*Национальная академия наук Беларуси*
*Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 98–110*

*УДК 517.925* https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-98–110
EDN: CBCNWF

# ЛОКАЛЬНЫЕ ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ В ОКРЕСТНОСТИ СЛОЖНОЙ ТОЧКИ ПОКОЯ

**Л. В. Детченя, А. А. Гринь, А. В. Кузьмич, Э. В. Мусафиров**

*Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь*
*e-mail: detchenya_lv@grsu.by, grin@grsu.by, kuzmich_av@grsu.by, musafirov_ev@grsu.by*

**Поступила:** 07.09.2026 **Исправлена:** 08.10.2026 **Принята:** 14.10.2026

**Ключевые слова:** метод Фроммера, диаграмма Ньютона, траектория, сложная точка покоя, мера кривизны, порядок кривизны, локальный фазовый портрет

**Аннотация.** Объектом исследования выступает двумерная автономная дифференциальная система, правые части которой представляют собой однородные многочлены четвертой степени. Предметом исследования являются локальные фазовые портреты такого вида систем. Кратко изложен используемый в исследовании метод Фроммера как один из эффективных инструментов расщепления сложных точек покоя, и приводится краткий обзор известных результатов для нелинейных систем. Целью исследования является получение не только локальных фазовых портретов исследуемых систем, но и коэффициентных условий, при которых такие фазовые портреты существуют. Актуальность работы обоснована незавершенностью получения такого вида коэффициентных критериев в виду сложностей решения алгебраического уравнения пятой степени, возникающего при нахождении возможных конечных мер кривизны $O^+$-кривых исследуемой системы. В основной части статьи для некоторых случаев получены локальные фазовые портреты исследуемой системы и указаны коэффициентные критерии их реализации. В заключении подведены итоги проведенных исследований. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейшем исследовании двумерных автономных систем.

# LOCAL PHASE PORTRAITS OF A DIFFERENTIAL SYSTEM WITH FOURTH-DEGREE NONLINEARITIES IN THE NEIGHBORHOOD OF MULTIPLE EQUILIBRIUM POINT

**L. V. Detchenya, A. A. Grin, A. V. Kuzmich, E. V. Musafirov**

*Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus*
*e-mail: detchenya_lv@grsu.by, grin@grsu.by, kuzmich_av@grsu.by, musafirov_ev@grsu.by*

**Received:** 07.09.2026 **Revised:** 08.10.2026 **Accepted:** 14.10.2026

**Keywords:** Frommer method, Newton diagram, trajectory, multiple equilibrium point, measure of curvature, order of curvature, local phase portrait

**Abstract.** The object of the investigation is a two-dimensional autonomous differential system whose right-hand sides are homogeneous polynomials of the fourth degree. The subject of the study is local phase portraits of this type of systems. The Frommer method used in the study is briefly described as one of the effective tools for splitting multiple equilibrium points, and a brief review of the known results for nonlinear systems is provided. The goal of the study is to obtain not only the local phase portraits of the systems under investigation but also the coefficient conditions under which such phase portraits exist. The relevance of the work is justified by the incompleteness of obtaining this type of coefficient criteria due to the difficulties in solving an algebraic equation of the fifth degree, which arises when finding possible finite measures of curvature of the $O^+$-curves of the system under study. In the main part of the paper, local phase portraits of the system under study are obtained for some cases and coefficient criteria for their implementation are indicated. The results of the research are summarized in the conclusion. The obtained results can be used in further research of two-dimensional autonomous systems.

## 1. Введение

Одна из фундаментальных задач качественной теории дифференциальных уравнений состоит в исследовании поведения траекторий автономной полиномиальной дифференциальной системы

$$\dot{x} = X(x,y) \equiv \sum_{i+j=1}^{n} a_{ij} x^i y^j, \quad \dot{y} = Y(x,y) \equiv \sum_{i+j=1}^{n} b_{ij} x^i y^j \tag{1}$$

с действительными коэффициентами в окрестности сложной точки покоя [1, стр. 86], расположенной в начале координат. Для линейных систем такая задача была решена А. Пуанкаре [2]. Далее указанной задачей для нелинейных систем занимались А. Н. Берлинский [3], И. С. Куклес [4], В. В. Потлов [5], Э. В. Вдовина [6], А. Ф. Андреев [7; 8] и многие другие авторы. Наиболее полные исследования автономных систем с приведенными типами расположения траекторий в окрестности сложной точки покоя были опубликованы в работах М. Е. Сагаловича [9] и Л. Н. Лебедевой [10]. Полная классификация локальных фазовых портретов двумерных аналитических систем с ненулевыми квадратичными частями и коэффициентные критерии их реализации были получены в диссертации первого автора [11]. В работе [11] также представлен и более подробный обзор результатов исследований, проведенных ранее другими авторами в данном направлении.

Исследование поведения автономных систем с более высокими нелинейностями столкнулось с рядом сложностей. Так, для систем с нелинейностями третьей степени изучение $O^+$-кривых с заданными характеристиками сводится к решению уравнения четвертой степени, которое может не иметь действительных корней. В этом случае начало координат системы (1) является монодромной точкой покоя, для которой возникает проблема различения центра и сложного фокуса, и большинство исследований, как правило, посвящены именно этой проблеме. Классические результаты, посвященные проблеме различения центра и фокуса, хорошо представлены в известной монографии [12]. В работах первого автора [13; 14] приведены исследования кубических систем (1) в частных случаях, получены локальные фазовые портреты, их коэффициентные критерии и указаны условия монодромности начала координат как сложной точки покоя. Изучение поведения траекторий системы (1) в случае $n = 4$, т. е. с нелинейностями четвертой степени значительно усложняется необходимостью решения алгебраического уравнения пятой степени.

Целью нашей работы является получение коэффициентных критериев реализации каждого из локальных фазовых портретов в окрестности сложной точки покоя для автономных систем с однородными многочленами четвертой степени в правой части, в зависимости от вида коэффициентов такой системы. Некоторые первичные результаты исследования этих систем, полученные первым автором, представлены в работах [14; 15]. В статье [16] получены коэффициентные критерии реализации нескольких случаев локальных фазовых портретов системы (1) при $n = 4$, в настоящей работе мы представляем результаты изучения других случаев этой системы. Проведенное нами здесь исследование использует один из эффективных способов расщепления сложных особых точек – метод Фроммера, который впервые был предложен в работах [17; 18], затем был дополнен И. С. Куклесом [4] и получил дальнейшее развитие в работах А. Ф. Андреева, А. П. Садовского [7; 8; 19]. В нашем исследовании метод Фроммера, суть которого будет кратко изложена ниже, использован, опираясь именно на работы [7; 8; 19]. Описание других методов исследования сложных точек покоя можно найти в монографии [20].

Идея получения полной классификации локальных фазовых портретов для двумерных автономных систем с нулевыми линейными и ненулевыми квадратичными частями была предложена профессором А. П. Садовским. Под его руководством первым автором были исследованы двумерные аналитические системы с ненулевыми квадратичными частями, и сформулирована их полная классификация [11; 21]. Данная статья содержит результаты, полученные под влиянием и при содействии профессора Антона Павловича Садовского.

## 2. Предварительные сведения

Рассмотрим систему вида (1) при $n = 4$ с нулевыми коэффициентами при младших степенях:

$$\dot{x} = a_1x^4 + b_1x^3y + c_1x^2y^2 + d_1xy^3 + e_1y^4, \quad \dot{y} = a_2x^4 + b_2x^3y + c_2x^2y^2 + d_2xy^3 + e_2y^4. \tag{2}$$

В случае, если в (2) $e_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, то с помощью преобразования $x \mapsto \frac{x}{\sqrt[15]{e_1a_2^4}}, y \mapsto \frac{y}{\sqrt[15]{e_1^4a_2}}$ можно уменьшить количество произвольных параметров этой системы, приведя (2) к виду

$$\dot{x} = ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + y^4, \quad \dot{y} = x^4 + \beta x^3y + \gamma x^2y^2 + \delta xy^3 + \varepsilon y^4. \tag{3}$$

Поведение системы (3) исследуем при помощи метода Фроммера [7; 8; 19], представляющего собой классический инструмент для изучения сложных точек покоя, который также называют «прямым геометрическим методом». Далее приведем определения используемых терминов и кратко изложим алгоритм применения метода, суть которого заключается в исследовании порядков $\mu$ и мер $\rho$ кривизны $O^+$-кривых системы (3).

**Определение 2.1 [8, с. 7; 19, с. 4].** Полутраекторию $l = \varphi(t)$, где $\varphi : [\alpha; +\infty) \to R^2$ решение системы (1) с $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$, будем называть $O^+$-кривой системы (1).

Если для полутраектории $l = \varphi(t)$, $\varphi : (-\infty; \alpha] \to R^2$, выполнено $\lim\limits_{t\to-\infty} \varphi(t) = 0$, то такая траектория называется $O^-$-кривой системы (1) [8, стр. 7]. $O^+$- и $O^-$-кривые называют $O$-кривыми системы (1).

**Определение 2.2 [8, с. 28].** Если существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to+0} \frac{\ln y(x)}{\ln x} = \mu$, то он называется порядком кривизны $O^+$-кривой $y = y(x)$ в точке $O$.

**Определение 2.3 [19, с. 27].** Если $O^+$-кривая $y = y(x)$ имеет порядок кривизны $\mu$ и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to+0} \frac{y(x)}{x^\mu} = \rho$, то он называется мерой кривизны $O^+$-кривой $y = y(x)$.

Таким образом, если система (1) имеет $O$-кривую с порядком кривизны $\mu$ и мерой $\rho$, то эту кривую можно задать в виде $y(x) = \rho x^\mu + o(x^\mu)$, где $o(x^\mu)$ – бесконечно малая более высокого порядка при $x \to +0$.

Идея метода состоит в нахождении всех возможных $O$-кривых системы (3) с заданными характеристиками. В случае, когда в (1) $X(0, y) \equiv 0$, система (1) имеет $O$-кривые с порядком кривизны $\mu = 0$ и с порядком $\mu = +\infty$ – в случае, если в (1) $Y(x, 0) \equiv 0$. В (3) эти условия не выполнены, поэтому система не имеет $O$-кривых с указанными порядками. Для определения возможных конечных порядков кривизны, по степеням переменных $x$, $y$, входящих в правые части (1), строится ломаная (диаграмма) Ньютона [7; 17–19], по правилу: слагаемому вида $a_{ij}x^i y^j$ в первом уравнении системы ставится в соответствие точка с координатами $(j+1; i-1)$, а каждому слагаемому вида $b_{ij}x^i y^j$ второго уравнения – соответственно точка $(j; i)$ [19, с. 27], и тогда числа $\mu_p = -k_p$, где $k_p$ – угловые коэффициенты звеньев ломаной, и только они будут возможными конечными порядками кривизны $O$-кривых системы (1), кроме того, если ломаная Ньютона имеет кратные (двойные) вершины, выделяют особые порядки кривизны. Для исследования $O^+$-кривых системы (1) с обыкновенными порядками кривизны $\mu_p$, $p = \overline{1, m}$, используют замену $y = ux^{\mu_p}$. Указанная замена и исключение времени приводит (1) к дифференциальному уравнению вида

$$\frac{du}{dx}x^l = \frac{B_{\mu_p}(u) + B(x, u)}{A_{\mu_p}(u) + A(x, u)}.$$

Возможными конечными мерами кривизны $O$-кривых с заданным порядком $\mu_p$ могут быть вещественные корни уравнения $B_{\mu_p}(u) = 0$ и только они. Пусть $u = u_p$ – действительные корни этого уравнения. Для исследования характера $O^+$-кривых с порядком $\mu = \mu_p$ и мерами $\rho = u_p$ в последнем дифференциальном уравнении делают замены переменных вида $u = v + u_p$. Преобразованные уравнения приобретают вид

$$\frac{dv}{dx}x^l = \frac{cv^m + c_1v^{m+1} + \ldots + c_{n-m}v^n + B_1(x, v)}{d + d_1v + \ldots + d_nv^n + A_1(x, v)},$$

где $c \neq 0$, $n \geqslant m$. Если $d \neq 0$, то последнее уравнение приводится к виду

$$\frac{dv}{dx}x^l = av^m + a_1v^{m+1} + \ldots + V(x, v), \text{ где } a = \frac{c}{d}. \tag{4}$$

В работах [7; 8; 19] был получен следующий результат

**Теорема 2.4.** *Если*

1) $l = 1$, $m$ *– нечетное,* $g < 0$, *то существует единственная* $O^+$*-кривая с порядком кривизны* $\mu = \mu_p$ *и мерой* $\rho = u_p$, *которую можно записать в виде* $y(x) = u_px^{\mu_p} + o(x^{\mu_p})$.

2) $l = 1$, $m$ *– нечетное,* $g > 0$ *либо* $m$ *– четное, то существует бесконечное множество (открытых, либо полуоткрытых пучков) таких* $O^+$*-кривых.*

3) $l>1$, $m=1$, $g<0$, *то существует единственная* $O^+$*-кривая с порядком кривизны* $\mu=\mu_p$ *и мерой* $\rho=u_p$.

4) $l>1$, $m=1$, $g>0$, *то существует открытый пучок таких* $O^+$*-кривых.*

*В случае* $d=0$ *либо* $d\neq 0$, $l>1$, $m>1$ *к уравнению* (4) *следует еще раз применить метод Фроммера.*

Для удобства рассуждений, можно применять метод Фроммера в каждой четверти отдельно. Так, полагая, что $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$ проверяем наличие $O^+$-кривых с заданными характеристиками в первой четверти, рассматривая только положительные корни уравнения $B_{\mu_p}(u)=0$. Исследования в остальных четвертях сводятся к исследованию в первой посредством замен $x\mapsto -x$, $y\mapsto y$ для второй, и $x\mapsto -x$, $y\mapsto -y$ и $x\mapsto x$, $y\mapsto -y$ соответственно для третьей и четвертой четвертей.

Совокупность $O$-кривых системы разбивается на конечное число попарно непересекающихся пучков, каждый их которых открыт (П), либо состоит из единственной $O$-кривой (К). Два соседних пучка вида К образовывают $H$-сектор (гиперболический), вида П – соответственно $E$-сектор (эллиптический), и соседние пучки разных типов образуют $P$-сектор Бендиксона (параболический). Например, если вспомнить виды локальных фазовых портретов для линейных систем, то седло выражается портретом $HHHH$, либо $HH$ в вырожденном случае, а узел – выражается портретом $P$. Однако в случае сложной особой точки зависимость более сложная, и количество элементарных секторов Бендиксона намного больше. Будем считать, что нам известен локальный фазовый портрет особой точки $O(0;0)$, если известно разбиение окрестности точки $O(0;0)$ на секторы Бендиксона, их количество и циклический порядок следования по окружности достаточно малого радиуса.

В определениях и методике исследования использовались ссылки на систему (1), все изложенные сведения справедливы и для (3), как частного вида (1).

## 3. Основная часть

Исследуем поведение системы (3) в окрестности сложной точки покоя $O(0;\,0)$. Построим диаграмму Ньютона. Действуя по изложенному выше правилу, получаем, что членам первого уравнения системы (3) соответствуют точки с координатами $(1;\,3)$, $(2;\,2)$, $(3;\,1)$, $(4;\,0)$ и $(5;\,-1)$, а членам второго уравнения системы (3) соответственно точки $(0;\,4)$, $(2;\,2)$, $(3;\,1)$ и $(4;\,0)$. Учитывая выпуклость ломаной Ньютона, получаем, что она имеет одно ребро с угловым коэффициентом $k=-1$, значит $\mu=1$ – единственный возможный конечный порядок кривизны $O^+$-кривых системы (3). Выполнив в (3) замену $y=ux$ и исключая время, приходим к уравнению

$$\frac{du}{dx}x=\frac{-u^5+(\varepsilon-d)u^4+(\delta-c)u^3+(\gamma-b)u^2+(\beta-a)u+1}{a+bu+cu^2+du^3+u^4}. \tag{5}$$

Возможными конечными мерами кривизны $O^+$-кривых системы (3) будут вещественные корни уравнения и только они

$$u^5-(\varepsilon-d)u^4-(\delta-c)u^3-(\gamma-b)u^2-(\beta-a)u-1=0. \tag{6}$$

Пусть $\Delta=1+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$. При выполнении условия

$$a+b+c+d=\Delta-1, \tag{7}$$

число $u=1$ является корнем уравнения (6). В дальнейшем предполагаем, что условие (7) выполнено и $\Delta\neq 0$. Случай $\Delta=0$ требует повторного применения метода Фроммера и в настоящей работе не рассматривается. При выполнении (7) уравнение (6) можно представить в виде

$$(u-1)(u^2+p_1u+q_1)(u^2+p_2u+q_2)=0, \tag{8}$$

где $p_1,p_2,q_1,q_2\in R$, $q_1q_2=1$. В этом случае коэффициенты системы (3) будут удовлетворять соотношениям

$$a=\beta+q_1q_2-p_1q_2-p_2q_1,\ b=\gamma+p_1q_2+p_2q_1-p_1p_2-q_2-q_1,$$
$$c=\delta+p_1p_2-p_1-p_2+q_1+q_2,\ d=\varepsilon+p_1+p_2-1.$$

А уравнение (5) перепишется в виде

$$xdu/dx = \big((1-u)(u^2+p_1u+q_1)(u^2+p_2u+q_2)\big) / \big(u^4+p_1u^3+p_2u^3+\varepsilon u^3-u^3+q_1u^2+ \\ +q_2u^2+p_1p_2u^2+\delta u^2-p_1u^2-p_2u^2+p_1q_2u+p_2q_1u+\gamma u-q_1u-q_2u-p_1p_2u+q_1q_2+\beta- \\ -p_1q_2-p_2q_1\big). \qquad (9)$$

Наличие конечных мер кривизны $O^+$-кривых системы (3) зависит от количества вещественных корней уравнения (8).

Нас интересует наличие корней уравнения (8), отличных от единицы, что зависит от значений параметров $p_1, p_2, q_1, q_2 \in R$. Учитывая, что $q_1q_2 = 1$, разобьем исследование на три случая, в зависимости от значений параметров $q_1$ и $q_2$: два частных случая: $q_1 = q_2 = 1$ и $q_1 = q_2 = -1$, и общий случай $q_1 = \frac{1}{q_2}$, $|q_1| \neq 1$.

**Первый случай:** $q_1 = q_2 = 1$.

Для удобства рассуждений разобьем исследование на части, придавая следующие значения оставшимся параметрам $p_1, p_2$:

1. $|p_i| < 2, i = 1,2$;
2. $p_i = 2, |p_k| < 2, i,k = 1,2$, или $p_i = -2, |p_k| < 2, i,k = 1,2$;
3. $|p_i| = 2, i = 1,2$;
4. $|p_i| > 2, |p_k| < 2, i,k = 1,2$;
5. $|p_i| = 2, |p_k| > 2, i,k = 1,2$, или $|p_i| > 2, i = 1,2$.

В первом случае уравнение (8) имеет только один вещественный корень $u_1 = 1$, и, следовательно, возможной конечной мерой кривизны $O^+$-кривых системы (3) с порядком $\mu = 1$ может быть только число $\rho = 1$. Следуя [19, с. 47], выполним в (9) замену $u = v+1$, получим $\frac{dv}{dx}x = -\frac{(p_1+2)(p_2+2)}{\Delta}v + V(x,v)$, и, согласно теореме 2.4, при $\Delta(p_1+2)(p_2+2) > 0$ система (3) имеет единственную $O^+$-кривую с порядком $\mu = 1$ и мерой $\rho = 1$, а в случае $\Delta(p_1+2)(p_2+2) < 0$ – открытый пучок таких $O^+$-кривых. $O^+$-кривых с другими порядками в этом случае система (3) не имеет. Во второй четверти уравнение (9) примет вид

$$xdu/dx = -\big((u+1)(u^2-p_1u+1)(u^2-p_2u+1)\big) / \big(u^4-(\varepsilon+p_1+p_2+1)u^3+ \\ +(\delta+p_1p_2-p_1-p_2+2)u^2+(p_1p_2-p_1-p_2+2-\gamma)u+\beta-p_1-p_2+1\big),$$

это значит, что уравнение (8) не имеет положительных действительных корней, и система (3) не имеет $O^+$-кривых во второй четверти. Уравнения вида (9) для системы (3) в третьей и четвертой четвертях соответствуют аналогичным в первой и второй четвертях. Значит, для полного исследования достаточно рассматривать наличие $O^+$-кривых с заданными характеристиками в первых двух четвертях. Итак, в случае, $|p_i| < 2$, $i = 1,2$, получаем, что при $\Delta > 0$ система (3) представится локальным фазовым портретом $HH$ (рис. 1) и соответственно $PEPE$ (рис. 2) при $\Delta < 0$.

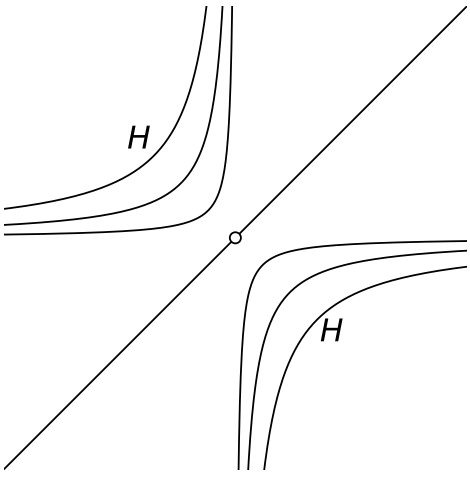



Рис. 1. Локальный портрет $HH$

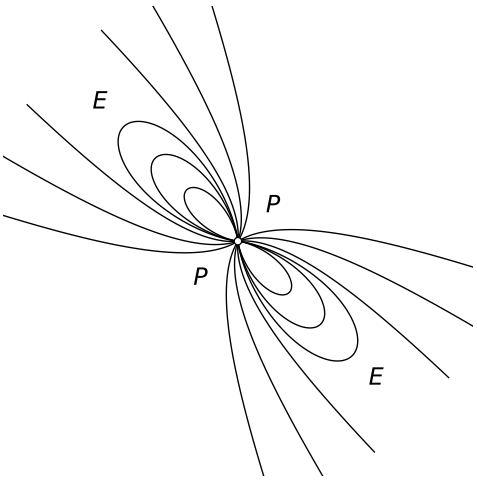



Рис. 2. Локальный портрет $PEPE$

Во втором случае, если $p_i = -2$, $|p_k| < 2$, $i,k = 1,2$, поведение системы (3) в окрестности сложной точки покоя абсолютно такое же, так как в этом случае уравнение (8) приобретает вид $(u-1)^3(u^2+p_ku+1)=0$, кратность корня $u_1=1$ равна трем, согласно теореме 2.4 будем иметь единственную $O^+$-кривую с порядком $\mu=1$ и мерой $\rho=1$ при $\Delta>0$ и открытый пучок таких $O^+$-кривых при $\Delta<0$. Если же $p_i=2$, $|p_k|<2$, $i,k=1,2$, то в первой четверти уравнение (9) запишется в виде

$$\frac{du}{dx}x = -\frac{(u-1)(u+1)^2(u^2+p_ku+1)}{u^4+(\varepsilon+p_k+1)u^3+(\delta+p_k)u^2+(\gamma-p_k)u+\beta-p_k-1}. \tag{10}$$

Выполняя в (10) замену $u=v+1$, получаем, что система (3) имеет единственную $O^+$-кривую с порядком $\mu=1$ и мерой $\rho=1$, если $\Delta>0$, и открытый пучок таких $O^+$-кривых, если $\Delta<0$. А во второй четверти уравнение (9) примет вид

$$\frac{du}{dx}x = -\frac{(u+1)(u-1)^2(u^2-p_ku+1)}{u^4-(\varepsilon+p_k+1)u^3+(\delta+p_k)u^2-(\gamma-p_k)u+\beta-p_k-1}, \tag{11}$$

уравнение (8) имеет корень $u_1=1$ кратности 2. Выполняя замену $u=v+1$ в уравнении (11), получаем $\frac{dv}{dx}x = Av^2+V(x,v)$, что соответствует случаю 2 теоремы 2.4, следовательно, система (3) имеет полуоткрытый пучок $O^+$-кривых с порядком кривизны $\mu=1$ и мерой $\rho=1$. Это значит, что при $\Delta>0$ система (3) имеет локальный фазовый портрет $PHPH$ и $PEPE$ при $\Delta<0$ (рис. 3 и 4 соответственно).

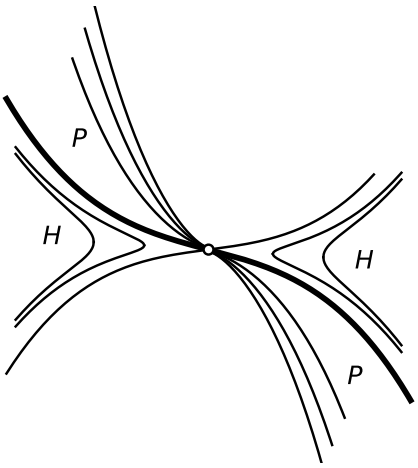



Рис. 3. Локальный портрет $PHPH$

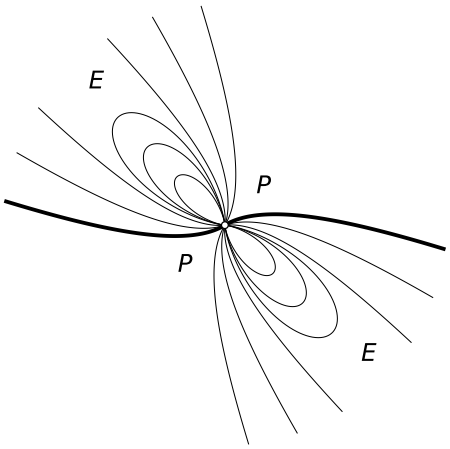



Рис. 4. Локальный портрет $PEPE$

На рис. 3, 4 и далее более жирным выделена граничная $O^+$-кривая соответствующего полуоткрытого пучка.

В третьем случае, при $p_1=p_2=-2$, получаем, что уравнение (8) имеет один вещественный корень $u_1=1$ кратности пять в первой и третьей четвертях, и этот случай соответствует случаю 1. Если же $p_1=p_2=2$ либо $p_i=-2$, $p_k=2$, $i,k=1,2$, то в одной четверти будем иметь корень $u_1=1$ нечетной кратности, а в другой – этот же корень четной кратности, что соответствует уже рассмотренному случаю 2.

Рассмотрим четвертый случай. Будем считать, для определенности, что $|p_1|>2$, $|p_2|<2$. Уравнение (8) при $p_1>2$ в первой четверти имеет положительный корень $u_1=1$, исследование которого аналогично случаю 1. Во второй четверти уравнение вида (8) имеет два положительных корня $u_{2,3}=\frac{p_1\pm\sqrt{p_1^2-4}}{2}$. Обозначим $m^2=p_1^2-4$, тогда корни можно переписать в виде $u_{2,3}=\frac{p_1\pm m}{2}$, при этом $u^2=\frac{p_1+m}{2}>1$ и $u^3=\frac{p_1-m}{2}=\frac{2}{p_1+m}<1$. Выполнив в (9) замены $u=v+\frac{p_1+m}{2}$, $u=v+\frac{p_1-m}{2}$ соответственно получим

$$\frac{dv}{dx}x = \frac{0,5m(p_1+m+2)(p_1^2+m(p_1-p_2)-p_1p_2)}{(1+\varepsilon(1+m^2)+\gamma-\delta m)(p_1+m)+2(\varepsilon m-\beta-\delta-m)}v+V(x,v),$$

$$\frac{dv}{dx}x = \frac{-0,5m(p_1-m+2)(p_1^2-m(p_1-p_2)-p_1p_2)}{(1+\varepsilon(1+m^2)+\gamma+\delta m)(p_1-m)-2(\varepsilon m+\beta+\delta-m)}v+V(x,v).$$

Введем обозначения $A = 1+\varepsilon(1+m^2)+\gamma$, $B = 2+\delta p_1 - 2\varepsilon - A$, $C = 2\beta + 2\delta + \delta m^2 - Ap_1$. Тогда знаменатели последних двух уравнений преобразуются соответственно в выражения $-C-Bm$ и $-C+Bm$, учитывая, что $p_1 \pm m + 2 > 0$, и полагая

$$I_{11} = (p_1^2 + m(p_1-p_2) - p_1p_2)(C+Bm), \quad I_{12} = (p_1^2 - m(p_1-p_2) - p_1p_2)(C-Bm)$$

получаем, что в случае $I_{11} > 0$, $I_{12} < 0$, $p_1 > 2$ система (3) имеет единственные $O^+$-кривые с $\mu = 1$, $\rho = \frac{p_1+m}{2}$ и $\mu = 1$, $\rho = \frac{2}{p_1+m}$, и открытые пучки таких $O^+$-кривых при $p_1 > 2$, $I_{11} < 0$, $I_{12} > 0$. Если же $p_1 < -2$, то уравнение (8) имеет в первой четверти три положительных корня $u_1 = 1$, $u_{2,3} = \frac{-p_1 \pm \sqrt{p_1^2-4}}{2}$. Рассуждая аналогично для каждого из полученных корней и учитывая введенные выше обозначения, получаем, что в случае $p_1 < -2$ при $I_{11} > 0$, $I_{12} > 0$ система (3) имеет единственные $O^+$-кривые с $\mu = 1$, $\rho = \frac{-p_1+m}{2}$ и $\mu = 1$, $\rho = \frac{2}{-p_1+m}$ соответственно, а при $I_{11} < 0$, $I_{12} < 0$ открытые пучки таких $O^+$-кривых.

Если же $|p_1| < 2$, $|p_2| > 2$, то, в зависимости от знака $p_2$ в первой либо второй четверти, уравнение (8) кроме корня $u_1 = 1$ имеет корни $u_{2,3} = \frac{-p_2 \pm \sqrt{p-2^2-4}}{2}$ (указаны корни в первой четверти в случае $p_2 < -2$). Полагая $D = 1+\varepsilon(1+n^2)+\gamma$, $E = 2+\delta p_2 - 2\varepsilon - D$, $F = 2\beta + 2\delta + \delta n^2 - Cp_2$, где $n^2 = p_2^2 - 4$, и обозначив

$$I_{21} = (p_2^2 - n(p_1-p_2) - p_1p_2)(F+En), \quad I_{22} = (p_2^2 + n(p_1-p_2) - p_1p_2)(F-En),$$

получаем, что в случае $I_{21} > 0$, $I_{22} < 0$, $p_2 > 2$ либо $I_{21} > 0$, $I_{22} > 0$, $p_2 < -2$ – у системы (3) единственные $O^+$-кривые с $\mu = 1$, $\rho = \frac{|p_2|+n}{2}$ и $\mu = 1$, $\rho = \frac{2}{|p_2|+n}$ соответственно, и открытые пучки соответствующих $O^+$-кривых при $p_2 > 2$, $I_{21} < 0$, $I_{22} > 0$ и $p_2 < -2$, $I_{21} < 0$, $I_{22} < 0$.

В пятом случае наиболее интересным является случай, когда $|p_i| = 2$, $|p_k| > 2$, $i,k = 1,2$. Для определенности, далее будем считать, что $p_1 > 2$, $p_2 = 2$. В этом случае в первой четверти уравнение (9) запишется в виде (10), и с учетом введенных ограничений получаем, что в первой (и третьей) четверти система (3) имеет единственную $O^+$-кривую с порядком $\mu = 1$ и мерой $\rho = 1$, если $\Delta > 0$, и открытый пучок таких $O^+$-кривых, если $\Delta < 0$. А во второй четверти уравнение (9) примет вид (11), и согласно теореме 2.4, система (3) имеет во второй (и четвертой) четверти полуоткрытый пучок $O^+$-кривых с порядком кривизны $\mu = 1$ и мерой $\rho = 1$.

Рассмотрим наличие $O^+$-кривых с мерами, отличными от единицы. Во второй четверти это $u_{2,3} = \frac{p_1 \pm m}{2}$, с учетом введенных выше обозначений. Выполняя в (9) замены $u = v + \frac{p_1+m}{2}$, $u = v + \frac{p_1-m}{2}$ соответственно получим

$$\frac{dv}{dx}x = \frac{0,25m(p_1+m+2)(p_1+m-2)^2}{(1+\varepsilon(1+m^2)+\gamma-\delta m)(p_1+m)+2(\varepsilon m-\beta-\delta-m)}v + V(x,v),$$

$$\frac{dv}{dx}x = \frac{-0,25m(p_1-m+2)(p_1-m-2)^2}{(1+\varepsilon(1+m^2)+\gamma+\delta m)(p_1-m)-2(\varepsilon m+\beta+\delta-m)}v + V(x,v),$$

и с учетом того, что выражения, стоящие в числителях последних уравнений, имеют определенный знак, количество $O^+$-кривых с указанными мерами зависит только от выражений, стоящих в знаменателе, т. е. от выражений $-C-Bm$ и $-C+Bm$ соответственно. В этом случае система (3) будет иметь единственные $O^+$-кривые $\mu = 1$, $\rho = \frac{p_1+m}{2}$ и $\mu = 1$, $\rho = \frac{2}{p_1+m}$ соответственно при $C+Bm > 0$ и $-C+Bm > 0$ и открытые пучки таких $O^+$-кривых, если указанные выражения отрицательны. Остальные случаи для $|p_i| = 2$, $|p_k| > 2$, $i,k = 1,2$, рассматриваются аналогичным образом. Если же $|p_i| \geqslant 2$, $i = 1,2$, то уравнение (8) имеет 5 различных вещественных корней, знаки которых зависят от знаков параметров $p_i$, $i = 1,2$. Корнями будут числа $u_1 = 1$, $u_{2,3} = \frac{|p_1| \pm m}{2}$, $u_{4,5} = \frac{|p_2| \pm n}{2}$. Условия существования $O^+$-кривых с заданными характеристиками приведены выше. Таким образом, получены следующие результаты.

**Теорема 3.1.** *В случае, когда либо $|p_1| \leqslant 2$, либо $|p_2| \leqslant 2$, начало координат $O(0,0)$ системы* (3) *представится следующими локальными фазовыми портретами:*

1) *НН при $\Delta > 0$, при $p_1 = p_2 = -2$ или $|p_i| < 2$, $i = \overline{1,2}$, или $p_i = -2$, $|p_k| < 2$, $i,k = \overline{1,2}$;*

2) *РЕРЕ при $\Delta < 0$, $|p_i| \leqslant 2$, $i = \overline{1,2}$; при $p_i > 2$, $|p_k| < 2$ в случае $\Delta < 0$, $I_{i1}I_{i2} > 0$ или $\Delta > 0$, $I_{i1} < 0$, $I_{i2} > 0$; при $p_i < -2$, $|p_k| < 2$ в случае $\Delta > 0$, $I_{i1}I_{i2} < 0$ или $\Delta < 0$, $I_{i1} < 0$, $I_{i2} < 0$, $i,k = \overline{1,2}$;*

3) $(HH)_3$ *при* $\Delta(p_i+2)>0$, $I_{i1}>0$ *в случае* $I_{i2}<0$, $p_i>2$ *или* $I_{i2}>0$, $p_i<-2$, $i=\overline{1,2}$;

4) $PHPH$ *при* $\Delta>0$, $p_i=2$, $|p_k|\leqslant 2$, $i,k=\overline{1,2}$, *при* $\Delta(p_i+2)<0$, $I_{i1}>0$ *в случае* $I_{i2}<0$, $p_i>2$ *или* $I_{i2}>0$, $p_i<-2$; *при* $\Delta(p_i+2)>0$, $I_{i1}I_{i2}>0$, $p_i>2$ *или* $I_{i1}I_{i2}<0$, $p_i<-2$, $i=\overline{1,2}$;

5) $(PE)_6$ *при* $\Delta(p_i+2)<0$, $I_{i1}<0$ *в случае* $I_{i2}>0$, $p_i>2$ *или* $I_{i2}<0$, $p_i<-2$, $i=\overline{1,2}$.

**Замечание 3.2.** *Здесь и далее запись* $(\ldots)_k$ *обозначает, что секторы Бендиксона, указанные в скобках, повторяются циклически k раз при обходе по окружности достаточно малого радиуса.*

**Теорема 3.3.** *В случае* $|p_1|>2$, $|p_2|=2$ *начало координат* $O(0,0)$ *системы* (3) *имеет следующие локальные фазовые портреты:*

1) $(PHHH)_2$ *при* $\Delta>0$, $C+Bm>0$, $p_1(C-Bm)<0$;

2) $PHPH$ *при* $\Delta>0$, $\Delta_1>0$, $C+Bm>0$, $p_1(C-Bm)>0$ *или* $\Delta>0$, $\Delta_1<0$, $C+Bm>0$, $p_1(C-Bm)<0$ *или* $\Delta<0$, $C+Bm>0$, $p_1(C-Bm)<0$;

3) $(PEPHH)_2$ *при* $\Delta>0$, $\Delta_1(C+Bm)<0$, $p_1(C-Bm)>0$;

4) $(PEPEPH)_2$ *при* $\Delta<0$, $\Delta_1(C+Bm)<0$, $\Delta_1 p_1(C-Bm)<0$;

5) $PEPE$ *при* $\Delta>0$, $C+Bm<0$, $p_1(C-Bm)>0$, *или при* $\Delta<0$, $\Delta_1(C+Bm)>0$, $\Delta_1 p_1(C-Bm)>0$;

6) $(PE)_6$ *при* $\Delta<0$, $C+Bm<0$, $p_1(C-Bm)>0$.

*Здесь и далее* $\Delta_1=-1+\beta-\gamma+\delta-\varepsilon$.

**Замечание 3.4.** *В случае* $|p_2|>2$, $|p_1|=2$ *начало координат* $O(0,0)$ *системы* (3) *имеет локальные фазовые портреты* $(PHHH)_2$, $PHPH$, $(PEPHH)_2$, $(PEPEPH)_2$, $PEPE$ *и* $(PE)_6$, *коэффициентные критерии реализации которых аналогичны приведенным в теореме* 3.3. *(Для этого достаточно заменить* $m\mapsto n$, $C\mapsto F$, $B\mapsto E$, $p_1\mapsto p_2$.*)*

**Теорема 3.5.** *В случае* $|p_i|>2$, $i=\overline{1,2}$, *начало координат* $O(0,0)$ *системы* (3) *представится следующими локальными фазовыми портретами:*

1) $(HH)_5$ *при* $\Delta>0$, $I_{ki}<0$, $p_i<-2$, $i,k=\overline{1,2}$, *или* $I_{k1}>0$, $I_{k2}<0$, $p_k>2$, $k=\overline{1,2}$;

2) $(PHHH)_2$ *при* $\Delta>0$, $I_{ki}<0$, $I_{lm}>0$, $p_i<-2$, *где* $i,k,l,m=1,2$, $\overline{ik}\neq\overline{lm}$;

3) $PHPH$ *при* $I_{i1}I_{i2}<0$, $p_i<-2$ *или* $I_{k1}I_{k2}>0$, $p_k>2$ *или* $I_{i1}<0$, $I_{k2}>0$, $p_i<-2$, $i,k=\overline{1,2}$ *в случае* $\Delta>0$;

4) $(PEPHH)_2$ *при* $\Delta>0$, $p_i>2$, $I_{i1}I_{i2}<0$ *или* $\Delta<0$, $p_i>2$ *в случае* $I_{21}<0$, $I_{ik}>0$, $\overline{ik}\neq 21$, *или* $I_{21}<0$, $I_{ik}>0$, $\overline{ik}\neq 12$; *при* $p_i<-2$, $\Delta>0$, $\forall I_{ik}>0$ *или* $\forall I_{ik}<0$; *при* $\Delta<0$, $p_i<-2$, $I_{11}>0$, $I_{ik}<0$, $\overline{ik}\neq 11$ *или* $I_{22}<0$, $I_{ik}>0$, $\overline{ik}\neq 22$;

5) $(PEPEPH)_2$ *при* $\Delta>0$, $p_i>2$, $I_{12}>0$, $I_{ik}<0$, $\overline{ik}\neq 12$ *или* $I_{21}>0$, $I_{ik}<0$, $\overline{ik}\neq 21$; *при* $\Delta<0$, $p_i>2$, $I_{11}I_{21}>0$, $I_{12}I_{22}>0$;

6) $PEPE$ *при* $\Delta>0$, $p_i>2$, $I_{11}>0$, $I_{ik}<0$, $\overline{ik}\neq 11$ *или* $I_{22}<0$, $I_{ik}>0$, $\overline{ik}\neq 22$; *при* $\Delta<0$, $p_i>2$, $I_{11}I_{21}>0$, $I_{12}I_{22}>0$;

7) $(PE)_6$ *при* $\Delta>0$, $p_i>2$, $\forall I_{ik}<0$, *или* $\Delta>0$, $p_i<-2$, $I_{k1}<0$, $I_{i2}>0$, $i,k=\overline{1,2}$ *или* $\Delta<0$, $p_i>2$, $\forall I_{ki}<0$, $\forall I_{lm}<0$, *где* $i,k,l,m=1,2$, $\overline{ik}\neq\overline{lm}$;

8) $(PE)_{10}$ *при* $\Delta<0$, $p_i>2$, $\forall I_{ik}<0$, *или при* $p_i<-2$, $I_{k1}<0$, $I_{k2}>0$.

**Замечание 3.6.** *Первый случай был рассмотрен в* [15]. *Были получены локальные фазовые портреты системы* (3), *указанные в теоремах* 3.1, 3.3, 3.5, *однако не для всех случаев были приведены коэффициентные критерии. Не были рассмотрены случаи кратных корней.*

На рис. 1–10 представлены некоторые из локальных фазовых портретов, указанные в теоремах 2.4, 3.1, 3.3, 3.5, рис. 5 и 8 соответствуют теоремам 3.1 и 3.3, а именно случаю $|p_i|=2$, $|p_k|>2$, $i,k=1,2$.

**Второй случай:** $q_1=q_2=-1$.

В этом случае уравнение (8) всегда имеет пять вещественных корней. При $\Delta p_1p_2>0$ система (3) имеет единственную $O^+$-кривую с порядком $\mu=1$ и мерой $\rho=1$, а в случае $\Delta p_1p_2<0$ – открытый пучок таких $O^+$-кривых. Проводя рассуждения, аналогичные первому случаю, и обозначая

$$A_1=-1+\varepsilon(m^2-1)+\gamma,\quad B_1=2-\delta p_1-2\varepsilon+A_1,\quad C_1=2\beta-2\delta+\delta m^2-A_1p_1,$$

$$D_1=-1+\varepsilon(n^2-1)+\gamma,\quad E_1=2-\delta p_2-2\varepsilon+D_1,\quad F_1=2\beta-2\delta+\delta n^2-C_1p_2,$$

$$\tilde I_{11}=(p_1-p_2)(m-p_1-2)(C_1+B_1m),\quad \tilde I_{12}=(p_1-p_2)(B_1m-C_1),$$

$$\tilde I_{21}=(p_2-p_1)(n-p_2-2)(F_1+E_1n),\quad \tilde I_{22}=(p_2-p_1)(E_1n-F_1),$$

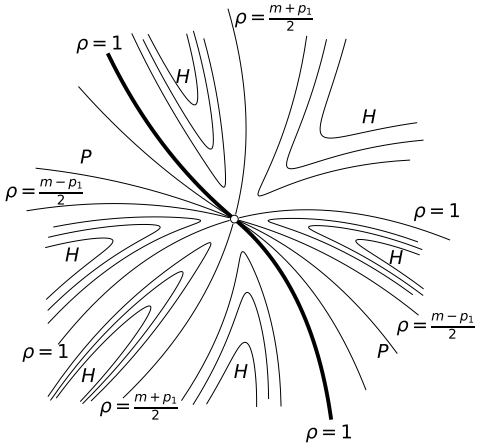



Рис. 5. Локальный портрет $(PHHH)_2$

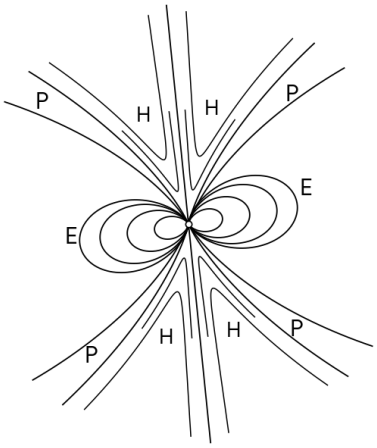



Рис. 6. Локальный портрет $(PEPHH)_2$

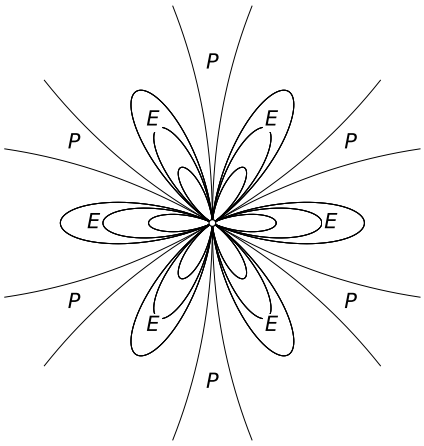



Рис. 7. Локальный портрет $(PE)_6$

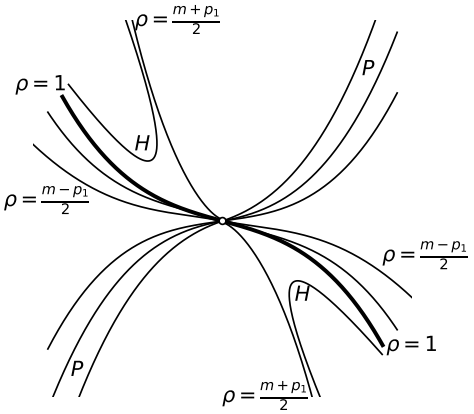



Рис. 8. Локальный портрет $PHPH$

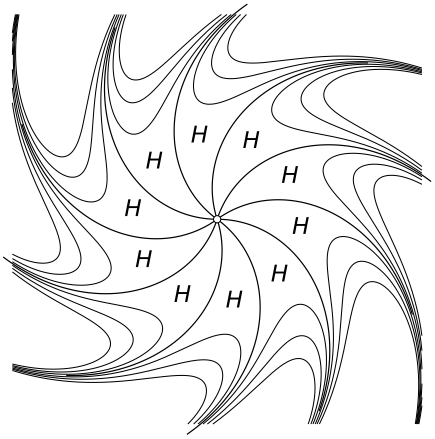



Рис. 9. Локальный портрет $(HH)_5$

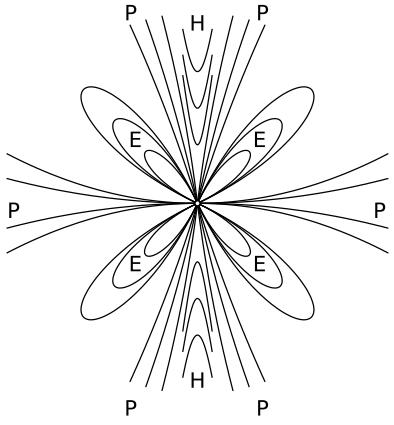



Рис. 10. Локальный портрет $(PEPEPH)_2$

где $m^2 = p_1^2 + 4$, $n^2 = p_2^2 + 4$ получаем, что в случае $\tilde{I}_{11} < 0$ система (3) имеет $O^+$-кривую с порядком $\mu = 1$ и мерой $\rho = \frac{m-p_1}{2}$ и при $\tilde{I}_{11}$ – открытый пучок таких $O^+$-кривых. Если $\tilde{I}_{12} < 0$ система (3) имеет единственную $O^+$-кривую с $\mu = 1$, $\rho = \frac{m+p_1}{2}$, а при $\tilde{I}_{12}$ – открытый пучок таких $O^+$-кривых. Кроме того, при $\tilde{I}_{21}, \tilde{I}_{22}$ – единственные $O^+$-кривые с порядком $\mu = 1$ и мерами $\rho = \frac{n+p_2}{2}$ и $\rho = \frac{n-p_2}{2}$ соответственно.

Таким образом имеют место следующие утверждения.

**Теорема 3.7.** *В случае $p_1 = p_2 = 0$ начало координат $O(0,0)$ системы* (3) *представится такими локальными фазовыми портретами: $HH$ при $\Delta_1 > 0$ и $PEPE$ при $\Delta_1 < 0$.*

**Теорема 3.8.** *При $p_2 = 0$, $p_1 \neq 0$ начало координат $O(0,0)$ системы* (3) *имеет следующие локальные фазовые портреты:*

1) $(PHHH)_2$ *при* $\Delta_1 > 0$, $|C_1| < B_1 m$;

2) $PHPH$ *при* $\Delta_1(C_1 - B_1 m) > 0$, $p_1 < 0$, $C_1 + B_1 m > 0$ *или* $\Delta_1(C_1 + B_1 m) < 0$, $p_1 > 0$, $C_1 - B_1 m < 0$;

3) $PEPE$ *при* $\Delta_1(C_1 + B_1 m) < 0$, $p_1 < 0$, $C_1 - B_1 m > 0$ *или* $\Delta_1(C_1 - B_1 m) > 0$, $p_1 > 0$, $C_1 + B_1 m < 0$;

4) $(PEPHH)_2$ *при* $\Delta_1 > 0$, $|B_1 m| < C_1$, $p_1 > 0$ *или* $\Delta_1 > 0$, $|B_1 m| > C_1$, $p_1 < 0$;

5) $(PEPEPH)_2$ *при* $\Delta_1 < 0$, $|B_1 m| < C_1$, $p_1 > 0$ *или* $\Delta_1 < 0$, $|B_1 m| > C_1$, $p_1 < 0$;

6) $(PE)_6$ *при* $\Delta_1 < 0$, $|C_1| > B_1 m$.

**Замечание 3.9.** *В случае $p_1 = 0$, $p_2 \neq 0$ начало координат $O(0,0)$ системы* (3) *имеет локальные фазовые портреты $(PHHH)_2$, $PHPH$, $PEPE$, $(PEPHH)_2$, $(PEPEPH)_2$ и $(PE)_6$, коэффициентные критерии реализации которых аналогичны приведенным в теореме* 3.8. *(Для этого достаточно заменить $m \mapsto n$, $C_1 \mapsto F_1$, $B_1 \mapsto E_1$, $p_1 \mapsto p_2$.)*

**Теорема 3.10.** *При $p_1 = p_2 \neq 0$ начало координат $O(0,0)$ системы* (3) *представится локальными фазовыми портретами: $PHPH$ и $(PEPHH)_2$ при $\Delta_1 > 0$; $PEPE$ и $(PEPEPH)_2$ в случае $\Delta_1 < 0$.*

**Теорема 3.11.** *При $p_1 \neq p_2$, начало координат $O(0,0)$ системы* (3) *имеет следующие локальные фазовые портреты:*

1) $(HH)_5$ *при* $\Delta_1 p_1 p_2 > 0$, $\forall \tilde{I}_{ki} < 0$, $i,k = \overline{1,2}$;

2) $(PHHH)_2$ *при* $\Delta_1 p_1 p_2 < 0$, $\forall \tilde{I}_{ki} < 0$, $i,k = \overline{1,2}$, *или* $\Delta_1 p_1 p_2 > 0$, $\tilde{I}_{ki} > 0$, $\tilde{I}_{ik} < 0$, $\tilde{I}_{lm} < 0$, $\tilde{I}_{ml} < 0$, $\overline{ik} \neq \overline{lm}$, $i,k,l,m = \overline{1,2}$;

3) $PHPH$ *при* $\Delta_1 p_1 p_2 > 0$, $\tilde{I}_{12}\tilde{I}_{22} < 0$, $\tilde{I}_{11}\tilde{I}_{21} < 0$ *или* $\Delta_1 p_1 p_2 < 0$ *в случае* $\tilde{I}_{11} > 0$, $\tilde{I}_{ik} < 0$, $\overline{ik} \neq 11$ *или* $\tilde{I}_{22} > 0$, $\tilde{I}_{ik} < 0$, $\overline{ik} \neq 22$;

4) $(PEPHH)_2$ *при* $\Delta_1 p_1 p_2 > 0$, $\tilde{I}_{21}\tilde{I}_{22} < 0$, $\tilde{I}_{11} > 0$, $\tilde{I}_{12} < 0$ *или* $\tilde{I}_{i1} < 0$, $\tilde{I}_{k2} > 0$, $i,k = \overline{1,2}$; *при* $\Delta_1 p_1 p_2 < 0$, $\tilde{I}_{21} > 0$, $\tilde{I}_{ik} < 0$, $\overline{ik} \neq 21$ *или* $\tilde{I}_{12} > 0$, $\tilde{I}_{ik} < 0$, $\overline{ik} \neq 12$;

5) $(PEPEPH)_2$ *при* $\Delta_1 p_1 p_2 < 0$, $\tilde{I}_{11}\tilde{I}_{12} < 0$, $\tilde{I}_{21} > 0$, $\tilde{I}_{22} < 0$ *или* $\tilde{I}_{i1} < 0$, $\tilde{I}_{k2} > 0$, $i,k = \overline{1,2}$; *при* $\Delta_1 p_1 p_2 > 0$, $\tilde{I}_{12}\tilde{I}_{21} < 0$, $\tilde{I}_{11} > 0$, $\tilde{I}_{22} > 0$;

6) $PEPE$ *при* $\Delta_1 p_1 p_2 > 0$, $\tilde{I}_{11} < 0$, $\tilde{I}_{ik} > 0$, $\overline{ik} \neq 11$ *или* $\tilde{I}_{22} < 0$, $\tilde{I}_{ik} > 0$, $\overline{ik} \neq 22$; *при* $\Delta_1 p_1 p_2 < 0$, $\tilde{I}_{1i} > 0$, $\tilde{I}_{2k} < 0$, *или* $\tilde{I}_{1i} < 0$, $\tilde{I}_{2k} > 0$ *или* $\tilde{I}_{ii} > 0$, $\tilde{I}_{kl} < 0$, $i,k,l = \overline{1,2}$, $k \neq l$;

7) $(PE)_6$ *при* $\Delta_1 p_1 p_2 > 0$, $\forall \tilde{I}_{ki} > 0$, $i,k = \overline{1,2}$, *или* $\Delta_1 p_1 p_2 < 0$, $\tilde{I}_{ki} < 0$, $\tilde{I}_{ik} > 0$, $\tilde{I}_{lm} > 0$, $\tilde{I}_{ml} > 0$, *где* $\overline{ik} \neq \overline{lm}$, $i,k,l,m = \overline{1,2}$;

8) $(PE)_{10}$ *при* $\Delta_1 p_1 p_2 < 0$, $\forall \tilde{I}_{ki} > 0$, $i,k = \overline{1,2}$.

**Замечание 3.12.** *Коэффициентные критерии в теореме* 3.11 *указаны для случая $p_1 > p_2 > 0$. При $p_2 > p_1 > 0$, либо $p_i < 0$, $i = \overline{1,2}$, начало координат $O(0,0)$ системы* (3) *представляется теми же локальными фазовыми портретами* 1)–8).

**Третий случай:** $q_1 = \frac{1}{q_2}$, $|q_1| \neq 1$.

В этом случае уравнение для определения возможных конечных мер кривизны $O^+$-кривых системы (3) имеет вид

$$(u-1)(u^2 + p_1 u + q_1)(q_1 u^2 + p_2 q_1 u + 1) = 0. \tag{12}$$

В зависимости от значений параметров $p_1, p_2, q_1$ уравнение (12) может иметь один, три или пять вещественных корней, а начало координат $O(0,0)$ системы (3) представится следующими локальными фазовыми портретами: $PEPE$, $(HH)_3$, $PHPH$, $(HH)_5$, $(PHHH)_2$, $(PEPEPH)_2$, $(PEPHH)_2$, $(PE)_6$ и $(PE)_{10}$.

Если в (3) не требовать выполнения условия (7), то уравнение для определения возможных мер кривизны $O^+$-кривых системы (3) можно записать в виде $(u - p_0)(u^2 + p_1 u + q_1)(u^2 + p_2 u + q_2) = 0$, где $p_0 q_1 q_2 = 1$. Анализ данного уравнения проводится аналогично рассмотренным выше случаям и показывает, что отказ от условия (7) не приводит к возникновению новых типов локальных фазовых портретов системы (3) в окрестности начала координат.

Для всех полученных случаев можно построить примеры систем с конкретными значениями параметров, так системы

$$\dot{x} = 3x^4 + 2x^3y - x^2y^2 + xy^3 + y^4, \quad \dot{y} = x^4 + x^3y + 3x^2y^2 - 2xy^3 + 3y^4; \tag{13}$$

$$\dot{x} = 3x^4 - 2x^3y - x^2y^2 - 2xy^3 + y^4, \quad \dot{y} = x^4 + x^3y - x^2y^2 - 2xy^3 \tag{14}$$

соответствуют первому случаю, пункту 2, а именно $p_i = -2$, $|p_k| < 2$, $i,k = 1,2$. Здесь $p_1 = -2$, $p_2 = q_1 = q_2 = 1$. При этом система (13) имеет локальный фазовый портрет $HH$ (теорема 3.1, условие 1, $\Delta = 6 > 0$), а система (14) – $PEPE$ (теорема 3.1, условие 2, $\Delta = -1 < 0$).

**Заключение.** В работе исследовано поведение траекторий системы (3) в окрестности сложной точки покоя, расположенной в начале координат. Доказано, что в окрестности точки $O(0,0)$ система (3) имеет следующие локальные фазовые портреты: $HH$, $PEPE$, $(HH)_3$, $PHPH$, $(HH)_5$, $(PHHH)_2$, $(PEPEPH)_2$, $(PEPHH)_2$, $(PE)_6$ и $(PE)_{10}$, все коэффициентные критерии их реализации сформулированы в виде теорем 3.1, 3.3, 3.5, 3.7, 3.8, 3.10, 3.11.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф25КИ-087), а ее результаты были представлены на Китайско-белорусском семинаре по прикладной математике в Университете МГУ-ППИ в Шэньчжэне в апреле 2025 года.

## Литература

1. *Баутин Н. Н.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 488 с.

2. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л.: ГИТТЛ, 1947. 392 с.

3. *Берлинский А. Н.* К вопросу о поведении фазовых кривых вблизи состояний равновесия дифференциальных систем алгебраического вида // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 5. С. 757–762.

4. *Куклес И. С.* О методе Фроммера // Известия Академии наук Узбекской ССР. Серия физико-математических наук. 1957. № 4. С. 32–49.

5. *Потлов В. В.* Поведения интегральных кривых однородного дифференциального уравнения // Ученые записки Рязанского государственного педагогического института. 1960. Т. 24. С. 127–137.

6. *Вдовина Э. В.* Классификация особых точек уравнения $y' = \frac{a_0x^2+a_1xy+a_2y^2}{b_0x^2+b_1xy+b_2y^2}$ методом Форстера // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20, № 10. С. 1809–1813.

7. *Андреев А. Ф.* О локальной схеме состояния равновесия // Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6, № 4. С. 677–686.

8. *Андреев А. Ф.* Особые точки дифференциальных уравнений. Мн.: Выш. школа, 1979. 136 с.

9. *Сагалович М. Е.* Некоторые классические задачи локальной качественной теории аналитических динамических систем второго порядка: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Ин-т физики НАН УССР. Киев, 1983. 102 с.

10. *Лебедева Л. Н.* Качественное исследование одного класса систем дифференциальных уравнений: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Ленинград. гос. ун-т. Л., 1986. 116 с.

11. *Детченя Л. В.* Локальные фазовые портреты двумерных аналитических систем с нулевыми линейными и ненулевыми квадратичными частями: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / ГрГУ им. Янки Купалы. Гродно, 2001. 118 с.

12. *Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П.* Нелинейные колебания в системах второго порядка. Мн.: Изд-во БГУ, 1982. 208 с.

13. *Детченя Л. В.* Условия монодромности одной дифференциальной системы // Актуальные проблемы анализа: тез. докл. Междунар. математической конф., Гродно, 7–10 апр. 2009 г. Гродно, 2009. С. 128–129.

14. *Детченя Л. В.* Локальные фазовые портреты одной полиноминальной системы // IX Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. конф., Гродно, 3–6 нояб. 2004 г. Гродно, 2004. Ч. 1. С. 120–121.

15. *Детченя Л. В.* Локальные фазовые портреты дифференциальной системы с нелинейностями четвертой степени // Еругинские чтения – 2011: тез. докл. XIV Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Новополоцк, 12–14 мая 2011 г. Новополоцк, 2011. С. 47–48.

16. *Детченя Л. В., Кузьмич А. В., Чжан Е, Чэнь Ян.* О качественном поведении траекторий дифференциальной системы с нелинейностями четвертой степени в окрестности сложной точки покоя // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2026. Т. 16, № 2. С. 28–38.

17. *Frommer M.* Uber das Auftreten von Wirbeln und Strudeln (geschlossener und spiraliger Integralkurven) in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen // Mathematische Annalen. 1934. Vol. 109, N 3. P. 395–424.

18. *Фроммер М.* Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер // Успехи математических наук. 1941. № 9. С. 212–253.

19. *Садовский А. П.* Локальная качественная теория дифференциальных уравнений на плоскости: учеб. пособие по спецкурсу. Гродно: ГрГУ, 1986. 98 с.

20. *Dumortier F., Libre J., Artes J. C.* Qualitative Theory of Planar Differential Systems. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.

21. *Detchenya L. V., Sadovskii A. P.* Local phase portraits of two-dimensional analytical systems principal parts of which do not contain parameters // Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica. 1998. N 1(26). P. 145–149.

## References

1. Bautin N. N. *Methods and Techniques for the Qualitative Analysis of Dynamic Systems in the Plane*. Moscow, Science, 1990. 488 p. (in Russian).

2. Poincare A. *On curves determined by differential equations*. Moscow, Leningrad, State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1947. 392 p. (in Russian).

3. Berlinskiy A. N. On the behavior of phase curves near equilibrium states of differential systems of algebraic type. *Differential Equations*, 1986, vol. 22, no. 5, pp. 757–762 (in Russian).

4. Kukles I. S. About Frommer's method. *Bulletin of the Academy of Sciences of the Uzbek SSR. Series on Physical and Mathematical Sciences*, 1957, no. 4, pp. 32–49 (in Russian).

5. Potlov V. V. Behavior of integral curves of a homogeneous differential equation. *Scientific Notes of the Ryazan State Pedagogical Institute*, 1960, vol. 24, pp. 127–137 (in Russian).

6. Vdovina E. V. Classification of singular points of the equation $y' = \frac{a_0x^2+a_1xy+a_2y^2}{b_0x^2+b_1xy+b_2y^2}$ by Forster's method. *Differential Equations*, 1984, vol. 20, no. 10, pp. 1809–1813 (in Russian).

7. Andreev A. F. On the local equilibrium state scheme. *Differential Equations*, 1970, vol. 6, no. 4, pp. 677–686 (in Russian).

8. Andreev A. F. *Singular Points of Differential Equations*. Minsk, Higher School, 1979. 136 p. (in Russian).

9. Sagalovich M. E. *Some Classical Problems of Local Qualitative Theory of Second-order Analytical Dynamic Systems*. Ph. D. thesis. Kyiv, 1983, 102 p. (in Russian).

10. Lebedeva L. N. *A Qualitative Study of One Class of Systems of Differential Equations*. Ph. D. thesis. Leningrad, 1986, 116 p. (in Russian).

11. Detchenya L. V. *Local Phase Portraits of Two-dimensional Analytical Systems with Zero Linear and Non-zero Quadratic Parts*. Ph. D. thesis. Grodno, 2001, 118 p. (in Russian).

12. Amel'kin V. V., Lukashevich N. A., Sadovskii A. P. *Nonlinear Oscillations in Second-order Systems*. Minsk, BSU, 1982. 208 p. (in Russian).

13. Detchenya L. V. Monodromy conditions for one differential system. *Abstract of the Report of the International Mathematical Conference: Current issues of analysis (April 7–10, 2009, Grodno).* Grodno, 2009, pp. 128–129 (in Russian).

14. Detchenya L. V. Local phase portraits of one polynomial system. *Abstract of the Report of the International Conference: IX Belarusian Mathematical Conference (Nov. 3–6, 2004, Grodno).* Grodno, 2004, part 1, pp. 120–121 (in Russian).

15. Detchenya L. V. Local phase portraits of a differential system with fourth-degree nonlinearities. *Abstract of the Report of the XIV International Conference on Differential Equations: Erugin Readings – 2011 (May 12–14, 2011, Novopolotsk).* Novopolotsk, 2011, pp. 47–48 (in Russian).

16. Detchenya L. V., Kuzmich A. V., Zhang Ye, Chen Y. On the qualitative behavior of trajectories of a differential quartic system in the neighborhood of multiple equilibrium point. *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, computer technology and its control*, 2026, vol. 16, no. 2, pp. 28–38 (in Russian).

17. Frommer M. Uber das Auftreten von Wirbeln und Strudeln (geschlossener und spiraliger Integralkurven) in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen. *Mathematische Annalen*, 1934, vol. 109, no. 3, pp. 395–424.

18. Frommer M. Integral curves of an ordinary differential equation of the first order in the neighborhood of a singular point of rational character. *Advances in Mathematical Sciences*, 1941, no. 9, pp. 212–253 (in Russian).

19. Sadovskii A. P. *Local qualitative theory of differential equations on a plane: a textbook for a special course*. Grodno, GrSU, 1986. 98 p. (in Russian).

20. Dumortier F., Libre J., Artes J. C. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2006.

21. Detchenya L. V., Sadovskii A. P. Local phase portraits of an analytical system with a non-zero quadratic part in a special case. *Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica*, 1998, no. 1(26), pp. 145–149.