Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 81–97

УДК 512.542 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-81–97
EDN: ABKLPV

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЗАДАЧЕ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ОТНОШЕНИЕМ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

В. В. Гороховик

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
e-mail: gorokh@im.bas-net.by

Поступила: 27.08.2026 **Исправлена:** 16.09.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: векторная оптимизация, отношение предпочтения, неопределенность, скаляризация, H-дифференцируемость по направлениям, вторая производная по Фреше–Тэйлору, условия оптимальности первого и второго порядков

Аннотация. В данной статье рассматривается задача векторной оптимизации с неопределенным отношением предпочтения. Неопределенность обусловлена тем, что известно лишь семейство $\mathcal{P}$ отношений предпочтения, одно из которых реализуется на самом деле, причем конкретная реализация неизвестна. В качестве оптимального решения данной задачи в работе предлагается рассматривать такие допустимые решения, которые доставляют целевому отображению гарантированный (слабый, сильный) максимум относительно семейства $\mathcal{P}$, т. е. такие, которые доставляют отображению (слабый, сильный) максимум при любой конкретной реализации отношения предпочтения из $\mathcal{P}$. При некоторых предположениях относительно семейства $\mathcal{P}$ доказана теорема о скаляризации данной задачи векторной оптимизации при помощи разностно сублинейных функций. Эта теорема используется затем при выводе необходимых, а также достаточных условий первого и второго порядка гарантированной $\mathcal{P}$-максимальности допустимых решений. При этом необходимые условия получены для решений, доставляющих гарантированный слабый $\mathcal{P}$-максимум, а достаточные условия для решений, доставляющих гарантированный сильный $\mathcal{P}$-максимум.

FIRST- AND SECOND-ORDER OPTIMALITY CONDITIONS IN A VECTOR OPTIMIZATION PROBLEM WITH AN UNCERTAIN PREFERENCE RELATION

V. V. Gorokhovik

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
e-mail: gorokh@im.bas-net.by

Received: 27.08.2026 **Revised:** 16.09.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: vector optimization, preference relation, uncertainty, scalarization, Hadamard directionally differentiability, second Frechet–Taylor derivative, first- and second-order optimality conditions

Abstract. In this paper we consider a vector optimization problem with an uncertain preference relation. The uncertainty arises from the fact that only a family $\mathcal{P}$ of preference relations is known, one of which is actually realized, while the concrete realization is unknown. As an optimal solution of this problem, we propose to consider such admissible solutions that provide the objective mapping with the guaranteed (weak, strong) maximum relative to the family $\mathcal{P}$, i. e., those that provide the objective mapping with (weak, strong) maximum for any concrete realization of the preference relation from $\mathcal{P}$. Under some assumptions regarding the family $\mathcal{P}$, a theorem on the scalarization of this vector optimization problem by means of difference sublinear functions is proved. Then this theorem is used for deriving first- and second-order necessary and sufficient conditions for admissible solutions that provide the objective mapping with the guaranteed $\mathcal{P}$-maximum. The necessary conditions are established for solutions that provide the guaranteed weak $\mathcal{P}$-maximum, while the sufficient conditions are established for solutions that provide the guaranteed strong $\mathcal{P}$-maximum.

1. Постановка задачи

Прежде всего напомним определения основных понятий, относящихся к стандартной задаче векторной оптимизации, под которой понимается (см., напр., [1–3]) задача максимизации (или минимизации) отображения, принимающего значения в упорядоченном векторном пространстве.

Пусть X – некоторое множество, Y – вещественное векторное пространство, $\prec$ – отношение предпочтения на Y. Под отношением предпочтения понимается отношение строгого частичного порядка (асимметриченое и транзитивное бинарное отношение) [4; 5], определенное на Y и согласованное с алгебраическими операциями, заданными на Y.

Напомним, что бинарное отношение $\prec$ (не обязательно отношение предпочтения), определенное на векторном пространстве Y, является согласованным с алгебраическими операциями, заданными на Y, если для любых $y_1, y_2, y \in Y$, и любого положительного числа $\alpha > 0$ выполняются следующие импликации:

1) $y_1 \prec y_2 \Longrightarrow \alpha y_1 \prec \alpha y_2$;

2) $y_1 \prec y_2 \Longrightarrow y_1 + y \prec y_2 + y$.

Если бинарное отношение $\prec$ является отношением предпочтения, то условия 1) и 2) эквивалентны тому, что множество $P_\prec := \{y \in Y \,|\, 0 \prec y\}$ (называемое *конусом положительных элементов* или, просто, *положительным конусом*) есть асимметричный ($P_\prec \bigcap (-P_\prec) = \varnothing$) выпуклый конус в Y, при этом

$$y_1 \prec y_2 \Longleftrightarrow y_2 - y_1 \in P_\prec. \tag{1}$$

Векторное пространство Y с заданным на нем согласованным отношением предпочтения $\prec$ называется упорядоченным векторным пространством, для его обозначения обычно используется символ $(Y, \prec)$.

Предположим, что заданы также отображение $F : X \to (Y, \prec)$, определенное на некотором множестве X и принимающее значения в упорядоченном векторном пространстве $(Y, \prec)$, и подмножество $Q \subset X$.

Говорят [3], что точка $x^0 \in Q$ является *точкой $\prec$-максимума* отображения $F : X \to (Y, \prec)$ на множестве Q, если соотношение $F(x^0) \prec F(x)$ не выполняется ни при каких $x \in Q$ или, эквивалентно, если $F(x^0) \not\prec F(x)$ при всех $x \in Q$.

Символ $\not\prec$ обозначает отрицание отношения $\prec$. Очевидно, что $y_1 \not\prec y_2 \Longleftrightarrow y_2 - y_1 \notin P_\prec$.

Аналогично, точка $x^0 \in Q$ называется [3] *точкой $\prec$-минимума* отображения $F : X \to (Y, \prec)$ на множестве Q, если соотношение $F(x) \prec F(x^0)$ не выполняется ни при каких $x \in Q$ или, эквивалентно, если при всех $x \in Q$ выполняется соотношение $F(x) \not\prec F(x^0)$.

Задачу нахождения точек $\prec$-максимума, а также задачу нахождения точек $\prec$-минимума отображения $F : X \to (Y, \prec)$ на некотором множестве $Q \subset X$ принято называть *задачами векторной оптимизации*. Подобно скалярным задачам оптимизации множество Q называется при этом множеством допустимых точек, а отображение $F : X \to (Y, \prec)$ – целевым отображением.

Из тождества (1) следует, что точка $x^0 \in Q$ является точкой $\prec$-максимума отображения $F : X \to (Y, \prec)$ на множестве Q тогда и только тогда, когда

$$(F(Q) - F(x^0)) \cap P_\prec = \varnothing.$$

Аналогично, точка $x^0 \in Q$ является точкой $\prec$-минимума отображения $F : X \to (Y, \prec)$ на множестве Q тогда и только тогда, когда

$$(F(Q) - F(x^0)) \cap (-P_\prec) = \varnothing.$$

Понятно, что с теоретической точки зрения достаточно изучить одну из задач, например, задачу нахождения точек $\prec$-максимума, поэтому договоримся, что всюду ниже под задачей векторной оптимизации мы будем понимать задачу нахождения точек $\prec$-максимума некоторого векторного отображения $F : X \to (Y, \prec)$.

При исследовании точек $\prec$-максимума отображений чаще всего используются локальные аппроксимации отображений и множеств, поэтому естественно при проведении таких исследований перейти к локальному понятию $\prec$-максимума.

Если X – топологическое пространство, то говорят, что точка $x^0 \in Q$ доставляет отображению $F : X \to (Y, \prec)$ на множестве Q *локальный $\prec$-максимум,* если для некоторой окрестности $\mathcal{N}(x^0)$ точки x^0 соотношение $F(x^0) \not\prec F(x)$ выполняется при всех $x \in Q \cap \mathcal{N}(x^0)$ или, эквивалентно, если

$$(F(Q \cap \mathcal{N}(x^0)) - F(x^0)) \cap P_\prec = \varnothing.$$

Всюду далее будем предполагать, что Y является нормированным пространством и определенное на нем отношение предпочтения $\prec$ таково, что $\mathrm{int}P_{\prec} \neq \varnothing$. При таких предположениях введем на пространстве Y производные отношения $\prec\prec$ и $\preceq$, определив их следующим образом:

$$y_1 \prec\prec y_2 \iff y_2 - y_1 \in \mathrm{int}P_{\prec}$$

и

$$y_1 \preceq y_2 \iff y_2 - y_1 \in \mathrm{cl}P_{\prec}.$$

Здесь $\mathrm{int}P_{\prec}$ и $\mathrm{cl}P_{\prec}$ – внутренность и замыкание конуса $P_{\prec}$ соответственно.

Заметим, что отношение $\prec\prec$ также является отношением строгого частичного порядка на Y, тогда как отношение $\preceq$ рефлексивно и транзитивно и, следовательно, является отношением предпорядка. Символы $\not\prec\not\prec$ и $\not\preceq$ обозначают, соответственно, отрицания отношений $\prec\prec$ и $\preceq$.

Говорят, что точка $x^0 \in Q$ является *точкой локального слабого $\prec$-максимума* отображения $F : X \to (Y, \prec)$ на множестве Q, если для некоторой окрестности $\mathcal{N}(x^0)$ точки x^0 соотношение $F(x^0) \not\prec\not\prec F(x)$ выполняется при всех $x \in Q \cap \mathcal{N}(x^0)$ или, эквивалентно, если

$$(F(Q \cap \mathcal{N}(x^0)) - F(x^0)) \cap (\mathrm{int}P_{\prec}) = \varnothing.$$

Точка $x^0 \in Q$ называется *точкой локального сильного $\prec$–максимума* отображения $F : X \to$ $\to (Y, \prec)$ на множестве Q, если найдется окрестность $\mathcal{N}(x^0)$ точки x^0 такая, что $F(x^0) \not\preceq F(x)$ для всех $x \in Q \cap \mathcal{N}(x^0)$, $F(x) \neq F(x^0)$ или, эквивалентно, если

$$F(x) - F(x^0) \notin \mathrm{cl}P_{\prec} \text{ для всех } x \in Q \cap \mathcal{N}(x^0),\ F(x) \neq F(x^0).$$

Так как $\mathrm{int}P_{\prec} \subset P_{\prec} \subset \mathrm{cl}P_{\prec} \setminus \{0\}$, то любая точка локального сильного $\prec$-максимума является точкой локального $\prec$-максимума, а любая точка локального $\prec$-максимума является точкой локального слабого $\prec$-максимума. Обратные импликации, вообще говоря, неверны. Однако если $P_{\prec} = \mathrm{int}P_{\prec}$, то, естественно, что понятие локального $\prec$-максимума совпадает с понятием локального слабого $\prec$-максимума. Если же $P_{\prec} = \mathrm{cl}P_{\prec} \setminus \{0\}$, то совпадают понятия локального $\prec$-максимума и локального сильного $\prec$-максимума. В частном случае, когда Y есть множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ с естественным отношением упорядочения $<$, все три понятия совпадают и сводятся к понятию локального максимума вещественнозначной функции на множестве. Это сразу же следует из того, что конус положительных элементов $P_{<}$ упорядоченного пространства $(\mathbb{R}, <)$ есть множество положительных вещественных чисел, для которого, как очевидно, справедливы равенства $\mathrm{int}P_{<} = P_{<} = \mathrm{cl}P_{<} \setminus \{0\}$.

В настоящей работе задача векторной оптимизации рассматривается в предположении, что отношение предпочтения задано неопределенно. При этом неопределенность обусловлена тем, что лицу, осуществляющему выбор решения, известно лишь семейство $\mathcal{P}$ отношений предпочтения, любое из которых может реализоваться в процессе выбора решения, в то же время конкретная реализация отношения предпочтения лицу принимающему решение неизвестна.

При исследовании данной задачи, прежде всего, надо определить понятие оптимальности допустимого решения. В том случае, когда семейство отношений предпочтений $\mathcal{P}$ является одноэлементным, т. е. в случае, когда отношение предпочтения задано точно, в качестве оптимальных решений, как мы видели выше, рассматриваются такие элементы множества допустимых решений, которые доставляют $\prec$-максимум (или $\prec$-минимум) целевому отображению относительно заданного отношения предпочтения $\prec$. В общем случае, когда семейство $\mathcal{P}$ состоит не из одного, а из целого множества отношений предпочтения, при отсутствии какой-либо другой дополнительной информации о реализации отношения предпочтения, бесспорным является лишь такой подход, который гарантирует оптимальность решения при любой реализации отношения предпочтения. Такой подход приводит к следующему понятию.

Пусть $\mathcal{P}$ – семейство отношений предпочтения, определенных на векторном пространстве Y и согласованных с алгебраическими операциями, заданными на Y.

Определение 1.1. Будем говорить, что допустимая точка $x^0 \in Q$ является *точкой гарантированного максимума* для отображения $F : X \to Y$ на множестве Q относительно семейства

согласованных отношений предпочтения $\mathcal{P}$, определенных на Y, или, более просто, *точкой гарантированного $\mathcal{P}$-максимума* для отображения $F : X \to Y$ на множестве Q, если соотношение $F(x^0) \prec F(x)$ не выполняется ни при каких $x \in Q$ и $\prec \in \mathcal{P}$ или, эквивалентно, если

$$(F(Q) - F(x^0)) \cap (\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\}) = \varnothing.$$

Определим далее понятия гарантированного слабого и гарантированного сильного максимумов, при этом будем предполагать, что семейство отношений предпочтения $\mathcal{P}$ удовлетворяет следующим условиям (i) $\operatorname{int} P_\prec \neq \varnothing$ для любого $\prec \in \mathcal{P}$ и (ii) $\operatorname{cl}(\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\}) \neq Y$.

Как объединение семейства конусов множество $\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\}$ является конусом, причем при выполнении условий (i) и (ii) конус $\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\}$ является нетривиальным, т. е. $\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\} \neq \{0\}$ и $\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\} \neq Y$. Кроме того, так как $\cup\{\operatorname{int} P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\} \subset \operatorname{int}(\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\})$, то $\operatorname{int}(\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\}) \neq \varnothing$.

Определение 1.2. Будем говорить, что допустимая точка $x^0 \in Q$ является

(а) *точкой гарантированного слабого максимума* для отображения $F : X \to Y$ на множестве Q относительно (удовлетворяющего условиям (i) и (ii)) семейства согласованных отношений предпочтения $\mathcal{P}$, определенных на Y, или, более просто, *точкой гарантированного слабого $\mathcal{P}$-максимума* для отображения $F : X \to Y$ на множестве Q, если

$$(F(Q) - F(x^0)) \cap (\operatorname{int}(\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\})) = \varnothing; \tag{2}$$

(б) *точкой гарантированного сильного максимума* для отображения $F : X \to Y$ на множестве Q относительно (удовлетворяющего условиям (i) и (ii)) семейства согласованных отношений предпочтения $\mathcal{P}$, определенных на Y, или, более просто, *точкой гарантированного сильного $\mathcal{P}$-максимума* для отображения $F : X \to Y$ на множестве Q, если

$$(F(x) - F(x^0)) \notin \operatorname{cl}(\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\}) \text{ для всех } x \in Q,\ F(x) \neq F(x^0). \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что в случае, когда семейство $\mathcal{P}$ состоит из единственного отношения предпочтения $\prec$, введенные выше понятия гарантированного слабого и сильного $\mathcal{P}$-максимумов сводятся к общепринятым определениям слабого и сильного $\prec$-максимума. Идейно данные определения восходят к работам [6; 7], посвященным исследованию задач оптимизации и оптимального управления в условиях неопределенности.

Так как $\operatorname{int}(\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\}) \subset \cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\} \subset \operatorname{cl}(\cup\{P_\prec \mid \prec \in \mathcal{P}\}) \setminus \{0\}$, то любая точка гарантированного сильного $\mathcal{P}$-максимума является точкой гарантированного $\mathcal{P}$-максимума, а любая точка гарантированного $\mathcal{P}$-минимума является точкой гарантированного слабого $\mathcal{P}$-минимума. Обратные импликации, вообще говоря, неверны.

Основная цель настоящей статьи – получить необходимые, а также достаточные условия первого и второго порядков для решений, доставляющих локальный гарантированный $\mathcal{P}$-максимум целевому отображению $F : X \to (y, \prec)$ на множестве допустимых решений $Q \subset X$. Вывод этих условий будет осуществлен по методике, впервые предложенной автором в [1] и развитой в последующих работах, см., напр., [8–12] и др. В соответствии с этой методикой исследование проводится в два этапа. На первом этапе, используя подходящую вещественнозначную функцию, аналитически характеризующую объединение конусов положительных элементов отношений предпочтения, принадлежащих $\mathcal{P}$, устанавливается, что допустимое решение является гарантированно $\mathcal{P}$-максимальным в исходной задаче векторной оптимизации тогда и только тогда, когда оно является решением некоторого скалярного вариационного неравенства. Этот этап называют обычно «скаляризацией задачи векторной оптимизации». В статье скаляризации задачи векторной оптимизации с неопределенным отношением предпочтения посвящен § 2, при этом показано, что для скаляризации рассматриваемой задачи могут быть использованы разностно сублинейные функции. На втором этапе из полученного в результате скаляризации скалярного вариационного неравенства, используя средства дифференциального анализа, основанные на локальных аппроксимациях целевого отображения F и множества допустимых решений Q, выводятся необходимые и/или достаточные условия $\mathcal{P}$-максимальности. Условиям $\mathcal{P}$-максимальности первого порядка посвящен § 4, а условиям $\mathcal{P}$-максимальности второго порядка § 5. Для вывода этих условий использованы локальные аппроксимации отображения F производными первого и второго порядков, а также локальные аппроксимации множества Q

касательным конусом первого порядка и касательным множеством второго порядков, определения которых и некоторые их свойства представлены в § 3.

Отметим что условиям оптимальности в задачах векторной оптимизации посвящены многочисленные публикации, см. [1; 3; 8–19] и ссылки в них.

2. Скаляризация задачи векторной оптимизации с неопределенным отношением предпочтения

Начиная с этого раздела и далее будем предполагать, что пространство Y значений целевого отображения $F : X \to (Y, \prec)$ является конечномерным нормированным пространством.

Предлагаемый здесь метод скаляризации задач векторной оптимизации с неопределенным отношением предпочтения основан на аналитическом представлении замкнутых конусов при помощи разностно сублинейных функций. Впервые возможность такого представления была доказана А. Шапиро в работе [20]. Начало активному использованию разностно сублинейных функций в теории оптимизации и негладком анализе было положено в начале 1980-х годов В. Ф. Демьяновым и А. М. Рубиновым [21] (см. также [1; 22; 23]).

Приведем необходимые в дальнейшем сведения о разностно сублинейных функциях и отображениях.

Прежде всего напомним, что функция $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ называется *сублинейной*, если она является положительно однородной $(\varphi(\lambda y) = \lambda\varphi(y), y \in Y, \lambda > 0)$ и субаддитивной $(\varphi(y_1 + y_2) \leqslant \varphi(y_1) + \varphi(y_2), y_1, y_2 \in Y)$.

Каждой сублинейной функции $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ однозначно соответствует в пространстве линейных непрерывных функционалов Y^* выпуклое компактное подмножество

$$\partial\varphi = \{y^* \in Y^* \,|\, y^*(y) \leqslant \varphi(y) \,\forall y \in Y\},$$

называемое *субдифференциалом* функции φ, при этом

$$\varphi(y) = \max_{y^* \in \partial\varphi} y^*(y), y \in Y. \tag{4}$$

Функция $p : Y \to \mathbb{R}$ называется *разностно сублинейной* [1; 23], если она может быть представлена в виде разности двух сублинейных функций, т. е. если $p(y) = \underline{p}(y) - \overline{p}(y), y \in Y$, где $\underline{p}$ и $\overline{p}$ – сублинейные функции.

Совокупность всех разностно сублинейных функций, определенных на пространстве Y, будем обозначать символом $P(Y)$. Нетрудно убедиться, что относительно стандартных алгебраических операций поточечного сложения и умножения на число $P(Y)$ является векторным пространством, при этом совокупность всех сублинейных функций, обозначаемая ниже $\hat{P}(Y)$, образует в $P(Y)$ выпуклый конус, линейная оболочка которого совпадает с $P(Y)$.

Пусть $p : Y \to \mathbb{R}$ – произвольная разностно сублинейная функция и пусть $p(y) = \underline{p}(y) - \overline{p}(y), y \in Y$, – произвольное ее представление в виде разности двух сублинейных функций $\underline{p}$ и $\overline{p}$ из $\hat{P}(Y)$. Используя это представление, поставим в соответствие функции p упорядоченную пару $Dp = (\underline{\partial}p, \overline{\partial}p)$ выпуклых компактных подмножеств из Y^*, где $\underline{\partial}p$ и $\overline{\partial}p$ – субдифференциалы сублинейных функций $\underline{p}$ и $\overline{p}$ соответственно. Упорядоченная пара $Dp = (\underline{\partial}p, \overline{\partial}p)$ называется при этом [1; 23] *квазидифференциалом* функции p. В силу (4) разностно сублинейная функция p и ее квазидифференциал $Dp = (\underline{\partial}p, \overline{\partial}p)$ связаны соотношением

$$p(y) = \max_{y^* \in \underline{\partial}p} y^*(y) - \max_{y^* \in \overline{\partial}p} y^*(y), y \in Y.$$

Обратим внимание на то, что представление функции p в виде разности $p = \underline{p} - \overline{p}$ не является однозначным, поэтому и соответствие $p \to Dp = (\underline{\partial}p, \overline{\partial}p)$ также является неоднозначным.

Предложение 2.1 [23]. *Пусть $p : Y \to \mathbb{R}$ – разностно сублинейная функция и пусть $Dp = (\underline{\partial}p, \overline{\partial}p)$ – произвольный квазидифференциал функции p. Тогда*

а) $p(y) \geqslant 0$ для всех $y \in Y$ в том и только том случае, когда

$$\overline{\partial}p \subset \underline{\partial}p;$$

б) $p(y) > 0$ *для всех* $y \in Y, y \neq 0$, *в том и только том случае, когда существует положительное число* $\delta > 0$ *такое, что*

$$\overline{\partial} p + \delta B_{Y^*} \subset \underline{\partial} p.$$

Здесь B_{Y^*} *– единичный шар с центром в нулевой точке в пространстве* Y^*.

Разностно сублинейные отображения могут быть определены следующим образом (см. [1, § 16]).

Пусть Y и Z – конечномерные нормированные пространства и пусть Z^* – пространство линейных функций, определенных на Z.

Отображение $G : Y \to Z$, определенное на Y и принимающее значения в Z, называется *разностно сублинейным*, если при любом $z^* \in Z^*$ композиция $z^* \circ G : Y \ni y \to z^*(G(y)) \in \mathbb{R}$ является вещественнозначной разностно сублинейной функцией, определенной на Y.

Предложение 2.2 [1, Предложение 16.1]. *Пусть* X, Y *и* Z *– конечномерные нормированные пространства. Если отображения* $T : X \to Y$ *и* $G : Y \to Z$ *являются разностно сублинейными, то их композиция* $G \circ T : X \to Z$ *также является разностно сублинейным отображением.*

В частности, композиция $p \circ T : X \to \mathbb{R}$, где $T : X \to Y$ – разностно сублинейное отображение, а $p : Y \to \mathbb{R}$ – разностно сублинейная функция, является разностно сублинейной функцией.

Как уже отмечалось выше, замкнутый конус в конечномерном нормированном пространстве может быть аналитически представлен при помощи разностно сублинейной функции. Справедливо следующее утверждение

Предложение 2.3 [20]. *Для любого нетривиального* $(\mathrm{cl}K \neq \{0\}, \mathrm{cl}K \neq Y)$ *конуса* $K \subset Y$ *существует разностно сублинейная функция* $p_K : Y \to \mathbb{R}$ *такая, что*

$$\mathrm{cl}K = \{y \in Y \,|\, p_K(y) \leqslant 0\}. \tag{5}$$

Более того, если конус K *удовлетворяет условию* $\mathrm{cl}(\mathrm{int}K) = \mathrm{cl}K$, *то разностно сублинейная функция* $p_K : Y \to \mathbb{R}$ *может быть выбрана так, что наряду с равенством* (5) *будет выполняться также равенство*

$$\mathrm{int}K = \{y \in Y \,|\, p_K(y) < 0\}. \tag{6}$$

Доказательство см. в [20].

Замечание 2.4. Как было показано в [1], если K – выпуклый телесный ($\mathrm{int}K \neq \varnothing$) конус, то в качестве функции p_K, удовлетворяющей равенствам (5) и (6) может быть выбрана сублинейная функция $p_K(y) := \inf\limits_{z \in K} \|y - z\| - \inf\limits_{z \in Y \setminus K} \|y - z\|$. (Для произвольного множества $K \subset Y$ данная функция была введена Хириарт–Уррути [24; 25] и названа в [1, § 15] симметризованным расстоянием до множества K.)

Вернемся к задаче векторной оптимизации с неопределенным отношением предпочтения, при этом будем предполагать далее, что семейство отношений предпочтения $\mathcal{P}$ наряду с условиями (i) $\mathrm{int}P_\prec \neq \varnothing$ для любого $\prec \in \mathcal{P}$ и (ii) $\mathrm{cl}(\cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\}) \neq Y$ удовлетворяет также условию (iii) $\mathrm{cl}(\cup\{\mathrm{int}P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\}) = \mathrm{cl}(\cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\})$.

Как уже отмечалось выше при выполнении условий (i) и (ii) множество $\cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\}$ является нетривиальным конусом и, кроме того, так как

$$\cup\{\mathrm{int}P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\} \subset \mathrm{int}(\cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\}) \subset \cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\},$$

то

$$\mathrm{cl}(\cup\{\mathrm{int}P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\}) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\})) \subset \mathrm{cl}(\cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\}).$$

Из последних включений следует, что при выполнении условия (iii) справедливо равенство $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\})) = \mathrm{cl}(\cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\})$.

Таким образом, конус $\cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\}$ удовлетворяет всем предположениям предложения 2.3 и, следовательно, для него существует разностно сублинейная функция $p : Y \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\mathrm{int}(\cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\}) = \{y \in Y \,|\, p(y) < 0\} \tag{7}$$

и

$$\mathrm{cl}(\cup\{P_\prec \,|\, \prec \in \mathcal{P}\}) = \{y \in Y \,|\, p(y) \leqslant 0\}. \tag{8}$$

Ниже будем предполагать, что разностно сублинейная функция $p : Y \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая равенствам (7) и (8), а также ее представление в виде разности $p = \underline{p} - \overline{p}$ двух сублинейных функций $\underline{p}, \overline{p} \in \hat{P}(Y)$ выбраны и зафиксированы.

Теорема 2.5 (Теорема о скаляризации). *а) Точка $x^0 \in Q$ доставляет локальный гарантированный слабый $\mathcal{P}$-максимум отображению $F : X \to Y$ на множестве $Q \subset X$ в том и только том случае, когда существует окрестность $\mathcal{N}(x^0)$ точки x^0 такая, что*

$$p(F(x) - F(x^0)) \geqslant 0 \text{ для всех } x \in Q \cap \mathcal{N}(x^0). \tag{9}$$

б) Точка $x^0 \in Q$ доставляет локальный гарантированный сильный $\mathcal{P}$-максимум отображению $F : X \to Y$ на множестве $Q \subset X$ в том и только том случае, когда для некоторой окрестности $\mathcal{N}(x^0)$ точки x^0 выполняется условие

$$p(F(x) - F(x^0)) > 0 \text{ для всех } x \in Q \cap \mathcal{N}(x^0), F(x) \neq F(x^0). \tag{10}$$

Доказательство утверждения *а*) следует из условий (2) и (7), а утверждения *б*) из условий (3) и (8).

Очевидно, что условие (9) является необходимым, а условие (10) – достаточным условием для точек локального гарантированного $\mathcal{P}$-минимума отображения $F : X \to Y$ на множестве Q.

Важно отметить то, что условия (9) и (10) не зависят от конкретного выбора разностно сублинейной функции $p : Y \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей равенствам (7) и (8). Таким образом, условия (9) и (10) сводят задачу $\mathcal{P}$-максимизации векторнозначного целевого отображения F на множестве допустимых точек Q к задаче минимизации скалярной целевой функции $x \to p(F(x) - F(x^0))$ на том же множестве Q и именно в этом смысле скаляризуют исходную задачу векторной оптимизации с неопределенным отношением предпочтения. По сути дела, условия (9) и (10) переформулируют теоретико-множественные по своему содержанию определения точек гарантированного слабого и сильного $\mathcal{P}$-максимума в эквивалентной аналитической форме, в виде вариационных неравенств, для исследования которых можно применить хорошо развитые средства нелинейного функционального анализа.

К анализу соотношений (9) и (10), в результате которого будут получены как необходимые, так и достаточные условия для точек локального гарантированного $\mathcal{P}$-максимума отображения F, мы далее и переходим. Случай, когда отношение предпочтения задано точно и, следовательно, семейство $\mathcal{P}$ состоит из единственного отношения предпочтения $\prec$, достаточно подробно изучен автором ранее в работах [1; 3; 8–11].

3. Локальные аппроксимации множества допустимых решений и целевого отображения

В этом параграфе будут приведены определения и некоторые свойства локальных аппроксимаций множеств и отображений, которые будут использованы в следующих параграфах при выводе условий первого и второго порядков гарантированной $\prec$-максимальности допустимых решений задачи векторной оптимизации с неопределенным отношением предпочтения. Будем предполагать при этом, что X является вещественным нормированным пространством. Это позволит нам использовать в качестве локальных аппроксимации множества допустимых решений $Q \subset X$ касательные конусы первого и второго порядков, а для построения локальных аппроксимаций целевого отображения использовать целый спектр различных понятий теории дифференцирования отображений, которые наиболее развиты именно в нормированных пространствах.

Символом $S(0)$ будем обозначать ниже семейство последовательностей положительных вещественных чисел (t_n), $t_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящихся к нулю.

Для любого подмножества M из вещественного нормированного пространства X символом U_M будем обозначать семейство всех последовательностей (x_n) таких, что $x_n \in M$, $n = 1, 2, \ldots$, а символом $U_M(x^0)$ – подсемейство из U_M, состоящее из последовательностей (x_n), сходящихся (в смысле нормы, заданной на X) к точке x^0.

Говорят [23; 26–29], что вектор $h \in X$ является *касательным вектором первого порядка* к множеству M в точке $x^0 \in \mathrm{cl}M$, если существуют последовательности $(t_n) \in S(0)$ и $(x_n) \in U_M(x^0)$ такие, что $\dfrac{x_n - x^0}{t_n} \to h$ при $n \to \infty$.

Совокупность всех векторов из X, касательных (первого порядка) к множеству M в точке $x^0 \in \mathrm{cl}M$, образует замкнутый конус, который мы будем обозначать символом $T(x^0 \,|\, M)$ и называть *касательным конусом к множеству M в точке x^0*. (Конус $T(x^0 \,|\, M)$ называют также *контингентным конусом* или *конусом Булигана* к множеству M в точке x^0.)

Вектор $w \in X$ называется (см., напр., [3; 8–11; 29–32]) *касательным вектором второго порядка* к множеству $M \subset X$ в точке $x^0 \in \mathrm{cl}M$ по направлению $h \in X$ (или просто в $(x^0, h) \in \mathrm{cl}M \times X$), если существуют последовательности $(t_n) \in S(0)$ и $(x_n) \in U_M(x^0)$ такие, что

$$\frac{x_n - x^0 - t_n h}{\frac{1}{2}t_n^2} \to w.$$

Множество всех касательных векторов второго порядка к множеству $M \subset X$ в точке $x^0 \in \mathrm{cl}M$ по направлению $h \in X$ будем обозначать символом $T^2(x^0, h \,|\, M)$.

Известно [9], что $T^2(x^0, h \,|\, M)$ является замкнутым (возможно, пустым) подмножеством в X.

Говорят [11; 31; 32], что множество $M \subset X$ удовлетворяет *условию регулярности второго порядка* в точке $x^0 \in \mathrm{cl}M$ по направлению $h \in X$, если для любых последовательностей $(x_n) \in U_M(x^0)$ и $(t_n) \in S(0)$ таких, что $\dfrac{x_n - x^0}{t_n} \to h$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}\left(\frac{x_n - x^0 - t_n h}{\frac{1}{2}t_n^2}, T^2(x^0, h \,|\, M)\right) = 0,$$

где $\operatorname{dist}(z, M) := \inf\limits_{u\in M} \|z - u\|$ – расстояние от точки z до множества M.

Перейдем к обсуждению локальных аппроксимаций отображений.

Отображение $F : X \to Y$ из нормированного пространства X в нормированное пространство Y называется [1; 23; 29; 30; 33] *дифференцируемым в точке $x^0 \in X$ по направлению $h \in X$*, если существует предел

$$F'(x^0 \,|\, h) := \lim_{t\to 0, t>0} \frac{F(x^0 + th) - F(x^0)}{t}.$$

Если $F'(x^0 \,|\, h)$ существует для любого $h \in X$, то отображение $F'(x^0 \,|\, \cdot) : h \to F'(x^0 \,|\, h)$ называется *производной по направлениям отображения F в точке x^0*.

Говорят [23;32], что отображение $F : X \to Y$ *дифференцируемо по направлениям в смысле Адамара* (кратко, *$H-$дифференцируемо по направлениям*) в точке $x^0 \in X$, если оно дифференцируемо по направлениям в точке x^0 и при этом для всех $h \in X$ справедливо равенство

$$F'(x^0 \,|\, h) = \lim_{\substack{t\to 0, t>0 \\ z\to h}} \frac{F(x^0 + tz) - F(x^0)}{t}. \tag{11}$$

Равенство (11) эквивалентно следующему условию: для любых последовательностей $(t_n) \in S(0)$ и $(x_n) \in U_X(x^0)$ таких, что $\dfrac{x_n - x^0}{t_n} \to h$ при $n \to +\infty$ выполняется равенство

$$F'(x^0 \,|\, h) = \lim_{n\to+\infty} \frac{F(x_n) - F(x^0)}{t_n}. \tag{12}$$

Если отображение $F : X \to Y$ H-дифференцируемо по направлениям в точке $x^0 \in X$, то производная по направлениям $F'(x^0 \,|\, \cdot) : X \to Y$, как функция направления, непрерывна на всем пространстве X.

Отображение $F : X \to Y$ называется [27; 34] *дифференцируемым по Фреше* в точке $x^0 \in X$, если существует непрерывное линейное отображение $F'(x^0) : X \to Y$ такое, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x^0+h) - F(x^0) - F'(x^0)h}{\|h\|} = 0,$$

при этом отображение $F'(x^0) : X \to Y$ называется *производной Фреше* отображения F в точке x^0.

Очевидно, что дифференцируемое по Фреше отображение является H-дифференцируемым по направлениям, причем $F'(x^0\,|\,h) = F'(x^0)h$ для всех $h \in X$.

Отображение $F : X \to Y$ называется [1; 23] *квазидифференцируемым* (*H-квазидифференцируемым*) в смысле Демьянова–Рубинова в точке $x^0 \in X$, если F дифференцируемо (H-дифференцируемо) по направлениям в точке x^0 и его производная по направлениям $F'(x^0\,|\,\cdot) : X \to Y$ является разностно сублинейным отображением, т. е. такова, что при каждом $y^* \in Y^*$ композиция $h \to y^*(F'(x^0\,|\,h))$ является разностно сублинейной функцией.

Напомним сейчас необходимые понятия производных второго порядка для отображений.

Следуя [35; 36] (см. также [1; 32]), отображение $F : X \to Y$ будем называть *дважды параболически дифференцируемым в точке x^0 по направлению $h \in X$ с отклонением $w \in X$*, если F дифференцируемо в точке x^0 по направлению h и, кроме того, существует предел

$$F''(x^0\,|\,h,w) := \lim_{t\to 0^+} \frac{F(x^0+th+\frac{1}{2}t^2w) - F(x^0) - tF'(x^0\,|\,h)}{\frac{1}{2}t^2}.$$

Если предел $F''(x^0\,|\,h,w)$ существует и, кроме того,

$$F''(x^0\,|\,h,w) = \lim_{(t,z)\to(0^+,w)} \frac{F(x^0+th+\frac{1}{2}t^2z) - F(x^0) - tF'(x^0\,|\,h)}{\frac{1}{2}t^2},$$

то будем говорить [9; 32], что отображение F *дважды параболически H-дифференцируемо в точке* x^0 по направлению h с отклонением w.

В том случае, когда $F''(x^0\,|\,h,w)$ существует для всех $h \in X$ и $w \in X$, отображение $F''(x^0\,|\,\cdot,\cdot) : (h,w) \to F''(x^0\,|\,h,w)$ называется *второй параболической производной* (или, если выполняется (12), *второй параболической H-производной*) отображения F в точке x^0.

Нетрудно убедиться, что сужение второй параболической производной $F''(x^0\,|\,\cdot,\cdot) : X \times X \to$ $\to Y$ на $\{0\} \times X$ совпадает с первой производной по направлениям, т. е. имеет место равенство $F''(x^0\,|0,w) = F'(x^0\,|w)$ для всех $w \in X$.

Отображение $F : X \to Y$ называют [34] *дважды дифференцируемым по Фреше–Тэйлору* в точке $x^0 \in X$, если оно дифференцируемо по Фреше в этой точке и, кроме того, существует непрерывное симметричное билинейное отображение $F''(x^0) : X \times X \to Y$ такое, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x^0+h) - F(x^0) - F'(x^0)h - \frac{1}{2}F''(x^0)[h,h]}{\|h\|^2} = 0,$$

при этом соответствующее квадратичное отображение $h \to F''(x^0)[h,h]$ будем называть *второй производной Фреше–Тэйлора* отображения F в точке x^0.

Очевидно, что дважды дифференцируемое по Фреше–Тэйлору отображение является дважды параболически H-дифференцируемым по направлениям с отклонениями, причем

$$F''(x^0\,|\,h,w) = F'(x^0)w + F''(x^0)[h,h] \text{ для всех } h \in X \text{ и } w \in X.$$

Заметим, что понятие второй производной Фреше–Тэйлора слабее классического понятия второй производной Фреше, которая, как известно, вводится как производная первой производной Фреше и в этом смысле является последовательной. В данном выше определении понятия производной Фреше–Тэйлора, фактически, пастулируется лишь одно из свойств второй производной Фреше, связанное с формулой Тэйлора.

4. Условия локальной гарантированной $\mathcal{P}$-максимальности первого порядка

Рассматривая далее задачу $\mathcal{P}$-максимизации отображения $F : X \to Y$ на множестве $Q \subset X$, будем предполагать в этом параграфе, что отображение $F : X \to Y$ является, по крайней мере, H-дифференцируемым по направлениям в исследуемой точке x^0. Относительно семейства отношений предпочтения $\mathcal{P}$ будем предполагать всюду далее, что оно удовлетворяет условиям (i)–(iii) и пусть $p : Y \to \mathbb{R}$ – произвольная разностно сублинейная функция, удовлетворяющая равенствам (7) и (8).

Используя стандартные методы дифференциального анализа, непосредственно из теоремы о скаляризации приходим к следующим условиям $\mathcal{P}$-максимальности первого порядка.

Теорема 4.1 (прямые условия первого порядка для точек гарантированного $\mathcal{P}$-максимума). *Пусть $x^0 \in Q$ и пусть отображение $F : X \to Y$ является H-дифференцируемым по направлениям в точке x^0. Тогда*

а) для того чтобы точка x^0 доставляла отображению $F : X \to Y$ локальный гарантированный слабый $\mathcal{P}$-максимум на множестве Q, необходимо, чтобы

$$p(F'(x^0 \,|\, h)) \geqslant 0 \text{ для всех } h \in T(x^0 \,|\, Q) \tag{13}$$

или, эквивалентно, чтобы

$$SK_F(x^0) \cap T(x^0 \,|\, Q) = \varnothing, \tag{14}$$

где $SK_F(x^0) := \{h \in X \,|\, p(F'(x^0 \,|\, h)) < 0\}$;

б) если оба нормированные пространства X и Y конечномерны, то для того чтобы точка x^0 доставляла отображению $F : X \to Y$ локальный гарантированный сильный $\mathcal{P}$-максимум на множестве Q, достаточно, чтобы

$$p(F'(x^0 \,|\, h)) > 0 \text{ для всех } h \in T(x^0 \,|\, Q),\ h \neq 0 \tag{15}$$

или, эквивалентно, чтобы

$$K_F(x^0) \cap T(x^0 \,|\, Q) = \{0\}, \tag{16}$$

где $K_F(x^0) := \{h \in X \,|\, p(F'(x^0 \,|\, h)) \leqslant 0\}$.

Доказательство. *а)* Пусть $h \in T(x^0|Q)$ и пусть последовательности $(t_n) \in S(0)$ и $(x_n) \in U_Q(x^0)$ таковы, что $\dfrac{x_n - x^0}{t_n} \to h$ при $n \to +\infty$. Если точка x^0 доставляет отображению $F : X \to Y$ локальный гарантированный слабый $\mathcal{P}$-максимум на множестве Q, то в силу утверждения *а)* теоремы 2.5 (теоремы о скаляризации) существует окрестность $\mathcal{N}(x^0)$ точки x^0 такая, что для всех $x \in Q \cap \mathcal{N}(x^0)$ выполняется неравенство $p(F(x) - F(x^0)) \geqslant 0$. Так как $x_n \to x^0$, то, начиная с некоторого номера, элементы последовательности (x_n) принадлежат окрестности $\mathcal{N}(x^0)$. Не ограничивая общности, можем считать, что $x_n \in \mathcal{N}(x^0)$ при всех n. Следовательно, $p(F(x_n) - F(x^0)) \geqslant 0$ для всех n. Поскольку функция p положительно однородна, то $p\left(\dfrac{F(x_n) - F(x^0)}{t_n}\right) \geqslant 0$ для всех n. Учитывая равенство (12) и непрерывность разностно сублинейной функции p, получаем, переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to +\infty$, требуемое неравенство $p(F'(x^0|h)) \geqslant 0$. В силу произвольного выбора вектора $h \in T(x^0|Q)$ справедливость утверждения *а)* доказана. Эквивалентность (13) и (14) очевидна.

б) Будем рассуждать от противного. Предположим, что условие (15) выполнено, а точка $x^0 \in Q$ не доставляет отображению $F : X \to Y$ локальный гарантированный сильный $\mathcal{P}$-максимум на множестве Q. Тогда в силу утверждения *б)* из теоремы о скаляризации (теоремы 2.5) существует последовательность $(x_n) \in U_Q(x^0)$ такая, что $F(x_n) \neq F(x^0)$ и $p(F(x_n) - F(x^0)) \leqslant 0$ при всех n. Заметим, что из $F(x_n) \neq F(x^0)$ следует, что $x_n \neq x^0$. Рассмотрим последовательность $h_n := \dfrac{x_n - x^0}{\|x_n - x^0\|}$. Так как в конечномерном нормированном пространстве X единичная сфера компактна, то из последовательности (h_n) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности можем считать, что сама последовательность (h_n) является сходящейся и пусть $h := \lim\limits_{n \to +\infty} h_n$. Очевидно, что $h \in T(x^0|Q)$ и $h \neq 0$, поскольку $\|h\| = 1$. Пусть $t_n := \|x_n - x^0\|$. Так как $x_n \to x^0$, то $(t_n) \in S(0)$.

Вследствие положительной однородности функции p из неравенств $p(F(x_n)-F(x^0)) \leqslant 0 \,\forall\, n$ получаем, что при всех n выполняется неравенство $p\left(\dfrac{F(x_n)-F(x^0)}{t_n}\right) \leqslant 0$. Устремляя в последнем неравенстве n к бесконечности, придем, учитывая (12) и непрерывность функции p, к неравенству $p(F'(x^0|h)) \leqslant 0$, которое противоречит (15), поскольку $h \in T(x^0|Q)$ и $h \neq 0$. Эквивалентность (15) и (16) очевидна. □

Теорема 4.2 (двойственные условия первого порядка для точек гарантированного $\mathcal{P}$-максимума). *Пусть $x^0 \in Q$ и пусть отображение $F : X \to Y$ является H-квазидифференцируемым в точке x^0. Тогда*

а) для того чтобы точка x^0 доставляла отображению $F : X \to Y$ локальный гарантированный слабый $\mathcal{P}$-максимум на всем пространстве X, необходимо, чтобы

$$\overline{\partial}(p \circ F)(x^0) \subset \underline{\partial}(p \circ F)(x^0);$$

б) если оба нормированные пространства X и Y конечномерны, то для того чтобы точка x^0 доставляла отображению $F : X \to Y$ локальный гарантированный сильный $\mathcal{P}$-максимум на всем пространстве X, достаточно, чтобы для некоторого $\delta > 0$ выполнялось включение

$$\overline{\partial}(p \circ F)(x^0) + \delta B_{X^*} \subset \underline{\partial}(p \circ F)(x^0),$$

где B^* – единичный шар с центром в нулевой точке в пространстве X^*.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу предложения 2.2 композиция разностно сублинейной функции $p : Y \to \mathbb{R}$ и разностно сублинейного отображения $F'(x^0 \,|\, \cdot) : X \to Y$ также является разностно сублинейной функцией, определенной на X. Учитывая это замечание, легко видеть, что утверждения *а*) и *б*) данной теоремы являются следствиями соответствующих утверждений предыдущей теоремы и предложения 2.1. □

5. Условия локальной гарантированной $\mathcal{P}$-максимальности второго порядка.

При выводе условий гарантированной $\mathcal{P}$-максимальности второго порядка мы будем исходить, также как и при выводе условий $\mathcal{P}$-максимальности первого порядка, из теоремы скаляризации, а точнее, из условий (9) и (10), используя для анализа входящих в них множеств и отображений локальные аппроксимации второго порядка.

Теорема 5.1 (необходимое условие второго порядка для точек локального гарантированного слабого $\mathcal{P}$-максимума). *Пусть отображение $F : X \to Y$ является дважды параболически H-дифференцируемым по направлениям с отклонениями в точке $x^0 \in Q$. Тогда для того чтобы точка $x^0 \in Q$ доставляла отображению $F : X \to Y$ локальный гарантированный слабый $\mathcal{P}$-максимум на множестве Q, необходимо, чтобы для любого $h \in T(x^0 \,|\, Q)$ такого, что $p(F'(x^0 \,|\, h)) = 0$, выполнялось неравенство*

$$\inf_{w \in T^2(x^0, h \,|\, Q)} p'(F'(x^0 \,|\, h) | F''(x^0 \,|\, h, w)) \geqslant 0. \tag{17}$$

Доказательство. Прежде всего отметим (см., напр., [33, теорема 13.5]), что так как Y является конечномерным нормированным пространством, то разностно-сублинейная функция $p : Y \to \mathbb{R}$ является H-дифференцируемой по направлениям в любой точке пространства Y.

Рассмотрим произвольный вектор $h \in T(x^0 \,|\, Q)$, удовлетворяющий равенству $p(F'(x^0 \,|\, h)) = 0$, и произвольный вектор $w \in T^2(x^0, h \,|\, Q)$. Выберем последовательности $(x_n) \in U_Q(x^0)$ и $(t_n) \in S(0)$ такие, что $\dfrac{x_n - x^0 - t_n h}{\frac{1}{2}t_n^2} \to w$. Положим $w_n := \dfrac{x_n - x^0 - t_n h}{\frac{1}{2}t_n^2}$. Тогда $x_n = x^0 + t_n h + \frac{1}{2}t^2 w_n$. Так как $x_n \in Q$ для всех n и $x_n \to x^0$, то из утверждения *а*) теоремы 2.5 заключаем, что $p_{\prec}(F(x_n) - F(x^0)) \geqslant 0$ при достаточно больших n. Воспользовавшись тем, что отображение F дважды параболически H-дифференцируемо в точке x^0 и $p(F'(x^0 \,|\, h)) = 0$, получим

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p(F(x_n) - F(x^0))}{\frac{1}{2}t_n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{p\left(F'(x^0\,|\,h) + \frac{1}{2}t_n\left(F''(x^0\,|\,h, w_n) + \dfrac{o(t_n, w_n)}{t_n^2}\right)\right) - p_{\prec}(F'(x^0\,|\,h))}{\frac{1}{2}t_n} =$$

$$= p'_{\prec}(F'(x^0\,|\,h)\,|\,F''(x^0\,|\,h, w)) \geqslant 0.$$

Последнее равенство в предыдущих соотношениях следует из H-дифференцируемости по направлениям функции p в любой точке $y \in Y$ и равенства $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{o(t_n, w_n)}{t_n^2} \to 0$, которое выполняется, поскольку отображение F дважды параболически H-дифференцируемо в точке x^0.

Так как вектор $w \in T^2(x^0, h\,|\,Q)$ был выбран произвольным, то из доказанного неравенства следует (16). □

Заметим, что при выполнении предположений теоремы 5.1 условие (17) содержит в себе необходимое условие первого порядка (13). Действительно, так как $p'(0\,|\,y) = p(y)$ для любого $y \in Y$ и $F'(x^0|0) = 0$, то, положив в (17) $h = 0$, получим (13).

Достаточное условие второго порядка для точек локального гарантированного сильного $\mathcal{P}$-максимума будет доказано ниже при дополнительных предположениях, что семейство отношений предпочтения $\mathcal{P}$ является конечным, отображение F дважды дифференцируемо по Фреше–Тейлору в точке x^0, а множество Q удовлетворяет условию регулярности второго порядка в точке x^0.

Пусть I – конечное множество индексов и пусть $\mathcal{P} = \{\prec_i \,|\, i \in I\}$, где $\prec_i$ – определенные на Y отношения предпочтения, удовлетворяющие условию $\mathrm{int}P_{\prec_i} \neq \varnothing$ при любом $i \in I$. Здесь $P_{\prec_i}$ – конус положительных элементов отношения предпочтения $\prec_i$. Так как семейство $\mathcal{P}$ конечно, то $\mathrm{int}(\cup\{P_{\prec_i}\,|\,i = 1,2,\ldots,k\}) = \cup\{\mathrm{int}P_{\prec_i}\,|\,i = 1,2,\ldots,k\}$. Дополнительно будем предполагать, что $\cup\{P_{\prec_i}\,|\,i \in I\} \neq Y$, тогда семейство $\mathcal{P} = \{\prec_i \,|\, i \in I\}$ удовлетворяет всем трем условиям (i)–(iii) и, следовательно, для него существует разностно сублинейная функция $p : Y \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая равенствам (7) и (8). Покажем, что в этом случае такая функция p может быть построена конструктивно. Вследствие замечания 2.4 для каждого $P_{\prec_i}$ можно указать конкретную сублинейную функцию $\varphi_i : Y \to \mathbb{R}$ такую, что $\mathrm{int}P_{\prec_i} = \{y \in Y \,|\, \varphi_i(y) < 0\}$ и $\mathrm{cl}P_{\prec_i} = \{y \in Y \,|\, \varphi_i(y) \leqslant 0\}$. Нетрудно видеть, что функция $p(y) := \min\limits_{i=\overline{1,k}} \varphi_i(y)$ является разностно сублинейной и удовлетворяет равенствам $\mathrm{int}(\cup\{P_{\prec_i}\,|\,i \in I\}) = \{y \in Y \,|\, p(y) < 0\}$ и $\mathrm{cl}(\cup(\{P_{\prec_i}\,|\,i \in I\}) = \{y \in Y \,|\, p(y) \leqslant 0\}$. Заметим, что функция $p(y) := \min\limits_{i\in I} \varphi_i(y)$ (см., напр., [33]) дифференцируема по направлениям в любой точке $\bar{y} \in Y$, причем $p'(\bar{y}\,|\,y) = \min\limits_{i\in I_a(\bar{y})} \varphi'_i(\bar{y}\,|\,y) = \min\limits_{i\in I_a(\bar{y})} \max\limits_{y^*\in\partial\varphi_i(\bar{y})} y^*(y)$, $y \in Y$, где $I_a(\bar{y}) = \{i \in I \,|\, p(\bar{y}) = \varphi_i(\bar{y})\}$, $\partial\varphi_i(\bar{y}) = \{y^* \in \partial\varphi_i \,|\, y^*(\bar{y}) = \varphi_i(\bar{y})\}$.

Теорема 5.2 (достаточное условие второго порядка для точек локального гарантированного сильного $\mathcal{P}$-максимума). *Предположим, что оба нормированные пространства X и Y конечномерны и пусть в точке $x^0 \in Q$ отображение $F : X \to Y$ является дважды дифференцируемым по Фреше–Тэйлору, а семейство отношений предпочтения $\mathcal{P} = \{\prec_i \,|\, i \in I\}$ является конечным, причем* $\mathrm{int}P_{\prec_i} \neq \varnothing$ *для всех $i \in I$.*

Тогда, для того чтобы точка $x^0 \in Q$ доставляла отображению $F : X \to Y$ локальный сильный $\mathcal{P}$-максимум на множестве Q, достаточно, чтобы для разностно сублинейной функции $p(y) := \min\limits_{i\in I} \varphi_i(y)$, где $\varphi_i : Y \to \mathbb{R}$ – сублинейные функции такие, что $\mathrm{int}P_{\prec_i} = \{y \in Y \,|\, \varphi_i(y) < 0\}$ *и* $\mathrm{cl}P_{\prec_i} = \{y \in Y \,|\, \varphi_i(y) \leqslant 0\}$, *выполнялись следующие условия:*

1) *было справедливо неравенство*

$$p(F'(x^0)h) \geqslant 0 \text{ для всех } h \in T(x^0\,|\,Q); \tag{18}$$

2) *для любого $h \in C(x^0) := \{h \in T(x^0\,|\,Q) \,|\, p(F'(x^0)h) = 0\}$, $h \neq 0$, имело место неравенство*

$$\inf_{w\in T^2(x^0,h\,|\,Q)} p'(F'(x^0)h\,|\,F'(x^0)w + F''(x^0)[h,h]) > 0; \tag{19}$$

3) *множество Q удовлетворяло условию регулярности второго порядка в точке x^0 по любому направлению $h \in C(x^0)$, $h \neq 0$.*

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Предположим, что условия 1)–3) выполнены, а x^0 не является локально сильно $\mathcal{P}$-максимальной точкой отображения F на множестве Q.

Тогда в силу утверждения б) из теоремы 2.5 найдется последовательность $(x_n) \in U_Q(x^0)$, $F(x_n) \neq \neq F(x^0)$, такая, что $p(F(x_n) - F(x^0)) \leqslant 0$ для всех n или, учитывая конкретный вид функции p, такая, что $\min\limits_{i\in I} \varphi_i(F(x_n) - F(x^0)) \leqslant 0$ для всех n. Покажем, что существование такой последовательности противоречит условиям 1)–3).

Без ограничения общности можем считать, что последовательность (x_n) такова, что соответствующая ей последовательность $h_n = \dfrac{x_n - x^0}{t_n}$, где $t_n = \|x_n - x^0\|$, сходится к некоторому вектору h, $\|h\| = 1$, который, как это следует непосредственно из определения касательного конуса первого порядка, принадлежит $T(x^0 \,|\, Q)$. Так как отображение F дифференцируемо по Фреше в точке x^0, то из условия $p\left(\dfrac{F(x_n) - F(x^0)}{t_n}\right) \leqslant 0$, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $p(F'(x^0)h) \leqslant 0$. С другой стороны, поскольку $h \in T(x^0 \,|\, Q)$, то в силу условия (18) имеем $p(F'(x^0)h) \geqslant 0$ и, значит, $p(F'(x^0)h) = 0$. Таким образом, $h \in C(x^0)$, причем $h \neq 0$.

Из равенства

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_i(F(x_n) - F(x^0))}{t_n} = \varphi_i(F'(x^0)h),$$

справедливого для любой сублинейной функции φ_i, а также из неравенства

$$\varphi_i(F'(x^0)h) > 0 \text{ для всех } i \in I \setminus I_a(F'(x^0)h),$$

которое следует из условия (18) и определения подсемейства $I_a(F'(x^0)h) = \{i \in I \,|\, p(F'(x^0)h) = = \varphi_i(F'(x^0)h)\}$, приходим к заключению, что для любого $i \in I \setminus I_a(F'(x^0)h)$ можно указать номер $n_i \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\varphi_i(F(x_n) - F(x^0)) > 0 \text{ для всех } n \geqslant n_i. \tag{20}$$

Так как множество индексов I конечно, то для любого $n \in \mathbb{N}$ можно указать такой индекс $i_n \in I$, что $\min\limits_{i\in I} \varphi_i(F(x_n) - F(x^0)) = \varphi_{i_n}(F(x_n) - F(x^0))$. Вследствие конечности множества индексов I найдется индекс $m \in I$ такой, что $\varphi_m = \varphi_{i_n}$ для бесконечно многих номеров n. Выберем из последовательности (x_n) подпоследовательность, соответствующую таким номерам, перенумеруем ее натуральными числами и отождествим с исходной последовательностью (x_n). В результате получим, что последовательность (x_n) удовлетворяет условиям

$$p(F(x_n) - F(x^0)) = \min_{i\in I} \varphi_i(F(x_n) - F(x^0)) = \varphi_m(F(x_n) - F(x^0)) \leqslant 0 \text{ для всех } n \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Сравнивая (21) с (20), заключаем, что $m \in I_a(F'(x^0)h)$.

Положим $w_n = \dfrac{x_n - x^0 - t_n h}{\frac{1}{2}t_n^2}$. Поскольку в силу условия 3) множество Q удовлетворяет условию регулярности второго порядка в точке x^0 по любому направлению $h \in C(x^0), h \neq 0$, то найдется последовательность $(u_n) \in T^2(x^0, h \,|\, Q)$ такая, что $w_n - u_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Выберем из множества $\partial\varphi_m(F'(x^0)h) := \{y^* \in \partial\varphi_m \,|\, y^*(F'(x^0)h) = 0\}$ последовательность $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что

$$\max_{y^*\in\partial\varphi_m(F'(x^0)h)} y^*(F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h,h]) = y_n^*(F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h,h]). \tag{22}$$

Существование таких y_n^* следует из компактности множества $\partial\varphi_m(F'(x^0)h)$ и непрерывности линейной функции $y^* \to y^*(F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h,h])$. Заметим, что так как $\partial\varphi_m(F'(x^0)h)$ – компакт, то последовательность $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Кроме того, из (22) и равенства

$$p'(F'(x^0)h \,|\, F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h,h]) = \max_{y^*\in\partial\varphi_m(F'(x^0)h)} y^*(F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h,h])$$

следует, что для всех n выполняется равенство

$$p'(F'(x^0)h \,|\, F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h,h]) = y_n^*(F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h,h]). \tag{23}$$

Воспользовавшись далее тем, что отображение $F : X \to Y$ дважды дифференцируемо по Фреше–Тэйлору в точке x^0, получим

$$F(x_n) - F(x^0) = t_n F'(x^0)h + \frac{1}{2}t_n^2\left(F'(x^0)w_n + F''(x^0)[h,h]\right) + o(t_n^2) =$$

$$= t_n F'(x^0)h + \frac{1}{2}t_n^2\left(F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h,h]\right) + \frac{1}{2}t_n^2 F'(x^0)(w_n - u_n) + o(t_n^2),$$

откуда, учитывая (23) и равенство $y_n^*(F'(x^0)h) = 0$, приходим к неравенству

$$y_n^*(F(x_n) - F(x^0)) = \frac{1}{2}t_n^2 y_n^*(F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h,h]) + y_n^*\left(\frac{1}{2}t_n^2 F'(x^0)(w_n - u_n) + o(t_n^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}t_n^2 p'(F'(x^0)h \,|\, F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h,h]) + y_n^*\left(\frac{1}{2}t_n^2 F'(x^0)(w_n - u_n) + o(t_n^2)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}t_n^2\left(\inf_{w \in T^2(x^0,h\,|\,Q)} p'(F'(x^0)h \,|\, F'(x^0)w + F''(x^0)[h,h]) + y_n^*(F'(x^0)(w_n - u_n)) + 2\frac{y_n^*(o(t_n^2))}{t_n^2}\right).$$

Заметим, что поскольку последовательность (y_n^*) ограничена, то $y_n^*(F'(x^0)(w_n - u_n)) + 2\dfrac{y_n^*(o(t_n^2))}{t_n^2} \to$ $\to 0$ при $n \to +\infty$. Кроме того, $t_n = \|x_n - x^0\| > 0$ для всех n. Учитывая эти факты и условие (19), из предыдущего неравенства заключаем, что $y_n^*(F(x_n) - F(x^0)) > 0$ при достаточно больших n.

Поскольку $y_n^* \in \partial\varphi_m$, то $\varphi_m(F(x_n) - F(x^0)) = \max\limits_{y^* \in \partial\varphi_m} y^*(F(x_n) - F(x^0)) > 0$ для достаточно больших n, что противоречит (21).

Полученное противоречие доказывает теорему. □

Работа поддержана Институтом математики НАН Беларуси в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция–2030».

Литература

1. *Гороховик В. В.* Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации. Минск: Наука и техника, 1990. 239 с.

2. *Jahn J.* Vector Optimization. Theory, Applications, and Extensions, 2ed. Berlin; Heidelberg: Springer, 2011.

3. *Гороховик В. В.* Условия минимальности в задачах векторной оптимизации с нетелесным конусом положительных элементов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52, № 7. С. 1192–1214.

4. *Jameson G.* Ordered Linear Spaces. Berlin: Springer, 1970. 194 p.

5. *Peressini A. L.* Ordered Topological Vector Spaces. New York: Harper and Row, 1067. 228 p.

6. *Куржанский, А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 390 с.

7. *Куржанский А. Б.* Задача идентификации – теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С. 3–26.

8. *Гороховик В. В.* К условиям локального минимума второго порядка в гладких задачах оптимизации с абстрактными ограничениями // Известия НАН Беларуси, Сер. физ.-мат. наук. 2005. № 3. С. 5–12.

9. *Гороховик В. В.* Асимптотически касательный конус второго порядка к множествам и условия локального минимума в задаче оптимизации с ограничениями // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Серия «Информатика и теория управления». 2006. Вып. 1. С. 34–41.

10. *Гороховик В. В.* Касательные векторы второго порядка к множествам и условия минимальности для точек подмножеств упорядоченных нормированных пространств // Тр. Ин-та математики. 2006. Т. 14, № 2. С. 35–47.

11. *Бахтин В. И., Гороховик В. В.* Условия оптимальности первого и второго порядков в задачах векторной оптимизации на метрических пространствах // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 32–43.

12. *Gorokhovik V. V., Gorokhovik S. Ya., Marinkovic B.* Necessary optimality conditions for a smooth discrete optimal control problem with vector-valued objective function // Positivity. 2013. Vol. 17. P. 483–500.

13. *Penot J. P.* Second order conditions for optimization problems with constraints // SIAM J. Control and Optimization. 1998. Vol. 37, N 1. P. 303–318.

14. *Jiménez B.* Strict efficiency in vector optimization // J. Math. Anal. Appl. 2002. Vol. 265. P. 264–284.

15. *Jiménez B., Novo V.* Second-order necessary conditions in set constrained differentiable vector optimization // Math. Methods Oper. Res. 2003. Vol. 58. P. 299–317.

16. *Jiménez B., Novo V.* Optimality conditions in differentiable vector optimization via second-order tangent sets // Appl. Math. Optim. 2004. Vol. 49. P. 123–144.

17. *Gfrerer H.* Second-order optimality conditions for scalar and vector optimization problems in Banach spaces // SIAM J. Control Optim. 2006. Vol. 45, N 3. P. 972–997.

18. *Gfrerer H.* Second-order necessary conditions for nonlinear optimization problems with abstract constraints: The degenerate case // SIAM J. Optimization. 2007. Vol. 18, N 2. P. 589–612.

19. *Gutiérrez C., Jiménez B., Novo V.* On second-order Fritz John type optimality conditions in nonsmooth multiobjective programming // Math. Program., Ser. B. 2010. Vol. 123. P. 199–223.

20. *Shapiro A.* Quasidufferential calculus and first-order optimality conditions in nonsmooth optimization // Mathematical Programming Study. 1986. Vol. 29. P. 56–68.

21. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* О квазидифференцируемых функционалах // Доклады АН СССР. 1980. Т. 250, № 1. С. 21–25.

22. *Gorokhovik V. V.* ε–Quasidufferentiability of real-valued functions and optimality conditions in extremal problems // Mathematical Programming Study. 1986. Vol. 29. P. 203–218.

23. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 479 с.

24. *Hiriart-Urruty J. B.* Tangent cones, generalized gradients, and mathematical programming in Banach spaces // Math. Oper. Research. 1979. Vol. 4, N 1. P. 79–97.

25. *Hiriart-Urruty J. B.* New concepts in nondifferentiable programming // Bull. Soc. Math. France Mém. 1979. Vol. 60. P. 57–85.

26. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Приближенные методы решения экстремальных задач. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1968. 180 с.

27. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 430 с.

28. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1965. Т. 5, № 3. С. 395–453.

29. *Rockafellar R. T., Wets R. J-B.* Variational Analysis. Berlin: Springer Verlag, 1998. 717 p.

30. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-Valued Analysis. Boston: Birkhauser, 1990. 461 p.

31. *Bonnans J. F., Cominetti R., Shapiro A.* Second order optimality conditions based on parabolic second order tangent sets // SIAM J. Optimization. 1999. Vol. 9, N 2. P. 466–492.

32. *Bonnans J. F., Shapiro A.* Perturbation Analysis of Optimization Problems. Berlin: Springer, 2000. 601 p.

33. *Гороховик В. В.* Конечномерные задачи оптимизации. Минск: Изд. центр БГУ, 2007. 239 с.

34. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. А., Рутицкий Я. Б. и др.* Приближенные решения операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.

35. *Ben-Tal A.* Second order and related extremality conditions in nonlinear programming // J. Optim. Theory and Appl. 1980. Vol. 31, N 2. P. 143–165.

36. *Ben-Tal A., Zowe J.* A unified theory of first and second order conditions for extremum problems in topological vector spaces // Math. Programming Study. 1982. Vol. 19. P. 39–76.

References

1. Gorokhovik V. V. *Convex and Nonsmooth Problems of Vector Optimization.* Minsk: Nawuka i Tekhnika, 1990. 239 p. (in Russian).

2. Jahn J. *Vector Optimization. Theory, Applications, and Extensions, 2 ed.* Berlin, Heidelberg, Springer, 2011.

3. Gorokhovik V. V. Optimality conditions in vector optimization problems withh non-solid cone of positive elements. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics,* 2012, vol. 52, no. 7, pp. 1192–1214 (in Russian).

4. Jameson G. *Ordered Linear Spaces.* Berlin, Springer, 1970. 194 p.

5. Peressini A. L. *Ordered Topological Vector Spaces.* New York, Harper and Row, 1067. 228 p.

6. Kurzhanski A. B. *Control and Observation under Uncertainty*. Moscow, Nauka, 1977. 390 p. (in Russian).

7. Kurzhanski A. B. The identification problem: the theory of guaranteed estimates. *Automation and Remote Control*, 1991, no. 4, pp. 3–26 (in Russian).

8. Gorokhovik V. V. On second-order local minimum conditions in smooth optimization problems with abstract constraints. *Proceedings of National Academy of Sciences of Belarus, Ser. Phiz.-Math. nawuk,* 2005, no. 3, pp. 5–12 (in Russian).

9. Gorokhovik V. V. Second-order asymptotically tangent cone to sets and local minimum conditions for an optimization problem with constraints. *Vestnik St.-Pitersburg University. Ser. 'Informatika and control theory'*, 2006, iss. 1, pp. 34–41 (in Russian).

10. Gorokhovik V. V. Second-order tangent vectors to sets and minimality conditions for points of subsets of ordered normed spaces. *Trudy Instituta Matematiki*, 2006, vol. 14, no. 2, pp. 35–47 (in Russian).

11. Bakhtin V. I., Gorokhovik V. V. First- and second-order optimality conditions in vector optimization problems on metric spaces. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2009, vol. 15, no. 4, pp. 32–43 (in Russian).

12. Gorokhovik V. V., Gorokhovik S. Ya., Marinkovic B. Necessary optimality conditions for a smooth discrete optimal control problem with vector-valued objective function. *Positivity*, 2013, vol. 17, pp. 483–500.

13. Penot J. P. Second order conditions for optimization problems with constraints. *SIAM J. Control and Optimization*, 1998, vol. 37, no. 1, pp. 303–318.

14. Jiménez B. Strict efficiency in vector optimization. *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, vol. 265. pp. 264–284.

15. Jiménez B., Novo V. Second-order necessary conditions in set constrained differentiable vector optimization. *Math. Methods Oper. Res.*, 2003, vol. 58, pp. 299–317.

16. Jiménez B., Novo V. Optimality conditions in differentiable vector optimization via second-order tangent sets. *Appl. Math. Optim.*, 2004, vol. 49, pp. 123–144.

17. Gfrerer H. Second-order optimality conditions for scalar and vector optimization problems in Banach spaces. *SIAM J. Control Optim.*, 2006, vol. 45, no. 3, pp. 972–997.

18. Gfrerer H. Second-order necessary conditions for nonlinear optimization problems with abstract constraints: The degenerate case. *SIAM J. Optimization*, 2007, vol. 18, no. 2, pp. 589–612.

19. Gutiérrez C., Jiménez B., Novo V. On second-order Fritz John type optimality conditions in nonsmooth multiobjective programming. *Math. Program., Ser. B.*, 2010, vol. 123. pp. 199–223.

20. Shapiro A. Quasidufferential calculus and first-order optimality conditions in nonsmooth optimization. *Mathematical Programming Study*, 1986, vol. 29, pp. 56–68.

21. Demyanov V. F., Rubinov A. M. On quasidifferentiable functionals. *Doklady of the Academy of Sci. of USSR,* 1980, vol. 250, no. 1, pp. 21–25 (in Russian).

22. Gorokhovik V. V. ε-Quasidufferentiability of real-valued functions and optimality conditions in extremal problems. *Mathematical Programming Study*, 1986, vol. 29, pp. 203–218.

23. Demyanov V. F., Rubinov A. M. *Fundamentals of Nonsmooth Analysis and Quasidifferential Calculus*. Moscow, Nauka, 1990. 479 p. (in Russian).

24. Hiriart-Urruty J. B. Tangent cones, generalized gradients, and mathematical programming in Banach spaces. *Math. Oper. Research*, 1979, vol. 4, no. 1, pp. 79–97.

25. *Hiriart-Urruty J. B.* New concepts in nondifferentiable programming. *Bull. Soc. Math. France Mém.*, 1979, vol. 60, pp. 57–85.

26. Demyanov V. F., Rubinov A. M. *Approximate Methods for Solving Extremal Problems*. Leningrad, Leningrad University Press, 1968. 180 p. (in Russian).

27. Alekseev V. M., Tikhomirov V. M., Fomin S. V. *Optimal Control*. Moscow, Nauka, 1979. 430 p. (in Russian).

28. Dubovitskii A. Ya., Milyutin A. A. Extremum problems under constraints. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1965, vol. 5, no. 3, pp. 395–453 (in Russian).

29. Rockafellar R. T., Wets R. J-B. *Variational Analysis*. Berlin, Springer Verlag, 1998. 717 p.

30. Aubin J.-P., Frankowska H. *Set-Valued Analysis*. Boston, Birkhauser, 1990. 461 p.

31. Bonnans J. F., Cominetti R., Shapiro A. Second order optimality conditions based on parabolic second order tangent sets. *SIAM J. Optimization*, 1999, vol. 9, no. 2, pp. 466–492.

32. Bonnans J. F., Shapiro A. *Perturbation Analysis of Optimization Problems*. Berlin, Springer, 2000. 601 p.

33. Gorokhovik V. V. *Finite-dimensional Optimization Problems*. Minsk, Press Center of BSU, 2007. 239 p. (in Russian).

34. Krasnoselski M. A., Vajnikko G. M., Zabreiko P. P., Rutitski Ya. B. et al. *Approximate Solutions of Operator Equations*. Moscow, Nauka, 1969. 456 p. (in Russian).

35. Ben-Tal A. Second order and related extremality conditions in nonlinear programming. *J. Optim. Theory and Appl.*, 1980. vol. 31, no. 2, pp. 143–165.

36. Ben-Tal A., Zowe J. A unified theory of first and second order conditions for extremum problems in topological vector spaces. *Math. Programming Study*, 1982, vol. 19, pp. 39–76.