Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1s. С. 15–31

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

УДК 517.542
https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1s-15–31
EDN: RYYHQG

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ 2D СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

М. П. Дымков, В. М. Дымков

Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь
e-mail: dymkov_m@bseu.by, dymkov@mail.ru

Поступила: 11.05.2026 **Исправлена:** 02.07.2026 **Принята:** 14.10.2026

Ключевые слова: многомерные mD системы, дискретные модели Россера и Форназини–Маркезини, обобщения линейных 2D систем на непрерывный случай, представление решений, операционное исчисление, линейно-квадратичные задачи оптимизации

Аннотация. В статье представлено обобщение дискретных 2D систем Россера и Форназини–Маркезини на непрерывный случай. Получены формулы для представления решений линейных непрерывных 2D систем, в том числе указана возможность расширения методов операционного исчисления путем построения соответствующих интегральных преобразований по пространственной переменной. Рассмотрены линейно-квадратичные задачи оптимизации, для которых получены соответствующие условия оптимальности и форма представления оптимального управления.

OPTIMIZATION PROBLEMS FOR 2D CONTINUOUS CONTROL SYSTEMS

M. P. Dymkov, V. M. Dymkou

Belarusian State Economic University, Minsk, Belarus
e-mail: dymkov_m@bseu.by, dymkov@mail.ru

Received: 11.05.2026 **Revised:** 02.07.2026 **Accepted:** 14.10.2026

Keywords: multidimensional mD systems, Roesser and Fornasini–Marchesini discrete state-space models, Continuous versions of 2D systems, Operational calculus, Optimization problems

Abstract. The paper presents an extension of discrete 2D systems of Roesser and Fornasini–Marchesini types for the continuous case. Formulas for solution representation of linear continuous 2D systems are obtained, including the possibility of expanding the methods of operational calculus by constructing corresponding integral transformations with respect to the spatial variable. Some linear-quadratic optimization problems are considered and the corresponding optimality conditions based on the operator setting are stated. Also, some form of the optimal control representation is presented.

1. Введение

В последние годы определенное внимание привлекают так называемые многопараметрические системы управления. В зарубежных публикациях эти объекты называют mD ($m > 1$, чаще всего $m = 2$) системы (сокращение английского термина multidimensional systems). Отличительной чертой таких систем является то, что их динамические переменные зависят более чем от одного параметра, так что распространение информации в них осуществляется по многим независимым направлениям. При этом эти направления в динамических переменных могут быть представлены в различных комбинациях, как функции дискретных, непрерывных или смешанных дискретно-непрерывных параметров. Если рассматривать, например, случай $m = 2$, то распространение динамики в двух независимых направлениях может быть функцией: а) двух дискретных переменных, б) непрерывной переменной в одном направлении и дискретной в другом, или с) двух непрерывных переменных.

Первоначальные исследования таких моделей мотивировались необходимостью математической формализации многочисленных задач, возникших в практике электрических цепей и обработке многомерных сигналов и их изображений. В первых работах для изучения электрических схем были использованы модели, которые опираются на так называемые передаточные функции, зависящие от двух и более переменных. Наиболее полно развитие теории многопараметрических систем в этот период изложено, по-видимому, в [1], а также ряде обзорных статей, частично опубликованных в Трудах общества IEEE и переведенных затем на русский язык [2]. Все возрастающий интерес к 2D системам объяснялся широким распространением во многих областях естествознания и техники цифровых методов распознавания и обработки изображений, цифровой фильтрации массивов данных и подавления шума, для сжатия и улучшения качества информации, обработки сейсмических, радарных данных и ряда других приложений [3]. Изучение нового круга задач можно осуществлять с использованием различных формальных представлений используемых объектов. В теории цифровой обработки сигналов основной упор делается на описание соответствия между входом и выходом системы посредством передаточной функции, в то время как современная теория управления опирается главным образом на представления в пространстве состояний. Это различие в определенной мере можно объяснить тем, что в каждой области необходимо найти ответы на поставленные там свои вопросы. В первом случае интересуются большей частью проблемами реализации систем с заданным внешним поведением, что и предопределяет необходимость в описании соответствия «вход–выход». Методы же теории управления, основанные на представлении объектов в пространстве состояний посредством динамических систем, позволяют проанализировать качество этих объектов, определить наиболее рациональные режимы их функционирования и синтезировать в итоге оптимальные замкнутые системы управления. При первом подходе основные методы исследования опираются на классические разделы алгебры, прежде всего на теорию полиномов от нескольких переменных. Следует отметить, что теория полиномов от двух и более переменных, а также другие алгебраические объекты, вовлеченные позже в рамках данного подхода, существенно сложнее случая одной переменной. Это обстоятельство является серьезным препятствием для алгебро-геометрических методов. Весьма объективно трудности и проблемы этого подхода изложены в обзоре [4]. По-видимому, в [5; 6] были впервые предложены различные модели дискретных 2D систем управления, определенные непосредственно в пространстве состояний. В монографии И. В. Гайшуна [7] эти модели были объединены и представлены в виде операторного уравнения, заданного в пространствах функций, определенных на целочисленной решетке. Для случая дискретных многопараметрических систем имеется довольно обширная литература. С историей становления теории таких систем и основными направлениями исследований можно познакомиться, например, в [8].

В случае многопараметрических 2D систем с независимыми параметрами, приведенными выше в пункте а), имеется много работ, основанных на линейных моделях Россера и Форназини–Маркезини. Простейший класс линейных дискретных систем Россера, используемых в приложениях и математической теории, может быть описан уравнениями

$$\begin{aligned} x(t+1,s) &= A_{11}x(t,s) + A_{12}y(t,s) + g(t,s), \\ y(t,s+1) &= A_{21}x(t,s) + A_{22}y(t,s) + f(t,s), \end{aligned} \tag{1}$$

заданными на пространстве функций, определенных на целочисленной решетке $(t,s) \in {\mathbb{Z}_+}^2$ относительно неизвестных функций $x(t,s), y(t,s)$. Отметим, что в данном введении не детализированы необходимые начальные и/или граничные условия, а также классы функций и размерность матриц, задействованных для описания представленных моделей. Это будет сделано в следующих разделах.

Важный класс многопараметрических 2D систем составляют так называемые многошаговые (в англоязычной литературе их называют «repetitive processes»), в которых распространение информации имеет специфический характер. Теория таких систем хорошо изложена в работе [9]. Эти системы нашли широкое применение при моделировании многих технических задач, например, в итеративных схемах с обучением в робототехнике, конструировании устройств конвейерного

типа и др. Некоторые результаты из последних исследований, имеющих как теоретический, так и практический интерес, приведены в [10–12]. Простой случай линейных дискретных повторяющихся (или многошаговых) процессов можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} x(t+1,s+1) &= A_{11}x(t+1,s)+A_{12}y(t,s)+g(t,s),\ t \geqslant 0,\\ y(t+1,s) &= A_{21}x(t+1,s)+A_{22}y(t,s)+f(t,s),\ s=0,1,...,h. \end{aligned}$$

Отличительную особенность такого процесса можно проиллюстрировать, рассмотрев операции обработки, в которых материал или заготовка обрабатывается последовательностью движений, называемых проходами (или шагами), некоторого инструмента. На каждом шаге выходной сигнал, полученный на предыдущем шаге, действует как новое начальное состояние и, следовательно, вносит вклад в динамику процесса. Промышленные примеры повторяющихся процессов включают металлопрокатные станки, различные конвейерные устройства и др. Также в последние годы появились приложения, в которых использование для анализа условий повторяющегося процесса имеет явные преимущества перед альтернативными вариантами. Это справедливо, например, для классов итеративных обучающихся схем и алгоритмов управления.

Непрерывные версии для моделей (1) в простейшей форме могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(t,s)}{\partial t} &= A_{11}x(t,s)+A_{12}y(t,s)+g(t,s),\\ \frac{\partial y(t,s)}{\partial s} &= A_{21}x(t,s)+A_{22}y(t,s)+f(t,s) \end{aligned} \tag{2}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(t,s)}{\partial t} &= A_1x(t,s)+g(t,s),\\ \frac{\partial x(t,s)}{\partial s} &= A_2x(t,s)+f(t,s), \end{aligned} \tag{3}$$

где $(t,s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Уравнения (3) часто называют уравнениями Пфаффа или вполне разрешимыми многомерными дифференциальными уравнениями. Первые приложения таких уравнений были связаны с дифференциальной геометрией для нахождения многообразий с заданным тангенциальным подпространством [13]. В электродинамике эта модель описывает электрические потенциалы заданного электрического поля [14]. Поверхность переключения для релейного (bang-bang) оптимального управления также может быть описана дифференциальными уравнениями Пфаффа. Существенной особенностью таких систем уравнений является их переопределенность, т. е. когда число уравнений в такой системе больше, чем неизвестных функций. Некоторые подробности (и библиографию), касающиеся теории устойчивости и управления для этих моделей, можно найти, например, в монографии И. В. Гайшуна [15]. Линейно-квадратичная задача оптимизации для уравнения (3) с помощью функций комплексной переменной экспоненциального типа конечной степени исследовалась в [16].

Другой тип линейной дискретной модели Форназини–Маркезини может быть представлен в виде

$$x(t+1,s) = \sum_{i=0}^{N} A_i x(t,s+i) + g(t,s), \tag{4}$$

где для определения вектора состояний в каждой следующей точке $(t+1,s)$ дискретной решетки необходимо собрать информацию о векторах состояний объекта на всем дискретном интервале $\{(t,s),(t,s+1),\ldots,(t,s+N)\}$ (возможен также случай, когда $N \to +\infty$).

Таким образом, имеется достаточно широкий класс 2D моделей, в которых динамика процесса зависит от различных комбинаций независимых параметров вида a)–c).

Предметом данной работы являются непрерывные 2D системы управления, обобщающие приведенные выше дискретные модели Россера и Форназини–Маркезини. В работе также рассматривается одно из возможных обобщений 2D моделей (4), когда вместо суммирования дискретного

набора состояний объекта требуется осуществлять его непрерывное суммирование на всем временном интервале в виде

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = \int_{s_0}^{s_1} K(t,\tau,x(t,\tau))d\tau + g(x(t,s),t,s), \tag{5}$$

где $s_0,\ s_1$ – некоторые заданные действительные числа. По-видимому впервые такие математические объекты рассматривались в работах Е. А. Барбашина [17], в которых исследовались свойства устойчивости для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений.

В работе исследуются задачи квадратичной оптимизации в многопараметрических системах управления, описываемые непрерывными линейными 2D уравнениями типа (2) и (5). Получены условия существования и единственности решения соответствующих линейно-квадратичных задач оптимизации и дана форма представления этих решений. Кроме того, для модели (2) с возмущениями построены специальные интегральные преобразования (прямые и обратные) для пространственных переменных. Применение этих преобразований совместно с преобразованием Лапласа по временной переменной сводит краевую задачу к системе алгебраических уравнений, которая после применения обратных интегральных преобразований может быть представлена в виде системы взаимосвязанных отдельных блоков, непосредственно связанных с начальными данными. Этот факт может быть использован для привлечения эффективных методов параллельного программирования при нахождении решений задачи.

2. Непрерывная модель Россера

Простейшая непрерывная версия 2D модели Россера (2), описывающая математическую модель отдельного сорбционного аппарата при некоторых предположениях относительно изотермических условий для неравновесной динамики сорбции [18; 19], может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial s(x,t)}{\partial t} &= p(x,t) - s(x,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} &= s(x,t) - p(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant l_1, \end{aligned} \tag{6}$$

где l_1 и t_1 есть длина и период работы устройства соответственно, скалярные функции $s(x,t)$ и $p(x,t)$ обозначают плотность поглощенного вещества, т. е. концентрацию загрязняющего вещества в материале сорбента, и концентрацию загрязняющего вещества в потоке в точке x в момент времени t соответственно (рисунок). Начальные и граничные условия имеют следующий вид:

$$p(0,t) = \psi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1,\ s(x,0) = u(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l_1, \tag{7}$$

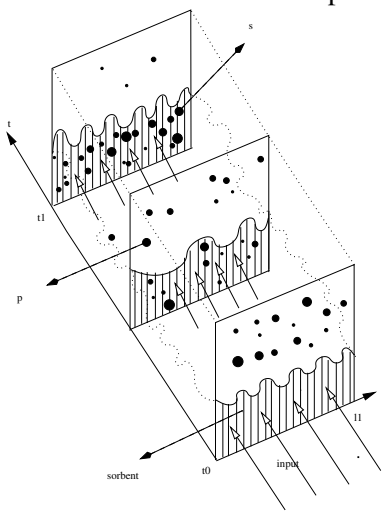
где $\psi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, – заданная непрерывная функция; $u(x) \geqslant 0$ – функция управления, которая представляет собой концентрацию сорбента, загружаемого в устройство в начальный момент времени. Следовательно, управление процессом для простейшей модели сорбционного аппарата возможно лишь в начальный момент $t = 0$. Полагаем, что управления допустимы, если $u(\cdot) \in L^2[0,l_1]$. Абсолютно непрерывные функции являются решениями уравнений (6) с начальными данными (7), если они удовлетворяют (6) и (7) почти всюду на промежутках $0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad 0 \leqslant x \leqslant l_1$. Задача оптимизации заключается в нахождении такой функции управления $u(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l_1$, которая вместе с соответствующим решением $s(x,t)$ и $p(x,t)$ уравнений (6) с граничными условиями (7) минимизирует показатель качества вида

$$J(u) = \int_0^{l_1} u^2(x)dx + \int_0^{l_1}\int_0^{t_1} p^2(x,t)dxdt + \int_0^{l_1}\int_0^{t_1} \left[\left(\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} \right)^2 \right] dx\,dt. \tag{8}$$

Таким образом, цель оптимизационной задачи (6)–(8) заключается в минимизации расхода сорбента и концентрации загрязняющих веществ в потоке. Отметим, что функция управления $u(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l_1$,

$p(x,t)$ – концентрация загрязняющих веществ в потоке

$s(x,t)$ – концентрация загрязняющего вещества в сорбенте



$u(x)$ – управление концентрацией сорбента

Схематическое устройство сорбционного аппарата

в модели сорбционного аппарата присутствует в граничных условиях, так что управление процессом очистки входящего потока осуществляется посредством граничных данных.

2.1. Существование и единственность решения

Введем следующие обозначения: $C(K)$ – пространство непрерывных функций, определенных на множестве $K \subset \mathbb{R}$; $AC(K)$ – пространство абсолютно непрерывных функций на K; $L^2(K)$ – пространство измеримых и интегрируемых с квадратом функций на K; $C^1(\Pi)$, где $\Pi := [0,l_1] \times \times [0,t_1]$ – пространство дифференцируемых функций $f(x,t)$, определенных в некоторой открытой области $\Omega \supset \Pi$ с непрерывными частными производными $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial t}$.

Лемма 2.1. *Система уравнений* (6), (7) *имеет единственное абсолютно непрерывное решение* $p(x,t)$, $s(x,t)$ *для любых начальных данных* $\psi(\cdot) \in C[0,t_1]$ *и управлении* $u(\cdot) \in L^2[0,l_1]$.

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться, что если абсолютно непрерывная функция $p(x,t)$ является решением интегрального уравнения

$$p(x,t) = e^{-(x+t)} \int_0^x \int_0^t e^{\xi+\eta} p(\xi,\eta) d\eta d\xi + e^{-(x+t)} \int_0^x e^z u(z) dz + e^{-x}\psi(t), \tag{9}$$

то $p(x,t)$ и функция

$$s(x,t) = \int_0^t e^{\eta-t} p(x,\eta) d\eta + e^{-t} u(x) \tag{10}$$

почти везде удовлетворяют (6) и (7).

Далее осталось доказать, что уравнение (9) имеет решение. Можно показать, что оператор T, заданный формулой

$$(Tf)(x,t) = \int_0^x \int_0^t e^{\xi+\eta} f(\xi,\eta) d\eta d\xi + e^{-(x+t)} \int_0^x e^z u(z) dz + e^{-x}\psi(t),$$

является сжимающим [20] в пространстве Соболева $W_2^1(\Pi)$ для любых заданных функций $\psi(\cdot) \in \in C[0,t_1]$ и $u(\cdot) \in L^2[0,l_1]$. Тогда по теореме о неподвижной точке [21] интегральное уравнение (9) имеет единственное решение $p(x,t)$, и следовательно, соответствующая функция $s(x,t)$ единственным образом определяется формулой (10). □

Теорема 2.2. *Для любого допустимого управления $u(x)$ система уравнений* (6), (7) *имеет единственное решение* $(p(x,t),s(x,t))$, $t\in[0,t_1]$, $x\in[0,l_1]$, *вида*

$$p(x,t)=e^{-x}\psi(t)+e^{-(x+t)}\int_0^x e^z u(z)dz+e^{-(x+t)}\Bigg[\int_0^x\int_0^t e^{-\xi}R(x,t,\xi,\eta)\psi(\eta)d\eta d\xi+$$
$$+\int_0^x e^z u(z)\Big[\int_z^x\int_0^t e^{-(\xi+\eta)}R(x,t,\xi,\eta)d\eta d\xi\Big]dz\Bigg],\quad s(x,t)=\int_0^t e^{\eta-t}p(x,\eta)d\eta+e^{-t}u(x), \tag{11}$$

где функция $R(x,t,\xi,\eta)$, $0\leqslant x\leqslant l_1$, $0\leqslant t\leqslant t_1$, $0\leqslant\xi\leqslant x$, $0\leqslant\eta\leqslant t$, *удовлетворяет интегральному уравнению*

$$R(x,\xi,t,\eta)=e^{\xi+\eta}+\int_\xi^x\int_\eta^t R(z,\tau,\xi,\eta)dzd\tau, \tag{12}$$

с начальными данными

$$R(x,x,t,\eta)=e^{x+\eta},\qquad R(x,\xi,t,t)=e^{\xi+t}. \tag{13}$$

Доказательство. Для того чтобы получить искомое представление для $p(x,t)$, $t\in[0,t_1]$, $x\in$ $\in[0,l_1]$, рассмотрим параметрическое интегральное уравнение вида

$$p(x,t)=\mu e^{-(x+t)}\int_0^x\int_0^t e^{\eta+\xi}p(\eta,\xi)d\eta d\xi+e^{-(x+t)}\int_0^x e^z u(z)dz+e^{-x}\psi(t), \tag{14}$$

относительно неизвестной функции $p(x,t)$, где μ является скалярным параметром. Это уравнение типа Вольтерра, правая часть которого, как видно из доказательства леммы, является сжимающим оператором [20] при любых $\psi(\cdot)\in C[0,t_1]$ и $u(\cdot)\in L^2[0,l_1]$. Следовательно, опять согласно теореме о неподвижной точке [21] уравнение (14) имеет единственное решение. Решение этого интегрального уравнения можно представить в виде формального степенного ряда относительно параметра μ

$$p(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x,t)\mu^n, \tag{15}$$

где члены степенного ряда $p_n(x,t)$ задаются формулой

$$p_0(x,t)=e^{-x}\psi(t)+e^{-(x+t)}\int_0^x e^z u(z)dz,$$

$$p_n(x,t)=e^{-(x+t)}\int_0^x\int_0^t K_n(x,t,\xi,\eta)p_0(\xi,\eta)d\xi d\eta,\ n=1,2,\ldots,$$

а итерированные ядра $K_n(x,t,\xi,\eta)$ определяются рекуррентным образом по формуле

$$K_{n+1}(x,t,\xi,\eta)=\int_\xi^x\int_\eta^t K_n(z,\tau,\xi,\eta)dzd\tau,\ K_0(x,t,\xi,\eta)=e^{\xi+\eta},\ \ n=0,1,2,\ldots. \tag{16}$$

Можно проверить, что решения интегральных уравнений (16) имеют вид

$$K_{n+1}(x,t,\xi,\eta)=e^{-(x+t)}e^{\xi+\eta}\frac{(x-\xi)^n}{n!}\frac{(t-\eta)^n}{n!},\ \ 0\leqslant x,\xi\leqslant l_1,\quad 0\leqslant t,\eta\leqslant t_1. \tag{17}$$

Из (17) на множестве Π можно получить оценки для ядер $K_{n+1}(x,t,\xi,\eta)$ и функций $p_n(x,t)$ в виде $|K_{n+1}(x,t,\xi,\eta)|\leqslant\dfrac{M^{n+1}}{n!}$ и $|p_n(x,t)|\leqslant\dfrac{L^n}{n!}$ соответственно, где M и L – некоторые константы. Так как функции $p_n(x,t)$ ограничены в области Π, то степенной ряд (15) при любом конечном значении параметра μ является абсолютно и равномерно сходящимся. Тогда при сделанных предположениях при любом конечном значении параметра μ следующий степенной ряд

$$R(x,t,\xi,\eta,\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}K_n(x,t,\xi,\eta)\mu^n \tag{18}$$

также равномерно и абсолютно сходится к резольвенте $R(x,\xi,t,\tau,\mu)$. Можно проверить, что эта резольвента удовлетворяет интегральному уравнению

$$R(x,\xi,t,\eta,\mu)=e^{\xi+\eta}+\mu\int_{\xi}^{x}\int_{\eta}^{t}R(z,\tau,\xi,\eta,\mu)dzd\tau,$$

которое эквивалентно интегро-дифференциальному уравнению вида

$$\frac{\partial R(x,t,\xi,\eta,\mu)}{\partial x}=\mu\int_{\eta}^{t}R(x,\tau,\xi,\eta,\mu)d\tau,$$

с начальными данными вида

$$R(x,x,t,\eta,\mu)=e^{x+\eta},\qquad R(x,\xi,t,t,\mu)=e^{\xi+t}.$$

Теперь записав степенной ряд (15) через итерированые ядра $K_n(x,t,\xi,\eta)$ и заменив затем полученный степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}K_n(x,t,\xi,\eta)\mu^n$ резольвентой $R(x,\xi,t,\eta,\mu)$ из (18), мы получим решение уравнения (14). Положив в полученной формуле $\mu=1$, получим требуемое решение в требуемом виде (11). □

2.2. Условия оптимальности

Теорема 2.3. *Для любых начальных данных $\psi(\cdot)\in C[0,t_1]$ задача оптимизации (6)–(8) имеет единственное оптимальное решение $u^0(\cdot)\in L^2[0,l_1]$.*

Доказательство. В пространствах функций $L^2[0,l_1])$ и $AC(\Pi)$ введем скалярное произведение формулами

$$\big(u,v\big)_2\triangleq\int_0^{l_1}u(x)v(x)dx,\ \ \forall\,u,v\in L^2[0,l_1],$$

и

$$\big(\nu,\omega\big)_1\triangleq\int_0^{t_1}\int_0^{l_1}\nu(x,t)\omega(x,t)dxdt+\int_0^{t_1}\int_0^{l_1}\left[\frac{\partial\nu(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial\nu(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\right]dxdt \tag{19}$$

соответственно. Определим оператор $\mathcal{L}:L^2[0,l_1]\to AC(\Pi)$ формулой

$$\big(\mathcal{L}u\big)(x,t)=e^{-(x+t)}\int_0^x e^zu(z)dz+\int_0^x e^zu(z)\Big[\int_z^x\int_0^t e^{-(\xi+\eta)}R(x,t,\xi,\eta)d\eta d\xi\Big]dz, \tag{20}$$

и оператор $\mathcal{F}:C[0,t_1]\to AC(\Pi)$ в виде

$$\big(\mathcal{F}\psi\big)(x,t)\ \ =\ \ e^{-x}\psi(t)+e^{-(x+t)}\int_0^x\int_0^t e^{-\xi}R(x,t,\xi,\eta)\psi(\eta)d\eta d\xi,$$

где функция $R(x,t,\xi,\eta)$ определяется интегральным уравнением (12) и начальными данными (13). Тогда решение $p\in AC(\Pi)$ первого уравнения в (6) с начальными условиями (7) можно представить в операторной форме следующим образом:

$$p=\mathcal{L}u+\mathcal{F}\psi, \tag{21}$$

и, следовательно, функционал качества (8) можно записать в виде

$$J(u) = \Big(p,p\Big)_1 + \Big(u,u\Big)_2\Big((\mathcal{L}u+\mathcal{F}\psi),(\mathcal{L}u+\mathcal{F}\psi)\Big)_1 + \Big(u,u\Big)_2 = \\ = \Big(u,(\mathcal{L}^*\mathcal{L}+\mathcal{E})u\Big)_2 + 2\Big(u,(\mathcal{L}^*\mathcal{F})\psi\Big)_2 + \Big(\psi,\mathcal{F}^*\mathcal{F}\psi\Big)_2, \tag{22}$$

где $\mathcal{E}$ обозначает тождественный оператор в $L^2[0,l_1]$, а $\mathcal{L}^* : AC(\Pi) \to L^2[0,l_1]$ есть оператор, сопряженный к оператору $\mathcal{L}$ относительно скалярного произведения, определенного выше.

Так как оператор $\mathcal{L}^*\mathcal{L}+\mathcal{E}$ обратимый [22], то можно определить управление в операторном виде формулой

$$u^0 = -(\mathcal{L}^*\mathcal{L}+\mathcal{E})^{-1}\mathcal{L}^*\mathcal{F}\varphi. \tag{23}$$

Для того чтобы убедиться, что функция u^0 является оптимальным управлением, достаточно проверить, что неравенство $J(u)-J(u^0) \geqslant 0$ выполняется для всех допустимых управлений $u \in \in L^2[0,l_1]$. Обозначим $\Gamma = (\mathcal{L}^*\mathcal{L}+\mathcal{E})$. Тогда, принимая во внимание формулы (22), (23), получаем, что приращение показателя качества можно представить в следующем виде:

$$J(u)-J(u^0) = (\Gamma(u-u^0),(u-u^0))_2,$$

и, так как оператор $\Gamma = \mathcal{L}^*\mathcal{L}+\mathcal{E} > 0$ является положительным [22], то верно неравенство

$$J(u)-J(u^0) = ((\mathcal{E}+\mathcal{L}^*\mathcal{L})(u-u^0),(u-u^0))_2 > 0$$

для любых допустимых u, $u \neq u^0$. Это означает, что функция u^0, определенная формулой (23), является единственным оптимальным управлением и $p^0 = \mathcal{L}u^0+\mathcal{F}\psi$ является оптимальной траекторией в задаче (6)–(8). □

Как известно, для линейно-квадратичных 1D задач оптимизации важным является представление оптимального управления через переменные состояния исходной системы. Подобное представление для задачи оптимизации (6)–(8) приведено в нижеследующей теореме.

Теорема 2.4. *Оптимальное управление $u^0(z)$, $0 \leqslant z \leqslant l_1$, в задаче (6)–(8) представимо в виде*

$$u^0(z) = e^z\Bigg[\int_0^{t_1} e^{-t}\frac{\partial p^0(z,t)}{\partial z}dt + \int_z^{l_1}\int_0^{t_1}\Bigg(e^{-(x+t)}p^0(x,t)+ \\ +(t-e^{-(x+t)})\frac{\partial p^0(x,t)}{\partial x}+(x-z-e^{-(x+t)})\frac{\partial p^0(x,t)}{\partial t}+ \\ +\int_z^x\int_0^t e^{-(\xi+\eta)}\Bigg(p^0(x,t)R(x,t,\xi,\eta)+\frac{\partial p^0(x,t)}{\partial x}\frac{\partial R(x,t,\xi,\eta)}{\partial x}+ \\ +\frac{\partial p^0(x,t)}{\partial t}\frac{\partial R(x,t,\xi,\eta)}{\partial t}\Bigg)d\eta d\xi\Bigg)dxdt\Bigg], \tag{24}$$

где функция $R(x,t,\xi,\eta)$ является решением интегрального уравнения

$$R(x,\xi,t,\eta) = e^{\xi+\eta} + \int_\xi^x\int_\eta^t R(z,\tau,\xi,\eta)dzd\tau$$

с начальными данными

$$R(x,x,t,\eta) = e^{x+\eta}, \quad R(x,\xi,t,t) = e^{\xi+t},$$

а $p^0(x,t)$ есть решение (6), (7), соответствующее оптимальному управлению.

Доказательство. Как следует из (23), оптимальное управление u^0 удовлетворяет операторному уравнению

$$\mathcal{L}^*\Big(\mathcal{L}u^0+\mathcal{F}\psi\Big)+\mathcal{E}u^0 = 0, \tag{25}$$

где $\mathcal{E}$ обозначает тождественный оператор в $L^2[0,l_1]$. Тогда из (21) следует, что оптимальная траектория $p^0 \in AC(\Pi)$ системы (6)–(8) может быть представлена в виде

$$p^0 = \mathcal{L}u^0 + \mathcal{F}\psi.$$

Следовательно, операторное уравнение (25) можно переписать как

$$\mathcal{L}^* p^0 + \mathcal{E}u^0 = 0.$$

Отсюда имеем

$$u^0 = -\mathcal{L}^* p^0. \tag{26}$$

Для скалярного произведения (19) и функций $u \in L_2[0,l_1],\ \varphi \in AC(\Pi)$ сопряженный оператор $\mathcal{L}^* : AC(\Pi) \to C[0,t_1]$ к оператору $\mathcal{L} : C[0,t_1] \to AC(\Pi)$ из (20) определяется как

$$(\varphi, \mathcal{L}u)_1 = (\mathcal{L}^*\varphi, u)_2.$$

Таким образом, имеем

$$(\varphi, \mathcal{L}u)_1 = \int_0^{l_1}\int_0^{t_1} \Big(\varphi(x,t), (\mathcal{L}u)(x,t)\Big)dxdt + \int_0^{l_1}\int_0^{t_1} \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial(\mathcal{L}u)(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial(\mathcal{L}u)(x,t)}{\partial t}dxdt, \tag{27}$$

где

$$\big(\mathcal{L}u\big)(x,t) = e^{-(x+t)}\int_0^x e^z u(z)dz + \int_0^x e^z u(z)\Big[\int_z^x\int_0^t e^{-(\xi+\eta)}R(x,t,\xi,\eta)d\eta d\xi\Big]dz.$$

Можно показать, что

$$\frac{\partial(\mathcal{L}u)(x,t)}{\partial x} = e^{-t}u(x) + (t - e^{-(x+t)})\int_0^x e^z u(z)dz + \int_0^x e^z u(z)\left(\int_x^x\int_0^t e^{-(\xi+\eta)}\frac{\partial R(x,t,\xi,\eta)}{\partial t}d\eta d\xi\right)dz.$$

Аналогично вычисляется производная $\dfrac{\partial(\mathcal{L}u)(x,t)}{\partial t}$. Подставив полученные производные в (27) и поменяв порядок интегрирования в полученном выражении, получим, что сопряженный оператор $\mathcal{L}^* : AC(\Pi) \to L^2[0,l_1]$ имеет вид

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}^*\varphi)(z) = e^z\Bigg[&\int_0^{t_1} e^{-t}\frac{\partial\varphi(z,t)}{\partial z}dt + \int_z^{l_1}\int_0^{t_1}\Bigg(e^{-(x+t)}\varphi(x,t) + \\ &+(t-e^{-(x+t)})\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x} + (x-z-e^{-(x+t)})\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} + \\ &+\int_z^x\int_0^t e^{-(\xi+\eta)}\Bigg(\varphi(x,t)R(x,t,\xi,\eta) + \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial R(x,t,\xi,\eta)}{\partial x} + \\ &+\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial R(x,t,\xi,\eta)}{\partial t}\Bigg)d\eta d\xi\Bigg)dxdt\Bigg].\end{aligned}$$

Применив построенный оператор $\mathcal{L}^*$ в (26), получим требуемое представление (24). □

2.3. Обобщенные непрерывные 2D модели Россера

Непрерывные версии 2D моделей Россера в форме (2) широко используются во многих прикладных исследованиях. Например, для описания основных параметров движения изотермического турбулентного газа часто используется система линейных дифференциальных уравнений [19; 23] вида

$$\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t} = -s\frac{\partial p(t,x)}{\partial x} - \rho Q(t,x) - \beta p(t,x) + v_1(t,x),$$

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = \alpha\frac{\partial Q(t,x)}{\partial x} + v_2(t,x),\ x \in [0,1],\ t \geqslant 0. \tag{28}$$

Здесь состояние системы определяется давлением газа $p(t,x)$ и объемом (массой) потока газа $Q(t,x)$ в точках сечения трубопровода, где x обозначает пространственную, а t – временную переменную; s – площадь поперечного сечения; d – диаметр трубы; c – изотермическая скорость звука; ρ – коэффициент трения; $v_1(t,x), v_2(t,x)$ – заданные функции. Начальные и граничные условия задаются в виде

$$y(0,x) = \begin{bmatrix} y_1(0,x) \\ y_2(0,x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0(x) \\ p_0(x) \end{bmatrix} \tag{29}$$

и

$$\begin{aligned} U_1(y) &= \int_0^1 y_2(t,x)(t,x)dx = \int_0^1 p(t,x)dx = \text{const}, \\ U_2(y) &= y_2(t,0) - y_2(t,1) = p(t,0) - p(t,1) = 0, \forall t \geqslant 0 \end{aligned} \tag{30}$$

соответственно. Заданные начальные условия отражают факт возникновения возмущений $q_0(x), p_0(x)$ в начальный момент $t = 0$ для некоторого предписанного режима $\overline{Q}(t,x), \overline{p}(t,x)$ движения газа в трубопроводе, а граничные условия обеспечивают сохранение начального и конечного значений давления и количества газа в трубопроводе.

В инженерной практике широко используются преобразования Лапласа для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, что позволяет эти уравнения свести к алгебраическим уравнениям. Для реализации такой идеи при решении уравнений в частных производных требуются иные интегральные преобразования, учитывающие сложный характер поведения решений на границе области пространственных переменных.

Для этих целей в работе предлагается использовать специальные интегральные преобразования (прямые и обратные) для пространственных переменных [24; 25]. Применение этих преобразований совместно с преобразованием Лапласа по временной переменной сводит краевую задачу к системе алгебраических уравнений, которая после применения обратных интегральных преобразований может быть представлена в виде системы взаимосвязанных отдельных блоков, непосредственно зависящих от начальных данных. Этот факт может быть использован для привлечения эффективных методов параллельного программирования. В частности, данный подход был успешно использован для решения некоторых актуальных задач магнитогидродинамики [26; 27].

Для получения такого представления решений уравнений будем использовать так называемые канонические системы базисных функций, которые состоят из совокупности собственных и присоединенных функций прямого и сопряженного к нему оператора, порождаемых рассматриваемой задачей. С этой целью рассматриваемую непрерывную 2D модель Россера (28) перепишем в операторной форме

$$D_t y(t,x) = Ly(t,x) + v(t,x), \tag{31}$$

где $y(t,x) = \begin{bmatrix} y_1(t,x) \\ y_2(t,x) \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} Q(t,x) \\ p(t,x) \end{bmatrix}$; $v(t,x) = \begin{bmatrix} v_1(t,x) \\ v_2(t,x) \end{bmatrix}$, а оператор $L : C^1([0,1], R^2) \to$ $\to L_2([0,1], R^2)$ задается формулой

$$L = A + BD_x = \begin{bmatrix} -\rho & -sD_x - \beta \\ \alpha D_x & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -\rho & -\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -s \\ \alpha & 0 \end{bmatrix},$$

а символы D_t и D_x обозначают частные производные по временной и пространственной переменной соответственно. Начальные и граничные условия зададим в виде

$$y_0(x) = y(0,x) = \begin{bmatrix} q_0(x) \\ p_0(x) \end{bmatrix}, U(y) \doteq \begin{bmatrix} U_1(y) \\ U_2(y) \end{bmatrix} = 0, \tag{32}$$

где $U_1(y) = y_1(t,1) - y_1(t,0)$; $U_2(y) = y_2(t,1) - y_2(t,0)$, $t \geqslant 0$. Оператор L действует в пространстве абсолютно непрерывных функций с непрерывной производной, которое плотно в пространстве $L_2([0,1],R^2)$. Можно показать, что сопряженный к L оператор L^* определяется формулой

$$L^* = A^T - B^T D_x = \begin{bmatrix} -\rho & -\alpha D_x \\ -\beta + sD_x & 0 \end{bmatrix}$$

и граничными данными вида

$$V_1(z) = 0 \Leftrightarrow z_1(t,1) - z_1(t,0) = 0,$$
$$V_2(z) = 0 \Leftrightarrow z_2(t,1) - z_2(t,0) = 0.$$

Применяя к задаче (31), (32) одностороннее преобразование Лапласа по переменной t, получим уравнение в частотной области комплексной переменной s:

$$sY(s,x) = LY(s,x) + V(s,x) + y_a(x), \quad s \in \mathbf{C},\ x \in [0,1], \tag{33}$$

с граничными условиями

$$Y(s,1) - Y(s,0) = 0,\ s \in \mathbf{C}. \tag{34}$$

Для дальнейшей трансформации граничной задачи (33), (34) к алгебраическим уравнениям относительно функций в комплексной плоскости требуется построить соответствующие преобразования. Для этого будем использовать многопараметрические интегральные преобразования (прямые и обратные) [1, p. 193–194] по пространственной переменной x, ядром которых являются канонические системы, построенные из цепочек собственных и присоединенных функций $\{e_m^{(p)}(x,\lambda), p = 1,...,P(\lambda_i), m = 0,1,...,M_p\}$ оператора L и собственных и присоединенных функций $\{\varepsilon_m^{(p)}(x,\lambda), p = 1,...,P(\lambda_i), m = 0,1,...,M_p\}$ сопряженного к нему оператора L^*. Здесь M_p и $P(\lambda_i)$ обозначают кратность и порядок рассматриваемых собственных значений и собственных функций. Можно показать, что эти две канонические системы после соответствующей нормализации являются биортогональными. В работах [25; 27; 28] приведены детали нахождения канонических систем функций в различных задачах. Предполагается, что линейный оператор L является секториальным с компактной резольвентой и непустым спектром $\sigma(\lambda)$.

Построенные канонические системы функций являются ядром требуемых интегральных преобразований пространственных переменных уравнений, с помощью которых можно преобразовать дифференциальные уравнения к их алгебраическим аналогам в комплексной области. Каноническая система $\{\varepsilon_m^{(p)}(x,\lambda), p = 1,...,P(\lambda_i), m = 0,1,...,M_p\}$ из собственных и присоединенных векторов сопряженного оператора L^* является ядром интегрального преобразования $T = \{T_m^p(\lambda_i), \lambda_i \in \sigma(L^*)\}$ по пространственной переменной x и задается следующим образом:

$$T_m^p(\lambda_i)\{Y(s,x)\} \triangleq \widetilde{Y_m^p}(s,\lambda_i) = (Y(s,x), \varepsilon_m^{(p)}(x,\lambda_i^*))_{L_2} = \int_0^1 Y(s,x)\varepsilon_m^{(p)}(x,\lambda_i^*)dx,$$

где $p = 1,...,P(\lambda_i); m = 0,1,...,M_p$. Аналог теоремы дифференцирования оригинала при преобразовании Лапласа для введенного преобразования имеет следующий вид:

$$T_m^p(\lambda_i)\{LY(s,x)\} = (L\{Y(s,x)\}, \varepsilon_m^{(p)}(x,\lambda_i^*))_{L_2} = (Y(s,x), L^*\{\varepsilon_m^{(p)}(x,\lambda_i^*)\}).$$

Отсюда следует, что для любого $m = 1,2,...,M_p$ справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$T_m^p(\lambda_i)\{LY(s,x)\} = \lambda_i \widetilde{Y_m^p}(s,\lambda_i) - \widetilde{Y_{m-1}^p}(s,\lambda_i),$$

где для краткости полагаем, что $\widetilde{Y^{p_k}}(s,\lambda_i) \equiv 0$ при $k < 0$.

Обратное преобразование T^{-1} определяется с помощью канонической системы $\{e_m^{(p)}(x,\lambda), p = 1,...,P(\lambda_i), m = 0,1,...,M_p\}$ оператора L и задается следующим образом:

$$T^{-1}\{\widetilde{Y_m^p}(s,\lambda_i)\} = Y_m^p(s,x) = \sum_{\lambda_i\in\sigma(L)}\sum_{p=1}^{P_i}\sum_{m=0}^{M_p}\widetilde{Y_m^p}(s,\lambda_i)e^p_{M_p-m}(x,\lambda_i).$$

По аналогии с [28] можно показать, что в рассматриваемой задаче собственные числа оператора L имеют следующий вид:

$$\lambda_{1,2}^{(n)} = -\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\alpha\beta\pi i + 4h\alpha\pi^2 n^2}, \tag{35}$$

где $i^2 = -1$, $a = \frac{-\beta}{2h}$ и при этом кратность найденных собственных значений равна единице $P(\lambda_i) = 1$. Соответствующие собственные функции оператора L имеют следующий вид:

$$e_{1,0}(x,\lambda_i^{(n)}) = \begin{bmatrix} f^1_{p,0}(x,\lambda_i^{(n)}) \\ f^2_{p,0}(x,\lambda_i^{(n)}) \end{bmatrix} = c_k^{(n)} e^{2\pi nix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2a\alpha\pi nj}{\lambda_k^{(n)}} \end{bmatrix}, k = 1,2,\ n = 0,\pm1,...$$

Для тривиального собственного значения $\lambda_0 = 0$ собственная функция есть

$$e_{1,0}(x,\lambda_0) = \begin{bmatrix} f^1_{p,0}(x,\lambda_0) \\ f^2_{p,0}(x,\lambda_0) \end{bmatrix} = c_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Для собственных значений вида $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \beta\sqrt{1+\frac{4\alpha}{h}}$ собственные функции имеют вид

$$e_{1,0}(x,\lambda_k) = \begin{bmatrix} f^1_{p,0}(x,\lambda_k) \\ f^2_{p,0}(x,\lambda_1) \end{bmatrix} = c_k e^{ax} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{a\alpha}{\lambda_k} \end{bmatrix},\ k = 1,2.$$

Собственные числа $\hat{\lambda}_{1,2}^{(n)},\ n = 0,\pm1,\pm2,...$ сопряженного оператора L^* выражаются формулой (35), соответствующие собственные функции задаются в виде

$$\epsilon_{1,0}(x,\hat{\lambda}_k^{(n)}) = \begin{bmatrix} z^1_{p,0}(x,\hat{\lambda}_k) \\ z^2_{p,0}(x,\hat{\lambda}_k) \end{bmatrix} = c_k^{(n)} e^{2\pi nix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2(ah+\beta)\alpha\pi ni}{\hat{\lambda}_k^{(n)}} \end{bmatrix},\ k = 1,2.$$

Для тривиального собственного значения $\hat{\lambda_0} = 0$ собственная функция $\epsilon_{1,0}(x,\hat{\lambda_0}) = e_{1,0}(x,\lambda_0)$. Для собственных значений вида $\hat{\lambda}_{1,2} = -\beta \pm \beta\sqrt{1+\frac{4\alpha}{h}}$ собственные функции имеют вид

$$\epsilon_{1,0}(x,\hat{\lambda}_k)\sigma = c_k e^{-ax} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2(ah+\beta)\alpha}{\hat{\lambda}_k} \end{bmatrix},\ k = 1,2.$$

Теорема 2.5. *Решение задачи* (28)–(30) *в частотной области имеет вид*

$$Y(s,x) = Y_0(s,x) + Y_{inp}(s,x),$$

где

$$Y_0(s,x) = \sum_{\lambda_i\in\sigma(L)}\sum_{p=1}^{P_i}\sum_{m=0}^{M_p}\left(\sum_{q=0}^{m}\frac{\widetilde{y}^p_{0,m-q}}{(s-\lambda_i)^{q+1}}\right)e^p_{M_p-m}(x,\lambda_i),$$

$$Y_{inp}(s,x) = \sum_{\lambda_i\in\sigma(L)}\sum_{p=1}^{P_i}\sum_{m=0}^{M_p}\left(\sum_{q=0}^{m}\frac{\widetilde{V}^p_{m-q}}{(s-\lambda_i)^{q+1}}\right)e^p_{M_p-m}(x,\lambda_i).$$

Доказательство. Применим к (31), (32) преобразование $T = \{T_m^p(\lambda_i), \lambda_i \in \sigma(L)\}$ по пространственной переменной x поочередно при $m = 0,1,....M_p$, учитывая начальные данные и свойство

дифференцирования, получим
при $m = 0$

$$s\widetilde{Y}_0(\lambda_i,s) = \lambda_i\widetilde{Y}_0(\lambda_i,s) + \widetilde{V}_0{}^p(\lambda_i,s) + \widetilde{y}_{00}^p(\lambda_i),$$

где

$$\widetilde{V}_0^p(\lambda_i,s) = (V(s,x), e_0^p(x,\lambda_i^*))_{L_2} = \int_0^1 V(s,x)e_0^p(x,\lambda_i^*)dx,$$

$$\widetilde{y}_{00}^p(\lambda_i) = (y_0(s,x), e_0^p(x,\lambda_i^*))_{L_2} = \int_0^1 y_0(s,x)e_0^p(x,\lambda_i^*)dx.$$

Отсюда имеем

$$\widetilde{Y}_0(\lambda_i,s) = \frac{1}{s-\lambda_i}\widetilde{V}_0^p(\lambda_i,s) + \frac{1}{s-\lambda_i}\widetilde{y}_{00}^p(\lambda_i).$$

Продолжая эту процедуру для любого m и учитывая свойство дифференцирования, получим

$$s\widetilde{Y}_m^p(\lambda_i,s) = \lambda_i\widetilde{Y}_m^p(\lambda_i,s) - \widetilde{Y}_m^p(\lambda_i,s) + \widetilde{V}_m^p(\lambda_i,s) + \widetilde{y}_{0m}^p(\lambda_i)$$

и

$$\begin{aligned}\widetilde{Y}_m^p(\lambda_i,s) &= \frac{1}{s-\lambda_i}\widetilde{V}_m^p(\lambda_i,s) + \frac{1}{s-\lambda_i}\widetilde{y}_{0m}^p(\lambda_i) + \frac{1}{s-\lambda_i}\widetilde{V}_{m-1}^p(\lambda_i,s) = \\ &= \sum_{q=0}^{m}\left(\frac{1}{(s-\lambda_i)^{q+1}}\widetilde{V}_{m-q}^p(\lambda_i,s) + \frac{1}{(s-\lambda_i)^{q+1}}\widetilde{y}_{0m-q}^p(\lambda_i)\right).\end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно теперь лишь воспользоваться обратным преобразованием T^{-1} и выделить слагаемые, связанные с начальными данными $y_0(x)$ и функциями возмущения $v(t,x)$, оказывающими воздействие на систему. □

Таким образом, в соответствии с вышеприведенной теоремой, решение $Y(s,x)$ рассматриваемой задачи в частотной области можно представить через найденные канонические системы функций. Как отмечалось выше, детали построения канонических систем $\{e_m^{(p)}(x,\lambda), p = 1,...,P(\lambda_i), m = 0,1,...,M_p\}$ и $\{\varepsilon_m^{(p)}(x,\lambda), p = 1,...,P(\lambda_i), m = 0,1,...,M_p\}$ можно найти в работах [25; 28]. Для нахождения решения $y(t,x)$ исходной задачи нужно к найденной функции $Y(s,x)$ применить обратное преобразование Лапласа.

3. Непрерывная модель Форназини–Маркезини

В этом разделе кратко обсуждается возможность обобщения дискретной модели Форназини–Маркезини (4) на непрерывный случай. В качестве такого обобщения рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = \int_{s_0}^{s_1} K(t,\tau,s)x(t,\tau)d\tau + a(t,s)x(t,s) + b(t,s)u(t,s),\ t \in [t_0,t_1],\ s \in [s_0,s_1], \tag{36}$$

с начальным условием

$$x(t_0,s) = \varphi(s),\ s \in [s_0,s_1], \tag{37}$$

где $x(t,s) \in \mathbb{R}$ есть скалярная переменная состояния; $u(t,s) \in \mathbb{R}$ – скалярная функция управления.

Как отмечалось во введении, по-видимому, впервые такие математические объекты рассматривались в работах Е. А. Барбашина [17], где исследовались свойства устойчивости для общего класса интегро-дифференциальных уравнений.

Обозначим $D \triangleq \{t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ s_0 \leqslant s \leqslant s_1\}$. Будем предполагать, что функции $a(t,s),\ b(t,s)$ непрерывны на множестве D, $\varphi(s)$ непрерывна на промежутке $s_0 \leqslant s \leqslant s_1$, $K(t,\tau,s)$ непрерывна на $[t_0,t_1] \times [t_0,t_1] \times [s_0,s_1]$.

Непрерывную функцию $u(t,s),\ (t,s)\in D$, назовем допустимым управлением, если $u(t,s)\in$ $\in U,\ \forall\,(t,s)\in D$, где U есть некоторое замкнутое и ограниченное множество из $\mathbb{R}$.

Задача оптимизации заключается в нахождении такого допустимого управления $u(t,s)$, которое вместе с соответствующим решением $x(t,s)$ уравнения (36) с начальным условием (37) минимизирует квадратичный функционал качества вида

$$J(u)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\big(Q(t,s_1)x^2(t,s_1)+F(t,s_1)u^2(t,s_1)\big)dt+\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{s_0}^{s_1}\big(Q(t,s)x^2(t,s)+F(t,s)u^2(t,s)\big)dtds, \tag{38}$$

где $Q(t,s)\geqslant 0,\ F(t,s)>0$ – заданные непрерывные на D функции.

Используя метод, предложенный в разделе 2.1 и внося необходимые модификации, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3.1. *При заданном допустимом управлении $u(t,s)$ уравнение* (36) *с начальным условием* (37) *имеет единственное абсолютно непрерывное решение вида*

$$x(t,s)=\int\limits_{t_0}^{t}\Big[e^{\int\limits_{\tau}^{t}a(\theta,s)d\theta}b(\tau,s)u(\tau,s)+\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{s_0}^{s_1}e^{\int\limits_{\tau}^{\tau_1}a(\theta,\xi)d\theta}R(t,\tau_1,s,\xi)b(\tau,\xi)u(\tau,\xi)d\xi d\tau_1\Big]d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{s_0}^{s_1}e^{\int\limits_{t_0}^{\tau}a(\theta,\xi)d\theta}R(t,\tau,s,\xi)\varphi(\xi)d\xi d\tau+e^{\int\limits_{t_0}^{t}a(\theta,s)d\theta}\varphi(s),$$

где резольвента $R(t,\tau,s,\xi)$ ядра $K(t,\tau,s)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial R(t,\tau,s,\xi)}{\partial t}=a(t,s)R(t,\tau,s,\xi)+\int\limits_{s_0}^{s_1}K(t,\tau_1,\xi)R(\tau_1,\tau,s,\xi)d\tau_1 \tag{39}$$

с начальными данными

$$R(t,\tau,s,s)=K(t,\tau,s). \tag{40}$$

По аналогии с разделами 2.2, 2.3 можно доказать существование и единственность решения оптимизационной задачи (36)–(38) и получить форму представления оптимального управления в виде

Теорема 3.2. *Оптимальное управление для задачи* (36)–(38) *при $U=\mathbb{R}$ имеет вид*

$$u^0(\tau,\xi)=-F^{-1}(\tau,\xi)\Bigg\{b(\tau,s_1)\int\limits_{\tau}^{t_1}e^{\int\limits_{\tau}^{t}a(\theta,s_1)d\theta}Q(t,s_1)x^0(t,s_1)dt+$$

$$+b(\tau,\xi)\Bigg[\int\limits_{\tau}^{t_1}\int\limits_{\tau}^{t}e^{\int\limits_{\tau}^{\tau_1}a(\theta,\xi)d\theta}R(t,\tau_1,s_1,\xi)Q(t,s_1)x^0(t,s_1)d\tau_1dt+$$

$$+\int\limits_{s_0}^{s_1}\int\limits_{\tau}^{t_1}\int\limits_{\tau}^{t}e^{\int\limits_{\tau}^{\tau_1}a(\theta,\xi)d\theta}R(t,\tau_1,s,\xi)Q(t,s)x^0(t,s)dsd\tau_1dt\Bigg]\Bigg\},$$

где функция $R(t,\tau,s,\xi)$ определяется из (39), (40), *а $x^0(t,s)$ есть решение системы* (36), (37), *соответствующее оптимальному управлению.*

Детали доказательства и другие подробности можно найти в [29].

Литература

1. *Bose N. K.* Applied Multidimensional System Theory. New York: Van Nostrand Reinhold, 1982.

2. *Морф М., Леви Б. С., Гуп С. Ю.* Новые результаты теории двумерных систем // ТИЭР. 1997. Т. 65, № 6. С. 157–176.

3. *Прэтт У.* Цифровая обработка изображений. М.: Наука, 1995. Т. 1–2. 720 с.

4. *Wood J., Oberst U., Rogers E., Owens D.* A behavioural approach to the pole structure of 1*D* and *nD* linear systems // SIAM Journal of Control and Optimization. 2000. Vol. 32, N 8. P. 627–661.

5. *Roesser R. P.* A state-space model for linear image processing // IEEE Transactions on Automatic Control. 1975. Vol. AC-20, N 1. P. 1–10.

6. *Fornasini E., Marchesini G.* Doubly indexed dynamical systems: state-space models and structural properties // Mathematical Systems Theory. 1975. Vol. 12. P. 59–72.

7. *Гайшун И. В.* Многопараметрические системы управления. Мн.: Наука и техника, 1996. 200 с.

8. *Дымков М. П.* Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления. Мн.: Изд-во БГЭУ, 2005. 363 с.

9. *Rogers E., Galkowski K., Owens D. H.* Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes. Springer Verlag LNCIS, 2007. N 349.

10. *Dymkov M., Gaishun I., Rogers E., Galkowski K., Owens D. H.* Exponential stability of discrete linear repetitive processes // Int. J. Control. 2002. Vol. 75, N 12. P. 861–869.

11. *Dymkov M., Gaishun I., Rogers E., Galkowski K., Owens D. H.* z-Transform and Volterra-Operator based Approaches to Controllability and Observability Analysis for Discrete Linear Repetitive Processes // Multidimensional Systen and Signal Processing. 2003. Vol. 14, N 4. P. 365–395.

12. *Dymkov M., Rogers E., Dymkou S., Galkowski K.* Constrained optimal control theory for differential linear repetitive processes // SIAM Journal on Control and Optimization. 2008. Vol. 47, N 1. P. 396–420.

13. *Petrovskii I. G.* Selected Works: Systems of partial differential equations and algebraic geometry. Gordon and Breach Publishers, 1996.

14. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 478 с.

15. *Гайшун И. В.* Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Мн.: Наука и техника, 1983. 200 с.

16. *Dymkou V. M., Dymkov M.* An application of the Fourier transform to optimization of continuous $2-D$ systems // Appl. Math. and Comp. Sci. 2003. Vol. 13, N 1. P. 45–54.

17. *Барбашин Е. А.* Об условиях сохранения свойств устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений // Изв. высш. учебн. заведен. Математика. 1957. Т. 1. С. 25–34.

18. *Смирнов А. Д.* Сорбционная очистка воды. Л.: Химия, 1982.

19. *Osiadacz A.* Simulation and Analysis of Gas Network. London: Gulf Publishing Company, 1987.

20. *Porter D., Stirling S. T.* Integral equations: a practical treatment: from spectral theory to applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

21. *Agarwal R. P., O'Regan D., Sahu D. R.* Fixed Point Theory for Lipschitzian-Type Mappings with Applications: Topological Fixed Point Theory and its Applications. NY: Springer, 2009.

22. *Rudin W.* Functional analysis. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973.

23. *Bondarenko L. N.* Mathematical model of cascade of sorption apparatus // Mathematical modelling. 1997. Vol. 9, N 11. P. 23–32.

24. *Dymkou V., Rabenstein R., Stefen P.* Discrete simulation of a class of distributed systems using functional analytic methods // Multidimensional Systems and Signal Processsing. 2006. Vol. 17. P. 177–209.

25. *Dymkou V.* Application of Operator Theory for the Representation of Continuous and Discrete Distributed Parameter Systems, PhD Thesis. Germany: Erlangen-Nurenberg University, 2006.

26. *Dymkou V., Pothérat A.* Spectral methods for wall bounded MHD // Journal of Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 2009. Vol. 23, N 6. P. 535–555.

27. *Pothérat A., Dymkou V.* Direct numerical simulations of low-Rm MHD turbulence based on the least dissipative modes // J. Fluid Mechanics. 2010. Vol. 655. P. 174–197.

28. *Dymkou S., Dymkou V., Dymkov M.* Multifunctional transformation method in flow modeling // Proceedings of 19th IFAC World Congress. 2014. Cape Town, South Africa, Publisher: International Federation of Automatic Control, 2014. Vol. 19, Part 1. P. 7013–7018.

29. *Dymkov M.* Linear-quadratic optimization problems for generalized 2*D* continuous control systems // Journal of Mathematical Sciences. 2024. Springer Nature Switzerland AG. Vol. 286, N 4. P. 508–525.

References

1. Bose N. K. *Applied Multidimensional System Theory*. New York, Van Nostrand Reinhold, 1982.

2. Morf M., Levy B., Gup S. U. New results in the theory of two-dimensional systems. *TIER*, 1997, vol. 65, no. 6, pp. 157–176 (in Russian).

3. Prett Y. *Digital image processing.* Vol. 1–2. Moscow, Nauka, 1995. 720 p. (in Russian).

4. Wood J., Oberst U., Rogers E., Owens D. A behavioural approach to the pole structure of 1*D* and *nD* linear systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 2000, vol. 32, no. 8, pp. 627–661.

5. Roesser R. P. A state-space model for linear image processing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1975, vol. AC-20, no. 1, pp. 1–10.

6. Fornasini E., Marchesini G. Doubly indexed dynamical systems: state-space models and structural properties. *Mathematical Systems Theory*, 1975, vol. 12, pp. 59–72.

7. Gaishun I. V. *Multidimensional control systems.* Minsk, Navuka i Tekhnika, 1996. 200 p. (in Russian).

8. Dymkov M. P. *Extremal problems fot multidimensional control systems*. Minsk, Publishing House BSEU, 2005. 363 p. (in Russian).

9. Rogers E., Galkowski K., Owens D. H. *Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes*. Springer Verlag LNCIS, 2007, no. 349.

10. Dymkov M., Gaishun I., Rogers E., Galkowski K., Owens D. H. Exponential stability of discrete linear repetitive processes. *Int. J. Control*, 2002, vol. 75, no. 12, pp. 861–869.

11. Dymkov M., Gaishun I., Rogers E., Galkowski K., Owens D. H. z-Transform and Volterra-Operator based Approaches to Controllability and Observability Analysis for Discrete Linear Repetitive Processes. *Multidimensional Systen and Signal Processing*, 2003, vol. 14, no. 4, pp. 365–395.

12. Dymkov M., Rogers E., Dymkou S., Galkowski K. Constrained optimal control theory for differential linear repetitive processes. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2008, vol. 47, no. 1, pp. 396–420.

13. Petrovskii I. G. *Selected Works: Systems of partial differential equations and algebraic geometry.* Gordon and Breach Publishers, 1996.

14. Lurie K. A. *Optimal control in problems of mathematical physics.* Moscow, Nauka, 1975. 478 p. (in Russian).

15. Gaishun I. V. *Complitely solved multidimensional differential equations*. Minsk, Navuka i Tekhnika, 1983. 200 p. (in Russian).

16. Dymkou V. M., Dymkov M. An application of the Fourier transform to optimization of continuous 2*D* systems. *Appl. Math. and Comp. Sci.*, 2003, vol. 13, no. 1, pp. 45–54.

17. Barbashin E. A. Conditions for invariance of stability of solutions of integro-differential equations . *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1957, no. 1, pp. 25–34 (in Russian).

18. Smirnov A. D. *Sorption water purification.* Leningrad, Chemistry, 1982 (in Russian).

19. Osiadacz A. *Simulation and Analysis of Gas Network.* London, Gulf Publishing Company, 1987.

20. Porter D., Stirling S. T. *Integral equations: a practical treatment: from spectral theory to applications.* Cambridge, Cambridge University Press, 1990.

21. Agarwal R. P, O'Regan D., Sahu D. R. *Fixed Point Theory for Lipschitzian-Type Mappings with Applications: Topological Fixed Point Theory and its Applications.* NY, Springer, 2009.

22. Rudin W. *Functional analysis.* New York, McGraw-Hill Book Company, 1973.

23. Bondarenko L. N. Mathematical model of cascade of sorption apparatus. *Mathematical modelling*, 1997, vol. 9, no. 11, pp. 23–32.

24. Dymkou V., Rabenstein R., Stefen P. Discrete simulation of a class of distributed systems using functional analytic methods. *Multidimensional Systems and Signal Processsing*, 2006, vol. 17, pp. 177–209.

25. Dymkou V. *Application of Operator Theory for the Representation of Continuous and Discrete Distributed Parameter Systems*, PhD Thesis. Germany, Erlangen-Nurenberg University, 2006.

26. Dymkou V., Pothérat A. Spectral methods for wall bounded MHD. *Journal of Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 2009, vol. 23, no. 6, pp. 535–555.

27. Pothérat A., Dymkou V. Direct numerical simulations of low-Rm MHD turbulence based on the least dissipative modes. *J. Fluid Mechanics*, 2010, vol. 655, pp. 174–197.

28. Dymkou S., Dymkou V., Dymkov M. Multifunctional transformation method in flow modeling. *Proceedings of 19th IFAC World Congress*, 2014. Cape Town, South Africa, Publisher, International Federation of Automatic Control, 2014, vol. 19, part 1, pp. 7013–7018.

29. Dymkov M. Linear-quadratic optimization problems for generalized 2*D* continuous control systems. *Journal of Mathematical Sciences*, 2024, Springer Nature Switzerland AG, vol. 286, no. 4, pp. 508–525.