



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ  
MATHEMATICAL MODELING  
NUMERICAL METHODS



УДК 539.3:620.22:519.6

<https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1-96-117>

EDN: YUKKVT

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОГО МОДУЛЯ ЮНГА  
КОМПОЗИЦИОННЫХ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

Г. Ф. Громько, А. Н. Авлас

*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*

*e-mail: grom@im.bas-net.by, aulas@im.bas-net.by*

Поступила: 21.02.2026

Исправлена: 28.05.2026

Принята: 29.05.2026

**Ключевые слова:** композиционные порошковые материалы, эффективный модуль упругости, метод контрольного объема, численное моделирование, ячейка периодичности, представительный объем, напряженно-деформированное состояние, градиентные покрытия, механика деформируемого твердого тела.

**Аннотация.** Статья посвящена разработке вычислительной методики для определения эффективного модуля Юнга композиционных порошковых материалов на основе анализа их микроструктуры. Предлагаемый подход включает построение двумерной геометрической модели микроструктуры композита в виде ячейки периодичности, формулировку математической модели, имитирующей физический эксперимент на растяжение-сжатие представительного объема, и численную реализацию методом контрольного объема на структурированных четырехугольных сетках. Учитываются свойства матрицы и включений, их объемное содержание и форма. Эффективный модуль упругости вычисляется на основе энергетического баланса: работа внешних сил приравнивается к сумме энергий деформации всех ячеек сетки. Приведены результаты вычислительных экспериментов для композитов на основе меди с включениями карбида вольфрама и тефлона, а также для градиентных покрытий на основе NiCr с добавлением TiC. Показано, что методика позволяет прогнозировать изменение модуля упругости в зависимости от объемной доли наполнителя и может быть использована при проектировании слоистых износостойких покрытий.

NUMERICAL METHOD FOR FINDING THE EFFECTIVE YOUNG'S MODULUS  
OF COMPOSITE POWDER MATERIALS

G. F. Gromyko, A. N. Aulas

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

*e-mail: grom@im.bas-net.by, aulas@im.bas-net.by*

Received: 21.02.2026

Revised: 28.05.2026

Accepted: 29.05.2026

**Keywords:** composite powder materials, effective elastic modulus, control volume method, numerical simulation, periodicity cell, representative volume element, stress-strain state, gradient coatings, solid mechanics.

**Abstract.** The article focuses on the development of a computational procedure for determining the effective Young's modulus of composite powder materials based on the analysis of their microstructure. The proposed approach includes constructing a two-dimensional geometric model of the composite microstructure as a periodicity cell, formulating a mathematical model that simulates a physical tension-compression test of a representative volume element, and performing numerical implementation using the control volume method on structured quadrilateral grids. The properties of the matrix and inclusions, their volume fractions, and morphology are taken into account. The effective elastic modulus is calculated based on an energy balance: the work done by external forces is equated to the sum of the strain energies of all grid cells. The results of computational experiments are presented for copper-matrix composites with tungsten carbide and Teflon inclusions, as well as for NiCr-based gradient coatings with TiC additives. It is shown that the procedure allows predicting the variation of the elastic modulus as a function of the filler volume fraction and can be used in the design of layered wear-resistant coatings.

## 1. Введение

В автомобильной, аэрокосмической и других областях промышленности и техники применяются композиционные материалы, представляющие собой дисперсно-наполненные композиты, состоящие из непрерывной матрицы, в которой распределена дисперсная фаза в виде твердых частиц – наполнителя (порошка, микросфер, коротких волокон и др.) с четкими границами раздела [1]. Свойства наполнителя могут значительно отличаться как друг от друга, так и от свойств матрицы. Добавление различных наполнителей изменяет теплофизические и механические свойства композита, что обуславливает большой интерес к таким материалам.

Особый интерес представляют композиционные порошковые материалы, к которым предъявляются повышенные требования по прочности и износостойкости при интенсивных динамических воздействиях в экстремальных условиях эксплуатации. Для таких материалов механические характеристики, такие как модуль Юнга ( $E$ ) и коэффициент Пуассона ( $\nu$ ), являются ключевыми параметрами при проектировании и прочностных расчетах изделий.

Разработка нового материала с заданными свойствами даже при небольшом количестве варьируемых компонент, различных вариантах их геометрических характеристик и компоновки является трудоемкой, длительной по времени и требует значительных финансовых затрат как на изготовление экспериментальных образцов, так и на их испытания.

Экспериментальные методы исследования свойств структурно сложных материалов достаточно достоверны, но требуют больших материальных и временных затрат и дают информацию лишь об интегральных (эффективных) характеристиках. На ранних этапах проектирования новых материалов для анализа вариантов компоновки и оптимизации состава композиционного материала широко используется численное моделирование [2; 3]. Теоретические методы исследования, включающие методы вычислительной механики и математики, предполагают разработку и реализацию физических и математических моделей. В зависимости от сложности модели в ней могут быть отражены те или иные структурные особенности. Если классическая механика оперирует в основном моделями однородной, изотропной, упругой среды, то для композиционных материалов характерен учет наличия различных фаз, сложной внутренней геометрии и характера межфазного взаимодействия. Актуальной задачей современного материаловедения и механики деформируемого твердого тела является установление связи между внутренней микроструктурой композиционных материалов и их эффективными макроскопическими упругими характеристиками.

В настоящее время сочетание математического моделирования с компьютерным конструированием материала представляет собой наиболее перспективный подход к разработке новых материалов [4]. Это расширяет инструментарий разработчиков и позволяет целенаправленно прогнозировать физико-механические свойства композиционных порошковых материалов на основе информации о фазовом составе композиции, ее внутренней геометрии и условиях межфазного взаимодействия.

В данной работе рассматривается двумерная (2D) постановка задачи, что является обоснованным первым этапом разработки и верификации численных алгоритмов перед переходом к более ресурсоемким трехмерным моделям. Предлагаемый подход включает следующие этапы: построение двумерной геометрической модели микроструктуры порошкового материала и выделение расчетной области (ячейки периодичности с учетом внутренней геометрии включений); формулировка математической модели, имитирующей физический эксперимент по определению модуля упругости; разработка численного метода для вычисления эффективного модуля упругости.

Целью работы является разработка вычислительной методики, позволяющей с приемлемой точностью оценивать макроскопические механические упругие свойства по заданной микроструктуре композита, свойствам матрицы и компонент включений.

## 2. Основные допущения для численного моделирования

В настоящей работе приняты следующие основные допущения.

**Двумерность задачи.** Рассматривается двумерный (2D) случай. Это является оправданным первым шагом для разработки и верификации численных алгоритмов перед переходом к более ресурсоемким трехмерным моделям. Двумерное моделирование позволяет эффективно исследовать качественное влияние ключевых параметров микроструктуры на свойства композита при меньших вычислительных затратах.

**Тип напряженно-деформированного состояния.** Принимается гипотеза плоской деформации: перемещения вдоль третьего направления (перпендикулярного плоскости  $xz$ ) отсутствуют, а соответствующие деформации равны нулю.

**Условия на границах контакта.** На контактных границах между матрицей и включениями выполняются условия идеальной адгезии: отсутствует взаимное проскальзывание и отрыв [5].

**Механические свойства компонентов.** Материалы матрицы и включений могут быть как изотропными, так и ортотропными. В случае ортотропного материала предполагается, что его главные оси упругой симметрии совпадают с осями декартовой системы координат  $(x, z)$ . Изотропный материал рассматривается как частный случай ортотропного при равенстве упругих характеристик во взаимно перпендикулярных направлениях.

**Характер деформирования.** Деформации предполагаются малыми, что позволяет использовать линейный закон Гука. Материал работает в пределах упругости, пластические деформации не рассматриваются.

Указанные допущения лежат в основе построения математической модели и численного метода, излагаемых в последующих разделах.

### 3. Схематизация структуры композиционного материала

В соответствии с допущениями раздела 2 о равномерном распределении включений и регулярности структуры, в качестве представительного объема принимается ячейка периодичности. Для материалов с хаотическим расположением включений потребовалось бы осреднение по множеству возможных конфигураций, что выходит за рамки данной работы.

Процедура построения расчетной области включает следующие этапы.

**1. Выбор ячейки периодичности.** Из металлографического изображения реальной структуры (двумерный случай) выделяется область, которая принимается за ячейку периодичности. Эта область должна отражать характерные особенности композита: форму, размер и взаимное расположение включений.

**2. Дискретизация области.** На выделенную область накладывается расчетная сетка. Шаг сетки выбирается достаточно мелким, чтобы границы включений располагались на ребрах ячеек. Для адекватного описания геометрии минимальный размер ячейки должен быть не более наименьшего характерного размера включения [6].

**3. Формирование цифрового аналога.** Полученная дискретная область сохраняется в виде упорядоченного массива данных (цифрового изображения), где каждой ячейке приписан целочисленный идентификатор материала. Этот массив в дальнейшем используется как расчетная область для численного моделирования.

Построенная таким образом ячейка периодичности регулярно повторяется в композиционном материале. Ее размеры превышают характерные размеры включений, но значительно меньше характерных размеров макрообразца. Эта область принимается в качестве расчетной области и в последующих разделах для нее формулируется математическая модель определения напряженно-деформированного состояния.

### 4. Подход к нахождению эффективного модуля упругости

Технические модули упругости материала – модуль упругости I рода (модуль Юнга) и модуль упругости II рода (модуль сдвига) – характеризуют упругие свойства и определяют способность материала сопротивляться продольным и сдвиговым деформациям соответственно [7]. Коэффициент Пуассона (коэффициент поперечной деформации) устанавливает связь между продольной и

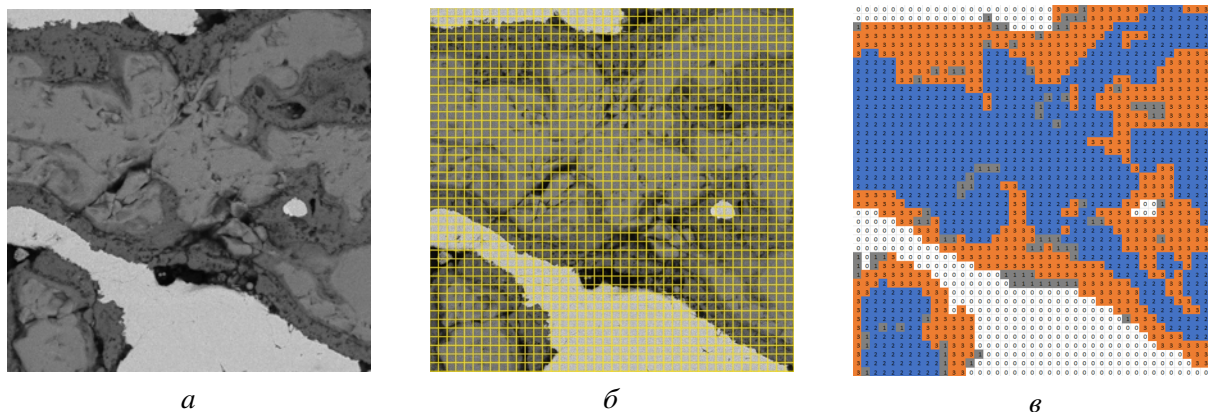


Рис. 1. Основные этапы построения расчетной области: *a* – исходное металлографическое изображение; *б* – наложение расчетной сетки с шагом, обеспечивающим совпадение границ включений с ребрами ячеек; *в* – результирующая дискретная модель, где каждая ячейка отнесена к соответствующему материалу

поперечной деформациями. Механические характеристики многих материалов определены экспериментально и приведены в соответствующих справочниках [8]. Наиболее полно механические свойства твердых тел описываются диаграммами деформирования. По результатам серии экспериментов на растяжение строят диаграммы деформации (напряжения–деформации). Такие диаграммы представляют собой зависимость между механическими напряжениями, возникающими в материале при внешнем нагружении, и соответствующими деформациями.

Испытание на растяжение–сжатие является наиболее распространенным методом лабораторных исследований и контроля механических свойств материалов [9]. В испытательных машинах усилие создается вручную, или каким-либо механическим приводом, или гидравлическим приводом, что присуще машинам с большей мощностью.

Для нахождения модуля упругости композиционного материала будем использовать подход, имитирующий физический эксперимент на растяжение–сжатие представительного объема материала. По аналогии с разработкой методики по нахождению эффективного коэффициента теплопроводности композиционного материала [10; 11] строится математическая модель, которая имитирует процесс растяжения (сжатия) образца (представительного объема).

Будем использовать предположение, что на макроуровне композиционные материалы в силу осреднения параметров можно рассматривать как однородные и ортотропные.

В работе рассматривается подход, позволяющий на основе результатов численного моделирования процесса растяжения (сжатия) представительного объема материала, в котором известны форма, процентное содержание и свойства компонент включений, использования осреднения полученных результатов и с помощью энергетического баланса, определить упругие эффективные свойства композита как однородного материала.

Составим математическую модель процесса растяжения представительного объема.

## 5. Математическая модель процесса растяжения представительного объема

В соответствии с допущениями раздела 2 и схематизацией структуры раздела 3, область расчета  $D$  представляет собой прямоугольную ячейку периодичности, в которой каждой ячейке сетки приписан определенный материал (матрица или включение) с известными упругими свойствами.

Рассматривается стационарная задача линейной теории упругости в плоской постановке (плоская деформация). Область  $D$  подвергается растяжению вдоль оси  $z$  путем задания постоянных перемещений на верхней и нижней границах.

В декартовой системе координат  $(x, z)$  система уравнений равновесия имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (x, z) \in D, \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений.

Материалы матрицы и включений могут быть изотропными или ортотропными. Для ортотропного материала (с учетом совпадения главных осей с осями координат) обобщенный закон Гука записывается в виде

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{E_1}{A} (\varepsilon_{11} + \nu_{12} \varepsilon_{22}), \\ \sigma_{22} = \frac{E_2}{A} (\nu_{21} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = 2G_{12} \varepsilon_{12}, \end{cases} \quad A = 1 - \nu_{12} \nu_{21}. \quad (2)$$

Компоненты тензора деформаций выражаются через перемещения точек расчетной области  $u(x, z)$  и  $w(x, z)$ :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Коэффициенты  $E_1(x, z)$ ,  $E_2(x, z)$ ,  $G_{12}(x, z)$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}(x, z)$  являются кусочно-постоянными функциями, принимающими значения, соответствующие материалу каждой ячейки сетки. Для изотропного материала полагаем  $E_1 = E_2 = E$ ,  $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$ ,  $G_{12} = E/(2(1 + \nu))$ .

Сформулируем граничные условия, имитирующие эксперимент на растяжение образца вдоль оси  $z$  (рис. 2). Прямоугольная область  $D = [x_0, x_N] \times [z_0, z_M]$  растягивается за счет задания постоянных перемещений на верхней и нижней границах. На боковых границах задаются условия отсутствия касательных напряжений.

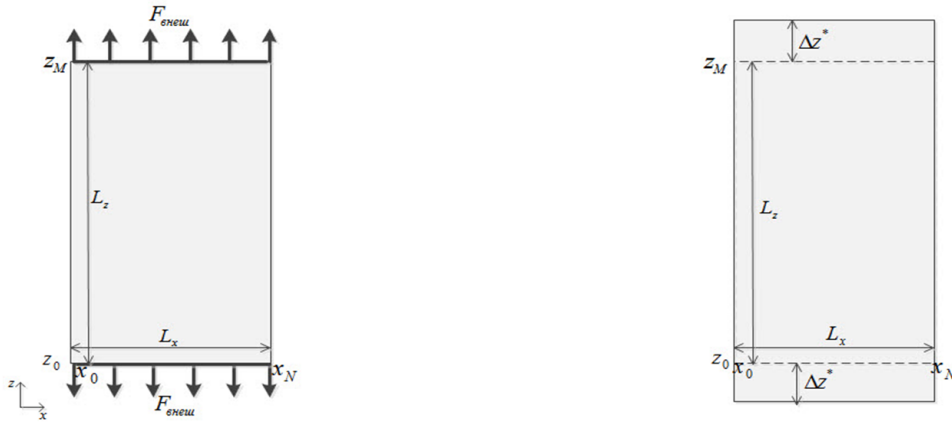


Рис. 2. Схематичное изображение:  $a$  – физическая модель растяжения;  $b$  – расчетная область с граничными условиями

Граничные условия запишем следующим образом:  
на верхней границе ( $z = z_M$ ):

$$w \Big|_{z=z_M} = \Delta z^*, \quad \sigma_{12} \Big|_{z=z_M} = 0, \quad \sigma_{21} \Big|_{z=z_M} = 0; \quad (3)$$

на нижней границе ( $z = z_0$ ):

$$w \Big|_{z=z_0} = -\Delta z^*, \quad \sigma_{12} \Big|_{z=z_0} = 0, \quad \sigma_{21} \Big|_{z=z_0} = 0; \quad (4)$$

на левой боковой границе ( $x = x_0$ ):

$$\sigma_{21} \Big|_{x=x_0} = 0, \quad \sigma_{12} \Big|_{x=x_0} = 0; \quad (5)$$

на правой боковой границе ( $x = x_N$ ):

$$\sigma_{21} \Big|_{x=x_N} = 0, \quad \sigma_{12} \Big|_{x=x_N} = 0. \quad (6)$$

Здесь  $\Delta z^*$  – заданная величина перемещения. Условия на боковых границах обеспечивают отсутствие сдвиговых усилий и фиксируют горизонтальное положение образца.

На внутренних контактных границах между различными материалами автоматически выполняются условия идеальной адгезии (непрерывность перемещений и напряжений).

## 6. Численный метод

Построение сеточного метода проведем с помощью метода контрольного объема. Среди множества вычислительных подходов метод контрольных объемов (МКО) демонстрирует высокую эффективность для решения задач механики сплошных сред в сложных областях благодаря своей консервативности и гибкости при дискретизации расчетных областей с нерегулярной геометрией. В отличие от метода конечных элементов, МКО обеспечивает строгое соблюдение интегральных балансов законов сохранения, что ведет к прямой физической интерпретации результирующих разностных уравнений и особенно важно для гетерогенных сред с резкими скачками упругих свойств.

Реализация МКО для численного решения систем дифференциальных уравнений состоит из следующих этапов: разбиение области расчета сеткой на непересекающиеся элементарные ячейки; выбор точек (узлов), в которых ищется решение; построение для каждого узла контрольного объема (ассоциированной с узлом окрестности расчетной области); аппроксимация основного уравнения в выбранных контрольных объемах. В соответствии с принятым в разделе 2 условием идеального контакта на границах раздела матрица–включение, сетка строится так, чтобы эти границы совпадали со сторонами ячеек, что позволяет использовать общие узлы для матрицы и включения.

Построение вычислительной сетки в области расчета проводим в декартовой системе координат с учетом размера включений. Размерность сетки определяется минимальным размером включений: чем меньше размер включений, тем большее количество ячеек требуется для описания их формы, а следовательно, растет размер сетки. Будем использовать структурированные сетки с четырехугольными ячейками, которые наследуют свойства стандартных прямоугольных сеток, но позволяют лучше описать геометрию различных включений. В области расчета введем структурированную сетку таким образом, чтобы границы раздела между различными материалами совпадали со сторонами ячеек, а сами ячейки имели соизмеримые площади и не пересекались. Последнее требование выполнимо при достаточно мелкой сетке. Будем считать, что вычислительная сетка построена и область расчета представлена объединением всех непересекающихся ячеек  $\omega^{<i,k>}$ . В результате сеточная область  $D_h = \bigcup_{i,k} \omega^{<i,k>}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $k = \overline{1, M}$ , полностью покрывает исходную область расчета  $D$ .

Поскольку границы контакта между разными материалами совпадают со сторонами сеточных ячеек, каждая ячейка содержит материал только одного вида. Введем кодировку ячеек целочисленным параметром, отражающим свойства определенного материала. Объем  $V^{<i,k>}$  ячейки  $\omega^{<i,k>}$  в плоской постановке – это площадь четырехугольника, образованного вершинами ячейки.

Каждая ячейка сетки  $\omega^{<i,k>}$  в декартовой системе  $xz$  описывается четырьмя узлами, пронумерованными начиная с левого нижнего узла в направлении обхода против часовой стрелки (рис. 3). Аналогично проводится и нумерация граней (сторон) ячейки. Таким образом, в ходе построения сетки формируется упорядоченный массив данных – координат узлов ячеек  $\left( x_m^{<i,k>}, z_m^{<i,k>} \right)$ ,  $m = \overline{1, 4}$ ;  $i = \overline{1, N}$ ,  $k = \overline{1, M}$ .

Перемещение сеточной ячейки  $\omega^{<i,k>}$  в пространстве  $xz$  будем описывать перемещением четырех ее вершин, т. е. точек  $\left( x_m^{<i,k>}, z_m^{<i,k>} \right)$ ,  $m = \overline{1, 4}$  (рис. 3). Для каждого сеточного узла  $(x_i, z_i)$ , являющегося первой вершиной ячейки  $\omega^{<i,k>}$ , будем искать перемещения, где  $u_{i,k}$ ,  $w_{i,k}$  – перемещение узла в направлении  $x$  и в направлении  $z$  соответственно.

Введем в ячейке следующие обозначения:  $P_m$  – середины сторон,  $m = \overline{1,4}$ ;  $O$  – точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон  $P_1P_3$  и  $P_2P_4$ ; точки  $O_R, O_L, O_B, O_T$  – середины отрезков  $OP_2, OP_4, OP_1, OP_3$  соответственно;  $S_m$  – площадь (длина) стороны,  $m = \overline{1,4}$ . Вид сеточной ячейки  $\omega^{<i,k>}$  и обозначения в ней показаны на рис. 3.

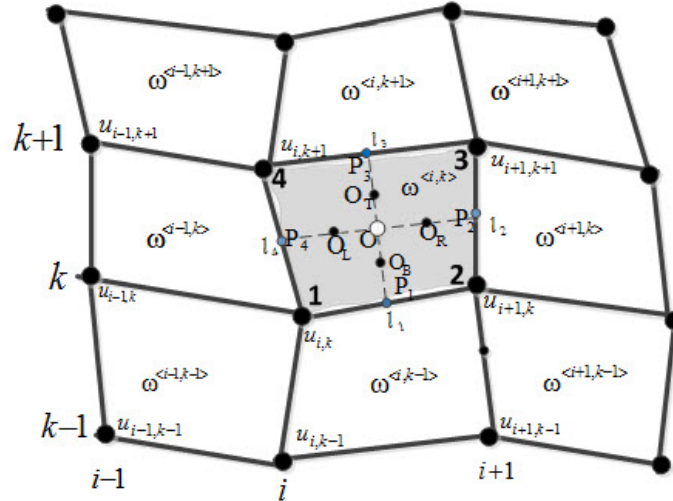


Рис. 3. Локальные обозначения в сеточной ячейке  $\omega^{<i,k>}$

В глобальной системе координат все введенные обозначения и вычисленные значения величин в ячейке записываются с верхним индексом, указывающим на номер ячейки, например, точка 1 в локальной системе координат будет записана как точка  $1^{<i,k>}$  в глобальной.

Для удобства дальнейшей записи, проведем дополнительные вычисления в ячейке. Зная координаты вершин ячейки, нетрудно вычислить координаты точки  $O(x_o^{<i,k>}, z_o^{<i,k>})$ , координаты серединных точек  $P_m^{<i,k>} = P_m^{<i,k>}(x_{P_m}^{<i,k>}, z_{P_m}^{<i,k>})$ , координаты точек  $O_R^{<i,k>}, O_L^{<i,k>}, O_B^{<i,k>}, O_T^{<i,k>}$ , площади (длины для плоской постановки) граней  $S_m^{<i,k>} = l_m^{<i,k>}$ ,  $m = \overline{1,4}$ ; объем ячейки  $V^{<i,k>}$ .

Задача состоит в нахождении перемещений  $(u_{i,k}, w_{i,k})$  сеточного узла  $(x_i, z_k)$ .

В соответствии с идеологией МКО для каждого отдельного узла определяется ассоциированная с ним окрестность расчетной области, называемая контрольным объемом (КО). Разностная схема для узла получается интегрированием исходного дифференциального уравнения по контрольному объему и аппроксимацией входящих в уравнение величин.

Построим контрольный объем  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$ , окружающий узел 1 для ячейки  $\omega^{<i,k>}$  (рис. 4), для которого ищем перемещение. Для нахождения перемещений  $u_{i,k}, w_{i,k}$  этого узла, выберем контрольный объем, в центре которого находится рассматриваемый узел. В глобальных координатах – это восьмиугольник  $O^{<i-1,k-1>} P_2^{<i-1,k-1>} O^{<i,k-1>} P_3^{<i,k-1>} O^{<i,k>} P_4^{<i,k>} O^{<i-1,k>} P_1^{<i-1,k>}$ , окружающий узел с координатами  $(x_i, z_k)$ . Схематично контрольный объем  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$  изображен на рис. 4 (область, ограниченная пунктирной линией).

Проинтегрируем уравнения (1) по контрольному объему  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{V_{u,w}^{<i,k>}} \iint_{\omega_{u,w}^{<i,k>}} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} dV + \frac{1}{V_{u,w}^{<i,k>}} \iint_{\omega_{u,w}^{<i,k>}} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial z} dV = 0, \\ \frac{1}{V_{u,w}^{<i,k>}} \iint_{\omega_{u,w}^{<i,k>}} \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} dV + \frac{1}{V_{u,w}^{<i,k>}} \iint_{\omega_{u,w}^{<i,k>}} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial z} dV = 0. \end{cases}$$

Используя формулу Остроградского–Гаусса, получим

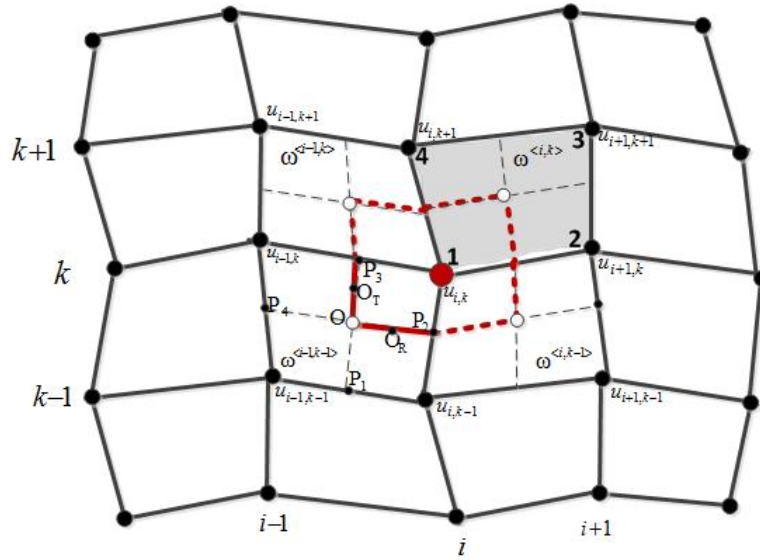


Рис. 4. Контрольный объем  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$  для узла 1 ячейки  $\omega^{<i,k>}$

$$\begin{cases} \frac{1}{V_{u,w}^{<i,k>}} \oint_{\omega_{u,w}^{<i,k>}} (\sigma_{11}n_x + \sigma_{12}n_z) dS = 0, \\ \frac{1}{V_{u,w}^{<i,k>}} \oint_{\omega_{u,w}^{<i,k>}} (\sigma_{21}n_x + \sigma_{22}n_z) dS = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где  $V_{u,w}^{<i,k>}$  – объем  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$ .

Для получения дискретного аналога балансового уравнения в выбранной ячейке необходимо вычислить интегралы, входящие в (7), используя какие-либо квадратурные формулы. При этом крайне важно, чтобы для соприкасающихся ячеек поверхностный интеграл по их общей грани вычислялся идентично. Последнее требование, легко реализуемое при составлении компьютерной программы, обеспечивает консервативность численной схемы, т. е. точное (в рамках принятого способа вычисления интегралов) соблюдение баланса величины согласно уравнению (7) для всей области. Это свойство МКО выгодно отличает его от метода конечных разностей (МКР) и метода конечных элементов (МКЭ), в которых реализация строгой консервативности схемы является скорее исключением, чем правилом.

Условимся, что обход граней контрольного объема производится против часовой стрелки, начиная с точки  $O^{<i-1,k-1>}$  (рис. 4). Интеграл по границе контрольного объема вычисляется как сумма произведений значений вектора потока в центрах граней контрольного объема на площадь соответствующей грани, т. е.  $q_m^{u,w;<i,k>} = q_m^{u,w;<i,k>} \bar{n}_m^{u,w;<i,k>} S_m^{u,w;<i,k>}$ ,  $m = \overline{1,8}$ . Здесь  $q_m^{u,w;<i,k>}$  – поток через  $m$ -ю грань контрольного объема  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$ , ориентация которой задается внешней единичной нормалью  $\bar{n}_m^{u,w;<i,k>}$  к  $m$ -й грани КО,  $S_m^{u,w;<i,k>}$  – площадь соответствующей  $m$ -й грани КО,  $q_m^{u,w;<i,k>}$  – значение потока на грани,  $m$  – количество граней ( $m = 8$ ).

Учитывая, что  $\oint_{\partial \omega_{u,w}^{<i,k>}} \sigma_{11}n_x dS = \sum_{m=1}^8 (\sigma_{11}n_x S) \Big|_m$ , где  $m$  – номер грани контрольного объема  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$ , система (7) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{V_{u,w}^{<i,k>}} \sum_{m=1}^8 [(\sigma_{11}n_x + \sigma_{12}n_z) S] \Big|_m = 0, \\ \frac{1}{V_{u,w}^{<i,k>}} \sum_{m=1}^8 [(\sigma_{21}n_x + \sigma_{22}n_z) S] \Big|_m = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, получение дискретного аналога балансовых уравнений (8) сводится к аппроксимации компонент напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{21}$  и  $\sigma_{22}$  на восьми гранях КО  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$ .

Предварительно найдем представление напряжений через перемещения, используя формулы (2). Получим

$$\begin{cases} \sigma_{11} = E_1^* \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{E}_1 \frac{\partial w}{\partial z}, & \sigma_{12} = G_{12} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \sigma_{22} = \tilde{E}_2 \frac{\partial u}{\partial x} + E_2^* \frac{\partial w}{\partial z}, & \sigma_{21} = G_{21} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ E_1^* = \frac{E_1}{A}, & \tilde{E}_1 = \frac{E_1 \nu_{21}}{A}, & E_2^* = \frac{E_2}{A}, & \tilde{E}_2 = \frac{E_2 \nu_{21}}{A}. \end{cases} \quad (9)$$

Введем обозначения потоков на  $m$ -й грани  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$  соответственно из (8):

$$fluxU_m = \frac{1}{V_{u,w}^{<i,k>}} (\sigma_{11} n_x + \sigma_{12} n_z) \Big|_m, \quad fluxW_m = \frac{1}{V_{u,w}^{<i,k>}} (\sigma_{21} n_x + \sigma_{22} n_z) \Big|_m, \quad m = \overline{1,8}. \quad (10)$$

С учетом зависимостей (9) и способа построения КО  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$ , выражения для потоков (10) на 1-й грани примут следующий вид:

$$\begin{cases} fluxU_1 = \frac{S_{OP_2}^{<i-1,k-1>}}{V_{u,w}^{<i,k>}} \left( \left( E_1^* \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{E}_1 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \bar{n}_{P_4 P_2, x}^{<i-1,k-1>} + \right. \\ \left. + G_{12} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \bar{n}_{P_4 P_2, z}^{<i-1,k-1>} \right) \Big|_{O_R^{<i-1,k-1>}}, \\ fluxW_1 = \frac{S_{OP_2}^{<i-1,k-1>}}{V_{u,w}^{<i,k>}} \left( G_{12} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \bar{n}_{P_4 P_2, z}^{<i-1,k-1>} + \right. \\ \left. + \left( \tilde{E}_2 \frac{\partial u}{\partial x} + E_2^* \frac{\partial w}{\partial z} \right) \bar{n}_{P_4 P_2, x}^{<i-1,k-1>} \right) \Big|_{O_R^{<i-1,k-1>}}, \end{cases} \quad (11)$$

где  $S_{OP_2}^{<i-1,k-1>}$  – площадь (длина для двумерного случая) 1-й грани контрольного объема,  $O_R^{<i-1,k-1>}$  – середина отрезка, соединяющего центр  $O^{<i-1,k-1>}$  и точку  $P_2^{<i-1,k-1>}$  (середина 2-й грани сеточной ячейки  $\omega^{<i-1,k-1>}$ ),  $\bar{n}_1^{u,w; <i,k>} = \bar{n}_{P_4 P_2}^{<i-1,k-1>}$  – единичный вектор внешней нормали к 1-й грани КО. Заметим, что  $\bar{n}_{P_4 P_2}^{<i-1,k-1>} = \bar{n}_{OP_2}^{<i-1,k-1>}$ , поскольку  $O^{<i-1,k-1>} \in (P_4 P_2)^{<i-1,k-1>}$ .

Таким образом, аппроксимация потоков (11) на первой грани КО  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$  сводится к аппроксимации частных производных от перемещений  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial z}$  в точке  $O_R^{<i-1,k-1>}$ .

Предварительно построим линейную интерполяцию функции  $f(x, z)$  в треугольнике  $\Delta_{123}$ , вершины которого обозначены цифрами 1, 2, 3, имеют соответствующие координаты  $(x_1, z_1)$ ,  $(x_2, z_2)$ ,  $(x_3, z_3)$  и значения функции в них известны  $f_m$ ,  $m = 1, 2, 3$ . Линейную интерполяционную функцию  $f^{\Delta_{123}}(x, z)$  будем искать в виде

$$f^{\Delta_{123}}(x, z) = a_0 + a_1 x + a_2 z, \quad (x, z) \in \Delta_{123}. \quad (12)$$

Учитывая, что в узлах  $(x_m, z_m)$  имеет место равенство  $f^{\Delta_{123}}(x_m, z_m) = f_m$ , получим систему трех линейных уравнений относительно неизвестных  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ . Решая ее, находим

$$\begin{cases} a_0 = \frac{f_1(x_2 z_3 - x_3 z_2) + f_2(x_3 z_1 - x_1 z_3) + f_3(x_1 z_1 - x_2 z_1)}{|\Delta_{123}|}, \\ a_1 = \frac{f_1(z_2 - z_3) + f_2(z_3 - z_1) + f_3(z_1 - z_2)}{|\Delta_{123}|}, \\ a_2 = \frac{f_1(x_3 - x_2) + f_2(x_1 - x_3) + f_3(x_2 - x_1)}{|\Delta_{123}|}, \end{cases}$$

где

$$|\Delta_{123}| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} = 2S_{123},$$

где  $S_{123}$  – площадь треугольника  $\Delta_{123}$ . Определитель системы  $|\Delta_{123}| \neq 0$ , так как равен двум площадям треугольника.

Перепишем представление функции (12) относительно величин  $f_m$ ,  $m = 1, 2, 3$ , с учетом вида найденных коэффициентов  $a_0, a_1, a_2$

$$\begin{aligned} f^{\Delta_{123}}(x, z) = & f_1 \frac{(x_2 z_3 - x_3 z_2) + (z_2 - z_3)x + (x_3 - x_2)z}{|\Delta_{123}|} + \\ & + f_2 \frac{(x_3 z_1 - x_1 z_3) + (z_3 - z_1)x + (x_1 - x_3)z}{|\Delta_{123}|} + \\ & + f_3 \frac{(x_1 z_1 - x_2 z_1) + (z_1 - z_2)x + (x_2 - x_1)z}{|\Delta_{123}|}, \quad (x, z) \in \Delta_{123}. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя представление интерполяционной функции в виде (13), построим аппроксимации производных  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial z}$  на первой грани КО  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$ . Покажем построение аппроксимации производной  $\frac{\partial u}{\partial x}$  в точке  $O_R^{<i-1,k-1>}$  первой грани КО  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$ . Ввиду того, что дальнейшие преобразования проводятся в пределах одной сеточной ячейки  $\omega^{<i-1,k-1>}$ , верхний индекс  $<i-1, k-1>$  для удобства и упрощения записи временно опускается.

В качестве функции для последующей интерполяции рассмотрим  $f(x, z) = \frac{\partial u}{\partial x}$ . Выберем вершины 1, 2, 3 таким образом, чтобы точка  $O_R$  находилась внутри построенного с помощью них условного треугольника  $\Delta_{123}$ , т. е.  $O_R \in \Delta_{123}$ . Это условие будет справедливо, если в качестве вершин выбрать, например, следующие середины сторон сеточной ячейки: вершина 1 – точка  $P_1$ , вершина 2 – точка  $P_2$ , вершина 3 – точка  $P_3$  (рис. 4).

Значение функции  $f(x, z)$  в выбранных точках  $P_m$ ,  $m = 1, 2, 3$ , вычислим, используя определение производной по направлению, совпадающему с соответствующей стороной ячейки, т. е. по направлению  $l_m$ ,  $m = 1, 2, 3$ , соответственно (рис. 3). Переходя к индексной записи, получим

$$\begin{cases} f_1(x, z) \Big|_{P_1} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{P_1} = \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{l_1} \frac{x_{i,k-1} - x_{i-1,k-1}}{l_1} = (u_{i,k-1} - u_{i-1,k-1}) \frac{x_{i,k-1} - x_{i-1,k-1}}{(l_1)^2}, \\ f_2(x, z) \Big|_{P_2} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{P_2} = \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{l_2} \frac{x_{i,k} - x_{i,k-1}}{l_2} = (u_{i,k} - u_{i,k-1}) \frac{x_{i,k} - x_{i,k-1}}{(l_2)^2}, \\ f_3(x, z) \Big|_{P_3} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{P_3} = \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{l_3} \frac{x_{i,k} - x_{i-1,k}}{l_3} = (u_{i,k} - u_{i-1,k}) \frac{x_{i,k} - x_{i-1,k}}{(l_3)^2}. \end{cases}$$

Используя аппроксимацию (13), получим выражение для интерполяционной функции  $f^{\Delta_{P_1 P_2 P_3}}(x, z)$  в глобальной системе координат вида

$$\begin{aligned} f^{\Delta_{P_1 P_2 P_3}}(x, z) = & (u_{i,k-1} - u_{i-1,k-1}) \frac{x_{i,k-1} - x_{i-1,k-1}}{(l_1)^2} \frac{(x_2 z_3 - x_3 z_2) + (z_2 - z_3)x + (x_3 - x_2)z}{|\Delta_{P_1 P_2 P_3}|} + \\ & + (u_{i,k} - u_{i,k-1}) \frac{x_{i,k} - x_{i,k-1}}{(l_2)^2} \frac{(x_3 z_1 - x_1 z_3) + (z_3 - z_1)x + (x_1 - x_3)z}{|\Delta_{P_1 P_2 P_3}|} + \\ & + (u_{i,k} - u_{i-1,k}) \frac{x_{i,k} - x_{i-1,k}}{(l_3)^2} \frac{(x_1 z_1 - x_2 z_1) + (z_1 - z_2)x + (x_2 - x_1)z}{|\Delta_{P_1 P_2 P_3}|}, \end{aligned} \quad (14)$$

где координаты вершин 1, 2, 3 определяются соответствующими координатами точек  $(x_1, z_1) = (x_{P_1}, z_{P_1})$ ,  $(x_2, z_2) = (x_{P_2}, z_{P_2})$ ,  $(x_3, z_3) = (x_{P_3}, z_{P_3})$ .

Учитывая вид функции  $f(x, z)$ , по формуле (14) находим выражение для производной в точке  $O_R \in \Delta_{123}$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{O_R} &= f^{\Delta P_1 P_2 P_3}(x_{O_R}, z_{O_R}) = \\ &= u_{i-1, k-1} a_{O_R; (i-1, k-1)} + u_{i, k-1} a_{O_R; (i, k-1)} + u_{i-1, k} a_{O_R; (i-1, k)} + u_{i, k} a_{O_R; (i, k)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Коэффициенты при неизвестных в (15) вычисляются следующим образом:

$$\begin{cases} a_{O_R; (i-1, k-1)} = -A_{O_R; 1}, & a_{O_R; (i, k-1)} = A_{O_R; 1} - A_{O_R; 2}, \\ a_{O_R; (i-1, k)} = -A_{O_R; 3}, & a_{O_R; (i, k)} = A_{O_R; 2} + A_{O_R; 3}, \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} A_{O_R; 1} = \frac{x_{i, k-1} - x_{i-1, k-1} (x_2 z_3 - x_3 z_2) + (z_2 - z_3) x_{O_R} + (x_3 - x_2) z_{O_R}}{(l_1)^2 \frac{|\Delta P_1 P_2 P_3|}{|\Delta P_1 P_2 P_3|}}, \\ A_{O_R; 2} = \frac{x_{i, k} - x_{i, k-1} (x_3 z_1 - x_1 z_3) + (z_3 - z_1) x_{O_R} + (x_1 - x_3) z_{O_R}}{(l_2)^2 \frac{|\Delta P_1 P_2 P_3|}{|\Delta P_1 P_2 P_3|}}, \\ A_{O_R; 3} = \frac{x_{i, k} - x_{i-1, k} (x_1 z_1 - x_2 z_3) + (z_1 - z_2) x_{O_R} + (x_2 - x_1) z_{O_R}}{(l_3)^2 \frac{|\Delta P_1 P_2 P_3|}{|\Delta P_1 P_2 P_3|}}. \end{cases}$$

Для аппроксимации производной  $\frac{\partial u}{\partial z}$  построим интерполяционную формулу для функции  $f(x, z) = \frac{\partial u}{\partial z}$ , используя производную по направлению в соответствующих точках, например, в точке 1, т. е. получим, что  $f_1 = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{P_1} = \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{l_1} \frac{z_{i, k-1} - z_{i-1, k-1}}{l_1} = (u_{i, k-1} - u_{i-1, k-1}) \frac{z_{i, k-1} - z_{i-1, k-1}}{(l_1)^2}$  и т. д.

По аналогии с (15), нетрудно получить следующую аппроксимацию:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{O_R} = u_{i-1, k-1} b_{O_R; (i-1, k-1)} + u_{i, k-1} b_{O_R; (i, k-1)} + u_{i-1, k} b_{O_R; (i-1, k)} + u_{i, k} b_{O_R; (i, k)}. \quad (16)$$

Поскольку для неизвестных компонент перемещения  $u(x, z)$  и  $w(x, z)$  сетка узлов одна и та же, т. е. неизвестные  $u_{i, k}$  и  $w_{i, k}$  определены в одних точках, то для производных  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial z}$  аналогично (15), (16) нетрудно получить следующие аппроксимации:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{O_R} = w_{i-1, k-1} a_{O_R; (i-1, k-1)} + w_{i, k-1} a_{O_R; (i, k-1)} + \\ \quad + w_{i-1, k} a_{O_R; (i-1, k)} + w_{i, k} a_{O_R; (i, k)}, \\ \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{O_R} = w_{i-1, k-1} b_{O_R; (i-1, k-1)} + w_{i, k-1} b_{O_R; (i, k-1)} + \\ \quad + w_{i-1, k} b_{O_R; (i-1, k)} + w_{i, k} b_{O_R; (i, k)}. \end{cases}$$

Подставляя найденные аппроксимации производных в выражения для потоков через первую грань КО  $\omega_{u, w}^{<i, k>}$  в первое уравнение системы (11) и группируя выражения при одинаковых неизвестных, получим

$$fluxU_1 = \sum_{\zeta} u_{\zeta} g_{O_R; \zeta}^u + \sum_{\zeta} w_{\zeta} e_{O_R; \zeta}^u, \quad (17)$$

где индекс  $\zeta$  принадлежит множеству индексов  $\{(i-1, k-1), (i, k-1), (i-1, k), (i, k)\}$ , что соответствует индексу вершин ячейки  $\omega^{<i-1, k-1>}$ .

Коэффициенты при неизвестных в выражении для потока (17) определяются формулами

$$\begin{cases} g_{O_R; \zeta}^u = \frac{SOP_2}{V_{u, v}} \left( E_1^* a_{O_R; \zeta} \bar{n}_{P_4 P_2, x} + \frac{1}{2} G_{12} b_{O_R; \zeta} \bar{n}_{P_4 P_2, z} \right), \\ e_{O_R; \zeta}^u = \frac{SOP_2}{V_{u, v}} \left( \tilde{E}_1 b_{O_R; \zeta} \bar{n}_{P_4 P_2, x} + \frac{1}{2} G_{12} a_{O_R; \zeta} \bar{n}_{P_4 P_2, z} \right). \end{cases}$$

Аналогично, подставляя найденные аппроксимации производных в выражения для потоков через первую грань КО  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$  во второе уравнение системы (11) и группируя выражения при одинаковых неизвестных, получим

$$fluxW_1 = \sum_{\zeta} u_{\zeta} g_{O_R;\zeta}^w + \sum_{\zeta} w_{\zeta} e_{O_R;\zeta}^w. \quad (18)$$

Коэффициенты при неизвестных в выражении для потока (18) определяются формулами

$$\begin{cases} g_{O_R;\zeta}^u = \frac{S_{OP_2}}{V_{u,v}} \left( \frac{1}{2} G_{12} b_{O_R;\zeta} \bar{n}_{P_4 P_2, x} + \tilde{E}_2 a_{O_R;\zeta} \bar{n}_{P_4 P_2, z} \right), \\ e_{O_R;\zeta}^u = \frac{S_{OP_2}}{V_{u,v}} \left( \frac{1}{2} G_{12} a_{O_R;\zeta} \bar{n}_{P_4 P_2, x} + E_2^* b_{O_R;\zeta} \bar{n}_{P_4 P_2, z} \right). \end{cases}$$

Выражения для компонент внешней единичной нормали к первой стороне КО  $\omega_{u,w}$  нетрудно найти зная координаты точек  $P_4$  и  $P_2$ .

Заметим, что с точки зрения реализации численного алгоритма, при аппроксимации потоков через первую грань контрольного объема целесообразно аппроксимировать потоки и через восьмую грань, поскольку указанные грани принадлежит одной ячейке  $\omega^{<i-1,k-1>}$ , а все ее параметры уже вычислены.

Рассмотрим выражения для потоков через восьмую грань:

$$\begin{cases} fluxU_8 = \frac{S_{OP_3}}{V_{u,w}} \left( \left( E_1^* \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{E}_1 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \bar{n}_{P_3 P_1, x} + G_{12} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \bar{n}_{P_3 P_1, z} \right) \Big|_{O_T}, \\ fluxW_8 = \frac{S_{OP_3}}{V_{u,w}} \left( G_{12} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \bar{n}_{P_3 P_1, x} + \left( \tilde{E}_2 \frac{\partial u}{\partial x} + E_2^* \frac{\partial w}{\partial z} \right) \bar{n}_{P_3 P_1, z} \right) \Big|_{O_T}. \end{cases} \quad (19)$$

Построим аппроксимацию производных от перемещений в точке  $O_T$ , принадлежащей восьмой грани КО  $\omega_{u,w}^{<i,k>}$ , по аналогии с предыдущей. Выберем вершины 1, 2, 3 для последующей интерполяции таким образом, чтобы точка  $O_T$  находилась внутри построенного с помощью них фиктивного треугольника  $\Delta_{123}$ . Это условие будет справедливо, если в качестве вершин 1, 2, 3 выбрать точки  $P_4$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  соответственно (рис. 4).

Рассуждая аналогичным образом, получим выражение для интерполяционной функции  $f^{\Delta_{P_4 P_2 P_3}}(x, z)$  в глобальной системе координат вида

$$\begin{aligned} f^{\Delta_{P_4 P_2 P_3}} &= (u_{i-1,k} - u_{i-1,k-1}) \frac{x_{i-1,k} - x_{i-1,k-1}}{(l_4)^2} \frac{(x_2 z_3 - x_3 z_2) + (z_2 - z_3)x + (x_3 - x_2)z}{|\Delta_{P_4 P_2 P_3}|} + \\ &+ (u_{i,k} - u_{i,k-1}) \frac{x_{i,k} - x_{i,k-1}}{(l_2)^2} \frac{(x_3 z_1 - x_1 z_3) + (z_3 - z_1)x + (x_1 - x_3)z}{|\Delta_{P_4 P_2 P_3}|} + \\ &+ (u_{i,k} - u_{i-1,k}) \frac{x_{i,k} - x_{i-1,k}}{(l_3)^2} \frac{(x_1 z_1 - x_2 z_1) + (z_1 - z_2)x + (x_2 - x_1)z}{|\Delta_{P_4 P_2 P_3}|}, \end{aligned}$$

где координаты вершин 1, 2, 3 определяются соответствующими координатами точек  $(x_1, z_1) = (x_{P_4}, z_{P_4})$ ,  $(x_2, z_2) = (x_{P_2}, z_{P_2})$ ,  $(x_3, z_3) = (x_{P_3}, z_{P_3})$ .

Учитывая вид функции  $f(x, z)$  находим выражение для производной в точке  $O_T$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{O_T} = u_{i-1,k-1} a_{O_T;(i-1,k-1)} + u_{i,k-1} a_{O_T;(i,k-1)} + u_{i-1,k} a_{O_T;(i-1,k)} + u_{i,k} a_{O_T;(i,k)},$$

где коэффициенты при неизвестных получаются аналогично (15).

Для производных  $\frac{\partial u}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x}$  и  $\frac{\partial w}{\partial z}$  строим аппроксимации аналогичным образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{O_T} = u_{i-1,k-1} b_{O_T;(i-1,k-1)} + u_{i,k-1} b_{O_T;(i,k-1)} + u_{i-1,k} b_{O_T;(i-1,k)} + u_{i,k} b_{O_T;(i,k)}, \\ \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{O_T} = w_{i-1,k-1} a_{O_T;(i-1,k-1)} + w_{i,k-1} a_{O_T;(i,k-1)} + w_{i-1,k} a_{O_T;(i-1,k)} + w_{i,k} a_{O_T;(i,k)}, \\ \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{O_T} = w_{i-1,k-1} b_{O_T;(i-1,k-1)} + w_{i,k-1} b_{O_T;(i,k-1)} + w_{i-1,k} b_{O_T;(i-1,k)} + w_{i,k} b_{O_T;(i,k)}. \end{array} \right.$$

Подставляя полученные аппроксимации производных в уравнение для потока (19) и группируя выражения при одинаковых неизвестных, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} fluxU_8 = \sum_{\zeta} u_{\zeta} g_{O_T;\zeta}^u + \sum_{\zeta} w_{\zeta} e_{O_T;\zeta}^u, \\ fluxW_8 = \sum_{\zeta} u_{\zeta} g_{O_T;\zeta}^w + \sum_{\zeta} w_{\zeta} e_{O_T;\zeta}^w, \end{array} \right. \quad (20)$$

где индекс  $\zeta$  принадлежит множеству индексов  $\{(i-1, k-1), (i, k-1), (i-1, k), (i, k)\}$ .

Коэффициенты при неизвестных в системе (20) определяются формулами

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{O_R;\zeta}^u = \frac{SOP_3}{V_{u,v}} \left( E_1^* a_{O_T;\zeta} \bar{n}_{P_3 P_1, x} + \frac{G_{12}}{2} b_{O_T;\zeta} \bar{n}_{P_3 P_1, z} \right), \\ e_{O_R;\zeta}^u = \frac{SOP_3}{V_{u,v}} \left( \tilde{E}_1 b_{O_T;\zeta} \bar{n}_{P_3 P_1, x} + \frac{G_{12}}{2} a_{O_T;\zeta} \bar{n}_{P_3 P_1, z} \right), \\ g_{O_R;\zeta}^w = \frac{SOP_3}{V_{u,v}} \left( \frac{G_{12}}{2} b_{O_T;\zeta} \bar{n}_{P_3 P_1, x} + \tilde{E}_2 a_{O_T;\zeta} \bar{n}_{P_3 P_1, z} \right), \\ e_{O_R;\zeta}^w = \frac{SOP_3}{V_{u,v}} \left( \frac{G_{12}}{2} a_{O_T;\zeta} \bar{n}_{P_3 P_1, x} + E_2^* b_{O_T;\zeta} \bar{n}_{P_3 P_1, z} \right). \end{array} \right.$$

Суммируя выражения для соответствующих потоков на первой и восьмой гранях КО, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} fluxU_1 + fluxU_8 = \sum_{\zeta} u_{\zeta} g_{O_R;\zeta}^u + \sum_{\zeta} w_{\zeta} e_{O_R;\zeta}^u + \sum_{\zeta} u_{\zeta} g_{O_T;\zeta}^u + \sum_{\zeta} w_{\zeta} e_{O_T;\zeta}^u = \\ = \sum_{\zeta} u_{\zeta} (g_{O_R;\zeta}^u + g_{O_T;\zeta}^u) + \sum_{\zeta} w_{\zeta} (e_{O_R;\zeta}^u + e_{O_T;\zeta}^u), \\ fluxW_1 + fluxW_8 = \sum_{\zeta} u_{\zeta} g_{O_R;\zeta}^w + \sum_{\zeta} w_{\zeta} e_{O_R;\zeta}^w + \sum_{\zeta} u_{\zeta} g_{O_T;\zeta}^w + \sum_{\zeta} w_{\zeta} e_{O_T;\zeta}^w = \\ = \sum_{\zeta} u_{\zeta} (g_{O_R;\zeta}^w + g_{O_T;\zeta}^w) + \sum_{\zeta} w_{\zeta} (e_{O_R;\zeta}^w + e_{O_T;\zeta}^w), \end{array} \right.$$

где индекс  $\zeta$  принадлежит множеству индексов  $\{(i-1, k-1), (i, k-1), (i-1, k), (i, k)\}$ .

Производя аналогичные преобразования для ячеек  $\omega^{<i,k-1>}$ ,  $\omega^{<i,k>}$ ,  $\omega^{<i-1,k>}$ , получаем аппроксимации для потоков на второй и третьей, четвертой и пятой, шестой и седьмой гранях соответственно. Возвращаясь к обозначениям индексов ячейки и подставляя полученные аппроксимации в первое уравнение системы (8), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V_{u,w}^{<i,k>}} \sum_{m=1}^8 [(\sigma_{11} n_x + \sigma_{12} n_z) S] \Big|_m = \\ & = \sum_{\zeta \in \zeta^{<i-1,k-1>}} u_{\zeta} (g_{O_R;\zeta}^{u;<i-1,k-1>} + g_{O_T;\zeta}^{u;<i-1,k-1>}) + \sum_{\zeta \in \zeta^{<i-1,k-1>}} w_{\zeta} (e_{O_R;\zeta}^{u;<i-1,k-1>} + e_{O_T;\zeta}^{u;<i-1,k-1>}) + \\ & + \sum_{\zeta \in \zeta^{<i,k-1>}} u_{\zeta} (g_{O_L;\zeta}^{u;<i,k-1>} + g_{O_T;\zeta}^{u;<i,k-1>}) + \sum_{\zeta \in \zeta^{<i,k-1>}} w_{\zeta} (e_{O_L;\zeta}^{u;<i,k-1>} + e_{O_T;\zeta}^{u;<i,k-1>}) + \\ & + \sum_{\zeta \in \zeta^{<i-1,k>}} u_{\zeta} (g_{O_B;\zeta}^{u;<i-1,k>} + g_{O_L;\zeta}^{u;<i-1,k>}) + \sum_{\zeta \in \zeta^{<i-1,k>}} w_{\zeta} (e_{O_B;\zeta}^{u;<i-1,k>} + e_{O_L;\zeta}^{u;<i-1,k>}) + \\ & + \sum_{\zeta \in \zeta^{<i,k>}} u_{\zeta} (g_{O_R;\zeta}^{u;<i,k>} + g_{O_B;\zeta}^{u;<i,k>}) + \sum_{\zeta \in \zeta^{<i,k>}} w_{\zeta} (e_{O_R;\zeta}^{u;<i,k>} + e_{O_B;\zeta}^{u;<i,k>}), \end{aligned}$$

где множества индексов определены следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta^{<i-1,k-1>} = \{(i-1, k-1), (i, k-1), (i-1, k), (i, k)\}, \\ \zeta^{<i,k-1>} = \{(i, k-1), (i+1, k-1), (i, k), (i+1, k)\}, \\ \zeta^{<i,k>} = \{(i, k), (i+1, k), (i, k+1), (i+1, k+1)\}, \\ \zeta^{<i-1,k>} = \{(i-1, k), (i, k), (i-1, k+1), (i, k+1)\}. \end{array} \right.$$

Группируя слагаемые при одинаковых неизвестных, приходим к уравнению вида для внутренних узлов сетки

$$R_h^{<i,k>}(u) + P_h^{<i,k>}(w) = 0, \quad i = \overline{1, N_x - 1}, \quad k = \overline{1, N_z - 1}, \quad (21)$$

где  $R_h^{<i,k>}(u)$ ,  $P_h^{<i,k>}(w)$  – линейные операторы относительно 9 неизвестных  $u_{i,k}$  и 9 неизвестных  $w_{i,k}$  вида

$$\left\{ \begin{array}{l} R_h^{<i,k>}(u) = r_{i-1,k-1}^{<i,k>} u_{i-1,k-1} + r_{i,k-1}^{<i,k>} u_{i,k-1} + r_{i+1,k-1}^{<i,k>} u_{i+1,k-1} + \\ + r_{i-1,k}^{<i,k>} u_{i-1,k} + r_{i,k}^{<i,k>} u_{i,k} + r_{i+1,k}^{<i,k>} u_{i+1,k} + \\ + r_{i-1,k+1}^{<i,k>} u_{i-1,k+1} + r_{i,k+1}^{<i,k>} u_{i,k+1} + r_{i+1,k+1}^{<i,k>} u_{i+1,k+1}, \\ P_h^{<i,k>}(w) = p_{i-1,k-1}^{<i,k>} w_{i-1,k-1} + p_{i,k-1}^{<i,k>} w_{i,k-1} + p_{i+1,k-1}^{<i,k>} w_{i+1,k-1} + \\ + p_{i-1,k}^{<i,k>} w_{i-1,k} + p_{i,k}^{<i,k>} w_{i,k} + p_{i+1,k}^{<i,k>} w_{i+1,k} + \\ + p_{i-1,k+1}^{<i,k>} w_{i-1,k+1} + p_{i,k+1}^{<i,k>} w_{i,k+1} + p_{i+1,k+1}^{<i,k>} w_{i+1,k+1}. \end{array} \right. \quad (22)$$

Коэффициенты оператора  $R_h^{<i,k>}$  вычисляются по следующим формулам:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{(i-1,k-1)}^{<i,k>} = g_{O_R;(i-1,k-1)}^{u;<i-1,k-1>} + g_{O_T;(i-1,k-1)}^{u;<i-1,k-1>}, \\ r_{(i,k-1)}^{<i,k>} = g_{O_R;(i,k-1)}^{u;<i-1,k-1>} + g_{O_T;(i,k-1)}^{u;<i-1,k-1>} + g_{O_L;(i,k-1)}^{u;<i,k-1>} + g_{O_T;(i,k-1)}^{u;<i,k-1>}, \\ r_{(i+1,k-1)}^{<i,k>} = g_{O_L;(i+1,k-1)}^{u;<i,k-1>} + g_{O_T;(i+1,k-1)}^{u;<i,k-1>}, \\ r_{(i-1,k)}^{<i,k>} = g_{O_R;(i-1,k)}^{u;<i-1,k-1>} + g_{O_T;(i-1,k)}^{u;<i-1,k-1>} + g_{O_R;(i-1,k)}^{u;<i,k>} + g_{O_B;(i-1,k)}^{u;<i,k>}, \\ r_{(i,k)}^{<i,k>} = g_{O_R;(i,k)}^{u;<i-1,k-1>} + g_{O_T;(i,k)}^{u;<i-1,k-1>} + g_{O_L;(i,k)}^{u;<i,k-1>} + g_{O_T;(i,k)}^{u;<i,k-1>} + \\ + g_{O_B;(i,k)}^{u;<i-1,k>} + g_{O_L;(i,k)}^{u;<i-1,k>} + g_{O_R;(i,k)}^{u;<i,k>} + g_{O_B;(i,k)}^{u;<i,k>}, \\ r_{(i+1,k)}^{<i,k>} = g_{O_L;(i+1,k)}^{u;<i,k-1>} + g_{O_T;(i+1,k)}^{u;<i,k-1>} + g_{O_B;(i+1,k)}^{u;<i-1,k>} + g_{O_L;(i+1,k)}^{u;<i-1,k>}, \\ r_{(i-1,k+1)}^{<i,k>} = g_{O_R;(i-1,k+1)}^{u;<i,k>} + g_{O_B;(i-1,k+1)}^{u;<i,k>}, \\ r_{(i,k+1)}^{<i,k>} = g_{O_B;(i,k+1)}^{u;<i-1,k>} + g_{O_L;(i,k+1)}^{u;<i-1,k>} + g_{O_R;(i,k+1)}^{u;<i,k>} + g_{O_B;(i,k+1)}^{u;<i,k>}, \\ r_{(i+1,k+1)}^{<i,k>} = g_{O_B;(i+1,k+1)}^{u;<i-1,k>} + g_{O_L;(i+1,k+1)}^{u;<i-1,k>}. \end{array} \right.$$

Поскольку вид коэффициентов оператора  $P_h^{<i,k>}$  полностью аналогичен коэффициентам оператора  $R_h^{<i,k>}$  с точностью до замены буквенных обозначений (коэффициенты  $g$  заменяются на коэффициенты  $e$  с сохранением индексов), их явная запись, в силу громоздкости, опущена.

Подставляя аппроксимации потоков во второе уравнение системы (8), получим уравнение для внутренних узлов вида

$$T_h^{<i,k>}(u) + Q_h^{<i,k>}(w) = 0, \quad i = \overline{1, N_x - 1}, \quad k = \overline{1, N_z - 1}, \quad (23)$$

где операторы  $T_h^{<i,k>}(u)$  и  $Q_h^{<i,k>}(w)$  имеют аналогичный вид с операторами, приведенными в (22).

Таким образом, в результате аппроксимации исходной системы (8), была получена система (21), (23) из  $2 \times (N_x - 1) \times (N_z - 1)$  сеточных уравнений относительно неизвестных  $u_{i,k}$  и  $w_{i,k}$ . Однако в задаче в силу выбора сеточных узлов, количество неизвестных будет  $2 \times (N_x + 1) \times (N_z + 1)$ : из них  $(N_x + 1) \times (N_z + 1)$  неизвестных  $u_{i,k}$  и  $(N_x + 1) \times (N_z + 1)$  неизвестных  $w_{i,k}$ . Для однозначного решения системы уравнений недостающие уравнения нетрудно получить, аппроксимируя законы сохранения в приграничных объемах с учетом граничных условий (3)–(6).

Решая полученную систему, например, стабилизированным методом бисопряженных градиентов (BiCGStab) [12], находим перемещения  $u_{i,k}$  и  $w_{i,k}$  в узлах сеточной области. В соответствии с разностным аналогом формул для компонент напряжений, нетрудно найти напряженно-деформированное состояние в каждой ячейке вычислительной сетки.

## 7. Общий энергетический подход для нахождения эффективных модулей упругости

Модуль упругости представительного объема будем находить исходя из энергетических соображений. Опишем процедуру нахождения модуля упругости.

При нагружении упругого тела внешними силами происходит смещение частиц тела от их первоначального положения. Это смещение вызывает силы упругого сопротивления, которые стремятся вернуть частицы в исходное состояние. Энергия этих сил представляет собой потенциальную энергию деформации, запасенную упругим телом. При разгрузке эта энергия высвобождается и способна совершать работу. Таким образом, упругое тело является аккумулятором энергии: при нагружении внешние силы совершают работу ( $A$ ), которая затрачивается на деформирование и приводит к накоплению потенциальной энергии деформации ( $U$ ).

Чтобы определить численное значение потенциальной энергии деформации, следует рассмотреть работу внешних и внутренних сил. Внешние силы, деформируя тело, совершают работу на перемещениях частиц из исходного состояния. Внутренние силы упругости, возвращая частицы после разгрузки в начальное положение, совершают работу на тех же перемещениях, но в обратном направлении.

Удельная потенциальная энергия деформации, как работы, совершаемой при деформации единицы объема тела, определяется следующим образом [13]:

$$U = \int_{\varepsilon_{ij}=0}^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}.$$

Таким образом, при деформации упругого тела внешние силы совершают работу. При этом происходит увеличение потенциальной энергии тела. Считая, что в начальный момент потенциальная энергия недеформированного тела равна нулю, после деформации потенциальная энергия деформированного тела будет равна работе, затраченной на деформацию тела. Это будет справедливо до тех пор, пока деформации не достигнут предела упругости.

Поскольку потенциальная энергия деформированного тела  $U$  определяется потенциальной энергией ячеек сетки, то

$$U = \sum_{\omega^{<i,k>}} \frac{1}{2} (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{21}\varepsilon_{21})^{<i,k>} V^{<i,k>}.$$

Так как по предположению включения могут быть из ортотропного материала, то можно полагать, что материал композита также ортотропный и описывается формулами (2) с соответствующими эффективными модулями упругости (в дальнейшем, они обозначаются с нижним индексом  $E_{1,\text{eff}}$ ,  $E_{2,\text{eff}}$  и др.).

Для нахождения модуля упругости композиционного материала вдоль вертикальной оси ( $E_{2,\text{eff}}$ ) был поставлен численный эксперимент на растяжение, моделируемый граничными условиями (3)–(6).

При нагружении образца внешней силой  $F_{\text{внешн}}$  происходит растяжение в зависимости от приложенной силы. Вычислим работу, затраченную на растяжение вдоль вертикальной оси на величину  $\Delta z^*$  исходного материала

$$A_{\text{внешн}} = \int_0^{\Delta z^*} F_{\text{внешн}} dz.$$

Чтобы изменить длину образца, надо приложить силу к верхней границе области в соответствии с законом Гука, т. е. надо положить  $\frac{F_{\text{внешн}}}{S} = \sigma_{zz}$ , где  $S$  – площадь верхней границы области. Откуда находим силу  $F_{\text{внешн}} = S\sigma_{zz}$ .

В соответствии с [13] работа  $A_{\text{внешн}}$ , затраченная на растяжение представительного объема на величину  $\Delta z^*$ , с учетом закона Гука (2) будет равна

$$A_{\text{внешн}} = \int_0^{\Delta z^*} F_{\text{внешн}} dz = \int_0^{\Delta z^*} S \frac{E_{2;\text{eff}}}{A} (\varepsilon_{22;\text{eff}} + \nu_{21;\text{eff}} \varepsilon_{11;\text{eff}}) dz,$$

где  $A = 1 - \nu_{12;\text{eff}} \nu_{21;\text{eff}}$ .

Поскольку растяжение представительного объема происходит только вдоль вертикальной оси, то  $\varepsilon_{11;\text{eff}} = 0$  и, соответственно,  $\nu_{21;\text{eff}} = 0$ . Тогда выражение для работы упрощается и имеет вид

$$A_{\text{внешн}} = \int_0^{\Delta z^*} S E_{2;\text{eff}} \varepsilon_{22;\text{eff}} dz = \int_0^{\Delta z^*} S E_{2;\text{eff}} \frac{z}{L_z} = E_{2;\text{eff}} \frac{S}{L_z} \frac{(\Delta z^*)^2}{2} = \frac{1}{2} E_{2;\text{eff}} V \varepsilon_{22;\text{eff}}^2, \quad (24)$$

где  $E_{2;\text{eff}}$  – модуль упругости представительного объема,  $V = S L_z = L_x L_z$  – объем представительного объема,  $\varepsilon_{22;\text{eff}} = \frac{\Delta z^*}{L_z}$  – заданная деформация растяжения вдоль оси  $z$ .

Учитывая, что работа внешних сил (24), затраченная на растяжение представительного объема, равна потенциальной энергии деформации всех ячеек этого объема, получим

$$\frac{1}{2} E_{2;\text{eff}} V \varepsilon_{22;\text{eff}}^2 = \sum_{\omega^{<i,k>}} \frac{1}{2} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{21} \varepsilon_{21})^{<i,k>} V^{<i,k>}. \quad (25)$$

Тогда из (25) следует

$$E_{2;\text{eff}} = \frac{1}{V \varepsilon_{22;\text{eff}}^2} \sum_{\omega^{<i,k>}} \frac{1}{2} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{21} \varepsilon_{21})^{<i,k>} V^{<i,k>}, \quad (26)$$

где  $E_{2;\text{eff}}$  – искомый эффективный модуль упругости в направлении растяжения представительного объема,  $\varepsilon_{22;\text{eff}}$  – средняя деформация растяжения представительного объема в направлении  $z$ ,  $V$  – объем деформируемой области (представительного объема). Суммирование в правой части (26) производится по ячейкам сеточной области  $\omega^{<i,k>}$ ,  $V^{<i,k>}$  – объем сеточной ячейки. Напряжения вдоль осей  $\sigma_{11}^{<i,k>}$ ,  $\sigma_{22}^{<i,k>}$ , напряжение сдвига  $\sigma_{12}^{<i,k>}$ , деформации  $\varepsilon_{11}^{<i,k>}$ ,  $\varepsilon_{22}^{<i,k>}$ ,  $\varepsilon_{12}^{<i,k>}$  вычисляются по формулам для ортотропного материала (2) в центрах ячеек  $\omega^{<i,k>}$ .

Таким образом, решение задачи нахождения напряженно-деформированного состояния представительного объема, как неоднородного материала с учетом геометрии и свойств включений при продольном растяжении, позволяет определить эффективный продольный модуль упругости в соответствии с формулой (26).

Видно, что на основе описанного подхода можно получить информацию об упругих макрохарактеристиках композиционного материала, которые обычно получают при механических испытаниях образцов в лабораторных условиях.

Пользуясь описанным методом, можно найти другие механические характеристики композиционного материала при соответствующем выборе граничных условий, имитирующих физические эксперименты, в частности, модуль упругости вдоль направления  $x$ .

## 8. Вычислительные эксперименты

Проведем ряд численных экспериментов по разработанному алгоритму для нахождения модуля упругости. В качестве материалов для экспериментов выбраны реально существующие композиционные системы, состоящие из матрицы и, например, одного из двух различных типов наполнителя, контрастирующих по своим механическим свойствам. Материалом матрицы во всех рассматриваемых случаях взята медь (Cu), упругие характеристики которой хорошо изучены и известны.

### 8.1. Численный расчет эффективного модуля Юнга композита на основе меди с различной объемной долей включения

В роли наполнителя рассматривали два альтернативных материала, модули упругости которых существенно отличаются от модуля упругости матрицы (Cu). Первый материал наполнителя – карбид вольфрама (WC), обладает значительно более высоким модулем упругости по сравнению с медью. Вторым вариантом – политетрафторэтилен (PTFE, тефлон), модуль упругости которого, напротив, значительно ниже, чем у меди. Свойства материалов приведены в табл. 1.

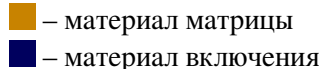






Выбор указанных комбинаций обусловлен не только их механической контрастностью, но и широким распространением в промышленности. Композиты системы Cu–WC активно используются в отраслях, требующих сочетания высокой тепло- и электропроводности, присущим медной матрице, и экстремальной твердости с износостойкостью, обеспечиваемой включениями карбида вольфрама. К типичным областям применения относятся радиаторы охлаждения (теплоотводы) для устройств силовой электроники и электрические контакты с повышенным эксплуатационным ресурсом [14; 15]. Композиты системы Cu–PTFE находят применение в узлах сухого трения и скольжения, функционирующих в условиях, где использование жидких смазочных материалов невозможно или затруднено. К таким условиям относятся вакуум, экстремально высокие или низкие температуры, агрессивные химические среды, а также специфические требования пищевой и медицинской промышленности [16].

Таблица 1. Свойства материалов, используемых для вычислительного эксперимента

Материал	Cu [8]	WC [17]	PTFE [18]
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	8960	15170	2200
Модуль Юнга $E$ , ГПа	110	655,8	0,68
Модуль сдвига $G$ , ГПа	41,5	271,4	0,24
Коэффициент Пуассона $\nu$	0,325	0,208	0,45

В качестве представительного объема рассматривалась область размером  $1,0^{-4} \times 1,0^{-4}$  м. Расчетная сетка выбрана равномерной  $10 \times 10$ , что соответствовало сеточному шагу  $1,0^{-5}$  м. Была проведена серия численных экспериментов по разработанному алгоритму с различной долей включения двух наполнителей. Расчетные значения модуля упругости для композита на основе меди с различной объемной долей включения приведены в табл. 2.

Таблица 2. Расчетные значения модуля упругости

Наполнитель	Элементы включения					
	0%	20%	40%	60%	80%	100%
Цифровое изображение композита: 						
Тефлон, $E_{\text{eff}}$ , ГПа	110,29	65,26	27,72	3,89	1,41	0,69
Карбид вольфрама, $E_{\text{eff}}$ , ГПа	110,29	164	239	357	484	657

В первой строке таблицы приводится процентное содержание наполнителя в композите, цифровое изображение ячейки периодичности которого иллюстрируют рисунки во второй строке таблицы. В третьей и четвертой строках таблицы приведены расчетные данные эффективного модуля упругости, соответствующие выбранному композиту.

График зависимости эффективного модуля упругости композита в зависимости от доли твердого включения приведен на рис. 5. Здесь точками отмечены значения, полученные из численного эксперимента.

Как видно из графиков рис. 5 для обоих экспериментов характерна одинаковая зависимость: при отсутствии наполнителя композит состоит только из материала матрицы, что на графике отражается значением эффективного модуля упругости при 0%, а при 100%-ном включении наполнителя – значением эффективного модуля упругости наполнителя.

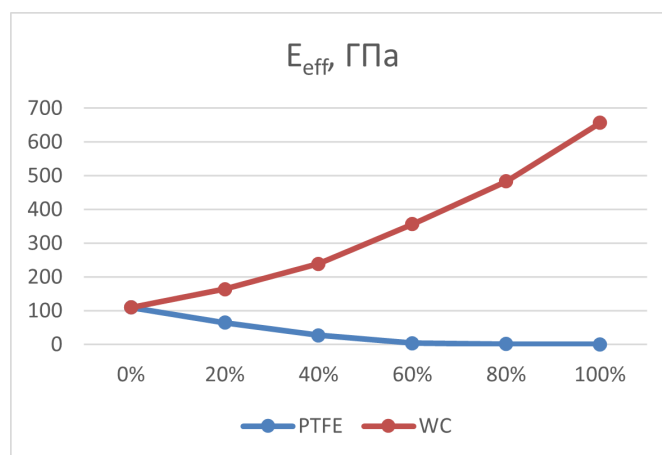


Рис. 5. Зависимость эффективного модуля упругости композита от объемной доли включения

## 8.2. Численный расчет эффективного модуля Юнга слоев градиентного покрытия на основе NiCr

Предложенный метод расчета упругих модулей может быть использован при разработке износостойких порошковых покрытий, модифицируемых твердыми тугоплавкими соединениями. К таким покрытиям предъявляются высокие требования относительно прочности и износостойкости. Поскольку поверхностный слой покрытия воспринимает значительную часть нагрузки при рабочих условиях и создает предпосылки его работоспособности в условиях доминирующего изнашивания, то он должен быть более твердым по сравнению с нижними слоями. Поэтому возникает необходимость в разработке градиентных покрытий, например, слоистой структуры с различным содержанием упрочняющей фазы. Слоистая структура покрытия и использование различной доли упрочняющей фазы дают возможность управлять механическими свойствами покрытия в различных частях области расчета. Например, можно подобрать процентное содержание упрочняющего компонента в композите так, чтобы конструкция покрытия создавала предпосылки повышения его прочности за счет постепенного изменения теплофизических свойств его слоев от подложки к рабочей поверхности.

Рассмотрим пример разработки износостойкого градиентного покрытия на основе матрицы из нихрома (NiCr) с добавлением разной доли твердых включений из карбида титана (TiC). На рис. 6 показана микроструктура обработанного двухслойного градиентного покрытия [19].

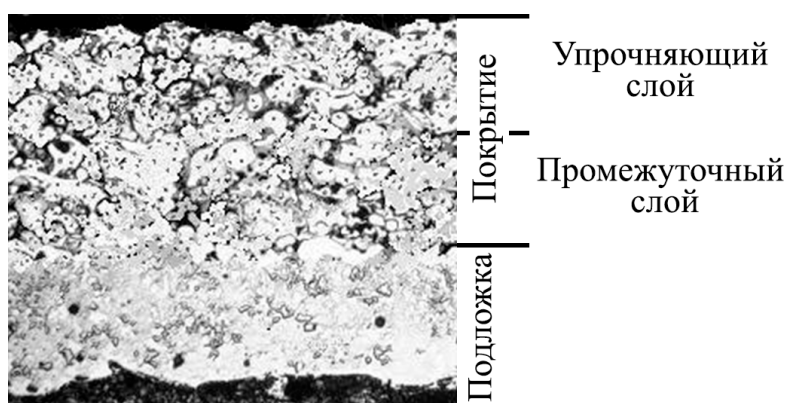


Рис. 6. Микроструктура обработанного градиентного покрытия

Как видно из рисунка, основными структурными элементами являются материал матрицы и добавочные включения, которые достаточно равномерно распределены в поверхностном и промежуточном градиентных слоях, создавая жесткую систему, которая воспринимает значительную часть контактной нагрузки трибосопряжения.

В качестве примера для вычислительного эксперимента по нахождению эффективного модуля упругости выберем два композита с матрицей из нихрома, но с различным содержанием упрочняющей фазы TiC и найдем модули упругости для выбранных композитов.

Рассмотрим два композитных материала с разной долей содержания упрочняющей фазы:

1. Композитный материал NiCr80/20 + 40 % TiC – верхний упрочняющий слой;
2. Композитный материал NiCr80/20 + 20 % TiC – промежуточный слой.

Размер включений TiC составляет 1–2 микрона. Механические характеристики матрицы NiCr80/20 и твердых включений TiC приведены в табл. 3.

Таблица 3. Механические характеристики материалов

Материал	NiCr80/20	TiC
Модуль Юнга $E$ , ГПа	218	450
Модуль сдвига $G$ , ГПа	85,2	190,7
Коэффициент Пуассона $\nu$	0,28	0,18

Из рис. 6 видно, что все включения распределены равномерно во всем объеме композиционного материала. Следуя описанному выше подходу, за область расчета (представительный объем композита) для численного метода нахождения эффективных модулей упругости берем ячейку периодичности.

В качестве представительного объема для вычислительного эксперимента была выбрана область размером  $1,0^{-4} \times 1,0^{-4}$  м. Производя схематизацию структуры композита для каждого слоя и описывая ее в соответствии с выбранным представительным объемом, построим решетку с достаточно мелким шагом, имитирующую композиционную систему.

Для численного метода использовали равномерный шаг сетки по обоим направлениям, равный  $1,0^{-5}$  м, что соответствовало минимальному размеру включения.

Таким образом, область расчета представлена в виде некоторой решетки, ячейки которой заполнены либо веществом матрицы, либо веществом включений в соответствии с его объемным содержанием. На рис. 7, *a* изображена область расчета, соответствующая композиту с 20%-ным содержанием TiC, на рис. 7, *б* – область расчета, соответствующая композиту с 40%-ным содержанием TiC. Оранжевым цветом отмечены ячейки матрицы с веществом NiCr80/20, темным синим цветом – ячейки с материалом TiC.

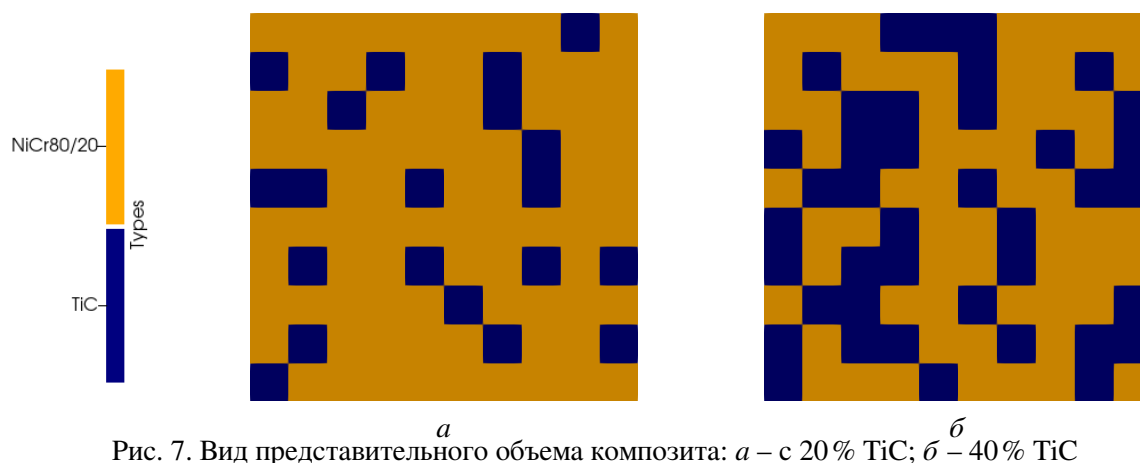


Рис. 7. Вид представительного объема композита: *a* – с 20 % TiC; *б* – 40 % TiC

Используя описанный в работе численный метод, были получены эффективные модули Юнга ( $E_{\text{eff}}$ ) соответствующего композита:  $E_{\text{eff}} = 257,1$  ГПа для материала с 20%-ным содержанием включений TiC и  $E_{\text{eff}} = 300,1$  ГПа для 40%-ного содержания.

Полученные результаты вычислений показывают, что увеличение доли твердого компонента приводит к росту эффективного модуля упругости композита. Таким образом, изменяя процентное содержание упрочняющего элемента и анализируя полученный в результате численного эксперимента эффективный модуль упругости соответствующего композита, можно сформировать конструкцию градиентных слоев покрытия таким образом, чтобы создавались предпосылки

повышения его прочности за счет постепенного изменения упругих характеристик начиная от подложки к рабочей поверхности.

Предложенный метод расчета упругих модулей может быть использован при разработке градиентных износостойких порошковых покрытий, модифицируемых твердыми тугоплавкими соединениями.

## 9. Заключение

Построенный с помощью метода контрольного объема с использованием структурированных четырехугольных сеток в декартовой системе координат численный метод расширяет возможности сеточных методов для решения задач механики в двумерных неоднородных областях сложной формы. Как показали расчеты, метод хорошо работает при наличии в области мелких включений с различными свойствами.

В работе предложен подход, позволяющий оценивать макроскопические механические упругие свойства композиционного порошкового материала по заданной микроструктуре композита, т. е. по известным свойствам и внутренней геометрии компонент включений, а также – при разной температуре. Путем ряда вычислительных экспериментов можно прогнозировать упругие технические модули композиционного материала в зависимости от температуры, объемного содержания и формы включений (наполнителя), а также, используя другие граничные условия можно исследовать упругие свойства в другом направлении. Такой подход представляется перспективным для разработчиков новых материалов и расширяет возможности конструирования композита под необходимые теплофизические и механические свойства.

## Литература

1. *Xiao-Su Yi, Shanyi Du, Litong Zhang*. Composite Materials Engineering, Volume 2. Different Types of Composite Materials. Singapore: Springer Singapore – Chemical Industry Press, 2018. 617 с. <https://doi.org/10.1007/978-981-10-5690-1>
2. *Dhuria Mohit, Grover Neeraj, Goyal Kavita*. Review of solution methodologies for structural analysis of composites // European Journal of Mechanics – A/Solids. 2024. Vol. 103. Art. 105157. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.105157>
3. *Alotaibi Hatim, Soutis Constantinos, Jabbari Masoud*. FEM and FVM methods for design and manufacturing of hierarchical aerospace composites: A review // Applied Sciences. 2025. Vol. 15, N 16. Art. 8896. <https://doi.org/10.3390/app15168896>
4. *Люкшин Б. А., Шилько С. В., Панин С. В. и др.* Дисперсно-наполненные полимерные композиты технического и медицинского назначения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2017. 311 с.
5. *Zvi Hashin*. Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2002. Vol. 50, N 12. P. 2509–2537. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(02\)00050-9](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(02)00050-9)
6. *Terada Kenjiro, Kikuchi Noboru*. Microstructural modeling technique for homogenization analysis using digital images // Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. Series A, 1998. Vol. 64, N 617. P. 170–177. <https://doi.org/10.1299/kikaia.64.170>
7. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1978. 512 с.
8. *Бабичев А. П. и др.* Физические величины: Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
9. *Колчанов Н. В., Колчанова Е. А.* Механика: методические указания к общему физическому практикуму. Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ), 2020. 121 с.
10. *Громько Г. Ф., Мацука Н. П., Ильющенко А. Ф. и др.* Численное исследование теплофизических свойств композиционного порошкового материала // Порошковая металлургия. 2020. № 43. С. 132–139.
11. *Авлас А. Н.* Численный расчет эффективного коэффициента теплопроводности дисперсно-наполненных композиционных материалов // Труды Института математики НАН Беларуси. 2024. Т. 32, №1. С. 86–96.

12. Henk A. van der Vorst. *Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 221 p.
13. Темам Р., Миранвиль А. Математическое моделирование в механике сплошных сред. М.: Лаборатория знаний, 2025. 323 с.
14. Никитин Д. С., Шаненков И. И., Насырбаев А. Р. и др. Получение порошков меди и металлматричных композитов с медной матрицей в плазме дугового разряда // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2026. Т. 337, № 2. С. 149–160. <https://doi.org/10.18799/24131830/2026/2/5232>
15. Ковтун В. А., Пасовец В. Н., Плескачевский Ю. М. и др. Триботехнические и прочностные характеристики гибридных нанонаполненных металлополимерных порошковых композитов // Вестник ПГУ. Серия В, Промышленность. Прикладные науки. 2016. № 3. С. 108–114.
16. Xiaoyan Zhang, Qian Lei, Yang Gao et al. High-strength wear-resistant Cu/tungsten carbide/diamond composites fabricated by powder metallurgy // *Adv. Eng. Mater.* 2024. Vol. 26, N 11. Art. 2302142. <https://doi.org/10.1002/adem.202302142>
17. Wang B., Praksh V. Sound speed measurements in shock compressed cemented tungsten carbide: Evolution of elastic moduli with damage at pressures to 100 GPa // *Journal of Applied Physics*. 2024. Vol. 135, N 13. Art. 135901. <https://doi.org/10.1063/5.0195772>
18. Berladir K., Zhyhylii D., Brejcha J. et al. Computer simulation of composite materials behavior under pressing // *Polymers*. 2022. Vol. 14, N. 23. Art. 5288. <https://doi.org/10.3390/polym14235288>
19. Ильющенко А. Ф., Шевцов А. И., Громыко Г. Ф. и др. К вопросу оптимизации технологических параметров упрочнения поверхностей трения газотермическим распылением металлокерамических порошков с последующей обработкой покрытий высокоэнергетическими импульсами // Порошковая металлургия. 2025. № 48. С. 195–202.

## References

1. Xiao-Su Yi, Shanyi Du, Litong Zhang. *Composite Materials Engineering, Volume 2: Different Types of Composite Materials*. Singapore, Springer Singapore – Chemical Industry Press, 2018. 617 p. <https://doi.org/10.1007/978-981-10-5690-1>
2. Dhuria Mohit, Grover Neeraj, Goyal Kavita. Review of solution methodologies for structural analysis of composites. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2024, vol. 103, art. 105157. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.105157>
3. Alotaibi Hatim, Soutis Constantinos, Jabbari Masoud. FEM and FVM methods for design and manufacturing of hierarchical aerospace composites: A review. *Applied Sciences*, 2025, vol. 15, no. 16, art. 8896. <https://doi.org/10.3390/app15168896>
4. Lyukshin B. A., Shilko S. V., Panin S. V. et al. *Dispersion-Filled Polymer Composites for Technical and Medical Purposes*. Novosibirsk, Publishing House of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2017. 311 p. (in Russian).
5. Zvi Hashin. Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2002, vol. 50, no. 12, pp. 2509–2537. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(02\)00050-9](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(02)00050-9)
6. Terada Kenjiro, Kikuchi Noboru. Microstructural modeling technique for homogenization analysis using digital images. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. Series A*, 1998, vol. 64, no. 617, pp. 170–177. <https://doi.org/10.1299/kikaia.64.170>
7. Lurie A. I. *Theory of Elasticity*. Moscow, Nauka, 1978. 512 p. (in Russian).
8. Babichev A. P. et al. *Physical Quantities: Handbook*. Moscow, Energoatomizdat, 1991. 1232 p. (in Russian).
9. Kolchanov N. V., Kolchanova E. A. *Mechanics: methodological guidelines for the general physics laboratory course*. Perm, Perm State National Research University (PSNRU), 2020. 121 p. (in Russian).
10. Gromyko G. F., Matsuka N. P., Piyushchenko A. F. et al. Numerical study of thermophysical properties of composite powder material. *Powder Metallurgy*, 2020, no. 43, pp. 132–139 (in Russian).
11. Avlas A. N. Numerical calculation of the effective thermal conductivity of dispersion-filled composite materials. *Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of*

*Belarus*, 2024, vol. 32, no. 1, pp. 86–96 (in Russian).

12. Henk A. van der Vorst. *Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems*. Cambridge, Cambridge University Press, 2003. 221 p.

13. Temam R., Miranville A. *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*. Moscow, Laboratory of Knowledge, 2025. 323 p. (in Russian).

14. Nikitin D. S., Shanenkov I. I., Nasyrbaev A. R. et al. Production of copper powders and metal-matrix composites with a copper matrix in arc discharge plasma. *Bulletin of Tomsk Polytechnic University. Geossets Engineering*, 2026, vol. 337, no. 2, pp. 149–160 (in Russian). <https://doi.org/10.18799/24131830/2026/2/5232>

15. Kovtun V. A., Pasovets V. N., Pleskachevsky Yu. M. et al. Tribotechnical and strength characteristics of hybrid nanofilled metal-polymer powder composites. *PSU Bulletin. Series B, Industry. Applied Sciences*, 2016, no. 3, pp. 108–114 (in Russian).

16. Xiaoyan Zhang, Qian Lei, Yang Gao et al. High-strength wear-resistant Cu/tungsten carbide/diamond composites fabricated by powder metallurgy. *Adv. Eng. Mater.*, 2024, vol. 26, no. 11, art. 2302142. <https://doi.org/10.1002/adem.202302142>

17. Wang B., Praksh V. Sound speed measurements in shock compressed cemented tungsten carbide: Evolution of elastic moduli with damage at pressures to 100 GPa. *Journal of Applied Physics*, 2024, vol. 135, no. 13, art. 135901. <https://doi.org/10.1063/5.0195772>

18. Berladir K., Zhyhylii D., Brejcha J. et al. Computer simulation of composite materials behavior under pressing. *Polymers*, 2022, vol. 14, no. 23, art. 5288. <https://doi.org/10.3390/polym14235288>

19. Ilyushchenko A. F., Shevtsov A. I., Gromyko G. F. et al. On the issue of optimizing technological parameters for strengthening friction surfaces by thermal spraying of metal-ceramic powders followed by coating treatment with high-energy pulses. *Powder Metallurgy*, 2025, no. 48, pp. 195–202 (in Russian).