Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 60–74

УДК 517.962.2+517.977 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-60–74
EDN: YLVTVZ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

А. И. Астровский[1], **В. В. Горячкин**[2]

[1]*Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь*
[2]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*
e-mail: aastrov53@gmail.com, gorvv@bsu.by

Поступила: 08.07.2026 **Исправлена:** 04.08.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: дискретные нестационарные системы линейных уравнений Вольтерра, матрицы Коши, устойчивость, асимптотическая устойчивость, интервальная устойчивость, запас устойчивости, робастность, системы с интервальными матрицами, интервальная арифметика

Аннотация. Исследуются различные типы устойчивости для дискретных нестационарных линейных систем уравнений Вольтерра, особенностью которых является зависимость каждого последующего состояния от всей предыстории процесса. Решения систем уравнений Вольтерра представлены через матрицы Коши. Установлены необходимые и достаточные условия устойчивости, асимптотической устойчивости в обычной и интервальной постановках. Полученные условия выражены в виде определенных ограничений на нормы матриц Коши и на спектральный радиус специальной матрицы. Рассмотрены задачи устойчивости возмущенной системы и получены оценки на нормы матриц возмущений, при выполнении которых сохраняется асимптотическая устойчивость.

ABOUT THE STABILITY OF DISCRETE NONSTATIONARY SYSTEMS OF LINEAR VOLTERRA EQUATIONS

A. I. Astrovskii[1], **V. V. Gorjachkin**[2]

[1]*Belarusian State Economic University, Minsk, Belarus*
[2]*Belarusian State University, Minsk, Belarus*
e-mail: aastrov53@gmail.com, gorvv@bsu.by

Received: 08.07.2026 **Revised:** 04.08.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: discrete nonstationary systems of linear Volterra equations, Cauchy matrices, stability, asymptotic stability, interval stability, stability margin, robustness, systems with interval matrices, interval arithmetic

Abstract. Various type of stability for discrete nonstationary linear systems of Volterra equations are investigated, the peculiarity of which is the dependence of each subsequent state on the entire prehistory of the process. The solutions of the system of linear Volterra equations are represented through Cauchy matrices. Necessary and sufficient conditions for stability and asymptotic stability in the usual and interval statement are established. The presented conditions are expressed in the form of certain restrictions on the norms of Cauchy matrices and on the spectral radius of a special matrix. The stability problems of a perturbed system are considered and estimates are obtained based on the norms of perturbation matrices, which preserve asymptotic stability.

1. Введение

Для надежного функционирования широкого класса прикладных систем (технических, биологических, экономических и т. д.) важна не только их устойчивость, но и сохранение устойчивости при возможных ограниченных изменениях коэффициентов систем. Это требование к системам в более общей форме известно как свойство грубости или робастной устойчивости. Данная проблема занимает важное место в математической теории управления и связана с получением условий устойчивости не одной конкретной системы, а целой совокупности систем с заданными ограничениями на их параметры. Исследованию робастной устойчивости для линейных обыкновенных стационарных дискретных систем с априорной параметрической неопределенностью посвящено большое число работ (см., напр., [1–5]).

Задачи устойчивости стационарных дифференциальных и дискретных систем уравнений Вольтерра были рассмотрены в ряде работ В. Б. Колмановского [6–8] и И. В. Гайшуна [9–13].

Однако в литературе сравнительно мало внимания уделено исследованию устойчивости систем Вольтерра с интервальными неопределенностями.

В данной работе развивается метод сравнения [14–16], применительно к исследованию устойчивости, асимптотической устойчивости систем линейных нестационарных дискретных уравнений Вольтерра как в обычной, так и интервальной постановках. Метод сравнения – это один из фундаментальных и наиболее мощных подходов в качественной теории динамических систем и теории управления. Его главная идея состоит в том, что свойства решений сложной системы изучаются путем их сравнения с решениями другой более простой системы сравнения, свойства которой хорошо известны или легко изучаются. Метод сравнения для рассматриваемых систем реализуется при помощи специально построенных мажорантных систем. Особое внимание уделено исследованию проблемы интервальной и робастной асимптотической устойчивости интервальных линейных нестационарных дискретных систем уравнений Вольтерра. Получены достаточные условия и критерии асимптотической устойчивости как в обычной, так и интервальной постановках.

2. Представление решений и устойчивость

Рассмотрим систему дискретных линейных нестационарных однородных уравнений Вольтерра

$$x(t+1) = \sum_{i=0}^{t} A_i(t)x(t-i),\ (t = 0,1,\ldots), \tag{1}$$

в которой $(n \times n)$-вещественные матрицы $A_i(t)$ $(i = 0,1,\ldots,t)$ предполагаются известными точно; $x(t)$ – n-вектор-столбец решения системы (1) в момент времени t. Если заданы начальные условия при $t = 0$

$$x(0) = v \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

то будем также использовать обозначение $x(t,v)$ для решения системы (1) с заданным начальным условием.

Введем $(n \times n)$-матрицы $F_0(t)$ $(t = 0,1,2,\ldots,)$ по рекуррентным правилам

$$F_0(t) = \sum_{i=0}^{t-1} A_i(t-1)F_0(t-1-i),\ t = 1,2,\ldots,\ F_0(0) = E. \tag{3}$$

Здесь E – единичная $(n \times n)$-матрица. Матрицы $F_0(t)$ будем называть матрицами Коши.

Из [17] следует, что решение $x(t) = x(t,v)$ $(t \geqslant 0)$ задачи (1), (2) определяется по формуле Коши

$$x(t,v) = F_0(t)v,\ t \geqslant 0. \tag{4}$$

Обобщая результаты работ [9–13; 18] приведем определения устойчивости и асимптотической устойчивости системы (1).

Пусть $\|z\|$ обозначает евклидову норму вектора z в пространстве $\mathbb{R}^n$, а $\|G\|$ – согласованную с ней норму матрицы G, которая определяется следующим образом: $\|G\| = \max\limits_{\|z\|=1} \|Gz\|$.

Определение 2.1. Система (1) называется устойчивой, если существует такая постоянная величина $c > 0$, что для любых начальных условий $x(0) = v \in \mathbb{R}^n$ выполняется условие

$$\|x(t,v)\| \leqslant c\|v\|,\ t \geqslant 0.$$

Система (1) называется асимптотически устойчивой, если $x(t,v) \to 0$ при $t \to +\infty$ для любых начальных условий.

Пусть $F_0(t)$ – матрицы, определенные по формулам (3). Справедлива

Теорема 2.2 [13]. *Система уравнений Вольтерра* (1)*:*

– устойчива тогда и только тогда, когда существует такая положительная постоянная c, что $\|F_0(t)\| \leqslant c$ для любых $t \geqslant 0$;

– асимптотически устойчива, если и только если $F_0(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Проверка приведенных в теореме 2.2 условий устойчивости для систем Вольтерра (1) на практике вызывает определенные трудности. Поэтому, следуя [9; 18; 19] приведем достаточные

условия устойчивости и асимптотической устойчивости, выраженные через параметры исходной системы (1).

Теорема 2.3. *Пусть в каждый момент времени* $t = 0,1,\ldots$ *нормы матриц* $\|A_i(t)\|$ $(i = 0,1,\ldots,t)$ *ограничены некоторыми неотрицательными постоянными* L_i, *ряд* $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} L_i$ *сходится и его сумма равна* L. *Тогда, если* $L \leqslant 1$, *то система* (1) *устойчива и* $\|x(t,v)\| \leqslant \|v\|$. *Если же* $L < 1$, *то она асимптотически устойчива.*

Приведем ряд обозначений и пояснений, которые будут далее использованы при применении метода сравнения для систем уравнений Вольтерра (1).

Пусть $\big|G\big|_+$ обозначает матрицу, составленную из абсолютных величин элементов квадратной матрицы G. Через $\rho\big(G\big)$ обозначим спектральный радиус квадратной матрицы G, т. е. число

$$\rho\big(G\big) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(G)\},$$

где $|\lambda|$ – модуль комплексного числа λ, а $\sigma(G)$ – спектр матрицы G. При условии $\rho\big(G\big) < 1$ для любой матричной нормы выполняется [20, с. 359] неравенство $\rho\big(G\big) \leqslant \|G\|$ и для матрицы $E - G$ существует обратная матрица $\big(E - G\big)^{-1}$, а также $G^k \to O$ при $k \to +\infty$. Здесь O – нулевая матрица. Будем использовать запись $M \prec 0$ для обозначения отрицательной определенности квадратной матрицы M, а запись $M \succ 0$ – для положительной определенности.

Теорема 2.4 [18]. *Пусть для матриц* $A_i(t)$ $(i = 0,1,\ldots,t)$ *существуют такие неотрицательные постоянные матрицы* V_i, *что в каждый момент времени* $t = 0,1,\ldots$ *выполняются матричные неравенства* $|A_i(t)|_+ \leqslant V_i$, *матричный ряд* $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} V_i$ *сходится и его сумма равна матрице* V. *Тогда система уравнений Вольтерра* (1) *устойчива (асимптотически устойчива), если для матрицы* V *ее спектральный радиус* $\rho\big(V\big) < 1$, *т. е. матрица* V *устойчива по Шуру* [13].

Заметим, что требование устойчивости по Шуру матрицы V эквивалентно существованию положительно определенного решения $P \succ 0$ дискретного матричного неравенства Ляпунова $VPV^T - P \prec 0$ [21].

3. Об оценке запаса устойчивости при аддитивных возмущениях

Пусть матрицы системы (1) подвергаются действию линейно входящих возмущений $\Delta_i(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, для которых в каждый момент времени $t = 0,1,\ldots$ выполняются неравенства $|\Delta_i(t)|_+ \leqslant \Omega_i$ $(i = 0,1,\ldots,t)$. Здесь Ω_i – неотрицательные постоянные квадратные матрицы, для которых матричный ряд $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \Omega_i = \Omega$ сходится.

С учетом изменений коэффициентов исходной системы (1) получим систему уравнений Вольтерра с неопределенными (возмущенными) коэффициентами

$$x(t+1) = \sum_{i=0}^{t} \big(A_i(t) + \Delta_i(t)\big)x(t-i),\ (t = 0,1,\ldots). \tag{5}$$

Предположим, что для исходной системы (1) выполняются условия теоремы 2.4. Требуется найти положительное число δ, обладающее свойством: для любой матрицы $\Omega \in \mathbb{R}^{n\times n}$, евклидова норма которой меньше δ, система (5) с матрицами $V_i + \Omega_i$ сохраняет свойство устойчивости. Здесь число δ играет роль запаса устойчивости матрицы V. Точную верхнюю грань δ_0 таких чисел δ будем называть запасом устойчивости матрицы V. Другими словами, необходимо количественно оценить робастность (или грубость системы), т. е. найти оценку величины норм возмущений системы, не нарушающих ее устойчивость [4; 22]. Далее оценим норму возмущений матриц устойчивой дискретной системы Вольтерра, не выводящих эту систему из класса устойчивых.

Пусть спектральный радиус матрицы $V + \Omega$ удовлетворяет неравенству

$$\rho\big(V\big) \leqslant \rho\big(V + \Omega\big) \leqslant \|V + \Omega\| \leqslant \|V\| + \|\Omega\| = 1.$$

Отсюда имеем

$$\|\Omega\| = 1 - \|V\| \leqslant 1 - \rho\big(V\big) = \delta_0$$

и приходим к утверждению.

Теорема 3.1. *При выполнении условий теоремы* 2.4 *и если* $\|\Omega\| < \delta_0$, *где* $\delta_0 = 1 - \rho\big(V\big)$, *то возмущенная система* (5) *устойчива.*

Число δ_0 играет роль запаса устойчивости дискретной системы Вольтерра (1).

Рассмотрим случай матрицы V с различными характеристическими числами

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_p,\ \mu_1 \pm i\eta_1,\ \mu_2 \pm i\eta_2,\ \ldots,\ \mu_q \pm i\eta_q,\ i^2 = -1,\ p + 2q = n,$$

которым соответствуют собственные векторы (в комплексном пространстве)

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p,\ y_1 \pm iz_1,\ y_2 \pm iz_2,\ \ldots,\ y_q \pm iz_q.$$

В пространстве $\mathbb{R}^n$ определим векторы

$$e_k = x_k,\ 1 \leqslant k \leqslant p,\ e_{p+2k-1} = y_k,\ e_{p+2k} = z_k,\ 1 \leqslant k \leqslant q.$$

Пусть $G\big(e_1, e_2, \ldots, e_n\big)$ – матрица Грама системы векторов $e_1,\ e_2, \ldots, e_n$, а χ – мера обусловленности этой матрицы, т. е. отношение модулей наибольшего и наименьшего собственных значений матрицы G.

Адаптируя результаты из [4], приходим к утверждению.

Теорема 3.2. *При выполнении условий теоремы* 2.4 *и если* $\|\Omega\| < \delta_0$, *где* $\delta_0 = \dfrac{1 - \rho\big(V\big)}{\sqrt{\chi}}$, *а* χ *– мера обусловленности матрицы Грама G, то для матрицы* $V + \Omega$ *ее спектральный радиус меньше единицы.*

Замечание 3.3. *Для оценки спектрального радиуса матрицы V можно воспользоваться результатом из работы* [4]. *Если* Υ *– множество всех обратимых* $(n \times n)$*-матриц, то имеет место равенство*

$$\rho\big(V\big) = \min_{T \in \Upsilon} \max_{\|x\|=1} \big|T^{-1}VTx\big|,$$

причем минимум по T достигается при $T = T_0$, *где* T_0 *– матрица, столбцами которой являются векторы* $e_1,\ e_2,\ \ldots, e_n$.

4. Устойчивость интервальной дискретной системы уравнений Вольтерра

Для описания интервальной дискретной системы уравнений Вольтерра введем следующие понятия. Интервалами будем называть множества вида

$$[\eta, \vartheta] = \{\xi \in \mathbb{R} : \eta \leqslant \xi \leqslant \vartheta\}$$

для вещественных чисел $\eta, \vartheta \in \mathbb{R}$, $\eta \leqslant \vartheta$. Интервалы будем обозначать буквами жирного шрифта.

Далее будем обозначать через $\mathrm{mid}(\mathbf{a}) = \dfrac{a^* + a_*}{2}$ середину интервала $\mathbf{a} = [a_*,\ a^*]$, а через $\mathrm{rad}(\mathbf{a}) = \dfrac{a^* - a_*}{2}$ радиус интервала, $|\mathbf{a}| = \max\{|a^*|,\ |a_*|\}$ – абсолютное значение (модуль) интервала. Запись $\mathbf{a} \geqslant 0$ для интервала $\mathbf{a} = [a_*,\ a^*]$ означает, что $a_* \geqslant 0$.

Обозначим через $\mathbf{A}_i(t)$ интервальные вещественные $(n \times n)$-матрицы, т. е.

$$\mathbf{A}_i(t) = [A_{*i}(t),\ A_i^*(t)],\ t \geqslant 0;\ i = 0, 1, \ldots, t,$$

где $A_{*i}(t)$ и $A_i^*(t)$ – заданные матрицы $\big(A_{*i}(t) \leqslant A_i^*(t)\big)$. Здесь и далее матричные и векторные неравенства понимаются поэлементно. Интервальный вещественный вектор $\mathbf{x}(t)$ размерности n – это интервал $[x_*(t), x^*(t)]$, понимаемый как покомпонентный интервал в $\mathbb{R}^n$.

Вещественная неотрицательная матрица $|\mathbf{B}| = \big(|\mathbf{b}_{ij}|\big)$ называется абсолютной величиной интервальной матрицы $\mathbf{B}$ [23].

Интервальной нестационарной дискретной системой линейных уравнений Вольтерра в классической интервальной арифметике [23–26] назовем соотношение

$$\mathbf{x}(t+1) = \sum_{i=0}^{t} \mathbf{A}_i(t)\mathbf{x}(t-i),\ t = 0,1,\ldots. \tag{6}$$

Решение системы (6) с начальным условием $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}$ понимается в интервальной арифметике как совокупность интервалов $\mathbf{x}\big(t,\mathbf{v}\big) = [x_*(t,v),\ x^*(t,v)]$ $(t \geqslant 0)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, полученная при всевозможных матрицах $A_i(t) \in [A_{*i}(t), A_i^*(t)]$ $(t \geqslant 0;\ i = 0,1,\ldots,t)$ и начальных условиях из заданного интервала $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}$:

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(0),\ \ldots,\ \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{A}_0(\tau-1)\mathbf{x}(\tau-1) + \mathbf{A}_1(\tau-1)\mathbf{x}(\tau-2) + \cdots + \mathbf{A}_{\tau-1}(\tau-1)\mathbf{x}(0).$$

Интервальный вектор $\mathbf{x}(0)$ называется начальным условием интервальной системы (6). Ясно, что всякий начальный интервальный вектор $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}$ однозначно определяет решение (интервальную траекторию) $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}\big(t,\mathbf{v}\big)$ на множестве $[0,\tau]$ $(0 < \tau \in \mathbb{Z}_+)$, где $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел.

Определение 4.1. Будем говорить, что система (6) интервально асимптотически устойчива, если для любого начального условия $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}$ решение системы (6) удовлетворяет требованию $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} h\big(\mathbf{x}(t),0\big)\right) = 0$, где h – метрика Хаусдорфа в интервальной арифметике [23, с. 23; 25, с. 68].

Напомним, что расстояние по Хаусдорфу между двумя интервалами $\mathbf{a} = [a_*,\ a^*]$ и $\mathbf{b} = [b_*,\ b^*]$ определяется по формуле

$$h\big(\mathbf{a},\mathbf{b}\big) = \operatorname{dist}\big(\mathbf{a},\mathbf{b}\big) = \max\big\{|a_* - b_*|,\ |a^* - b^*|\big\}.$$

Теорема 4.2. *Пусть для интервальных матриц $\mathbf{A}_i(t)$ $(t \geqslant 0;\ i = 0,1,\ldots,t)$ существуют такие неотрицательные постоянные матрицы V_i, что в каждый момент времени $t = 0,1,\ldots$ выполняются неравенства $|\mathbf{A}_i(t)| \leqslant V_i$ и матричный ряд $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} V_i$ сходится, сумма которого равна матрице V. Тогда система уравнений Вольтерра* (6) *интервально асимптотически устойчива, если спектральный радиус $\rho\big(V\big)$ матрицы V строго меньше единицы.*

Доказательство. Действительно, пусть $\rho\big(V\big) < 1$. Введем в рассмотрение постоянные неотрицательные матрицы по правилу

$$M_0 = V_0, \quad M_{t+1} = \sum_{i=0}^{t} V_i M_{t-i} + V_{t+1},\ t = 0,1,\ldots.$$

Исходя из (6) и [23, с. 131–132] последовательно выпишем оценки

$$|\mathbf{x}(1)| = |\mathbf{A}_0(0)\mathbf{x}(0)| \leqslant V_0|\mathbf{v}| = M_0|\mathbf{v}|,$$
$$|\mathbf{x}(2)| = |\mathbf{A}_0(1)\mathbf{x}(1) + \mathbf{A}_1(1)\mathbf{x}(0)| \leqslant V_0M_0|\mathbf{v}| + V_1|\mathbf{v}| = M_1|\mathbf{v}|.$$

Применяя метод математической индукции, получим

$$|\mathbf{x}(t+1| = \left|\sum_{i=0}^{t} \mathbf{A}_i(t)\mathbf{x}(t-i)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{t} V_i|\mathbf{x}(t-i)| \leqslant \big(V_0M_{t-1} + V_1M_{t-2} + \cdots + V_t\big)|\mathbf{v}| = M_t|\mathbf{v}|. \tag{7}$$

Таким образом, при любом допустимом $\mathbf{v}$ справедливо неравенство

$$|\mathbf{x}(t+1)| \leqslant M_t|\mathbf{v}|. \tag{8}$$

Покажем, что матричная последовательность $M_t \to 0$ при $t \to +\infty$. Для этого будем суммировать t первых равенств в правой части оценок (7), (8) и группировать матрицы при M_i $(i = 0,1,\ldots,t)$. В результате получим

$$M_0 + M_1 + \cdots + M_t = V_0 + V_1 + \cdots + V_t + \big(V_0 + V_1 + \cdots + V_{t-1}\big)M_0 +$$
$$+ \cdots + V_0M_{t-1} \leqslant V\big(E + M_0 + M_1 + \cdots + M_{t-1}\big).$$

Полагая

$$Y_t = M_0 + M_1 + \cdots + M_t,$$

приходим к рекуррентному неравенству

$$Y_{t+1} \leqslant VY_t + V, \quad Y_0 = O,\ t = 0,1,\ldots,$$

решение которого удовлетворяет соотношению

$$M_0 + M_1 + \cdots + M_t = Y_t \leqslant V + V^2 + V^3 + \cdots + V^t + V^{t+1} \leqslant V(E-V)^{-1},\ t = 0,1,\ldots.$$

Отсюда в силу $\rho\big(V\big) < 1$ матричный ряд $\sum\limits_{t=0}^{+\infty} M_t$ из неотрицательных матриц сходится. Следовательно, общий член ряда $M_t \to 0$ при $t \to +\infty$. Поэтому в силу неравенств (8) и свойств метрики Хаусдорфа

$$h(\mathbf{x}_i(t+1), 0) = |\mathbf{x}_i(t+1)|,\ i = 1,2,...,n,$$

система (6) интервально асимптотически устойчива. □

Реализацией системы (6) назовем систему (1) при заданных матрицах из указанных интервалов, т. е. при $A_i(t) \in \mathbf{A}_i(t)$ $(t \geqslant 0;\ i = 0,1,\ldots,t)$. Реализацию системы (6) также будем называть точечной системой.

Определение 4.3. Систему (6) назовем робастно асимптотически устойчивой, если каждое решение любой ее реализации (1) стремиться к нулю при $t \to +\infty$.

Теорема 4.4. *Если система* (6) *интервально асимптотически устойчива, то она робастно асимптотически устойчива.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из очевидного включения $x(t,v) \in \mathbf{x}(t,\mathbf{v})$, где $x(t,v)$ и $\mathbf{x}(t,\mathbf{v})$ соответственно решения систем (1) и (6) с точечным начальным условием $x(0) = v$ и интервальным начальным условием $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}$. □

Далее рассмотрим свойство устойчивости частных систем вида (6).

5. Устойчивость интервальных систем Вольтерра с точечными матрицами

Сначала рассмотрим систему уравнений Вольтерра с фиксированными (точечными) матрицами $A_i(t)$ $(t \geqslant 0;\ i = 0,1,\ldots,t)$ и интервальным начальным условием $\mathbf{x}(0,\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. В этом случае система (6) примет вид

$$\mathbf{x}(t+1) = \sum_{i=0}^{t} A_i(t)\mathbf{x}(t-i),\ t = 0,1,\ldots. \tag{9}$$

Для представления интервальной системы уравнений (9) в виде двух точечных систем воспользуемся утверждением

Лемма 5.1. *Для любых трех вещественных чисел a, c и d, удовлетворяющих условию $d \geqslant c$, справедливы равенства*

$$\min(ac, ad) = \frac{a(c+d) - |a|(d-c)}{2}, \quad \max(ac, ad) = \frac{a(c+d) + |a|(d-c)}{2}. \tag{10}$$

Лемма доказывается непосредственной проверкой.

В классической интервальной арифметике формула (10) имеет следующую интерпретацию:

$$a[c,d] = \big[a\mathrm{mid}\big([c,d]\big) - |a|\mathrm{rad}\big([c,d]\big),\ a\mathrm{mid}\big([c,d]\big) + |a|\mathrm{rad}\big([c,d]\big)\big]. \tag{11}$$

Формулы (10), (11) позволяют записать следующим образом произведение точечной матрицы D на интервальный вектор $\mathbf{q} = [q_*,\ q^*]$ (при условии согласования размеров сомножителей):

$$D\mathbf{q} = D[q_*,\ q^*] = \big[D\mathrm{mid}(\mathbf{q}) - |D|\mathrm{rad}(\mathbf{q}),\ D\mathrm{mid}(\mathbf{q}) + |D|\mathrm{rad}(\mathbf{q})\big]. \tag{12}$$

Здесь и далее центры, радиусы и модули матриц и векторов – это центры, радиусы и модули, составленные из соответствующих элементов матриц и векторов.

Представим систему уравнений (9) с учетом формулы (12). Имеем

$$\mathbf{x}(t+1)=\sum_{i=0}^{t}\big[A_i(t)\mathrm{mid}\big(\mathbf{x}(t-i)\big)-|A_i(t)|\mathrm{rad}\big(\mathbf{x}(t-i)\big),\ A_i(t)\mathrm{mid}\big(\mathbf{x}(t-i)\big)+|A_i(t)|\mathrm{rad}\big(\mathbf{x}(t-i)\big)\big]. \quad (13)$$

Так как каждый интервал $\mathbf{a}$ однозначно определяется своим радиусом $\mathrm{rad}(\mathbf{a})$ и центром $\mathrm{mid}(\mathbf{a})$, то система (13) эквивалентна системе уравнений Вольтерра из двух точечных уравнений

$$\begin{aligned}\mathrm{mid}\big(\mathbf{x}(t+1)\big) &= \sum_{i=0}^{t} A_i(t)\mathrm{mid}\big(\mathbf{x}(t-i)\big),\\ \mathrm{rad}\big(\mathbf{x}(t+1)\big) &= \sum_{i=0}^{t} |A_i(t)|\mathrm{rad}\big(\mathbf{x}(t-i)\big).\end{aligned} \quad (14)$$

Введем в рассмотрение следующие матрицы и векторы:

$$\Phi_i(t)=\begin{pmatrix}A_i(t) & O\\ O & |A_i(t)|\end{pmatrix},\quad z(t)=\begin{pmatrix}\mathrm{mid}\big(\mathbf{x}(t)\big)\\ \mathrm{rad}\big(\mathbf{x}(t)\big)\end{pmatrix},\quad z_0=\begin{pmatrix}\mathrm{mid}(\mathbf{v})\\ \mathrm{rad}(\mathbf{v})\end{pmatrix}.$$

Тогда можно перейти от интервального представления системы Вольтерра (9) к эквивалентному точечному представлению в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$

$$z(t+1)=\sum_{i=0}^{t}\Phi_i(t)z(t-i),\ t=0,1,\dots,\ z(0)=z_0.$$

Далее в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ можем воспользоваться как необходимыми, так и достаточными условиями асимптотической устойчивости, изложенными в разделе 2.

Легко видеть, что выполнение требования на расстояние Хаусдорфа между интервальной траекторией и нулем $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} h\big(\mathbf{x}(t),0\big)\right)=0$ в интервальной арифметике эквивалентно двум условиям:

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{mid}\big(\mathbf{x}(t)\big)=0,\quad \lim_{t\to+\infty}\mathrm{rad}\big(\mathbf{x}(t)\big)=0.$$

Значит, имеют место аналоги теорем 2.2, 2.3 и 2.4 для интервальной системы (9). Например, теореме 2.4 в интервальной постановке соответствует теорема

Теорема 5.2. *Пусть для матриц $\Phi_i(t)$ $(i=0,1,\dots t)$ существуют такие неотрицательные постоянные матрицы V_i, что в каждый момент времени $t=0,1,\dots$ выполняются неравенства $\big|\Phi_i(t)\big|_+\leqslant V_i$ и матричный ряд $\sum\limits_{i=0}^{+\infty}V_i$ сходится, сумма которого равна матрице V. Тогда интервальная система уравнений Вольтерра* (9) *интервально асимптотически устойчива, если для матрицы V ее спектральный радиус $\rho\big(V\big)<1$.*

В исходных матрицах системы (9) теорема 5.2 может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 5.3. *Пусть для матриц $A_i(t)$ $(i=0,1,\dots t)$ существуют такие неотрицательные постоянные матрицы V_i, что в каждый момент времени $t=0,1,\dots$ выполняются неравенства $|A_i(t)|_+\leqslant V_i$ и матричный ряд $\sum\limits_{i=0}^{+\infty}V_i$ сходится, сумма которого равна матрице V. Тогда интервальная система уравнений Вольтерра* (9) *интервально асимптотически устойчива, если для матрицы V ее спектральный радиус $\rho\big(V\big)<1$.*

Замечание 5.4. *Учитывая структуру матрицы $\Phi_i(t)$, легко видеть, что если выполнены достаточные условия асимптотической устойчивости всех точечных систем* (1)*, то будут выполнены достаточные условия интервальной асимптотической устойчивости системы* (9) *и наоборот.*

Для каждого из уравнений (14), учитывая формулы (3), (4), запишем формулы Коши. Получим

$$\mathrm{mid}\big(\mathbf{x}(t,\mathbf{v})\big)=F_0(t)\mathrm{mid}(\mathbf{v}),\quad \mathrm{rad}\big(\mathbf{x}(t,\mathbf{v})\big)=P_0(t)\mathrm{rad}(\mathbf{v}),\ t\geqslant 0.$$

Здесь матрицы $F_0(t)$ вычислены по формуле (3), а матрицы $P_0(t)$ определены по формуле, аналогичной формуле (3):

$$P_0(t) = \sum_{i=0}^{t-1} |A_i(t-1)| P_0(t-i-1),\ t = 1,2,\ldots, \quad P_0(0) = E.$$

Из предыдущих рассуждений приходим к формуле Коши для решения интервальной системы (9)

$$\mathbf{x}(t,\mathbf{v}) = \big[F_0(t)\mathrm{mid}(\mathbf{v}) - P_0(t)\mathrm{rad}(\mathbf{v}),\ F_0(t)\mathrm{mid}(\mathbf{v}) + P_0(t)\mathrm{rad}(\mathbf{v})\big],\ t \geqslant 0.$$

Исходя из этого представления несложно прийти к критерию асимптотической устойчивости интервальной системы Вольтерра с точечными матрицами.

Теорема 5.5. *Система Вольтерра* (9) *с точечными матрицами интервально асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда последовательность матриц* $P_0(t)$ $(t = 0,1,\ldots)$ *стремится к нулевой матрице при* $t \to +\infty$.

6. Устойчивость интервальной системы Вольтерра с неотрицательными матрицами

В данном разделе рассматриваются только матрицы $A_i(t)$, $i = 0,1,\ldots,t$, $t \geqslant 0$, с неотрицательными элементами, т. е. $O \leqslant A_i(t)$.

Для заданного точечного вещественного объекта w (скаляра, вектора или матрицы) введем две операции по правилам: $w^+ = \max\big(0, w\big)$, $w^- = \max\big(0, -w\big)$.

Очевидны соотношения $w = w^+ - w^-$ и $\big|w\big| = w^+ + w^-$.

Лемма 6.1. *Для любых вещественных чисел a, b, c, d, удовлетворяющих условию* $c \leqslant d$, $0 \leqslant a \leqslant b$ *справедливы равенства*

$$\min(ac, ad, bc, bd) = ac^+ - bc^-, \quad \max(ac, ad, bc, bd) = bd^+ - ad^-. \tag{15}$$

Лемма доказывается непосредственной проверкой.

В классической интервальной арифметике формулы (15) позволяют в явном виде записать произведение интервалов. Если $0 \leqslant a \leqslant b$, то под произведением интервалов $[a,b]$ и $[c,d]$ понимается интервал, который задается следующим образом:

$$[a,b] \cdot [c,d] = [ac^+ - bc^-,\ bd^+ - ad^-]. \tag{16}$$

Из леммы 6.1, формулы (16) и работы [23, с. 16, 128] следует формула представления произведения любой неотрицательной интервальной матрицы $\mathbf{D} = [D_*, D^*]$ на интервальный вектор $\mathbf{q} = [q_*, q^*]$ (размеры сомножителей согласованы)

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{q} = [D_*,\ D^*] \cdot [q_*,\ q^*] = \big[D_* q_*^+ - D^* q_*^-,\ D^* q^{*+} - D_* q^{*-}\big]. \tag{17}$$

Для реализации метода сравнения и построения мажорантных систем перейдем от системы уравнений (6) с учетом (17) для всех $t = 0,1,\ldots$ к эквивалентному представлению интервальной системы уравнений Вольтерра:

$$\mathbf{x}(t+1) = \sum_{i=0}^{t} \Big[A_{*i}(t) x_*^+(t-i) - A_i^*(t) x_*^-(t-i),\ A_i^*(t) x^{*+}(t-i) - A_{*i}(t) x^{*-}(t-i)\Big]. \tag{18}$$

Очевидно, из интервальной асимптотической устойчивости системы (18) следует интервальная асимптотическая устойчивость системы (6) и наоборот.

Заметим, что интервальное уравнение (18) эквивалентно двум точечным системам

$$x_*(t+1) = \sum_{i=0}^{t} \Big(A_{*i}(t) x_*^+(t-i) - A_i^*(t) x_*^-(t-i)\Big),\ x_*^+(0) = v_*^+,\ x_*^-(0) = v_*^-,\ t \geqslant 0, \tag{19}$$

$$x^*(t+1) = \sum_{i=0}^{t} \Big(A_i^*(t) x^{*+}(t-i) - A_{*i}(t) x^{*-}(t-i)\Big),\ x^{*+}(0) = v^{*+},\ x^{*-}(0) = v^{*-},\ t \geqslant 0. \tag{20}$$

Учитывая неотрицательность матриц $O \leqslant A_{*i}(t) \leqslant A_i^*(t)$ и векторов $x_*^+(t), x^{*+}(t), x_*^-(t), x^{*-}(t)$, получим мажоранту системы уравнений (19):

$$x_*(t+1) \leqslant \sum_{i=0}^{t} A_i^*(t)\Big(x_*^+(t-i) - x_*^-(t-i)\Big) = \sum_{i=0}^{t} A_i^*(t)x_*(t-i),\ t \geqslant 0.$$

В силу неотрицательности слагаемых в системе уравнений (20), имеем

$$|x^*(t+1)| = \Big|\sum_{i=0}^{t}\Big(A_i^*(t)x^{*+}(t-i) - A_{*i}(t)x^{*-}(t-i)\Big)\Big| \leqslant \sum_{i=0}^{t}\Big(A_i^*(t)x^{*+}(t-i) + A_{*i}(t)x^{*-}(t-i)\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{t}\Big(A_i^*(t)x^{*+}(t-i) + A_i^*(t)x^{*-}(t-i)\Big) = \sum_{i=0}^{t} A_i^*(t)\big|x^*(t-i)\big|,\ t \geqslant 0.$$

В результате приходим к двум мажорантным системам уравнений для систем (19) и (20):

$$w_*(t+1) = \sum_{i=0}^{t} A_i^*(t)w_*(t-i),\ w_*(0) = v_*,\ t \geqslant 0, \tag{21}$$

$$|w^*(t+1)| = \sum_{i=0}^{t} A_i^*(t)|w^*(t-i)|,\ w^*(0) = v^*,\ t \geqslant 0. \tag{22}$$

Если уравнения (21), (22) асимптотически устойчивы, то интервально асимптотически устойчива система (6) с неотрицательными матрицами. Поэтому справедливо утверждение – аналог теоремы 2.4.

Теорема 6.2. *Пусть матрицы системы* (6) *неотрицательны* $\mathbf{A}_i(t) \geqslant O$ *и для матриц* $A_i^*(t)$ $(i = 0, 1, \ldots t)$ *существуют такие неотрицательные постоянные матрицы* V_i, *что в каждый момент времени* $t = 0, 1, \ldots$ *выполняются матричные неравенства* $A_i^*(t) \leqslant V_i$. *Далее пусть матричный ряд* $\sum_{i=0}^{+\infty} V_i$ *сходится, сумма которого равна матрице* V. *Тогда интервальная система* (6) *асимптотически устойчива, если матрица* V *устойчива по Шуру.*

Теорема 6.3. *Пусть матрицы системы* (6) *неотрицательны* $\mathbf{A}_i(t) \geqslant O$. *Если для точечной системы* (1) *с матрицами* $A_i(t) = \big|\mathbf{A}_i(t)\big|$ *выполнены требования теоремы* 2.4, *то интервальная система* (6) *робастно и интервально асимптотически устойчива.*

Доказательство. Система (1) с матрицами $A_i(t) = |\mathbf{A}_i(t)|$ асимптотически устойчива. Так как для любой матрицы $A_i(t) \in \mathbf{A}_i(t)$ справедливо неравенство $A_i(t) \leqslant \big|\mathbf{A}_i(t)\big|$, то из достаточных условий теоремы 2.4 следует робастная асимптотическая устойчивость системы (6). Ясно, что для системы (6) выполняются условия теоремы 4.2, которые гарантируют ее интервальную асимптотическую устойчивость. □

Далее будем говорить, что система (6) имеет неотрицательные параметры, если все ее матрицы неотрицательны, т. е. $\mathbf{A}_i(t) \geqslant O$ и все начальные условия также являются неотрицательными векторами $\mathbf{x}(0) = [x_*(0),\ x^*(0)] = \mathbf{v} \geqslant 0$. Очевидно достаточные условия теоремы 6.2 обеспечивают интервальную асимптотическую устойчивость системы (6).

Чтобы получить критерии устойчивости системы (6) с неотрицательными параметрами, приведем сначала формулу Коши для точного решения интервальной задачи (6) с начальными условиями $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v} \geqslant 0$. Заметим, что в данном случае интервальное решение $\mathbf{x}\big(t, \mathbf{v}\big) \geqslant 0$.

Введем в рассмотрение неотрицательные интервальные матрицы $\mathbf{P}_0(t) = [P_{*0}(t),\ P_0^*(t)]$ по правилу (3). В формулах (3) для удобства изложения точечные матрицы $F_0(t)$ заменены на неотрицательные интервальные матрицы $\mathbf{P}_0(t)$, а арифметические операции понимаются в смысле классической интервальной арифметики. Тогда интервальная формула Коши примет вид

$$\mathbf{x}\big(t, \mathbf{x}(0)\big) = \mathbf{P}_0(t)\mathbf{x}(0). \tag{23}$$

Формула (23) доказывается методом математической индукции, учитывая неотрицательность матриц $\mathbf{A}_i(t)$, $\mathbf{P}_0(t)$, векторов $\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{x}(t)$, а также свойства ассоциативности и дистрибутивности операций над неотрицательными интервальными матрицами [23].

Очевидно, что в этом случае

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}_0(t)\mathbf{x}(0) = \big[P_{*0}(t)x_*(0),\ P_0^*(t)x^*(0)\big].$$

В силу неравенств

$$O \leqslant P_{*0}(t)x_*(0) \leqslant P_0^*(t)x^*(0)$$

интервальная асимптотическая устойчивость равносильна асимптотической устойчивости точечной системы

$$x^*(t+1) = \sum_{i=0}^{t} A_i^*(t)x^*(t-i),\ t = 0,1,\ldots. \tag{24}$$

Справедливы теоремы.

Теорема 6.4. *Система* (6) *с неотрицательными параметрами интервально асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда асимптотически устойчива точечная система Вольтерра* (24) *с матрицами, взятыми из правых границ интервалов* $\mathbf{A}_i(t) = [A_{*i}(t),\ A_i^*(t)]$ *и неотрицательных начальных условий* $x_*(0) \geqslant 0$.

Теорема 6.5. *Для системы* (6) *с неотрицательными параметрами интервальная асимптотическая устойчивость эквивалентна робастной асимптотической устойчивости.*

Доказательство. Необходимость утверждения следует из теоремы 4.4 и того факта, что решение любой реализация системы (6) мажорируется решением системы (24) при одном и том же неотрицательном начальном значении.

Достаточность теоремы вытекает, из того факта, что из робастной асимптотической устойчивости системы (6) следует асимптотическая устойчивость системы (24), что гарантирует интервальную асимптотическую устойчивость системы (6). □

7. Устойчивость неотрицательных решений интервальной системы Вольтерра

Во многих моделях математической экономики, жизнедеятельности биологических популяций, процессов взаимодействия лекарственных препаратов в теле пациента при медикоментозном лечении и др. представляют интерес условия неотрицательности решений, очевидно, при неотрицательных начальных условиях.

Решение $\mathbf{x}(t)$ интервальной задачи Коши будем называть неотрицательным, если все векторы в последовательности $\mathbf{x}(0),\ \mathbf{x}(1),\ \ldots,\ \mathbf{x}(t),\ldots$ неотрицательны.

Адаптируя схему рассуждений из [27] на системы Вольтерра, установим необходимые и достаточные условия неотрицательности интервального решения задачи Коши.

Заметим, что из-за перестановочности произведения интервалов

$$[c,d]\cdot[a,b] = [a,b]\cdot[c,d],\ \text{здесь } [a,b] \geqslant 0,$$

результат леммы 6.1 имеет следующую интерпретацию:

$$[c,d]\cdot[a,b] = \big[c\cdot\mathrm{mid}\big([a,b]\big) - |c|\cdot\mathrm{rad}\big([a,b]\big),\ d\cdot\mathrm{mid}\big([a,b]\big) + |d|\cdot\mathrm{rad}\big([a,b]\big)\big]. \tag{25}$$

Из (25) и [23, с. 16, 128] следует формула для произведения интервальной матрицы $\mathbf{D}$ на неотрицательный интервальный вектор $\mathbf{q}$

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{q} = [D_*,\ D^*]\cdot[q_*,\ q^*] = \big[D_*\cdot\mathrm{mid}(\mathbf{q}) - |D_*|\cdot\mathrm{rad}(\mathbf{q}),\ D^*\cdot\mathrm{mid}(\mathbf{q}) + |D^*|\cdot\mathrm{rad}(\mathbf{q})\big]. \tag{26}$$

Пусть траектория системы (6) неотрицательна. Воспользуемся формулой (26) и выпишем формулу для представления интервальной системы (6)

$$\mathbf{x}(t+1) = \sum_{i=0}^{t}\big[A_{*i}(t)\mathrm{mid}\big(\mathbf{x}(t-i)\big) - |A_{*i}(t)|\mathrm{rad}\big(\mathbf{x}(t-i)\big),\ A_i^*(t)\mathrm{mid}\big(\mathbf{x}(t-i)\big) + |A_i^*(t)|\mathrm{rad}\big(\mathbf{x}(t-i)\big)\big]. \tag{27}$$

Вычисляя середину и радиус интервалов (27), перейдем к точечным рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} m(t+1) &= \sum_{i=0}^{t} \Big(\operatorname{mid}\big(\mathbf{A}_i(t)\big) m(t-i) + \frac{\big(|A_i^*(t)| - |A_{*i}(t)|\big) r(t-i)}{2} \Big),\ m(0) = \operatorname{mid}\big(\mathbf{x}(0)\big) = \operatorname{mid}\big(\mathbf{v}\big), \\ r(t+1) &= \sum_{i=0}^{t} \Big(\operatorname{rad}\big(\mathbf{A}_i(t)\big) m(t-i) + \frac{\big(|A_i^*(t)| + |A_{*i}(t)|\big) r(t-i)}{2} \Big),\ r(0) = \operatorname{rad}\big(\mathbf{x}(0)\big) = \operatorname{rad}\big(\mathbf{v}\big), \end{aligned} \tag{28}$$

относительно центров $m(t) = \operatorname{mid}\big(\mathbf{x}(t)\big)$ и радиусов $r(t) = \operatorname{rad}\big(\mathbf{x}(t)\big)$ интервальных векторов $\mathbf{x}(t)$.

Так как было предположено, что траектория системы (6) неотрицательна, то

$$\mathbf{x}(t) = \operatorname{mid}\big(\mathbf{x}(t)\big) + [-1,\ 1]\operatorname{rad}\big(\mathbf{x}(t)\big) \geqslant 0.$$

Следовательно, неравенства

$$m(t) - r(t) \geqslant 0,\ t = 0, 1, \ldots, \tag{29}$$

относительно дискретных функций $m(t)$ и $r(t)$, которые построены по соотношениям (28), необходимы для неотрицательности решения $\mathbf{x}(t)$ задачи Коши для системы (6).

Теорема 7.1. *Задача Коши для интервальной дискретной системы Вольтерра* (6) *имеет неотрицательное решение* $\mathbf{x}(t) \geqslant 0$ *тогда и только тогда, когда решения* $m(t)$, $r(t)$ *задачи Коши* (28) *удовлетворяют условиям* (29)*, при этом* $\mathbf{x}(t) = [m(t) - r(t),\ m(t) + r(t)]$.

Доказательство. Необходимость теоремы была доказана выше. Достаточность условий (29) для неотрицательности интервальных решений системы (6) докажем методом математической индукции.

Пусть функции $m(t)$, $r(t)$ $(t \geqslant 0)$ удовлетворяют соотношениям (28) и неравенству (29). При $t = 0$ из (29) следует, что $\mathbf{x}(0) = \big[m(0) - r(0),\ m(0) + r(0)\big] = \mathbf{v} \geqslant 0$, т. е. $m(0) \geqslant r(0) \geqslant 0$.

Пусть при некотором t $(t > 0)$ выполнены соотношения

$$\mathbf{x}(t) = \big[m(t) - r(t),\ m(t) + r(t)\big] \geqslant 0,\ m(t) \geqslant r(t) \geqslant 0.$$

Покажем справедливость неравенства $\mathbf{x}(t+1) \geqslant 0$ на следующем $t+1$ шаге. Из формул (28) следует, что $r(t+1) \geqslant 0$. Далее, по условию (29) $m(t+1) - r(t+1) \geqslant 0$, откуда имеем $m(t+1) \geqslant 0$. Тогда можем построить неотрицательный интервальный вектор

$$\mathbf{z}(t+1) = \big[m(t+1) - r(t+1),\ m(t+1) + r(t+1)\big] \geqslant 0. \tag{30}$$

Подставим в (30) выражения из (28). Получим

$$\mathbf{z}(t+1) = \Big[\sum_{i=0}^{t} (A_{*i}(t) m(t-i) - |A_{*i}(t)| r(t-i)),\ \sum_{i=0}^{t} (A_i^*(t) m(t-i) + |A_i^*(t)| r(t-i)) \Big]. \tag{31}$$

В формуле (31) заменим выражения для $m(t+1) = \operatorname{mid}\big(\mathbf{x}(t+1)\big)$, $r(t+1) = \operatorname{rad}\big(\mathbf{x}(t+1)\big)$ и получим

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t+1) = \sum_{i=0}^{t} \Big[& A_{*i}(t) \operatorname{mid}\big(\mathbf{x}(t-i)\big) - |A_{*i}(t)| \operatorname{rad}\big(\mathbf{x}(t-i)\big), \\ & A_i^*(t) \operatorname{mid}\big(\mathbf{x}(t-i)\big) + |A_i^*(t)| \operatorname{rad}\big(\mathbf{x}(t-i)\big) \Big]. \end{aligned} \tag{32}$$

Отметим, что соотношение (32) установлено в предположении $\mathbf{x}(t) \geqslant 0$. Сравнивая правые части (27) и (32), а также применяя условие (28), приходим к соотношению $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{z}(t+1) \geqslant 0$, т. е. $\mathbf{x}(t+1) \geqslant 0$.

Таким образом, показано методом математической индукции, что выполнение условий (29) обеспечивает неотрицательность решения системы (6). □

Найдем условия интервальной устойчивости и асимптотической устойчивости неотрицательных решений интервальной системы (6) при произвольных вещественных интервальных матрицах $\mathbf{A}_i(t)$. Для этого определим точечные матрицы $\Psi_i(t)$ для $i = 0, 1, \ldots, t$

$$\Psi_i(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{mid}\big(\mathbf{A}_i(t)\big) & \dfrac{|A_i^*(t)| - |A_{*i}(t)|}{2} \\ \operatorname{rad}\big(\mathbf{A}_i(t)\big) & \dfrac{|A_i^*(t)| + |A_{*i}(t)|}{2} \end{pmatrix}.$$

Тогда относительно векторов $z(t) = \begin{pmatrix} m(t) \\ r(t) \end{pmatrix}$ $(z(t) \geqslant 0)$ с учетом формул (28) и условия (29) имеем в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ точечную систему Вольтерра

$$z(t+1) = \sum_{i=0}^{t} \Psi_i(t) z(t-i),\ t = 0,1,\ldots, \quad z(0) = \begin{pmatrix} \operatorname{mid}\big(\mathbf{v}\big) \\ \operatorname{rad}\big(\mathbf{v}\big) \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Очевидно, что система (6) с неотрицательными решениями интервально асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда точечная система (33) асимптотически устойчива при выполнении условий (29). Поэтому справедлива

Теорема 7.2. *Система Вольтерра* (6) *с неотрицательными решениями интервально асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда система* (6) *асимптотически устойчива и совместна система неравенств* $m(t) - r(t) \geqslant 0,\ t = 0,1,\ldots.$ *Здесь функции* $m(t)$ *и* $r(t)$ *определены по формулам* (28).

Условия робастной и интервальной асимптотической устойчивости системы (6) приведены в разделах 2,4.

8. Устойчивость систем с симметричными начальными условиями

Пусть матрицы $\mathbf{A}_i(t)$ произвольные, а начальные условия $\mathbf{x}(0)$ симметричны относительно нуля, т. е. имеют место соотношения

$$\mathbf{x}(0) = \big[-\operatorname{rad}\big(\mathbf{x}(0)\big),\ \operatorname{rad}\big(\mathbf{x}(0)\big)\big], \quad \operatorname{mid}\big(\mathbf{x}(0)\big) = 0,\ \operatorname{rad}\big(\mathbf{x}(0)\big) = |\mathbf{x}(0)|.$$

Отметим, что произведение интервальной матрицы $\mathbf{D}$ на интервальный вектор $\mathbf{q}$, из которых по крайней мере один симметричный, дает симметричный интервальный результат. Действительно

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{q} = [D_*,\ D^*] \cdot [q_*,\ q^*] = \big[-|\mathbf{D}||\mathbf{q}|,\ |\mathbf{D}||\mathbf{q}|\big].$$

Поэтому решение $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}\big(t, \mathbf{x}(0)\big)$ системы (6) с симметричным начальным условием является также симметричным интервальным вектором.

Запишем формулу Коши для симметричного решения $\mathbf{x}(t)$ в терминах середины и радиуса интервала

$$\operatorname{mid}\big(\mathbf{x}(t)\big) \equiv 0,\ \operatorname{rad}\big(\mathbf{x}(t)\big) = S_0(t) \operatorname{rad}\big(\mathbf{x}(0)\big),\ t \geqslant 0,$$

где точечные матрицы $S_0(t)$ вычисляются по аналогии с формулами (3):

$$S_0(t) = \sum_{i=0}^{t-1} |\mathbf{A}_i(t-1)| S_0(t-i-1),\ t = 1,2,\ldots,\ S_0(0) = E.$$

С учетом теоремы 2.2, справедлива

Теорема 8.1. *Система* (6) *с симметричными начальными условиями интервально асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда* $\lim S_0(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

По аналогии сформулируем достаточные условия интервальной асимптотической устойчивости.

Теорема 8.2. *Пусть для матриц* $|\mathbf{A}_i(t)|$ $(i = 0,1,\ldots,t)$ *существуют такие неотрицательные постоянные матрицы* V_i, *что в каждый момент времени* $t = 0,1,\ldots$ *выполняются матричные неравенства* $|\mathbf{A}_i(t)| \leqslant V_i$, *матричный ряд* $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} V_i$ *сходится, сумма которого равна матрице* V. *Тогда система уравнений Вольтерра* (6) *с симметричными начальными условиями интервально асимптотически устойчива, если для матрицы* V *ее спектральный радиус* $\rho\big(V\big) < 1$.

Литература

1. *Джури Э. И.* Робастность дискретных систем (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1990. № 5. С. 3–28.

2. *Гусев Ю. М., Ефанов В. Н., Крымский В. Г., Рутковский В. Ю.* Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). I // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1991. № 1. С. 3–23.

3. *Гусев Ю. М., Ефанов В. Н., Крымский В. Г., Рутковский В. Ю.* Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). II // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1991. № 2. С. 3–30.

4. *Бобылев Н. А., Емельянов С. В., Коровин С. К.* О робастной устойчивости линейных дискретных систем // Автомат. и телемех. 1998. № 8. С. 138–145.

5. *Баландин А. А., Коган М. М.* Робастная устойчивость параметрически возмущенного маятника // Известия вузов «ПНД». 2005. Т. 13, № 3. С. 61–66.

6. *Колмановский В. Б., Родионов А. М.* Об устойчивости некоторых дискретных процессов Вольтерра // Автомат. и телемех. 1995. № 2. С. 3–13.

7. *Колмановский В. Б.* О применении второго метода Ляпунова к разностным уравнениям Вольтерра // Автомат. и телемех. 1995. № 11. С. 50–64.

8. *Колмановский В. Б.* Устойчивость дискретных уравнений Вольтерра // Докл. РАН. 1996. Т. 349, № 5. С. 610–614.

9. *Гайшун И. В.* Устойчивость дискретных уравнений Вольтерра // Докл. АН Беларуси. 1996. Т. 40, № 2. С. 5–8.

10. *Гайшун И. В.* Устойчивость дискретных процессов Вольтерра с убывающим последействием // Автомат. и телемех. 1997. № 6. С. 118–124.

11. *Гайшун И. В.* Дискретные уравнения с изменяющейся структурой и устойчивость их решений // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 12. С. 1607–1614.

12. *Гайшун И. В.* Стабилизируемость дискретных уравнений Вольтерра // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 2. С. 272–278.

13. *Гайшун И. В.* Системы с дискретным временем. Мн.: Институт математики НАН Беларуси. 2001. 400 с.

14. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А.* Устойчивость движения: метод сравнения. Киев: Наукова думка, 1991. 248 с.

15. *Матросов В. М.* Метод функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001. 384 с.

16. *Соколова С. П., Ширяева О. И.* Агрегированная система сравнения для интервальной системы управления // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 3(14). С. 91–102. https://doi.org/10.15622/sp.14

17. *Астровский А. И., Горячкин В. В., Дымков М. П.* Об управляемости и наблюдаемости дискретных нестационарных линейных систем Вольтерра // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2023. Т. 59, № 3. С. 213–223. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-3-213-223

18. *Дымков М. П., Астровский А. И., Горячкин В. В.* Об устойчивости и стабилизируемости линейных дискретных нестационарных уравнений Вольтерра // Научные труды Белорусского государственного экономического университета. Мн.: Колорград, 2024. Вып. 17. С. 80–93. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-3-213-223

19. *Астровский А. И., Горячкин В. В., Дымков М. П.* Стабилизация линейных дискретных нестационарных уравнений Вольтерра // Еругинские чтения – 2026: Материалы XXII Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям (Республика Беларусь, Гродно, 18–22 мая 2026 г.): в 2 ч. Ч. 1 / Институт математики Нац. акад. наук Беларуси, Белорус. гос. ун-т, Гродн. гос. ун-т им. Янки Купалы. – Гродно: ГрГУ, 2026. С. 102–104.

20. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

21. *Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Щербаков П. С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях. Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.

22. *Бобылев Н. А., Емельянов С. В., Коровин С. К.* Оценки возмущений устойчивых матриц // Автомат. и телемех. 1998. № 4. С. 15–24.

23. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 360 с.

24. *Калмыков С. А., Шокин Ю. А., Юлдашев З. Х.* Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986. 224 с.

25. *Шарый С. П.* Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: XYZ, 2019. 647 с. – URL: https://www.nsc/interval/Libraly/InterBookc/SharyBook.pdf.

26. *Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э.* Прикладной интервальный анализ. М.; Ижевск, 2005.

27. *Ащепков Л. Т.* Неотрицательная управляемость интервальной линейной системы // Известия Иркутского государственного университета. 2009. Т. 2, № 1. С. 37–51.

References

1. *Djuri E. I.* Robustness of discrete systems (review) // *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1990, no. 5, pp. 3–28 (in Russian).

2. *Gusev U. M., Efanov B. N., Krimskii B. G., Rutcovskii B. U.* Analysis and synthesis of linear interval dynamical systems (state problem). I. *Izvestiya AN USSR. Technical Cybernetics*, 1991, no. 1, pp. 3–23 (in Russian).

3. *Gusev U. M., Efanov B. N., Krimskii B. G., Rutcovskii B. U.* Analysis and synthesis of linear interval dynamical systems (state problem). II. *Izvestiya AN USSR. Technical Cybernetics*, 1991, no. 2, pp. 3–30 (in Russian).

4. Balandin A. A., Kogan M. M. Robust stability of a parametrically perturbed pendulum. *Izvestiya vuzov «PND»*, 2004, vol. 13, no. 3, pp. 61–66 (in Russian).

5. Bobylev N. A., Emeljanov C. V., Korovin C. K. About robust stability of linear discrete systems. *Avtomatica and telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1998, no. 8, pp. 138–145 (in Russian).

6. Kolmanovskii V. B., Rodionov A. M. On stability of some discrete Volterra processes. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1995, no. 2, pp. 3–13 (in Russian).

7. Kolmanovskii V. B. About application of the second Lyapunov method to difference Volterra equations. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1995, no. 11. pp. 50–64 (in Russian).

8. Kolmanovskii V. B. Stability of discrete Volterra equations. *Doklady Mathematics*, 1996, vol. 349, no. 5, pp. 610–614 (in Russian).

9. Gaishun I. V. On stability of discrete Volterra equations. *Doklady Akademii Nauk Belarusi = Doklady of the Academy of Sciences of Belarus*, 1996, vol. 40, no. 2, pp. 5–8 (in Russian).

10. Gaishun I. V. Stability of discrete Volterra processes with decreasing aftereffect. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1997, no. 6, pp. 118–124 (in Russian).

11. Gaishun I. V. Discrete equations with variable structure and stability their solutions. *Differential equations*, 1997, vol. 33, no. 12, pp. 1607–1614 (in Russian).

12. Gaishun I. V. Stabilization of discrete Volterra equations. *Differential equations*, 1998, vol. 34, no. 2, pp. 272–278 (in Russian).

13. Gaishun I. V. *Systems with Discrete Time*. Minsk, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2001. 400 p. (in Russian).

14. Lakshmikantham V., Lila S., Martynuk A. A. *Stability of motion: method of comparison*. Kiev, Naukova dumka, 1991. 248 p.

15. Matrosov V. M. *Method of Lyapunov functions: analysis of dynamical properties of nonlinear systems*. Moscow, Fizmatlit, 2001. 384 p.

16. Sokolova S. P., Shiryayeva O. I. Aggregeted composite systems to interval control systems. *Proceedings of the SPIIRAS*, 2010, issue 3(14), pp. 91–102. https://doi.org/10.15622/sp.14

17. Astrovskii A. I., Goryachkin V. V., Dymkov M. P. On the controllability, observability and optimization of discrete nonstationary linear Volterra systems // *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 59, no. 3, pp. 213–223 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-3-213-223

18. Dymkov M. P., Astrovskii A. I., Goryachkin V. V. On the stability and stabilizability of linear discrete nonstationary Volterra equations // *Scientific Papers of the Belarusian State University of Economics*. Minsk, Colorgrad, 2024, vol. 17, pp. 80–93 (in Russian).

19. Astrovskii A. I., Goryachkin V. V., Dymkov M. P. Stabilization of linear discrete nonstationary Volterra equations. *Yeruginsky Readings–2026: Proceedings of the XXII International Scientific Conference on Differential Equations (Republic of Belarus, Grodno, May 18-22, 2026)*: Institute of Mathematics of the National acad. Sciences of Belarus, Belarusian State University, Grodno State University Yanka Kupala. Grodno, GrSU, 2026, pp. 102–104 (in Russian).

20. Horn R. A., Jonhson C. R. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge, Cambridge University Press, 1988. 655 p.

21. Polyak B. N., Khlebnikov V. N., Shcherbakov S. N. *Control of linear systems under external influences. Technique of linear matrix inequalities*. Moscow, LENAND, 2014 (in Russian).

22. Bobylev N. A., Emeljanov C. V., Korovin C. K. Estimates of disturbances for stability matrix. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1998, no. 4, pp. 15–24 (in Russian).

23. Alefeld G., Herzberger J. *Introduction to interval computations*. Toronto, Academic Press, 1983. 360 p.

24. Kalmykov S. A., Shokin I. Y., Yuldashev Z. C. *Methods of interval analysis*. Novosibirsk, Nauka, 1986. 224 p. (in Russian).

25. Sharyi S. P. *Finite-dimensional interval analysis*. Novosibirsk, XYZ, 2019. 647 p. (in Russian). URL: https://www.nsc/interval/Libraly/InterBookc/SharyBook.pdf

26. Jolene L., Kiefer M., Didri O., Walter E. *Applied interval Analysis*. Moscow, Izhevsk, 2005 (in Russian).

27. Ashchepkov L. T. Non-negative controllability of the interval linear system. *Izvestiya Irkutsk State University*, 2009, vol. 2, no. 1, pp. 37–51 (in Russian).