множеством достижимости в момент времени $t=h$ системы (5) с начальным условием $\hat{x}(0)=0$. Обозначим это множество достижимости через Υ: $\Upsilon := \{\hat{x}(h|0,0,w) : w(t) \in W, t \in [0,h]\}$. Таким образом, для всех агрегированных переменных можно установить ограничение

$$\upsilon(\theta) \in \Upsilon, \ \ \theta \in \hat{\Delta}(\tau).$$

Известно [2;15], что множество достижимости линейной системы является выпуклым компактом. В силу выбора множества W, множество Υ симметрично относительно начала координат. Теперь задачу оптимального наблюдения (17) можно записать как задачу выпуклого программирования

$$\begin{gathered}
\gamma^*(\tau,\phi) = \max_{z,\upsilon} \ q^\top z + \sum_{\theta\in\hat{\Delta}(\tau)} \sigma(\theta)^\top \upsilon(\theta), \\
\underline{\xi}(s) \leqslant -D(s)z - \sum_{\theta\in\hat{\Delta}(s)} Q(s,\theta)\upsilon(\theta) \leqslant \bar{\xi}(s), \ \ s \in \hat{\Delta}(\tau), \\
\upsilon(\theta) \in \Upsilon, \ \ \theta \in \hat{\Delta}(\tau), \ \ d_{\min} \leqslant z \leqslant d_{\max},
\end{gathered} \tag{24}$$

где $\sigma(\theta)^\top := \phi^\top e^{A(\tau-\theta)}$, $Q(s,\theta) := Ce^{A(s-\theta)}$, $s,\theta \in \hat{\Delta}(\tau)$, $s \leqslant \tau$.

Поскольку точное описание множества достижимости Υ в общем случае не представляется возможным, большинство известных в литературе результатов получено для построения внешних или внутренних его аппроксимаций $\bar{\Upsilon}$ совокупностью эллипсоидов или полиэдров [2–4; 11]. Таким образом, для (24) может быть получена аппроксимирующая задача в виде задачи квадратичного программирования с квадратичными ограничениями [16] (в случае эллипсоидальных аппроксимаций множества достижимости) или в виде задачи линейного программирования (при полиэдральной аппроксимации). С целью построения гарантированной оценки информационного множества, необходимо использовать внешнюю аппроксимацию, $\Upsilon \subset \bar{\Upsilon}$, а с точки зрения использования линейных оценок при решении задач (14), (15), возникающих в связи с многократно замыкаемыми стратегиями управления, нам будет удобнее иметь аппроксимирующую задачу в виде задачи линейного программирования.

Внешняя полиэдральная аппроксимация множества достижимости Υ может быть построена следующим образом [2–4;11]. Для заданного набора векторов s_k, $k=1,\ldots,K$, вычисляются значения

$$b_k = \max_{\upsilon\in\Upsilon} \ s_k^\top \upsilon = w_{\max} \int_0^h \|s_k^\top e^{A(h-t)} M\|_1 \, dt, \ \ k=1,\ldots,K,$$

после чего внешняя аппроксимация задается в виде $\bar{\Upsilon} := \{\upsilon \in \mathbb{R}^n : \ -b \leqslant S\upsilon \leqslant b\}$, где строками матрицы S являются векторы $s_k^\top$, $k=1,\ldots,K$, $b=(b_k, k=1,\ldots,K)^\top$. Точность такой аппроксимации определяется выбором направлений s_k: при достаточно плотном их распределении в пространстве состояний полиэдр $\bar{\Upsilon}$ может приближать множество достижимости с высокой точностью.

Заменяя в задаче (24) включения $\upsilon(\theta) \in \Upsilon$, $\theta \in \hat{\Delta}(\tau)$, на ограничения $-b \leqslant S\upsilon(\theta) \leqslant b$, $\theta \in \hat{\Delta}(\tau)$, получим задачу линейного программирования, аппроксимирующую задачу (24):

$$\begin{gathered}\bar{\gamma}^*(\tau,\phi) = \max_{z,\upsilon} q^\top z + \sum_{\theta\in\hat{\Delta}(\tau)} \sigma(\theta)^\top \upsilon(\theta),\\ \underline{\xi}(s) \leqslant -D(s)z - \sum_{\theta\in\hat{\Delta}(s)} Q(s,\theta)\upsilon(\theta) \leqslant \bar{\xi}(s),\ \ s \in \hat{\Delta}(\tau),\\ -b \leqslant S\upsilon(\theta) \leqslant b,\ \ \theta \in \hat{\Delta}(\tau),\ \ d_{\min} \leqslant z \leqslant d_{\max}.\end{gathered}$$

В связи с внешней аппроксимацией $\Upsilon \subset \bar{\Upsilon}$, очевидно, имеет место неравенство $\bar{\gamma}^*(\tau,\phi) \geqslant \gamma^*(\tau,\phi)$. Для задачи оптимального управления (12) это означает, что при использовании аппроксимации $\bar{\mu}_i\big(\tau,\Omega^*(\tau)\big) := \bar{\gamma}^*\big(\tau,\phi_i(\tau)\big) + \gamma_i(\tau)$ вместо $\hat{\mu}_i\big(\tau,\Omega^*(\tau)\big)$ будет получено субоптимальное управление, для которого значение критерия качества не меньше оптимального значения задачи (12).

5. Задачи априорного оптимального наблюдения

Задачи априорного оптимального наблюдения (14), (15) существенно отличаются от линейных задач (17). В то время как линейная задача оптимального наблюдения оценивает информационное множество, порожденное измеренными (прошлыми) сигналами $y^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}(\tau)$, в априорных задачах оцениваются возможные будущие информационные множества, порождаемые возможными будущими измерениями. Эти задачи в исходной постановке являются достаточно сложными двух- и многоуровневыми задачами математического программирования.

С целью упрощения выкладок, начнем исследование с простейшего случая, когда в (1) возмущения отсутствуют ($M = 0$), система (1) замыкается только в один момент времени $t_1 \in \hat{\Delta}$. Для начала нас будет интересовать вычисление оценки $\mu_{0i}(0,\Omega_0)$ в момент времени $\tau = 0$ для множества $\Omega^*(0) = \Omega_0 := \mathscr{X} \times \{0\}$. Для сокращения записи опустим индекс i в μ_{0i} и индексы $1i$ – в векторе p_{1i}.

Таким образом, первая рассматриваемая задача имеет вид

$$\mu_0(0,\Omega_0) = \max_{\hat{y}_0\in\mathcal{Y}_0} p^\top \mu_1\big(t_1,\Omega(t_1|0,\Omega_0,\hat{y}_0)\big) = \max_{\hat{y}_0\in\mathcal{Y}_0} \sum_{l=1}^{m+1} p_l \hat{\mu}_l\big(t_1,\Omega(t_1|0,\Omega_0,\hat{y}_0)\big), \tag{25}$$

где p_l – l-я компонента вектора $p \in \mathbb{R}^{m+1}$, $p \geqslant 0$.

Задачу (25) можно трактовать как задачу оценивания протяженности в направлении p множества $M_1 := \big\{\hat{\mu}\big(t_1,\Omega(t_1|0,\Omega_0,\hat{y}_0)\big) : \hat{y}_0(\cdot) \in \mathcal{Y}_0\big\}$, составленного из всех линейных оценок, которые могут реализоваться в системе наблюдения (5), (3) к моменту времени t_1.

Таким образом, величина $\mu_0(0,\Omega_0)$ характеризует наихудший (с точки зрения критерия качества и ограничений задачи оптимального гарантированного управления) прогноз наблюдения, который может быть гарантирован в момент времени $\tau = 0$.

Как установлено в разделе 4, при каждом $l = 1,\dots,m+1$ оценка $\hat{\mu}_l\big(t_1,\Omega(t_1|0,\Omega_0,\hat{y}_0)\big)$ может быть найдена как решение задачи линейного программирования (21), которую удобно переписать в виде

$$\begin{gathered}\hat{\mu}_l\big(t_1,\Omega(t_1|0,\Omega_0,\hat{y}_0)\big) = \max_{z^{(l)}} q_l^\top z^{(l)},\\ -\mathbb{1}\xi_{\max} \leqslant \hat{y}_0(s) - D(s)z^{(l)} \leqslant \mathbb{1}\xi_{\max},\ \ s \in \hat{\Delta}_0,\\ d_{\min} \leqslant z^{(l)} \leqslant d_{\max},\end{gathered} \tag{26}$$

где $q_l^\top = h_l^\top e^{At_f} G$, $z^{(l)} \in \mathbb{R}^{n_z}$ – переменная оптимизации l-й задачи, что подчеркивает тот факт, что в каждой задаче параметр начального состояния будет различным.

Теперь задача (25) примет вид

$$\begin{gathered}\mu_0(0,\Omega_0) = \max_{\hat{y}_0\in\mathcal{Y}_0} \sum_{l=1}^{m+1} p_l \max_{z^{(l)}} q_l^\top z^{(l)},\\ -\mathbb{1}\xi_{\max} \leqslant \hat{y}_0(s) - D(s)z^{(l)} \leqslant \mathbb{1}\xi_{\max},\ \ s \in \hat{\Delta}_0,\\ d_{\min} \leqslant z^{(l)} \leqslant d_{\max},\ \ l = 1,\dots,m+1.\end{gathered} \tag{27}$$

Поскольку все внутренние задачи максимизации (26) независимы, а $p \geqslant 0$, в целевой функции задачи (27) можно проводить одновременную оптимизацию по переменным $\hat{y}_0$, $z^{(l)}$, $l = 1,\dots,m+1$:

$$\mu_0(0,\Omega_0) = \max_{\hat{y}_0 \in \mathcal{Y}_0, z^{(l)}} \sum_{l=1}^{m+1} p_l q_l^\top z^{(l)}.$$

Вспомним, что $\hat{y}_0(s) = C\hat{x}(s|\,0,z) + \xi(s) = D(s)z + \xi(s)$, $s \in \hat{\Delta}_0$, подставим это выражение в ограничения задачи (27) и окончательно получим

$$\begin{gathered}
\mu_0(0,\Omega_0) = \max_{z,\xi,z^{(l)}} \sum_{l=1}^{m+1} p_l q_l^\top z^{(l)}. \\
-\mathbb{1}\xi_{\max} \leqslant D(s)(z - z^{(l)}) + \xi(s) \leqslant \mathbb{1}\xi_{\max}, \\
-\mathbb{1}\xi_{\max} \leqslant \xi(s) \leqslant \mathbb{1}\xi_{\max}, \;\; s \in \hat{\Delta}_0, \\
d_{\min} \leqslant z \leqslant d_{\max}, \;\; d_{\min} \leqslant z^{(l)} \leqslant d_{\max}, \;\; l = 1,\dots,m+1.
\end{gathered} \tag{28}$$

Таким образом, двухуровневая задача (25) сведена к эквивалентной задаче линейного программирования (28). В (28) максимизация проводится по переменной $\omega := \big(z; \xi(s), s \in \hat{\Delta}_0; z^{(l)}, l = 1,\dots,m+1\big)$, где z, $\xi(s)$, $s \in \hat{\Delta}_0$, задают параметры наихудшего сигнала $\hat{y}_0(s)$, $s \in \hat{\Delta}_0$, а $z^{(l)}$, $l = 1,\dots,m+1$, – экстремальные (по отношению к направлениям h_l) параметры начального состояния в информационном множестве, совместимом с этим сигналом.

Очевидно, что задача линейного программирования (28) всегда имеет решение. Действительно, вектор $\omega = \big(z = z'; \xi(s) = 0, s \in \hat{\Delta}_0; z^{(l)} = z', l = 1,\dots,m+1\big)$, где z' – произвольный вектор из $\mathscr{Z}$, удовлетворяет всем ограничениям задачи. Следовательно, задача (28) допустима. Максимум в (28) достигается в силу ограниченности допустимого множества.

Учет возмущений не вносит принципиальных трудностей в вычисление априорной оценки $\mu_0(0,\Omega_0)$, так же как и вычисление оценки $\mu_0\big(\tau,\Omega^*(\tau)\big)$. Требуемые модификации рассматриваются далее при изучении общего случая $N > 1$.

Продолжим рассмотрение ситуации $M = 0$, но теперь рассмотрим случай $N > 1$. Произвольное информационное множество Ω_j в момент замыкания t_j, совместимое с измерениями $\hat{y}(\cdot) = \big(\hat{y}_0(\cdot),\dots,\hat{y}_{j-1}(\cdot)\big)$, записанными до момента t_j, является многогранником вида

$$\begin{aligned}
\Omega_j &= \big\{z \in \mathscr{Z} :\; \hat{y}_k(s) - D(s)z \in \Xi,\; s \in \hat{\Delta}_k,\; k = 0,1,\dots,j-1\big\} = \\
&= \big\{z \in \mathbb{R}^{n_z} :\; \underline{v}_k(\hat{y}_k) \leqslant -D_k z \leqslant \bar{v}_k(\hat{y}_k),\; k = 0,\dots,j-1,\;\; d_{\min} \leqslant z \leqslant d_{\max}\big\}.
\end{aligned}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$D_k = \begin{pmatrix} D(s) \\ s \in \hat{\Delta}_k \end{pmatrix},\; \bar{v}_k(\hat{y}_k) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}\xi_{\max} - \hat{y}_k(s) \\ s \in \hat{\Delta}_k \end{pmatrix},\; \underline{v}_k(\hat{y}_k) = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}\xi_{\max} - \hat{y}_k(s) \\ s \in \hat{\Delta}_k \end{pmatrix},\;\; k = 0,\dots,N. \tag{29}$$

Покажем, что задача вычисления оценки $\mu_{ji}(t_j,\Omega_j)$, $i = 1,\dots,m_{j+1}$, при любом $j = 0,1,\dots,N$ является задачей линейного программирования, которая в общем виде может быть записана как

$$\begin{gathered}
\mu_{ji}(t_j,\Omega_j) = \max\; q_{ji}^\top \omega, \\
\underline{d}_{jk}(\hat{y}_k) \leqslant Q_{jk}\omega \leqslant \bar{d}_{jk}(\hat{y}_k),\;\; k = 0,1,\dots,j-1, \\
\underline{b}_j \leqslant S_j \omega \leqslant \bar{b}_j,
\end{gathered} \tag{30}$$

где $\omega \in \mathbb{R}^{n_j}$; Q_{jk}, S_j – некоторые матрицы, правила построения которых будут получены ниже, $\underline{d}_{jk}(\hat{y}_k)$, $\bar{d}_{jk}(\hat{y}_k)$ зависят от $\hat{y}_k$ линейно, $k = 0,\,1,\,\dots,\,j-1$. Остальные элементы задачи от измерений $\hat{y}_0(\cdot),\dots,\hat{y}_{j-1}(\cdot)$ не зависят. Число переменных в задаче (30) выражается рекуррентно: $n_N := n_z$, $n_j := n_{j+1}m_{j+2} + n_z + \mathcal{N}_j$, $j = N-1,\dots,0$ ($m_{N+1} := m+1$).

При $j = N$ и фиксированном i имеем линейную задачу оптимального наблюдения (16), которую с учетом обозначений (29) перепишем как

$$\begin{gathered}
\mu_{Ni}(t_N,\Omega_N) = \max\; q_{Ni}^\top z, \\
\underline{v}_k(\hat{y}_k) \leqslant -D_k z \leqslant \bar{v}_k(\hat{y}_k),\;\; k = 0,\dots,N-1, \\
d_{\min} \leqslant z \leqslant d_{\max},
\end{gathered} \tag{31}$$

где $q_{Ni}^\top = h_i^\top e^{At_f} G$.

Очевидно, задача (31) имеет вид (30) при $\omega = z$,

$$Q_{Nk} = -D_k,\ \underline{d}_{Nk}(\hat{y}_k) = \underline{v}_k(\hat{y}_k),\ \bar{d}_{Nk}(\hat{y}_k) = \bar{v}_k(\hat{y}_k),\ k = 0,\dots,N-1;$$
$$S_N = E,\ \underline{b}_N = d_{\min},\ \bar{b}_N = d_{\max}.$$

Пусть вид задачи (30) верен для $N-1,\dots,j+1$. Для j запишем задачу (14) (при $\tau = t_j$, $\Omega^*(\tau) = \Omega_j$), подставляя в нее $\mu_{j+1}(t_{j+1},\Omega_{j+1}) = \big(\mu_{j+1\,l}(t_{j+1},\Omega_{j+1}), l = 1,\dots,m_{j+2}\big)$ в виде (30):

$$\mu_{ji}(t_j,\Omega_j) = \max_{\hat{y}_j\in\mathcal{Y}_j} \sum_{l=1}^{m_{j+2}} (p_{j+1\,i})_l \max_{\omega^{(l)}} q_{j+1\,l}^\top \omega^{(l)},$$
$$\underline{d}_{j+1\,k}(\hat{y}_k) \leqslant Q_{j+1\,k}\omega^{(l)} \leqslant \bar{d}_{j+1\,k}(\hat{y}_k),\ k = 0,\dots,j,$$
$$\underline{b}_{j+1} \leqslant S_{j+1}\omega^{(l)} \leqslant \bar{b}_{j+1},$$
$$l = 1,\dots,m_{j+2},$$

где $(p_{j+1\,i})_l$ – l-я компонента вектора $p_{j+1\,i}$, $l = 1,\dots,m_{j+2}$; $\omega^{(l)}$ – переменные оптимизации внутренних задач максимизации, каждая из которых удовлетворяет ограничениям (30).

Поскольку $p_{j+1\,i} \geqslant 0\ \forall\ i$ и все внутренние задачи максимизации независимы, полагая $q_{jil}^\top := (p_{j+1\,i})_l q_{j+1\,l}^\top$, получим следующую целевую функцию в последней задаче:

$$\mu_{ji}(t_j,\Omega_j) = \max_{\hat{y}_j(\cdot)\in\mathcal{Y}_j,\omega^{(l)}} \sum_{l=1}^{m_{j+2}} q_{jil}^\top \omega^{(l)},$$

где максимум требуется найти среди всех $\omega^{(l)}$, $l = 1,\dots,m_{j+2}$, и $\hat{y}_j(\cdot)$.

С учетом вида $\mathcal{Y}_j$ уточним задачу вычисления априорной оценки $\mu_{ji}(t_j,\Omega_j)$:

$$\begin{gathered}
\mu_{ji}(t_j,\Omega_j) = \max_{z,\xi,\omega^{(l)}} \sum_{l=1}^{m_{j+2}} q_{jil}^\top \omega^{(l)},\\
\underline{v}_k(\hat{y}_k) \leqslant -D_k z \leqslant \bar{v}_k(\hat{y}_k),\\
\underline{d}_{j+1\,k}(\hat{y}_k) \leqslant Q_{j+1\,k}\omega^{(l)} \leqslant \bar{d}_{j+1\,k}(\hat{y}_k),\\
k = 0,\dots,j-1,\ l = 1,\dots,m_{j+2},\\
\underline{d}_{j+1\,j}(\hat{y}_j) \leqslant Q_{j+1\,j}\omega^{(l)} \leqslant \bar{d}_{j+1\,j}(\hat{y}_j),\\
\hat{y}_j(s) = D(s)z + \xi(s),\ \xi(s)\in\Xi,\ s\in\hat{\Delta}_j,\\
d_{\min} \leqslant z \leqslant d_{\max},\ \underline{b}_{j+1} \leqslant S_{j+1}\omega^{(l)} \leqslant \bar{b}_{j+1},\ l = 1,\dots,m_{j+2}.
\end{gathered} \tag{32}$$

В задаче (32) переменной оптимизации является

$$\omega := \big(z;\xi(s), s\in\hat{\Delta}_j;\omega^{(l)}, l = 1,\dots,m_{j+2}\big).$$

Первые две группы ограничений зависят от $\hat{y}_0(\cdot),\dots,\hat{y}_{j-1}(\cdot)$, по ним для формулировки (30) строятся блочные матрицы Q_{jk} и векторы $\underline{d}_{jk}(\hat{y}_k)$, $\bar{d}_{jk}(\hat{y}_k)$:

$$Q_{jk} = \begin{pmatrix} -D_k & \mathbb{O}_{*\times\mathcal{N}_j} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}_{*\times\mathcal{N}_j} & \operatorname{diag}(Q_{j+1\,k};m_{j+2}) \end{pmatrix}, \tag{33}$$

где $\mathbb{O}_{*\times\mathcal{N}_j} \in \mathbb{R}^{*\times\mathcal{N}_j}$ – нулевая матрица, число строк которой согласуется с числом строк в матрицах соседних блоков, а число столбцов равно $\mathcal{N}_j$; $\mathbb{O}$ – нулевые матрицы, согласованные с соседними блоками как по числу строк, так и числу столбцов; $\operatorname{diag}(Q;m)$ – блочно-диагональная матрица, в которой блок Q повторяется m раз;

$$\underline{d}_{jk}(\hat{y}_k) = \begin{pmatrix} \underline{v}_k(\hat{y}_k) \\ \underline{d}_{j+1\,k}(\hat{y}_k) \\ \vdots \\ \underline{d}_{j+1\,k}(\hat{y}_k) \end{pmatrix},\ \bar{d}_{jk}(\hat{y}_k) = \begin{pmatrix} \bar{v}_k(\hat{y}_k) \\ \bar{d}_{j+1\,k}(\hat{y}_k) \\ \vdots \\ \bar{d}_{j+1\,k}(\hat{y}_k) \end{pmatrix},$$

$$k = 0, \dots, j-1,$$

и в этих векторах блоки повторяются по m_{j+2} раз.

Остальные группы ограничений задачи (32) не зависят от $\hat{y}_0(\cdot), \dots, \hat{y}_{j-1}(\cdot)$ и в силу линейной зависимости $\underline{d}_{j+1\,j}(\hat{y}_j)$, $\bar{d}_{j+1\,j}(\hat{y}_j)$ от $\hat{y}_j$, после исключения ограничения-равенства (подстановки выражения для $\hat{y}_j$ в интервальное ограничение), могут быть преобразованы к виду $\underline{b}_j \leqslant S_j\omega \leqslant \bar{b}_j$, где

$$S_j = \begin{pmatrix} E_{n_z+\mathcal{N}_j} & \mathbb{O}_* \\ R_{j+1} & \operatorname{diag}(Q_{j+1\,j}; m_{j+2}) \\ \mathbb{O}_* & \operatorname{diag}(S_{j+1}; m_{j+2}) \end{pmatrix}, \quad R_{j+1} = \begin{pmatrix} D_j & E_{\mathcal{N}_j} \\ \vdots & \vdots \\ D_j & E_{\mathcal{N}_j} \end{pmatrix}, \tag{34}$$

R_{j+1} по количеству блоков $(D_j\ E_{\mathcal{N}_j})$ согласуется с $\operatorname{diag}(Q_{j+1\,j}; m_{j+2})$;

$$\underline{b}_j = \begin{pmatrix} d_{\min} \\ -\mathbb{1}\xi_{\max} \\ \underline{b}_{j+1} \\ \vdots \\ \underline{b}_{j+1} \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_j = \begin{pmatrix} d_{\max} \\ \mathbb{1}\xi_{\max} \\ \bar{b}_{j+1} \\ \vdots \\ \bar{b}_{j+1} \end{pmatrix},$$

блоки $\underline{b}_{j+1}$, $\bar{b}_{j+1}$ повторяются m_{j+2} раз, размерность вектора $\mathbb{1}$ согласована с числом ограничений.

Перейдем к вычислению оценки $\mu_{ji}\big(\tau, \Omega^*(\tau)\big)$, которая находится как решение задачи (14). К моменту времени $\tau \in \hat{\Delta}_j$ будет получен очищенный сигнал измерений

$$\big(\hat{y}_0^*(\cdot), \hat{y}_1^*(\cdot), \dots, \hat{y}_{j-1}^*(\cdot); \hat{y}^*(s), s \in \hat{\Delta}_j(\tau)\big),$$

где $\hat{y}_k^*(\cdot) = (\hat{y}^*(s), s \in \hat{\Delta}_k)$, $k = 0, \dots, j-1$. Тогда для вычисления оценки $\mu_{ji}\big(\tau, \Omega^*(\tau)\big)$ достаточно просто модифицировать задачу (30). Во-первых, необходимо положить $\hat{y}_k(s) := \hat{y}_k^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}_k$, $k = 0, 1, \dots, j-1$, т. е. вычислить для первой группы ограничений значения верхней и нижней границы $\bar{d}_{jk}(\hat{y}_k^*)$, $\underline{d}_{jk}(\hat{y}_k^*)$. Во-вторых, нужно добавить условие совместимости для измерений $\hat{y}^*(s), s \in \hat{\Delta}_j(\tau)$ – это условие имеет вид $\hat{y}^*(s) = D(s)z + \xi(s)$, $s \in \hat{\Delta}_j(\tau)$. Таким образом, решаемую в момент времени τ задачу можно представить как

$$\begin{gathered} \mu_{ji}\big(\tau, \Omega^*(\tau)\big) = \max\ q_{ji}^\top \omega, \\ \underline{d}_{jk}(\hat{y}_k^*) \leqslant Q_{jk}\omega \leqslant \bar{d}_{jk}(\hat{y}_k^*), \ \ k = 0, \dots, j-1, \\ \underline{b}_j \leqslant S_j\omega \leqslant \bar{b}_j, \ \ S_{j\tau}\omega = b_{j\tau}, \end{gathered} \tag{35}$$

где

$$S_{j\tau} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} D(s) \\ s \in \hat{\Delta}_j(\tau) \end{pmatrix} & E & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad b_{j\tau} = \begin{pmatrix} \hat{y}^*(s) \\ s \in \hat{\Delta}_j(\tau) \end{pmatrix},$$

где нулевой блок имеет размер, согласующийся с размерностью вектора ω.

Кратко остановимся на ситуации, когда в системе присутствуют возмущения: $M \neq 0$. Имеем

$$\Omega_j = \big\{(z, \upsilon) \in \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n\mathcal{N}} : \ \underline{v}_k(\hat{y}_k) \leqslant -D_k z - R_k\upsilon \leqslant \bar{v}_k(\hat{y}_k), k = 0, \dots, j-1, d_{\min} \leqslant z \leqslant d_{\max}, \ \ \upsilon \in \Upsilon^{\mathcal{N}}\big\},$$

где $\upsilon = (\upsilon(\theta), \theta \in \hat{\Delta})$, $R_k = \begin{pmatrix} Q(s,\theta), & \theta \in \hat{\Delta} \\ s \in \hat{\Delta}_k & \end{pmatrix}$, $Q(s,\theta) = \mathbb{O}$, $\theta > s$, $Q(s,\theta)$ $\theta \leqslant s$, определены как в (24).

В задаче (30) при $j = N$ положим $\omega = (z, \upsilon)$,

$$q_{Ni}^\top = \big(h_i^\top e^{At_f} G, h_i^\top e^{A(t_f-\theta)}, \theta \in \hat{\Delta}\big), Q_{Nk} = \big(-D_k\ -R_k\big), k = 0, \dots, N-1;$$

$$S_N = \begin{pmatrix} E_{n_z} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \operatorname{diag}(S; \mathcal{N}) \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_N = \begin{pmatrix} d_{\min} \\ -b \\ \dots \\ -b \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_N = \begin{pmatrix} d_{\max} \\ b \\ \dots \\ b \end{pmatrix},$$

где число повторяющихся блоков в $\underline{b}_N$, $\bar{b}_N$ равно $\mathcal{N}$, а остальные элементы остаются как в задаче (31).

В задаче (30) для произвольного j полагаем

$$\omega := \big\{z; \upsilon; \xi(s), s \in \hat{\Delta}_j; \omega^{(l)}, l = 1, \dots, m_{j+2}\big\},$$

а при построении матриц и векторов ограничений по правилам (33), (34), в матрицах Q_{jk} верхний левый блок $-D_k$ заменим на $\begin{pmatrix} -D_k & -R_k \end{pmatrix}$, в матрице S_j заменим блок с единичной матрицей на матрицу S_N, в $\underline{b}_j$, $\bar{b}_j$ блоки $d_{\min}$, $d_{\max}$ заменены на $\underline{b}_N$, $\bar{b}_N$, матрицы R_{j+1} сформируем как

$$R_{j+1} = \begin{pmatrix} D_j & R_j & E_{\mathcal{N}_j} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_j & R_j & E_{\mathcal{N}_j} \end{pmatrix}.$$

Все модификации, необходимые для вычисления оценок $\mu_{ji}\big(\tau, \Omega^*(\tau)\big)$ следуют идее построения задачи (35). Окончательный вид задач в работе не приводится.

Таким образом, если возмущения в системе отсутствуют, задачи оптимального априорного наблюдения сводятся к задачам линейного программирования. При наличии возмущений они аппроксимируются задачами линейного программирования. Размер получаемых задач существенно зависит от числа ограничений в задаче (13) и быстро растет с увеличением числа моментов замыкания, что является проявлением «проклятия размерности» в задаче оптимального гарантированного управления.

6. Примеры

Преимущества использования задач оптимального априорного наблюдения при оптимальном гарантированном управлении по измерениям продемонстрируем рядом примеров.

Рассмотрим на промежутке времени $[0, t_f]$ систему без возмущения

$$\dot{x}_1 = x_2, \;\; \dot{x}_2 = -x_1 + u, \;\; t \in [0, t_f], \tag{36}$$

начальное состояние которой неизвестно:

$$x(0) = z, \;\; z \in \mathscr{Z} = \{z \in \mathbb{R}^2 : \; ||z||_\infty \leqslant d_{\max}\}.$$

Здесь в терминах (2): $x_0 = 0$, $G = E$, $\mathscr{X}_0 = \mathscr{Z}$.

Полное состояние системы (36) не доступно для измерений. В моменты времени $s \in \hat{\Delta}$ с ограниченной ошибкой $\xi(s)$ измеряется только первая компонента состояния:

$$y(s) = x_1(s) + \xi(s), \;\; |\xi(s)| \leqslant \xi_{\max}.$$

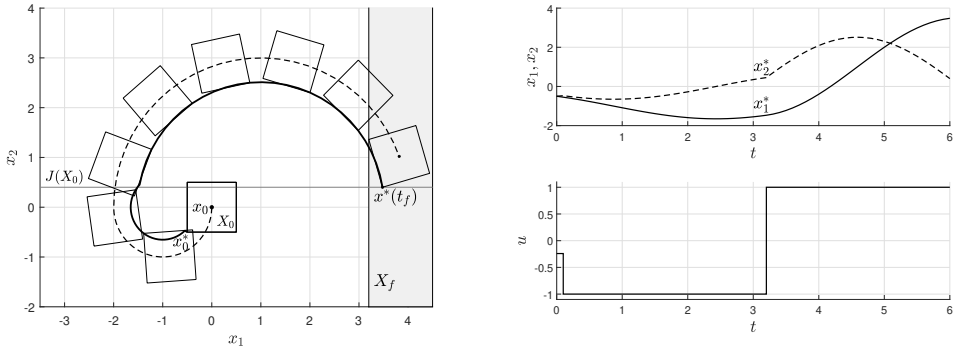
Целью управления является перевод системы (36) с гарантией на терминальное множество

$$X_f = \{x \in \mathbb{R}^2 : g_{\min} \leqslant x_1 \leqslant g_{\max}\}$$

и максимизация гарантированного значения второй компоненты состояния в терминальный момент времени $x_2(t_f)$.

Параметрам задачи присвоим следующие значения: $t_f = 6$; $d_{\max} = 0,5$; $\xi_{\max} = 0,2$; $g_{\min} = 3,2$; $g_{\max} = 4,5$; $h = 0,1$. Решение будем искать только для момента времени $\tau = 0$, для других моментов времени решение и выводы аналогичны.

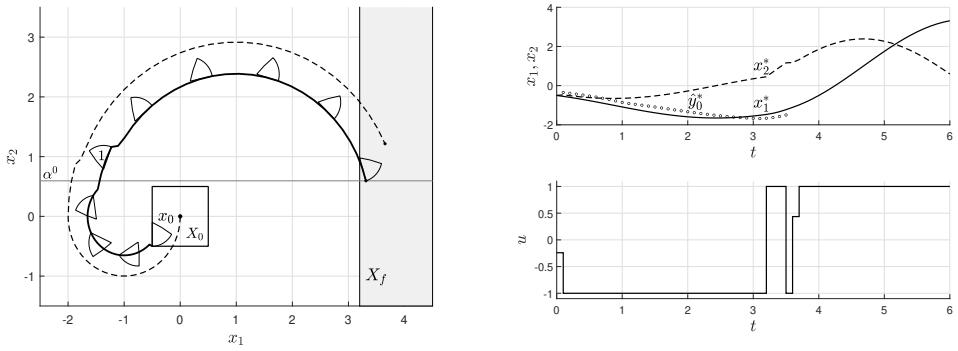
В рассматриваемом примере существует оптимальная гарантирующая программа, она доставляет критерию качества гарантированное значение, равное $0,401321$. Это значение достигается при реализации вектора параметров начального состояния $z^* = (-0,5; -0,5)$. На рис. 1, *а* на фазовой плоскости изображены: траектория системы управления (4) (штриховая линия, $x^*(0) = x_0 = 0$), траектория системы (1) при наихудшей реализации параметров, т. е. с начальным состоянием $x(0) = x_0^* = z^*$ (сплошная жирная линия), динамика множеств $x^*(t) + \{\hat{x}(t|0,z) : z \in \mathscr{Z}\}$ (тонкие линии, показано положение множеств в отдельные моменты времени $t \in [0, t_f]$). Последнее из этих множеств полностью лежит в терминальном множестве X_f (серая полоса), что демонстрирует выполнение терминальных ограничений при выбранном управлении. На рис. 1, *б* представлены траектории при наихудшей реализации начального состояния как функции времени и примененное к системе управление.



а *б*

Рис. 1. Результаты решения в классе гарантирующих программ

В рассматриваемой задаче выберем момент замыкания $t_1 = 3,5$ и построим оптимальную однократно замыкаемую стратегию по измерениям, для которой задачи оптимального априорного наблюдения имеют вид (25). Результаты изображены на рис. 2.



а *б*

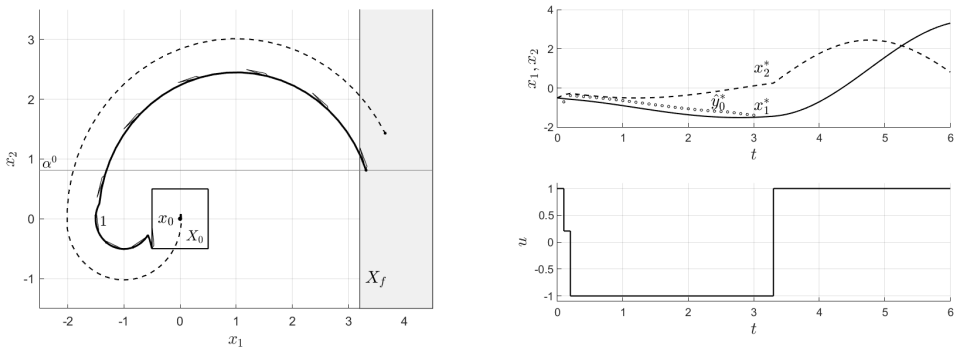
Рис. 2. Результаты решения в классе стратегий управления с моментом замыкания $t_1 = 3,5$

Как и ранее, на рис. 2, *а* штриховая линия соответствует системе управления (4) с начальным состоянием $x^*(0) = 0$; сплошная жирная – траектории системы (1), соответствующей наихудшей реализации параметров начального состояния, здесь $z^* = (-0,5;-0,5)$ и управлению, изображенному на рис. 2, *б*. Тонкие сплошные линии ограничивают множества вида $x^*(t) + \{\hat{x}(t|0,z) : z \in \in \Omega(t_1|0,\Omega_0,\hat{y}_0^*)\}$, $t = 0;1;2;3;3,5;4;4,5;5;5,5;6$. Первое из этих множеств есть $\Omega(t_1|0,\Omega_0,\hat{y}_0^*) \subset \mathscr{X}_0$. Множество, обозначенное цифрой 1, есть $\mathscr{X}(t_1|0,\mathscr{X}_0,u_0,\hat{y}_0^*)$ – это наихудшее прогнозное информационное множество, полученное в результате решения задачи априорного наблюдения (25). Последнее из указанных множеств целиком лежит в терминальном множестве X_f. Здесь $\hat{y}_0^*(s)$, $s \in \hat{\Delta}_0$, – наихудший сигнал измерений. Под таким сигналом понимается $\hat{y}_0(\cdot) \in \mathcal{Y}_0$, доставляющий максимум в задаче (25) для направления $p = p_{1i}$, которое входит в активные ограничения задачи (13). Всего в задаче (13) 29 ограничений на состояние $x(t_1)$ (строк матрицы Φ_1). Упомянутый сигнал измерений изображен на верхнем рис. 2, *б*.

Оптимальное значение критерия качества, соответствующее оптимальной стратегии с моментом замыкания $t_1 = 3,5$ равно $V_0(X_0) = 0,594911$.

Выбор любого момента замыкания от $t_1 = 1,6$ до $t_1 = 3$ обеспечивает оптимальное значение критерия качества, равное $0,813016$. Это максимальное значение, которого можно достичь выбором момента замыкания. Соответствующие результаты, полученные при $t_1 = 3$, представлены на рис. 3.

Полученные результаты демонстрируют эффективность использования задач априорного наблюдения в задачах оптимального гарантированного управления по измерениям. Учет прогноза информационных множеств при построении оптимальных стратегий управления позволил более чем в два раза повысить гарантированное значение критерия качества по сравнению с программным управлением.



а *б*

Рис. 3. Результаты решения в классе стратегий управления с моментом замыкания $t_1 = 3$

Работа выполнена при поддержке Государственной программы научных исследований «Конвергенция-2030» (НИР 1.07.2).

Литература

1. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.

2. *Черноусько Ф. Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 320 с.

3. *Костоусова Е. К.* О полиэдральном оценивании областей достижимости линейных многошаговых систем // Автоматика и телемеханика. 1997. № 3. С. 57–68.

4. *Kostousova E. K.* State estimation for dynamic systems via parallelotopes: optimization and parallel computations // Optimiz. Methods & Software. 1998. Vol. 9, N 14. P. 269–306.

5. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Союзные задачи управления, наблюдения и идентификации // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34, № 9. С. 777–780.

6. *Габасов Р., Дмитрук Н. М., Кириллова Ф. М.* Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2004. Т. 10, № 2. С. 33–57.

7. *Дмитрук Н. М.* Оптимальное робастное управление линейными системами по неточным измерениям выходных сигналов // Проблемы управления и информатики. 2011. № 6. С. 25–42.

8. *Дмитрук Н. М.* Оптимальные замыкаемые обратные связи по измерениям в линейной задаче оптимального управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2025. Т. 31, № 2. С. 108–124.

9. *Габасов Р., Дмитрук Н. М., Кириллова Ф. М.* Оптимальное наблюдение за нестационарными системами // Известия РАН. Теория и системы управления. 2002. № 3. С. 35–46.

10. *Габасов Р., Дмитрук Н. М., Кириллова Ф. М.* Оптимальное условно-относительное наблюдение нестационарных линейных систем // Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68, № 4. С. 586–601.

11. *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* On reachability under uncertainty // SIAM Journal on Control and Optimization. 2002. Vol. 41, N 1. P. 181–216.

12. *Дмитрук Н. М.* Многократно замыкаемая стратегия управления в линейной терминальной задаче оптимального гарантированного управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 3. С. 66–82.

13. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Задачи управления. Минск: Изд-во «Университетское», 1984. 207 с.

14. *Габасов Р., Дмитрук Н. М., Кириллова Ф. М.* Оптимальное наблюдение при постоянно действующих возмущениях // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 52–68.

15. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Оптимизация линейных систем. Минск: БГУ, 1973. 246 с.

16. *Boyd S. P., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge: Cambridge University Press, 2023. 716 p.

References

1. Kurzhanski A. B. *Control and Observation under Uncertainty*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 392 p. (in Russian).

2. Chernousko F. L. *State Estimation for Dynamic Systems. The Ellipsoid Method*. Moscow, Nauka Publ., 1988. 320 p. (in Russian).

3. Kostousova E. K. On polyhedral estimation of reachability sets of linear multistep systems. *Automation and Remote Control*, 1997, vol. 58, iss. 3, pp. 374–382.

4. Kostousova E. K. State estimation for dynamic systems via parallelotopes: optimization and parallel computations. *Optimization Methods & Software*, 1998, vol. 9, no. 14, pp. 269–306 (in Russian).

5. Gabasov R., Kirillova F. M. Dual problems of control, observation and identification. *Doklady Akademii Nauk BSSR*, 1990, vol. 34, no. 9, pp. 777–780 (in Russian).

6. Gabasov R., Dmitruk N. M., Kirillova F. M. Optimal control of multidimensional systems from inaccurate measurements of their output signals. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2004, suppl. 2, pp. S52–S75.

7. Dmitruk N. M. Optimal robust control of linear systems from inaccurate measurements of output signals. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2011, vol. 43, iss. 11, pp. 30–47.

8. Dmitruk N. M. Optimal closed-loop measurement feedback in a linear optimal control problem. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2025, vol. 329, pp. S77–S92.

9. Gabasov R., Dmitruk N. M., Kirillova F. M. Optimal observation of nonstationary systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2002, vol. 41, no. 2, pp. 195–206.

10. Gabasov R., Dmitruk N. M., Kirillova F. M. Optimal conditional relative observation of non-stationary linear systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, vol. 68, no. 4, pp. 523–536.

11. Kurzhanski A. B., Varaiya P. On reachability under uncertainty. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2002, vol. 41, no. 1, pp. 181–216.

12. Dmitruk N. M. Multiply closed control strategy in a linear terminal problem of optimal guaranteed control. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2022, vol. 319, suppl. 1, pp. S112–S128.

13. Gabasov R., Kirillova F. M. *Constructive Methods of Optimization. Part 2. Control Problems*. Minsk, Universitetskoe, 1984. 207 p. (in Russian).

14. Gabasov R., Dmitruk N. M., Kirillova F. M. Optimal control under persistent disturbances. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. S52–S75.

15. Gabasov R., Kirillova F. M. *Optimization of Linear Systems*. Minsk, BSU, 1973. 246 p. (in Russian).

16. Boyd S. P., Vandenberghe L. *Convex Optimization*. Cambridge, Cambridge University Press, 2023. 716 p.