Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 50–59



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMIC SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL



УДК 330.4(075.8) https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-50–59
EDN: VGNXYC

ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ПОКАЗАТЕЛЯМИ СРАВНИТЕЛЬНОЙ СТАТИКИ ТЕОРИИ ФИРМЫ

В. В. Альсевич

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: alsevichvv@mail.ru

Поступила: 25.08.2026 **Исправлена:** 14.09.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: задачи теории фирмы, функции спроса на факторы производства, функция предложения, показатели сравнительной статики, аналог теоремы Слуцкого в теории фирмы

Аннотация. Как известно, одним из основных результатов теории потребления является теорема Е. Е. Слуцкого, устанавливающая зависимость между показателями сравнительной статики этой теории. В теории производства (фирмы) основные задачи аналогичны задачам теории потребления. Поэтому вызывает интерес получить аналогичный результат в теории фирмы. В научной литературе имеются похожие результаты при различных подходах к соответствующей постановке задачи фирмы. В данном сообщении получены соотношения между показателями сравнительной статики теории фирмы, являющиеся аналогом теоремы Слуцкого в теории потребления в интерпретации Дж. Хикса.

THE RELATIONSHIP BETWEEN THE INDICATORS OF COMPARATIVE STATICS OF THE FIRM THEORY

V. V. Alsevich

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: alsevichvv@mail.ru

Received: 25.08.2026 **Revised:** 14.09.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: problems of the theory of the firm, factor demand functions, supply function, comparative statics measures, analogue of the Slutsky theorem in the theory of the firm

Abstract. As is well known, the fundamental result of consumption theory is E. E. Slutsky's theorem, which establishes a relationship between the comparative statics indicators of this theory. In production theory (of the firm), the main problems are similar to those of consumption theory. Therefore, it is of interest to obtain a similar result within the theory of the firm. Similar results can be found in the academic literature across various approaches to formulating the problem of the firm. In this paper, we obtain relationships between the comparative statics indicators of the theory of the firm, which are analogous to Slutsky's theorem in consumer theory as interpreted by J. Hicks.

1. Введение

Как известно, в теории потребления одним из основных результатов является теорема Е. Е. Слуцкого, выражающая соотношения между показателями сравнительной статики, которые определяют поведение спроса на товары при изменении цен на них и бюджет (см., напр., [1–4]). Независимо от Слуцкого аналогичная теорема была доказана другими авторами, в частности, Дж. Хиксом [5], хотя в несколько иной интерпретации. Следует отметить, что именно в интерпретации Хикса в основном приводится в учебной литературе эта теорема, а фамилия Хикса при этом не всегда упоминается.

Если сравнить частные случаи задач фирмы с задачей потребления, они в чем-то схожи. Следует подчеркнуть, что сравнение необходимо проводить именно с частными случаями задач фирмы

(при фиксированном выпуске или фиксированных издержках), поскольку вывод об оптимальном поведении фирмы, полученный из общепринятой постановки задачи производства, дает уравнения, из которых для почти всех известных производственных функций решение можно получить лишь при определенном соотношении цен, при котором прибыль равна нулю, что соответствует условиям равновесия, которое в реальной экономике не осуществимо (см. пример ниже).

Следует также отметить, что задачи и теории фирмы, и теории потребления являются задачами оптимизации, для решения которых применяются однотипные математические методы.

Отсюда возникает ряд вопросов, в частности: а) как зависит цена на выпускаемую продукцию при изменении цен на производственные факторы, чтобы не изменилась, например, прибыль фирмы? б) как при этом зависят между собой показатели сравнительной статики теории фирмы? Другими словами: не справедлива ли теорема в теории производства (фирмы), аналогичная теореме Слуцкого в теории потребления?

Ответ на последний вопрос по-разному формулируется в научной литературе в зависимости от соответствующих постановок задач, причем почти нигде не упоминается, что полученные результаты похожи на уравнения Слуцкого в теории потребления. В предлагаемой работе предпринята еще одна попытка получить некоторые ответы на поставленные вопросы и дать их графическую интерпретацию в случае двух производственных факторов, в качестве которых выступают капиталовложения и трудовые затраты.

2. Задачи производства в неоклассической постановке

Сначала приведем некоторые факты из теории производства, которые потребуются для вывода основного утверждения. Как известно, основная задача фирмы в долгосрочном периоде в неоклассической теории заключается в максимизации прибыли на всем пространстве факторов:

$$\Pi(x) = p_0 f(x) - p'x \to \max, \quad x \in \mathbb{R}^m_+, \tag{1}$$

где p_0 – цена производимой фирмой продукции; x – m-вектор затрат; $p = (p_1, ..., p_m)$ – вектор цен факторов производства; $f(x)$ – производственная функция (вогнутая), ставящая в соответствие каждому набору x затрат факторов максимальный объем Q выпуска продукции одного типа и удовлетворяющая определенным свойствам, в частности, в некоторой области пространства затрат (называемой экономической) увеличение использования затрат каждого фактора не приводит к уменьшению выпуска продукции, а в части экономической области (называемой особой) увеличение использования затрат каждого фактора ведет к увеличению выпуска; $R = p_0 f(x)$ – доход; $C = p'x$ – издержки производства. Заметим, что в экономической области функция $f(x)$ вогнутая, а в особой – строго вогнутая. Следует отметить, что почти все известные производственные функции являются однородными некоторой степени $\alpha > 0$, т. е. $f(tx) = t^\alpha f(x)$, $t > 0$.

Как обычно, предполагается, что все векторы понимаются как вектор-столбцы, $'$(штрих) – знак транспонирования, соотношения $x \geqslant y$ $(x \leqslant y,\ x = y)$ для векторов одинаковой размерности означают покомпонентные соотношения, а все операции с векторами и матрицами подчиняются правилам векторно-матричного исчисления.

В силу вогнутости функции $f(x)$ задача (1) – задача выпуклого программирования. Пусть x^0 – решение задачи (1) (*если оно существует*). Как известно из любых источников по экономике, в случае гладкой функции $f(x)$, как следует из выпуклого программирования, если $x_i^0 > 0$ (производственный фактор используется при выпуске продукции), то выполняется равенство

$$p_0 \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} - p_i = 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{2}$$

Согласно определению предельного продукта $Mf_i(x^0) = \partial f(x^0)/\partial x_i$ равенства (2) означают: если i-й фактор используется в производстве, то

$$p_0 Mf_i(x^0) = p_i,$$

т. е. *стоимость предельного продукта* $p_0 M f_i(x^0)$ *равна цене* p_i *соответствующего затрачиваемого фактора*. Это утверждение в экономической литературе считается *основным выводом* в теории фирмы.

Если дополнительно потребовать строгой вогнутости функции $f(x)$, то решение $x^0 > 0$ этой задачи, *если оно существует*, единственное и для каждой пары (p_0, p) является решением векторного уравнения

$$p_0 \frac{\partial f(x)}{\partial x} - p = 0. \tag{3}$$

Однако, как указывалось выше, решение векторного уравнения (3) для основных производственных функций (ПФ) может существовать лишь при определенном соотношении цен. Покажем это для простейшей ПФ Кобба–Дугласа.

Пусть в задаче (1) $x = (K, L)$, где K – размер капиталовложений; L – трудовые затраты. Тогда ПФ Кобба–Дугласа имеет вид $f(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $A > 0$, а задачу (1) можем записать следующим образом:

$$p_0 AK^{\alpha}L^{1-\alpha} - p_K K - p_L L \to \max, \quad K \geqslant 0, \quad L \geqslant 0. \tag{4}$$

Здесь p_K, p_L – «цены» капиталовложений и трудовых затрат. Понятно, что $p_K > 0$, $p_L > 0$, $p_0 > 0$. Если $(K^0, L^0) > 0$ – решение задачи (4), то согласно (2) будем иметь

$$p_0 \alpha A \left(\frac{L^0}{K^0}\right)^{1-\alpha} = p_K, \quad p_0(1-\alpha)A\left(\frac{K^0}{L^0}\right)^{\alpha} = p_L. \tag{5}$$

С математической точки зрения система (5) не имеет решения *при произвольно заданных ценах*. В самом деле, если заданы p_0, p_K, p_L, то из (5) можем лишь указать соотношения между капиталовложениями и трудовыми затратами:

$$\frac{K^0}{L^0} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{p_L}{p_K}. \tag{6}$$

Но это не может быть решением системы (5) при произвольных ценах, а лишь при следующем их соотношении:

$$p_0 = \frac{1}{A}\left(\frac{p_K}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}, \tag{7}$$

которое получим при подстановке (6) в (5). А тогда прибыль равна нулю: $\Pi(K^0, L^0) = 0$ для любых (K^0, L^0), лежащих на прямой $(1-\alpha)p_K K - \alpha p_L L = 0$.

Но, во-первых, какая фирма будет работать без прибыли? А, во-вторых, даже нулевая прибыль обеспечивается лишь при соотношении (7) цен. А такое, как сказано выше, возможно лишь в условиях экономического равновесия, которое в реальной экономике не осуществимо.

В связи с этим задача (1) исследуется в некотором смысле в эквивалентных постановках: либо при фиксированном выпуске $Q = f(x)$ (заметим, что в дальнейшем в экономической литературе задача (1) исследуется именно в этой форме, хотя это не подчеркивается), либо при фиксированных издержках $C = p'x$.

3. Решение задачи при фиксированном выпуске

Пусть в задаче (1) фиксирован выпуск в объеме Q. Тогда задача примет вид

$$p_0 Q - p'x \to \max, \quad f(x) = Q, \quad x \geqslant 0. \tag{8}$$

Введем функцию Лагранжа $L(x, \lambda_Q) = p_0 Q - p'x + \lambda_Q(f(x) - Q)$. Будем считать, что функция $f(x)$ строго вогнутая. Тогда задача (8) – задача выпуклого программирования. Пусть $x^0 = x^0(Q)$ – решение задачи (8), λ_Q^0 – соответствующий множитель Лагранжа. Согласно теореме Куна–Таккера [6] будут выполняться равенства

$$\frac{\partial L(x^0,\lambda_Q^0)}{\partial x_i} = -p_i + \lambda_Q^0 \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,m}; \tag{9}$$

$$\frac{\partial L(x^0,\lambda_Q^0)}{\partial \lambda_Q} = f(x^0) - Q = 0. \tag{10}$$

Из равенства (9) согласно определению предельного продукта получим

$$\lambda_Q^0 M f_i(x^0) = p_i, \quad i = \overline{1,m}.$$

Поскольку $p > 0$ и функция $f(x)$ строго вогнутая, то $\lambda_Q^0 > 0$. Очевидно, что если выпуск Q не фиксирован, то к системе (9), (10) добавится равенство

$$\frac{\partial L(x^0,\lambda_Q^0)}{\partial Q} = p_0 - \lambda_Q^0 = 0,$$

откуда $\lambda_Q^0 = p_0$. В этом случае равенство (9) примет вид (2), что, как указывалось выше и показано ниже на примере с ПФ Кобба–Дугласа, некорректно для реальной экономики, в которой фирма будет работать с нулевой прибылью.

Таким образом, решив систему уравнений (9), (10) при фиксированных ценах, найдем $x^0 = x^0(Q)$.

Определив таким образом вектор затрат как функцию выпуска, получим множество $\{x^0 : x^0 = x^0(Q), Q \geqslant 0\}$, которое называют *долгосрочным путем расширения*.

Следует обратить внимание и на то, что решение не зависит от цены p_0.

Покажем справедливость сказанного выше на примере. Обратимся к задаче (4) и рассмотрим случай фиксированного выпуска

$$p_0 Q - p_K K - p_L L \to \max, \quad AK^\alpha L^{1-\alpha} = Q, \quad K \geqslant 0, \quad L \geqslant 0. \tag{11}$$

Система уравнений (9), (10) для оптимального плана (K^0, L^0) и соответствующего множителя Лагранжа λ_Q^0 указанной задачи (11) примет вид

$$\alpha\lambda_Q^0 A\left(\frac{L^0}{K^0}\right)^{1-\alpha} = p_K, \quad (1-\alpha)\lambda_Q^0 A\left(\frac{K^0}{L^0}\right)^{\alpha} = p_L, \quad A(K^0)^\alpha (L^0)^{1-\alpha} = Q.$$

Заметим, что решение последней системы уравнений зависит не только от Q, но и от цен p, что потребуется в дальнейшем. Поэтому, решая эту систему, будем иметь

$$K^0(p,Q) = \frac{1}{A}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{p_L}{p_K}\right)^{1-\alpha} Q, \quad L^0(p,Q) = \frac{1}{A}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_K}{p_L}\right)^{\alpha} Q, \tag{12}$$

$$\lambda_Q^0(p) = \frac{1}{A}\left(\frac{p_K}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}. \tag{13}$$

Подсчитаем прибыль. Согласно (12), (13) будем иметь

$$\Pi^0(Q,p_0,p) = p_0 Q - p_K K^0 - p_L L^0 = \left(p_0 - \frac{1}{A}\left(\frac{p_K}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right) Q = (p_0 - \lambda_Q^0(p))Q.$$

Отсюда видно, что при

$$p_0 > \frac{1}{A}\left(\frac{p_K}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \tag{14}$$

прибыль будет положительная. Но теперь решение задачи (11) существует всегда, зависит от цен, и при их указанном соотношении (14) производство не убыточно, а при соотношении (7), т. е. когда $\lambda_Q^0(p) = p_0$, – бесприбыльно.

4. Решение задачи при фиксированных издержках

Эта задача имеет вид

$$p_0 f(x) - C \to \max, \quad p'x = C, \quad x \geqslant 0. \tag{15}$$

Введя функцию Лагранжа $L(x,\lambda_C) = p_0 f(x) - C + \lambda_C(C - p'x)$, условия оптимальности примут вид

$$\frac{\partial L(x^0,\lambda_C^0)}{\partial x_i} = p_0 \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} - \lambda_C^0 p_i = 0, \quad i = \overline{1,m}; \tag{16}$$

$$\frac{\partial L(x^0,\lambda_C^0)}{\partial \lambda_C} = C - p'x^0 = 0. \tag{17}$$

Решая систему (16), (17), получим $x^0 = x^0(C)$. Изменяя $C \geqslant 0$, получим множество $\{x^0 : x^0 = x^0(C), C \geqslant 0\}$, которое, как и в случае с фиксированным выпуском, является долгосрочным путем расширения и при одинаковых технологиях фирмы, т. е. при одинаковых производственных функциях и одинаковых ценах, совпадает с указанным множеством для задачи (8).

Обратимся к задаче (4) и решим ее при фиксированных издержках:

$$p_0 A K^\alpha L^{1-\alpha} - C \to \max, \quad p_K K + p_L L = C, \quad K \geqslant 0, \quad L \geqslant 0. \tag{18}$$

Решение этой задачи удовлетворяет равенствам

$$\alpha p_0 A \left(\frac{L^0}{K^0}\right)^{1-\alpha} = \lambda_C^0 p_K, \quad (1-\alpha) A \left(\frac{K^0}{L^0}\right)^{\alpha} = \lambda_C^0 p_L, \quad p_K K^0 + p_L L^0 = C,$$

из которых получим

$$K^0(p,C) = \frac{\alpha}{p_K} C, \quad L^0(p,C) = \frac{1-\alpha}{p_L} C, \quad \lambda_C^0(p_0,p) = \frac{1}{p_0 A} \left(\frac{p_K}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(\frac{p_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}, \tag{19}$$

$$\Pi^0(C) = \frac{p_0 A \alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha} - p_K^\alpha p_L^{1-\alpha}}{p_K^\alpha p_L^{1-\alpha}} C.$$

Из всего полученного выше видно, что $\Pi^0(Q) > 0$, $\Pi^0(C) > 0$ при условии (14), причем во всех приводимых случаях оптимальный план лежит на луче $(1-\alpha)p_K K - \alpha p_L L = 0$, который является долгосрочным путем расширения, а в точках, соответствующих оптимальным планам, изокванта касается изокосты, под которыми понимаются соответственно множества точек пространства затрат, соответствующих либо постоянному выпуску, либо постоянным издержкам. Заметим только, что условия оптимальности, которым удовлетворяет оптимальный план в задачах (4), (11), (15), не одинаковы и при любых ценах не все подчиняются указанному в разд. 1 «основному выводу». Однако указанные соотношения можно представить в виде

$$\frac{M f_K(K^0,L^0)}{p_K} = \frac{M f_L(K^0,L^0)}{p_L} = \beta,$$

где $\beta = 1/p_0$ в задаче (4), $\beta = 1/\lambda_Q^0$ – в задаче с фиксированным выпуском и $\beta = \lambda_C^0/p_0$ – в задаче с фиксированными издержками. Последнее соотношение эквивалентно следующему равенству:

$$\frac{M f_K(K^0,L^0)}{M f_L(K^0,L^0)} = \frac{p_K}{p_L},$$

которое справедливо для всех случаев рассмотренных задач и не зависит от соотношения цен. Поэтому указанный выше «основной результат» теории фирмы правильнее сформулировать следующим образом: *при оптимальном поведении фирмы в условиях совершенной конкуренции отношение предельного продукта к цене соответствующего производственного фактора есть постоянная величина для всех затрачиваемых факторов* или, по-другому, *отношение предельных продуктов равно отношению их цен*.

Нетрудно подсчитать, что

$$\beta = \frac{1}{\lambda_Q^0} = \frac{\lambda_C^0}{p_0} = A \left(\frac{\alpha}{p_K}\right)^{\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{p_L}\right)^{1-\alpha}.$$

Понятно, что если $\lambda_Q^0 = p_0$ или $\lambda_C^0 = 1$, то получим один и тот же результат, сформулированный в разд. 1. Однако, как легко подсчитать, в этих случаях будет выполняться равенство (7), согласно которому прибыль во всех случаях равна нулю. Заметим, что решение задачи (4) весьма простое. В каждой задаче достаточно подставить данные в готовые формулы (12) или (19) при фиксированном выпуске или издержках. При этом долгосрочный путь расширения во всех случаях определяется формулой (6).

Результаты этого раздела в дальнейшем используем при графической интерпретации основного результата данного сообщения.

5. Показатели сравнительной статики теории фирмы

Рассмотрим теперь задачу (1) как семейство задач, зависящих от цен p_0, p. Решением этого семейства будет $x^0 = x^0(p_0, p)$, $p_0 \geqslant 0$, $p \geqslant 0$. Очевидно, в этом случае и оптимальный выпуск зависит от цен: $Q^0 = Q^0(p_0, p) = f(x^0(p_0, p))$.

Как известно, чувствительность оптимальных затрат и выпуска к изменениям цен определяется величинами $\partial x^0/\partial p_0, \partial x^0/\partial p, \partial Q^0/\partial p_0, \partial Q^0/\partial p$, которые называют показателями сравнительной статики теории фирмы. Будем считать, что функция $f(x)$ строго вогнута в особой области. В экономической литературе для семейства задач вида (1) подробно исследовано поведение спроса на затраты и предложения выпуска при отдельном изменении либо цены p_0, либо цен p_i, $i = 1, \ldots, m$.

К сожалению, автору данного сообщения неизвестны исследования поведения спроса и предложения при одновременном изменении цены на какой-либо фактор и на выпускаемую продукцию, чтобы при этом, например, не изменилась прибыль. Другими словами, как ведут себя спрос и предложение при так называемом компенсированном изменении цен. Обозначим эти величины $(\partial x^0/\partial p)_{\text{comp}}$, $(\partial Q^0/\partial p)_{\text{comp}}$.

6. Уравнения сравнительной статики для неоклассической задачи фирмы

Рассмотрим следующую ситуацию. Изменяется цена p_i на какой-либо фактор. Как при этом надо изменить цену p_0 на выпускаемую продукцию, чтобы не изменилась прибыль, другими словами, чтобы выполнялось тождество

$$\Pi(x^0(p_0, p), Q^0(p_0, p)) = p_0 f(x^0(p_0, p)) - p' x^0(p_0, p) \equiv \text{const}. \tag{20}$$

В этой ситуации $p_0 = p_0(p)$, причем $x^0 = x^0(p_0(p), p)$,

$$Q^0 = Q^0(p_0(p), p) \equiv f(x^0(p_0(p), p)). \tag{21}$$

Заметим, что в таком случае, например, $(\partial x_i^0/\partial p_j)_{\text{comp}}$ – это с математической точки зрения полная производная по p_j от x_i^0 , т. е. в матрично-векторной форме получим

$$\left(\frac{\partial x^0}{\partial p}\right)_{\text{comp}} = \frac{\partial x^0}{\partial p} + \frac{\partial x^0}{\partial p_0}\left(\frac{\partial p_0}{\partial p}\right)', \tag{22}$$

$$\left(\frac{\partial Q^0}{\partial p}\right)_{\text{comp}} = \frac{\partial Q^0}{\partial p} + \frac{\partial Q^0}{\partial p_0}\left(\frac{\partial p_0}{\partial p}\right)'. \tag{23}$$

Найдем величину $\partial p_0/\partial p$. Очевидно, для $x^0(p_0, p)$, где $p_0 = p_0(p)$, согласно (2) выполняется векторное тождество

$$p_0 \frac{\partial f(x^0(p_0, p))}{\partial x} \equiv p. \tag{24}$$

Дифференцируя тождество (20) по p и считая $p_0 = p_0(p)$, получим

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial p}\right)' f(x^0(p_0, p)) + p_0 \frac{\partial f'(x^0(p_0, p))}{\partial x}\left(\frac{\partial x^0}{\partial p}\right)_{\text{comp}} - (x^0)' - p'\left(\frac{\partial x^0}{\partial p}\right)_{\text{comp}} = 0. \tag{25}$$

Используя тождества (21), (24), из равенства (25) получим

$$\frac{\partial p_0}{\partial p} = \frac{x^0}{Q^0}. \tag{26}$$

Подставляя (26) в (22), (23), получим

$$\frac{\partial x^0}{\partial p} = \left(\frac{\partial x^0}{\partial p}\right)_{\text{comp}} - \frac{1}{Q^0}\frac{\partial x^0}{\partial p_0}(x^0)', \tag{27}$$

$$\frac{\partial Q^0}{\partial p} = \left(\frac{\partial Q^0}{\partial p}\right)_{\text{comp}} - \frac{1}{Q^0}\frac{\partial Q^0}{\partial p_0}(x^0)'. \tag{28}$$

Уравнения (27), (28) и представляют *аналог уравнений Слуцкого в теории производства (фирмы)* в дифференциальной форме. Конечно, здесь использован подход, аналогичный схеме Хикса, а не Слуцкого, и правильнее было бы назвать эти уравнения *аналогом уравнений Хикса*.

7. Уравнения сравнительной статики для задач с фиксированным выпуском

Рассмотрим семейство задач вида (8) с фиксированным выпуском Q, другими словами, функция предложения удовлетворяет тождеству

$$Q^0(p_0, p) = f(x^0(p_0, p)) \equiv Q. \tag{29}$$

Заметим, что и в этом случае основное уравнение будет иметь тот же вид (27), только вместо выпуска Q^0 будет фиксированный выпуск Q. В самом деле, прибыль в этом семействе задач равна

$$\Pi(p_0, p) = p_0 Q - p' x^0(p_0, p) \equiv \text{const}. \tag{30}$$

Дифференцируя по p тождества (29), (30), получим

$$\frac{\partial f'}{\partial x}\left(\frac{\partial x^0}{\partial p}\right)_{\text{comp}} = 0, \tag{31}$$

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial p}\right)' Q - (x^0)' - p'\left(\frac{\partial x^0}{\partial p}\right)_{\text{comp}} = 0. \tag{32}$$

Согласно (9) имеем $\partial f/\partial x = p/\lambda_Q^0$. Тогда равенство (31) примет вид

$$\frac{1}{\lambda_Q^0} p'\left(\frac{\partial x^0}{\partial p}\right)_{\text{comp}} = 0. \tag{33}$$

В силу (33) из равенства (32) для выражения $\partial p_0/\partial p$ получим тот же вид, что и равенство (26), в котором вместо Q^0 будет стоять фиксированный выпуск Q. Подставляя затем (26) в (22), получим уравнение (27), в котором, как сказано выше, вместо Q^0 будет постоянный выпуск Q. Заметим, что уравнение (27) в дискретной постановке можно представить в следующем виде:

$$\Delta x_{(p)} = (\Delta x_{(p)})_{\text{comp}} - \Delta x_{(p_0)}. \tag{34}$$

Здесь $\Delta x_{(p)}$ – общий эффект от изменения цен на производственные факторы; $-\Delta x_{(p_0)}$ – эффект от изменения цены на выпускаемую продукцию; $(\Delta x_{(p)})_{\text{comp}}$ – эффект замены.

Таким образом, уравнения (27), (28) (или (34)) в теории производства можно интерпретировать по аналогии с теоремой Слуцкого в теории потребления в виде следующего утверждения.

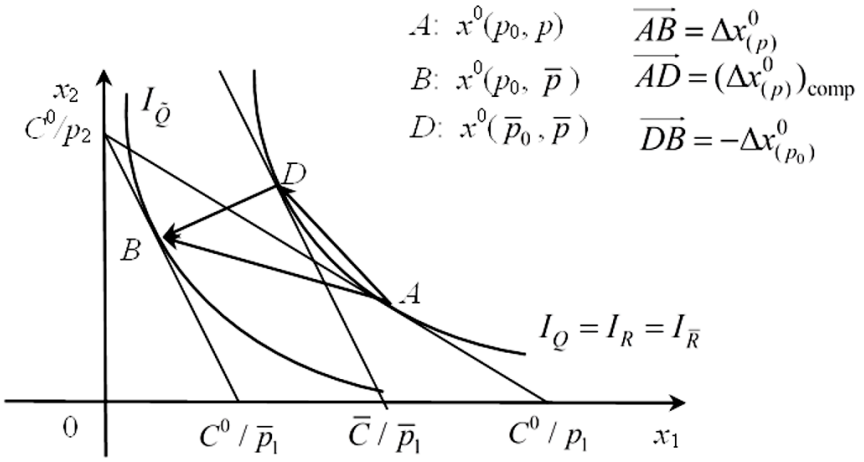
Теорема. *При указанных в разд. 2 свойствах производственной функции общий эффект от изменения цен на производственные факторы равен сумме эффекта от изменения цены на выпускаемую продукцию и эффекта замены (компенсации).*

8. Графическая интерпретация основного результата

К сожалению, для семейства задач теории фирмы в неоклассической постановке (1) основной результат в графической интерпретации представить невозможно. Как указывалось выше, в общем

случае найти конкретное решение задачи невозможно, а лишь при определенном соотношении цен, при котором нулевая прибыль. Однако при изучении поведения показателей сравнительной статики постановка семейства задач (1) несколько изменяется, т. е. добавляется тождество (21). Но и в этом случае нельзя получить конкретное решение задачи. Другими словами, решение этих задач заполняет все пространство факторов при изменении цен. Поэтому рассмотрим случай фиксированного выпуска Q.

На рисунке представлена графическая интерпретация уравнения (27) (или (34)) в случае двух факторов при достаточно малых изменениях цен.



Графическая интерпретация основного результата

Приведем пояснения. Пусть меняется цена на первый фактор: увеличивается от p_1 до $\bar{p}_1$. Поскольку выпуск фиксирован, то получаем изокванту I_Q, любая точка которой соответствует набору факторов, использование которых определяет один и тот же уровень выпуска Q.

Точка A соответствует набору факторов $x^0(p_0, p)$ – решению задачи (8) при заданных ценах p_0, p.

Заметим, что решение задачи (8) не зависит от p_0. Поэтому, на самом деле, $x^0 = x^0(p, Q)$. Это – точка касания изокванты $I_R = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : R = p_0 f(x) = p_0 Q\}$ с изокостой $I_{C^0} = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : p_1 x_1 + p_2 x_2 = C^0\}$, где $C^0 = p' x^0(p, Q)$. Как легко заметить, для изокванты I_Q справедливы соотношения: $I_Q = I_R = I_{\bar{R}}$, где I_R соответствует цене p_0, $I_{\bar{R}}$ – цене $\bar{p}_0$.

Точка B соответствует точке касания изокосты $\bar{p}_1 x_1 + p_2 x_2 = C^0$ и изокванты $I_{\widetilde{Q}} = I_{\widetilde{R}}$, где $\widetilde{R} = p_0 \widetilde{Q}$, $\widetilde{Q}$ – решение задачи (15) при $\bar{p} = (\bar{p}_1, p_2)$; $C = C^0$.

Точка D соответствует решению задачи (8) с тем же выпуском Q и новыми ценами $\bar{p}_0$, $\bar{p}$, причем цена $\bar{p}_0$ такова, что прибыль не меняется. Как указывалось выше, точка D соответствует набору факторов $x^0 = x^0(\bar{p}, Q)$, так что $f(x^0(p, Q) = f(x^0(\bar{p}, Q) = Q$. Решив задачу (8) для нового вектора цен $\bar{p}$, найдем издержки $\bar{C}^0 = \bar{p}' x^0(\bar{p}, Q)$. Новая цена $\bar{p}_0$ определяется из условия $\Pi(p_0, p, Q) \equiv \text{const}$, т. е. из равенства $p_0 Q - C^0 = \bar{p}_0 Q - \bar{C}^0$, откуда получим

$$\bar{p}_0 = p_0 + \frac{\bar{C}^0 - C^0}{Q}. \tag{35}$$

Исходя из приведенных выкладок, можно сделать следующий вывод. Поскольку при решении задачи (8), вообще говоря, решение получается как функция цен на факторы и выпуск, то, решив задачу при произвольных p и Q, получим соответствующие готовые формулы, затем подставляем в них конкретные значения p, Q и получаем конкретный результат.

Покажем сказанное на примере двухфакторной производственной функции Кобба–Дугласа, рассмотренной в разд. 1–3.

9. Пример

В задачах (4), (11), (18) имеем: $x=(K,L)$, $p=(p_K,p_L)$. При постоянном выпуске Q и заданном векторе цен p решение задачи (11) имеет вид (12), (13) (на рисунке соответствует точке A). Аналогично решение этой же задачи, например, при векторе цен $\bar{p}=(\bar{p}_K,p_L)$ представимо в виде

$$K^0(\bar{p},Q)=\frac{1}{A}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{p_L}{\bar{p}_K}\right)^{1-\alpha}Q,\quad L^0(p,Q)=\frac{1}{A}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{\bar{p}_K}{p_L}\right)^{\alpha}Q, \tag{36}$$

$$\lambda_Q^0(\bar{p})=\frac{1}{A}\left(\frac{\bar{p}_K}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}. \tag{37}$$

Нетрудно подсчитать, что оптимальные издержки согласно (12), (13) и (36), (37) будут равны соответственно

$$C^0=C^0(p)=\lambda_Q^0(p)Q=\frac{1}{A}\left(\frac{p_K}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}Q, \tag{38}$$

$$\bar{C}^0=C^0(\bar{p})=\frac{1}{A}\left(\frac{\bar{p}_K}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}. \tag{39}$$

Отсюда согласно (35) и (38), (39) получим

$$\bar{p}_0=p_0+\frac{1}{A}\left(\frac{p_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\frac{(\bar{p}_K)^{\alpha}-(p_K)^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}.$$

Рассмотрим равенство (34) и соответствующий рисунок, в которых положим $x=(K,L)$. Координаты точек A и D представлены формулами (12) и (36) соответственно. Найдем координаты точки B. Для этого необходимо решить задачу (18) с издержками $C=C^0$, полученными в (38), и вектором цен $\bar{p}=(\bar{p}_K,p_L)$. В итоге согласно (19), (38) получим

$$K^0(\bar{p},C^0)=\frac{\alpha}{\bar{p}_K}C^0=\frac{\alpha}{A\bar{p}_K}\left(\frac{p_K}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}Q,$$

$$L^0(\bar{p},C^0)=\frac{1-\alpha}{p_L}C^0=\frac{1}{A}\left(\frac{(1-\alpha)p_K}{\alpha p_L}\right)^{\alpha}Q.$$

$$\lambda_C^0(p_0,\bar{p})=\frac{1}{p_0A}\left(\frac{\bar{p}_K}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}.$$

Таким образом, рассматривая задачи фирмы с фиксированными выпуском либо издержками, на самом деле получим решение в виде функций спроса, зависящих соответственно от выпуска или издержек, причем при любом соотношении цен в отличие от общей задачи, имеющей решение лишь при определенном соотношении цен, при котором прибыль равна нулю. После решения таких задач получим готовые формулы для подстановки в них конкретных значений соответствующих параметров задачи.

Литература

1. *Слуцкий Е.* К теории сбалансированного бюджета потребителя // Экономико-математические методы. Народнохозяйственные модели. Теоретические вопросы потребления. М., 1963. (Пер. с ит.: Slutsky E. Sulla teoria del consumatore // Giornale degli Economisti. July, 1915.)

2. *Альсевич В. В.* Введение в математическую экономику. Кн. 1: Конструктивная теория. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2021. 254 с.

3. *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. М.: URSS, 2022. 300 с.

4. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-пресс, 2002. 600 с.

5. *Хикс Дж. Р.* Стоимость и капитал. М.: Прогресс, 1993. 488 с.

6. *Габасов Р., Кириллова Ф. М., Альсевич В. В., Калинин А. И., Крахотко В. В., Павленок Н. С.* Методы оптимизации. Мн.: Четыре четверти, 2011. 472 с.

References

1. Slutsky E. Towards a theory of a balanced consumer budget. *Economic and Mathematical Methods. National Economic Models. Theoretical Issues of Consumption*. Moscow, 1963. (Transl. from It.: Slutsky E. Sulla teoria del consumatore // Giornale degli Economisti. July, 1915.) (in Russian).

2. Alsevich V. V. *Introduction to Mathematical Economics. Book 1: Constructive Theory.* Moscow, Book House LIBROKOM, 2021. 254 p. (in Russian).

3. Ashmanov S. A. *Introduction to Mathematical Economics*. Moscow, URSS, 2022. 300 p. (in Russian).

4. Intriligator M. *Mathematical Methods of Optimization and Economic Theory.* Moscow, Iris-press, 2002. 600 p. (in Russian).

5. Hicks J. R. *Value and Capital.* Moscow, Progress, 1993. 488 p. (in Russian).

6. Gabasov R., Kirillova F. M., Alsevich V. V., Kalinin A. I., Krakhotko V. V., Pavlenok N. S. *Optimization Methods.* Minsk, Four quarters, 2011. 472 p. (in Russian).