Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1. С. 125–130

ТОПОЛОГИЯ И ГЕОМЕТРИЯ
TOPOLOGY AND GEOMETRY

УДК 515.12 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1-125-130
EDN: YLIFFX

О СОВПАДЕНИИ НЕКОТОРЫХ ИНФИМАЛЬНЫХ ТОПОЛОГИЙ ЭКСПОНЕНТЫ МЕТРИЗУЕМОГО ПРОСТРАНСТВА

А. С. Бедрицкий, В. Л. Тимохович

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: timvlaleo@gmail.com, bedrickiAS@bsu.by

Поступила: 02.10.2025 **Исправлена:** 29.05.2026 **Принята:** 29.05.2026

Ключевые слова: гиперпространство, метрика Хаусдорфа, ρ-проксимальная топология, топология Вайсмана, инфимальная топология.

Аннотация. Рассматриваются метризуемое топологическое пространство X и множество Ω_X всех метрик, порождающих топологию этого пространства. Как известно, эквивалентным метрикам ρ и σ из Ω_X на экспоненте $\exp X$ могут соответствовать различные топологии $\tau_{\widehat{\rho}}$ и $\tau_{\widehat{\sigma}}$, порожденные метриками Хаусдорфа $\widehat{\rho}$ и $\widehat{\sigma}$, различные проксимальные топологии $\tau_{\delta(\rho)}$ и $\tau_{\delta(\sigma)}$ и различные топологии Вайсмана $\tau_{W(\rho)}$ и $\tau_{W(\sigma)}$. Таким образом, на $\exp X$ возникают семейства топологий $\mathcal{T}_H = \{\tau_{\widehat{\rho}} \mid \rho \in \Omega_X\}$, $\mathcal{T}_\delta = \{\tau_{\delta(\rho)} \mid \rho \in \Omega_X\}$ и $\mathcal{T}_W = \{\tau_{W(\rho)} \mid \rho \in \Omega_X\}$. В предлагаемой статье описаны случаи совпадения инфимумов указанных семейств, т. е. топологий $\tau_{H(\inf)} = \inf \mathcal{T}_H$, $\tau_{\delta(\inf)} = \inf \mathcal{T}_\delta$ и $\tau_{W(\inf)} = \inf \mathcal{T}_W$: $\tau_{H(\inf)} = \tau_{\delta(\inf)}$ тогда и только тогда, когда пространство X обладает счетной базой, равенства $\tau_{H(\inf)} = \tau_{W(\inf)}$ и $\tau_{\delta(\inf)} = \tau_{W(\inf)}$ имеют место тогда и только тогда, когда пространство X компактно. Помимо этого установлено, что топологии $\tau_{\delta(\inf)}$ и $\tau_{W(\inf)}$ секвенциальны тогда и только тогда, когда исходное пространство X обладает счетной базой.

ON THE COINCIDENCE OF SOME INFIMAL HYPERSPACE TOPOLOGIES OF A METRIZABLE SPACE

A. S. Bedritskiy, V. L. Timokhovich

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: timvlaleo@gmail.com, bedrickiAS@bsu.by

Received: 02.10.2025 **Revised:** 29.05.2026 **Accepted:** 29.05.2026

Keywords: hyperspace, Hausdorff metric, ρ-proximal topology, Wijsman topology, infimum topology.

Abstract. A metrizable topologycal space X and the set Ω_X of all metrics generating the topology of X are considered. It is well known that, in general, equivalent metrics ρ and σ from Ω_X can determine different Hausdorff metric topologies $\tau_{\widehat{\rho}}$ and $\tau_{\widehat{\sigma}}$, different proximal topologies $\tau_{\delta(\rho)}$ and $\tau_{\delta(\sigma)}$ and different Wijsman topologies $\tau_{W(\rho)}$ and $\tau_{W(\sigma)}$ on $\exp X$. Thus the families of topologies $\mathcal{T}_H = \{\tau_{\widehat{\rho}} \mid \rho \in \Omega_X\}$, $\mathcal{T}_\delta = \{\tau_{\delta(\rho)} \mid \rho \in \Omega_X\}$ and $\mathcal{T}_W = \{\tau_{W(\rho)} \mid \rho \in \in \Omega_X\}$ appear on the $\exp X$. We've described the cases when the infimums of this families, i.e. the topologies $\tau_{H(\inf)} = \inf \mathcal{T}_H$, $\tau_{\delta(\inf)} = \inf \mathcal{T}_\delta$ and $\tau_{W(\inf)} = \inf \mathcal{T}_W$ coincide: $\tau_{H(\inf)} = = \tau_{\delta(\inf)}$ if and only if the space X is second countable, $\tau_{H(\inf)} = \tau_{W(\inf)}$ and $\tau_{\delta(\inf)} = \tau_{W(\inf)}$ if and only if the space X is compact. Besides it is found that the topologies $\tau_{\delta(\inf)}$ and $\tau_{W(\inf)}$ are sequential if and only if the space X is second countable.

1. Введение

На экспоненте $\exp X$ метризуемого топологического пространства X кроме классической топологии Вьеториса τ_V и топологии Фелла τ_F для любой допустимой (т. е. согласованной с топологией) метрики ρ на X определены метрика Хаусдорфа $\widehat{\rho}$ и соответствующая топология $\tau_{\widehat{\rho}}$, ρ-проксимальная топология $\tau_{\delta(\rho)}$ [1] и топология Вайсмана $\tau_{W(\rho)}$ [2, chapter 2]. При замене метрики ρ на эквивалентную ей метрику σ на $\exp X$ возникают новые топологии $\tau_{\widehat{\sigma}}$, $\tau_{\delta(\sigma)}$ и $\tau_{W(\sigma)}$, отличные, вообще говоря, от топологий $\tau_{\widehat{\rho}}$, $\tau_{\delta(\rho)}$ и $\tau_{W(\rho)}$ соответственно. Таким образом, на $\exp X$ возникают как самостоятельные объекты целые семейства экспоненциальных топологий $\mathcal{T}_H = \{\tau_{\widehat{\rho}} \mid \rho \in \Omega_X\}$, $\mathcal{T}_\delta = \{\tau_{\delta(\rho)} \mid \rho \in \Omega_X\}$ и $\mathcal{T}_W = \{\tau_{W(\rho)} \mid \rho \in \Omega_X\}$, где Ω_X – множество всех допустимых метрик на X. Как известно, для всякого семейства топологий $\mathcal{T}$ определены его точные нижняя и верхняя грани (т. е. инфимум и супремум) $\tau_{\inf}$ и $\tau_{\sup}$ соответственно, где $\tau_{\inf} = \bigcap \mathcal{T}$, а $\tau_{\sup}$ задается предбазой $\bigcup \mathcal{T}$. Оказалось, что супремумы семейств $\mathcal{T}_\delta$ и $\mathcal{T}_W$ совпадают с топологией Вьеториса τ_V [1], а супремум семейства $\mathcal{T}_H$ является топологией вьеторисовского типа, названной в [3] *локально конечной топологией*.

Предлагаемая статья посвящена некоторым свойствам инфимумов $\tau_{H(\inf)}$, $\tau_{\delta(\inf)}$ и $\tau_{W(\inf)}$ указанных выше семейств топологий $\mathcal{T}_H$, $\mathcal{T}_\delta$ и $\mathcal{T}_W$ соответственно. По своей тематике она примыкает к работе авторов [4], а также к публикациям [1; 5; 6].

Основными результатами работы являются, во-первых, описание случаев совпадения между топологиями $\tau_{H(\inf)}$, $\tau_{\delta(\inf)}$ и $\tau_{W(\inf)}$: равенство $\tau_{H(\inf)} = \tau_{\delta(\inf)}$ имеет место тогда и только тогда, когда пространство X обладает счетной базой (теорема 3.9), равенства $\tau_{\delta(\inf)} = \tau_{W(\inf)}$ и $\tau_{H(\inf)} = \tau_{W(\inf)}$ – тогда и только тогда, когда пространство X компактно (теорема 3.6 и следствие 3.7), и, во-вторых, установление критерия секвенциальности топологий $\tau_{\delta(\inf)}$ и $\tau_{W(\inf)}$ (топология $\tau_{H(\inf)}$ секвенциальна всегда): топологии $\tau_{\delta(\inf)}$ и $\tau_{W(\inf)}$ секвенциальны тогда и только тогда, когда пространство X со счетной базой (теоремы 3.1 и 3.2).

Приведем основные понятия и обозначения, встречающиеся в тексте.

Напомним, что пространство X называют секвенциальным, если для любого незамкнутого множества $A \subset X$ найдутся точка $x \in X \setminus A$ и последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$, сходящаяся к x.

Под экспонентой $\exp X$ пространства X будем понимать множество всех *непустых* замкнутых подмножеств пространства X.

Обозначим: $[A]_X$ ($[A]_\tau$) – замыкание A в пространстве X (относительно топологии τ соответственно);

$$B_\rho(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x,y) < \varepsilon\},\ D_\rho(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x,y) \leqslant \varepsilon\}$$

и

$$B_\rho(A,\varepsilon) = \bigcup_{a\in A} B_\rho(a,\varepsilon)$$

– открытый и замкнутый шары и ε-раздутие множества A относительно метрики ρ соответственно ($\varepsilon > 0$);

$$A^- = \{F \in \exp X \mid F \cap A \neq \varnothing\},\ A^+ = \{F \in \exp X \mid F \subset A\},$$

$$A^{++} = \{F \in \exp X \mid B_\rho(F,\varepsilon) \subset A \text{ для некоторого } \varepsilon > 0\}$$

($A^{++(\rho)}$ при необходимости уточнения),

$$\mathcal{W}_\rho(x,\varepsilon) = \{F \in \exp X \mid F \cap D_\rho(x,\varepsilon') = \varnothing \text{ для некоторого } \varepsilon' > \varepsilon\}\ (\varepsilon > 0);$$

Ω_X – множество всех допустимых (т. е. порождающих топологию пространства X) метрик на X. Через

$$\widehat{\rho}(F,P) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid B_\rho(F,\varepsilon) \supset P \text{ и } B_\rho(P,\varepsilon) \supset F\}$$

обозначим метрику Хаусдорфа на $\exp X$, соответствующую метрике $\rho \in \Omega_X$ (возможно $\widehat{\rho}(F,P) = \infty$ для некоторых $F, P \in \exp X$, что не влияет на определение топологии $\tau_{\widehat{\rho}}$).

Напомним, что топологии Вьеториса τ_V, Фелла τ_F, Вайсмана $\tau_{W(\rho)}$ и ρ-проксимальная $\tau_{\delta(\rho)}$, $\rho \in \Omega_X$, на $\exp X$ задаются предбазами, состоящими из множеств вида: U^- и U^+ для τ_V, где U – открытое в X множество; U^- и V^+ для τ_F, где U и V – открытые в X множества и $X \setminus V$ компактно; U^- и $\mathcal{W}_\rho(x,\varepsilon)$ для $\tau_{W(\rho)}$, где U – открытое в X множество, $x \in X$; U^- и U^{++} для $\tau_{\delta(\rho)}$, где U – открытое в X множество.

Пространства $(\exp X, \tau_V)$, $(\exp X, \tau_F)$ и т. п. будем кратко обозначать $\exp_V X$, $\exp_F X$ и т. п. Будем также употреблять сокращенные записи, например, $F_n \underset{\delta(\rho)}{\longrightarrow} F$ вместо $F_n \underset{\tau_{\delta(\rho)}}{\longrightarrow} F$ (сходимость относительно топологии $\tau_{\delta(\rho)}$) и т. п.

Говорят, что пространство X удовлетворяет условию (US) (Unique Sequential limit), или является US-пространством, если в X не существует последовательности, сходящейся одновременно к различным точкам (в работе авторов [4] для этого условия использовалось обозначение (Lim)).

2. Предварительные рассмотрения

Основные соотношения между топологиями τ_V, $\tau_{\widehat{\rho}}$, $\tau_{\delta(\rho)}$, $\tau_{W(\rho)}$ и τ_F хорошо известны (см., например, [1]). Приведем соответствующее

Предложение 2.1. *Для любой метрики $\rho \in \Omega_X$ справедливы соотношения $\tau_F \leqslant \tau_{W(\rho)} \leqslant \tau_{\delta(\rho)}$ (т. е. $\tau_F \subset \tau_{W(\rho)} \subset \tau_{\delta(\rho)}$), $\tau_{\delta(\rho)} \leqslant \tau_V$ и $\tau_{\delta(\rho)} \leqslant \tau_{\widehat{\rho}}$ (т. е. $\tau_{\delta(\rho)} \subset \tau_V \cap \tau_{\widehat{\rho}}$).*

Предложение 2.1 влечет

Следствие 2.2. *Справедливы соотношения $\tau_F \leqslant \tau_{W(\inf)} \leqslant \tau_{\delta(\inf)} \leqslant \tau_{H(\inf)}$ и $\tau_{\delta(\inf)} \leqslant \tau_V$.*

Для выяснения условий секвенциальности топологий $\tau_{\delta(\inf)}$ и $\tau_{W(\inf)}$ нам понадобятся следующие утверждения.

Предложение 2.3 [5]. *Инфимум любого семейства секвенциальных топологий является секвенциальной топологией.*

Теорема 2.4 [1]. *Пусть (X,ρ) – метрическое пространство. Пространство $\exp_{\delta(\rho)} X$ удовлетворяет первой аксиоме счетности тогда и только тогда, когда X обладает счетной базой.*

Теорема 2.5 [2, th. 2.1.5]. *Пространство $\exp_{W(\rho)} X$ метризуемо тогда и только тогда, когда метрическое пространство (X,ρ) обладает счетной базой.*

Замечание 2.6. *Теоремы* 2.4 *и* 2.5 *остаются справедливыми при замене метрики ρ на эквивалентную.*

Предложение 2.7 [4]. *Топология Фелла на экспоненте $\exp X$ метризуемого пространства X удовлетворяет условию (US).*

Замечание 2.8. *В* [4] *предложение* 2.7 *доказано в более общей ситуации: X хаусдорфово и удовлетворяет условию Фреше–Урысона.*

Из предложения 2.7 очевидным образом вытекает

Следствие 2.9. *Пусть τ – топология на экспоненте $\exp X$ метризуемого пространства X и $\tau \geqslant \tau_F$. Тогда τ удовлетворяет условию (US).*

Лемма 2.10. *Пусть $\mathcal{T}$ – некоторое семейство секвенциальных топологий на экспоненте $\exp X$ метризуемого пространства X, причем $\tau_F \leqslant \tau \leqslant \tau_V$ для любой топологии $\tau \in \mathcal{T}$. Тогда:* 1) *пространство X обладает счетной базой;* 2) *топология $\tau_{\inf} = \inf \mathcal{T}$ секвенциальна и удовлетворяет условию (US);* 3) *если $F_n \xrightarrow[\tau_{\inf}]{} F$, то можно выбрать топологию $\tau \in \mathcal{T}$ и подпоследовательность $(F_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ такие, что $F_{n_i} \xrightarrow[\tau]{} F$.*

Доказательство. 1) Допустим, что в X нет счетной базы. Поскольку по теореме Бинга всякое метризуемое пространство имеет σ-дискретную базу [7, с. 418], то в X найдется несчетное замкнутое дискретное множество. Введя на нем полный порядок, рассмотрим его подмножество $A = \{a_\lambda \mid \lambda < \omega_1\}$, где ω_1 – первый несчетный ординал ($a_\alpha \neq a_\beta$ при $\alpha \neq \beta$). Вместе с A определим также множества $A_\lambda = \{a_\alpha \in A \mid \alpha < \lambda\}$ и семейство $\mathcal{H} = \{A_\lambda \mid \lambda < \omega_1\}$. Фиксируем произвольную топологию $\tau \in \mathcal{T}$. Нетрудно видеть, что $A \in [\mathcal{H}]_V$ и, как следствие, соотношения $\tau \leqslant \tau_V$, $A \in [\mathcal{H}]_\tau$. Докажем далее равенство $[\mathcal{H}]_\tau = \mathcal{H} \cup \{A\}$.

Пусть $F \in [\mathcal{H}]_\tau \setminus \mathcal{H}$. Допустим, что $F \not\subset A$. Выберем точку $x \in F \setminus A$ и ее окрестность U так, чтобы $U \cap A = \varnothing$. Очевидно, что $F \in U^-$ и $U^- \cap \mathcal{H} = \varnothing$. Но поскольку множество U^- открыто в топологии τ_F и $\tau \geqslant \tau_F$, то U^- – окрестность F в $\exp_\tau X$. Получили противоречие с соотношением $F \in [\mathcal{H}]_\tau$. Таким образом, $F \subset A$.

Заметим далее, что F не ограничено в A (т. е. ни для какого ординала $\lambda < \omega_1$ множество F не содержится в A_λ). Действительно, предположив обратное, выберем минимальный ординал λ_0, при котором $A_{\lambda_0} \supset F$. Поскольку $F \neq A_{\lambda_0}$ (так как $F \notin \mathcal{H}$), то существует $a_\alpha \in A_{\lambda_0} \setminus F$. Ввиду минимальности λ_0 найдется точка $a_\beta \in F$, лежащая «правее» точки a_α (т. е. $\alpha < \beta < \lambda_0$). Для a_β подберем окрестность U, которая пересекается с A исключительно по точке a_β, т. е. $U \cap A = \{a_\beta\}$. Рассмотрим в $\exp_\tau X$ множества U^- и $(X \setminus \{a_\alpha\})^+$. Оба эти множества входят в предбазу топологии Фелла τ_F, следовательно (ввиду соотношения $\tau_F \leqslant \tau$), множество $\mathcal{O} = (X \setminus \{a_\alpha\})^+ \cap U^-$ является окрестностью F в $\exp_\tau X$. Тогда найдется элемент $A_\lambda \in \mathcal{H}$, принадлежащий $\mathcal{O}$. В таком случае, $a_\alpha \notin A_\lambda$ и $a_\beta \in A_\lambda$, но из второго включения и соотношения $\alpha < \beta$ вытекает, что $a_\alpha \in A_\lambda$. Получили противоречие.

Докажем равенство $F = A$. Пусть существует точка $a_\alpha \in A \setminus F$. Поскольку F не ограничено в A, то найдется такая точка $a_\beta \in F$, что $\alpha < \beta$. Тогда, рассмотрев окрестность $\mathcal{O} = (X \setminus \{a_\alpha\})^+ \cap U^-$ множества F в $\exp_\tau X$, где $U \cap A = \{a_\beta\}$, и проведя рассуждения, аналогичные вышеизложенным, приходим к противоречию. Равенство $F = A$, а вместе с ним и равенство $[\mathcal{H}]_\tau = \mathcal{H} \cup \{A\}$ доказаны.

Секвенциальность пространства $\exp_\tau X$ позволяет выбрать последовательность $(A_{\lambda_n})_{n=1}^\infty \subset \mathcal{H}$, сходящуюся к A относительно τ. Далее фиксируем ординал $\gamma < \omega_1$, $\gamma > \lambda_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (такой ординал существует, см., например, [7, с. 25]), и выберем открытое множество $U \ni a_\gamma$ так, чтобы $U \cap A = \{a_\gamma\}$. Множество U^- открыто в τ, как элемент предбазы топологии Фелла и $A \in U^-$, но $A_{\lambda_n} \notin U^-$ для любого $n \in \mathbb{N}$, что противоречит сходимости $A_{\lambda_n} \xrightarrow[\tau]{} A$.

2) Секвенциальность топологии $\tau_{\inf}$ и выполнение для $\tau_{\inf}$ условия (US) вытекают непосредственно из предложения 2.3, очевидного соотношения $\tau_{\inf} \geqslant \tau_F$ и следствия 2.9.

3) Пусть $F_n \xrightarrow[\tau_{\inf}]{} F$. Случай наличия стационарной подпоследовательности (т. е. все члены подпоследовательности – одна и та же точка) тривиален. В противном случае можно считать, что $F_n \neq F$ и $F_n \neq F_k$ при $n \neq k$. Рассмотрим множество $\mathcal{H} = \{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Поскольку множество $\mathcal{H}$ не замкнуто относительно топологии $\tau_{\inf}$, оно не замкнуто и относительно некоторой топологии $\tau \in \mathcal{T}$, а тогда, вследствие секвенциальности τ, существует $P \in \exp X \setminus \mathcal{H}$ и подпоследовательность $(F_{n_i})_{i=1}^\infty$ такие, что $F_{n_i} \xrightarrow[\tau]{} P$. Сходимость $F_{n_i} \xrightarrow[\tau]{} P$ влечет сходимость $F_{n_i} \xrightarrow[\tau_{\inf}]{} P$. Но в то же время $F_{n_i} \xrightarrow[\tau_{\inf}]{} F$, откуда в силу выполнения для $\tau_{\inf}$ условия (US) (см. выше), $P = F$. Итак, $F_{n_i} \xrightarrow[\tau]{} F$. $\square$

Отметим, что доказательство пункта 1) леммы 2.10 (рассмотрение отдельной топологии $\tau \in \mathcal{T}$) позволяет сформулировать частный случай леммы (семейство $\mathcal{T}$ одноэлементно) как самостоятельное

Предложение 2.11. *Если для некоторой секвенциальной топологии τ на экспоненте $\exp X$ метризуемого пространства X выполняются соотношения $\tau_F \leqslant \tau \leqslant \tau_V$, то пространство X имеет счетную базу.*

3. Основные результаты

Перейдем к основным результатам.

Теорема 3.1. *Пространство $\exp_{\delta(\inf)} X$ секвенциально тогда и только тогда, когда X обладает счетной базой.*

Доказательство. Установим необходимость наличия у пространства X счетной базы для секвенциальности пространства $\exp_{\delta(\inf)} X$. Пусть топология $\tau_{\delta(\inf)}$ секвенциальна. Тогда, поскольку $\tau_F \leqslant \tau_{\delta(\inf)} \leqslant \tau_V$ (см. следствие 2.2), то в силу предложения 2.11 получаем требуемое. Необходимость доказана.

Установим достаточность. Пусть пространство X обладает счетной базой. Тогда для любой метрики ρ пространство $\exp_{\delta(\rho)} X$ удовлетворяет первой аксиоме счетности (см. теорему 2.4), и, следовательно, секвенциально. В таком случае, топология пространства $\exp_{\delta(\inf)} X$ секвенциальна как инфимум семейства секвенциальных топологий (см. предложение 2.3). Достаточность, а вместе с ней и теорема, доказаны. $\square$

Аналогичный результат справедлив и для топологии $\tau_{W(\inf)}$, инфимума семейства топологий Вайсмана $\mathcal{T}_W = \{\tau_{W(\rho)} \mid \rho \in \Omega_X\}$.

Теорема 3.2. *Пространство $\exp_{W(\inf)} X$ секвенциально тогда и только тогда, когда X обладает счетной базой.*

Доказательство. Достаточность. Наличие у метризуемого пространства X счетной базы эквивалентно метризуемости топологии $\tau_{W(\rho)}$ для любой допустимой метрики ρ (см. теорему 2.5), откуда получаем секвенциальность топологии $\tau_{W(\inf)}$ (см. предложение 2.3).

Установим необходимость. Пусть пространство $\exp_{W(\inf)} X$ секвенциально. Поскольку $\tau_F \leqslant \leqslant \tau_{W(\inf)} \leqslant \tau_V$ (см. следствие 2.2), то, применив предложение 2.11, получаем требуемое. $\square$

Следствия 2.2, 2.9, теоремы 2.4, 2.5 и лемма 2.10 позволяют выявить некоторые «положительные» свойства сходимости в пространствах $\exp_{\delta(\inf)} X$ и $\exp_{W(\inf)} X$.

Предложение 3.3. *Пространства $\exp_{\delta(\inf)} X$ и $\exp_{W(\inf)} X$ удовлетворяют условию (US).*

Предложение 3.4. *Пусть метризуемое пространство X обладает счетной базой и последовательность $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к F в $\exp_{\delta(\inf)} X$. Тогда найдутся метрика $\rho \in \Omega_X$ и последовательность $n_1 < n_2 < \ldots$ такие, что $F_{n_i} \underset{\delta(\rho)}{\longrightarrow} F$.*

Предложение 3.5. *Пусть метризуемое пространство X обладает счетной базой и последовательность $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к F в $\exp_{W(\inf)} X$. Тогда найдутся метрика $\rho \in \Omega_X$ и последовательность $n_1 < n_2 < \ldots$ такие, что $F_{n_i} \underset{W(\rho)}{\longrightarrow} F$.*

Далее рассмотрим случаи совпадения между топологиями $\tau_{H(\inf)}$, $\tau_{\delta(\inf)}$ и $\tau_{W(\inf)}$. Топологии $\tau_{\delta(\inf)}$ и $\tau_{W(\inf)}$ совпадают при достаточно сильном ограничении на топологию исходного пространства X.

Теорема 3.6. *Топологии $\tau_{\delta(\inf)}$ и $\tau_{W(\inf)}$ на экспоненте $\exp X$ метризуемого пространства X совпадают тогда и только тогда, когда X компактно.*

Доказательство. Пусть пространство X компактно. Тогда равенство $\tau_{\delta(\inf)} = \tau_{W(\inf)}$ следует из соотношений $\tau_F \leqslant \tau_{W(\inf)} \leqslant \tau_{\delta(\inf)} \leqslant \tau_V$ и совпадения топологий τ_F и τ_V при компактности пространства X.

Предположим далее, что пространство X не компактно, и рассмотрим замкнутое дискретное множество $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\} \subset X$ ($a_n \neq a_k$ при $0 \leqslant n < k$), множества $A_n = \{a_0, a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ и множество $\mathcal{H} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \exp X$.

Замыкание $[\mathcal{H}]_F$ множества $\mathcal{H}$ в топологии Фелла τ_F совпадает с множеством $\mathcal{H} \cup \{\{a_0\}\}$ (доказательство фактически повторяет доказательство равенства $[\mathcal{H}]_\tau = \mathcal{H} \cup \{A\}$ в пункте 1) леммы 2.10). Поскольку $\tau_F \leqslant \tau_{W(\inf)} \leqslant \tau_{\delta(\inf)} \leqslant \tau_{\delta(\rho)}$, где $\rho \in \Omega_X$, то $\mathcal{H} \cup \{\{a_0\}\}$ замкнуто в топологиях $\tau_{W(\inf)}$, $\tau_{\delta(\inf)}$ и $\tau_{\delta(\rho)}$.

Выберем далее, пользуясь теоремой Хаусдорфа (см. [7, с. 439]), метрику $\sigma \in \Omega_X$, для которой $\sigma(a_n, a_k) = |n-k|$ $(0 \leqslant n < k)$, откуда получаем сходимость $A_n \underset{W(\sigma)}{\longrightarrow} \{a_0\}$, а следовательно и сходимость $A_n \underset{W(\inf)}{\longrightarrow} \{a_0\}$. Таким образом, множество $\mathcal{H}$ не замкнуто в топологии $\tau_{W(\inf)}$ и $[\mathcal{H}]_{W(\inf)} = \mathcal{H} \cup \{\{a_0\}\}$.

Рассмотрим далее окрестность U_0 точки a_0, для которой $U_0 \cap A = \{a_0\}$, и множество $\mathcal{G} = U_0^{++}$ в $\exp_{\delta(\rho)} X$, где $\rho \in \Omega_X$. Очевидно, что $\{a_0\} \in \mathcal{G}$, но $\mathcal{G} \cap \mathcal{H} = \varnothing$. Таким образом, множество $\mathcal{H}$ замкнуто во всех топологиях вида $\tau_{\delta(\rho)}$, а следовательно и в топологии $\tau_{\delta(\inf)}$, т. е. $[\mathcal{H}]_{\delta(\inf)} = \mathcal{H}$.

Итак, при нашем допущении (X не компактно) равенство $\tau_{\delta(\inf)} = \tau_{W(\inf)}$ невозможно. □

Учитывая соотношения $\tau_{W(\inf)} \leqslant \tau_{\delta(\inf)} \leqslant \tau_{H(\inf)}$ и совпадение всех трех топологий $\tau_{H(\inf)}$, $\tau_{\delta(\inf)}$ и $\tau_{W(\inf)}$ при компактности исходного пространства X, получаем очевидное

Следствие 3.7. *Топологии $\tau_{W(\inf)}$ и $\tau_{H(\inf)}$ совпадают тогда и только тогда, когда пространство X компактно.*

Перейдем к топологиям $\tau_{\delta(\inf)}$ и $\tau_{H(\inf)}$. Нам понадобится следующая лемма, доказательство которой входит в качестве фрагмента в доказательство предложения 5.10 из работы К. Костантини и Р. Витоло [5].

Лемма 3.8. *Пусть пространство X обладает счетной базой. Тогда для любой метрики $\rho \in \Omega_X$ найдется вполне ограниченная метрика $\sigma \in \Omega_X$, минорирующая метрику ρ, т. е. $\sigma(x,y) \leqslant \rho(x,y)$ для любых точек x, y из X.*

Теорема 3.9. *Топологии $\tau_{\delta(\inf)}$ и $\tau_{H(\inf)}$ совпадают тогда и только тогда, когда пространство X обладает счетной базой.*

Доказательство. Пусть $\tau_{\delta(\inf)}$ и $\tau_{H(\inf)}$ совпадают. Тогда наличие у пространства X счетной базы вытекает из секвенциальности $\tau_{H(\inf)}$ и теоремы 3.1. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть X имеет счетную базу. Поскольку пространства $\exp_{\delta(\inf)} X$ и $\exp_{H(\inf)} X$ секвенциальны и справедливо соотношение $\tau_{\delta(\inf)} \leqslant \tau_{H(\inf)}$, то для доказательства совпадения этих топологий достаточно показать сходимость в $\exp_{H(\inf)} X$ любой сходящейся в $\exp_{\delta(\inf)} X$ последовательности. Докажем от противного.

Допустим, что существует последовательность $(F_n)_{n=1}^{\infty}$, сходящаяся к множеству F в пространстве $\exp_{\delta(\inf)} X$, но не сходящаяся в $\exp_{H(\inf)} X$. Не ограничивая общности, можем считать, что некоторая окрестность $\mathcal{O} \ni F$ в $\exp_{H(\inf)} X$ не содержит ни одного члена последовательности $(F_n)_{n=1}^{\infty}$. Согласно предложению 3.4 для последовательности $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ можно выбрать метрику $\rho \in \Omega_X$ и подпоследовательность $(F_{n_i})_{i=1}^{\infty}$, сходящуюся к F относительно топологии $\tau_{\delta(\rho)}$. Для удобства переобозначим $F_{n_i} = P_i$. Итак, $P_i \underset{\delta(\rho)}{\longrightarrow} F$, но $\{P_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cap \mathcal{O} = \varnothing$. По лемме 3.8 найдется вполне ограниченная метрика $\sigma \in \Omega_X$, минорирующая метрику ρ. Последнее эквивалентно выполнению включения $B_\rho(x,\varepsilon) \subset B_\sigma(x,\varepsilon)$ для любых $\varepsilon > 0$ и точки $x \in X$, что, в свою очередь, влечет выполнение включения $B_\rho(A,\varepsilon) \subset B_\sigma(A,\varepsilon)$ уже для любых $\varepsilon > 0$ и непустого множества $A \subset X$. Ввиду сходимости $P_i \underset{\delta(\rho)}{\longrightarrow} F$, для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера N_1, $P_i \in B_\rho(F,\varepsilon)^{++(\rho)}$, и, следовательно, имеют место включения

$$P_i \subset B_\rho(F,\varepsilon) \subset B_\sigma(F,\varepsilon).$$

Поскольку метрическое пространство (X,σ) вполне ограничено, то для множества F существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть $\mathcal{N} = \{a_1,\ldots,a_m\} \subset F$. Рассмотрим далее произвольную точку $x \in F$. Выберем шар $B_\sigma\left(a_j,\frac{\varepsilon}{2}\right)$, содержащий точку x. Если $P_i \cap B_\sigma\left(a_j,\frac{\varepsilon}{2}\right) \neq \varnothing$, то, очевидно, $B_\sigma(P_i,\varepsilon) \supset B_\sigma\left(a_j,\frac{\varepsilon}{2}\right) \ni x$. Таким образом, соотношение $P_i \in \bigcap\limits_{j=1}^{m} B_\sigma\left(a_j,\frac{\varepsilon}{2}\right)^-$ влечет включение $F \subset B_\sigma(P_i,\varepsilon)$. А в силу сходимости $P_i \underset{\delta(\rho)}{\longrightarrow} F$, указанное соотношение, а следовательно и включение $F \subset B_\sigma(P_i,\varepsilon)$, выполняются, начиная с некоторого номера N_2. Но тогда имеет место сходимость $P_i \underset{\widehat{\sigma}}{\longrightarrow} F$, откуда вытекает сходимость $P_i \underset{H(\inf)}{\longrightarrow} F$, что противоречит соотношению $\{P_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cap \mathcal{O} = \varnothing$. $\square$

Литература

1. *Beer G., Lechicki A., Levi S., Naimpally S.* Distance functionals and suprema of hyperspace topologies // Annali di Matematica pura ed applicata. 1992. Vol. 162, N 4. P. 367–381.

2. *Beer G.* Topologies on closed and closed convex sets. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. 340 p.

3. *Beer G., Himmelberg C., Prikry K., van Vleck F.* The locally finite topology on 2^X // Proceedings of the American Mathematical Society. 1987. Vol. 101, N 1. P. 168–172.

4. *Бедрицкий А. С., Тимохович В. Л.* О топологиях экспоненты метризуемого топологического пространства // Труды Института математики. 2023. Т. 31, № 2. С. 15–27.

5. *Costantini C., Vitolo P.* On the infimum of the Hausdorff metric topologies // Proceedings of the London Mathematical Society. 1995. Vol. 70. P. 441–480.

6. *Costantini C., Levi S., Zieminska J.* Metrics that generate the same hyperspace convergence // Set-Valued Analysis. 1993. Vol. 1. P. 141–157.

7. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986. 744 с.

References

1. Beer G., Lechicki A., Levi S., Naimpally S. Distance functionals and suprema of hyperspace topologies. *Annali di Matematica pura ed applicata*, 1992, vol. 162, no. 4, pp. 367–381.

2. Beer G. *Topologies on closed and closed convex sets.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1993. 340 p.

3. Beer G., Himmelberg C., Prikry K., van Vleck F. The locally finite topology on 2^X. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1987, vol. 101, pp. 168–172.

4. Bedritskiy A. S., Timokhovich V. L. On the topologies of a hyperspace of a metrizable topological space. *Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2023, vol. 31, no. 2, pp. 15–27 (in Russian).

5. Costantini C., Vitolo P. On the infimum of the Hausdorff metric topologies. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1995, vol. 70, pp. 441–480.

6. Costantini C., Levi S., Zieminska J. Metrics that generate the same hyperspace convergence. *Set-Valued Analysis*, 1993, vol. 1, pp. 141–157.

7. Engelking R. *General Topology*. Moscow, Mir, 1986. 744 p. (in Russian).