Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1. С. 76–84

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMIC SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

УДК 517.9
https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1-76-84
EDN: DQVILP

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕВЫРОЖДЕННОЙ МАТРИЦЕЙ ПРИ УПРАВЛЕНИИ В НЕРЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

А. К. Деменчук, Е. К. Макаров

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
e-mail: demenchuk@im.bas-net.by, jcm@im.bas-net.by

Поступила: 12.03.2026 **Исправлена:** 06.04.2026 **Принята:** 29.05.2026

Ключевые слова: линейная система управления, периодическое решение, управление асинхронным спектром, иррегулярное допустимое множество, нерезонансный случай.

Аннотация. Рассматривается линейная периодическая система управления с постоянной невырожденной матрицей при управлении. Программное управление является периодическим, причем его период несоизмерим с периодом матрицы коэффициентов. Допустимое множество таких периодических управлений названо иррегулярным. Ставится задача выбора такого управления из указанного допустимого множества, чтобы теперь уже у квазипериодической системы появилось частично нерегулярное периодическое решение с заданным спектром частот, период которого совпадает с периодом управления. Такая задача названа задачей управления асинхронным спектром с иррегулярным допустимым множеством. Для ее решения исходная система сводится к некоторой линейной неоднородной системе меньшей размерности. Изучается нерезонансный случай, когда соответствующая однородная система не имеет нерегулярных периодических решений. Получено необходимое условие разрешимости задачи управления асинхронным спектром с иррегулярным допустимым множеством.

NECESSARY CONDITION OF SOLVABILITY OF THE CONTROL PROBLEM OF THE ASYNCHRONOUS SPECTRUM OF LINEAR PERIODIC SYSTEMS WITH NON-DEGENERATE MATRIX IN CONTROL IN NON-RESONANT CASE

A. K. Demenchuk, E. K. Makarov

Institute of Mathematic of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
e-mail: demenchuk@im.bas-net.by, jcm@im.bas-net.by

Received: 12.03.2026 **Revised:** 06.04.2026 **Accepted:** 29.05.2026

Keywords: linear control system, periodic solution, asynchronous spectrum control, irregular feasible set, non-resonant case.

Abstract. A linear periodic system with a constant non-degenerate matrix under control is considered. The program control is periodic, and its period is incommensurable with the period of the coefficient matrix. The admissible set of such periodic controls is called irregular. The problem is to choose such a control from this admissible set so that the now quasi-periodic system has a partially irregular periodic solution with a given frequency spectrum whose period coincides with the period of the control. Such problem is called the control problem of the asynchronous spectrum with an irregular admissible set. To solve it, the original system is reduced to some linear nonhomogeneous system of lower dimension. The non-resonant case is studied, when the corresponding homogeneous system has no irregular periodic solutions. A necessary condition for the solvability of the control problem of the asynchronous spectrum with an irregular admissible set is obtained.

1. Введение

Системы периодических и почти периодических дифференциальных уравнений, в том числе и линейных, лежат в основе многих математических моделей, описывающих колебательные процессы в механике, радиотехнике, биологии, эпидемиологии и других областях (см., напр. [1–5] и др.). В большинстве работ по теории колебаний, как правило, изучался так называемый регулярный случай, когда частотные модули периодической (почти периодической) дифференциальной системы и ее решения совпадают. Вопросы о других возможных соотношениях модулей частот не затрагивались. Хотя для некоторых прикладных задач необходимо иметь информацию о том, в какой мере специфика частот параметров системы оказывает влияние на частотный спектр ее решения. Так еще в середине 30-х гг. прошлого века в исследованиях, проводимых под общим руководством Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси [6], изучалось параметрическое воздействие на двухконтурные параметрические системы. В частности, при включении в цепь питания электромотора некоторой емкости для компенсации переменной индуктивности было установлено, что скорость вращения электромотора не синхронна с частотой тока питания. В результате, в отличие от обычного параметрического возбуждения, которое имело место только при целочисленном отношении частот, была получена новая своеобразная трансформация частоты вращения мотора практически в любом (в том числе и иррациональном) отношении с частотой контура. Позднее изучался ряд систем, преобразующих энергию источника высокочастотных колебаний в низкочастотные, частота которых практически не зависит от частоты источника [7; 8]. Так в [8] исследован случай, когда гармоническая сила, с которой поле конденсатора действует на пролетающий заряд, имеет частоту, несоизмеримую с частотой собственных колебаний заряда. При этом возможно установление устойчивых незатухающих колебаний.

Тем не менее изучение периодических решений периодических дифференциальных систем достаточно длительное время, вплоть до конца сороковых годов прошлого века, основывалось на гипотезе о соизмеримости периодов решения и системы. По-видимому, первым, кто указал на ошибочность такого предположения, был Х. Массера. В 1950 г. он показал, что периодические дифференциальные системы могут иметь периодические решения с иррациональным отношением периодов решения и системы [9]. Этот результат послужил началом нового направления в теории дифференциальных уравнений, которое впоследствии развивалось для различных классов систем и их решений в работах Я. Курцвейля и О. Вейводы [10], Н. П. Еругина [11], И. В. Гайшуна [12], Э. И. Грудо [13], В. Т. Борухова [14], А. В. Ласунского [15] и др. Такие периодические решения ввиду их необычности, в сравнении с ранее изучавшимися, были названы сильно нерегулярными [16], их частотный спектр – асинхронным, а описываемые ими колебания – асинхронными [17].

В работе [18] задача синтеза асинхронных режимов периодических систем сформулирована в виде следующей задачи управления. Пусть управляемая система описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

правая часть которого обеспечивает существование и единственность решений и периодична или почти периодична по t. Управление u принимает значения в некотором допустимом множестве, определяемом постановкой конкретной задачи. Задачу выбора такого управления u, чтобы у данного уравнения появились нерегулярные периодические решения, спектр частот которых содержит заданное подмножество L, названа задачей управления спектром нерегулярных колебаний (асинхронным спектром) с целевым множеством частот L. Вопросы разрешимости сформулированной задачи применительно к линейным периодическим системам с программным управлением того же периода изучались в работах [19; 20] и др. Задача управления асинхронным спектром допускает модифицированные варианты, связанные с выбором иных видов управления. Например, в монографии [21, гл. III] и др. рассматривался случай синтеза управления в виде линейной по фазовым переменным обратной связи. В работе [22] поставлена задача управления асинхронным спектром периодических систем, где в качестве допустимого множества выступают периодические функции, период которых несоизмерим с периодом системы, и приведено необходимое условие ее разрешимости, базирующееся на свойствах осциллирующей составляющей матрицы коэффициентов. В настоящей работе для решения этой задачи исходная система приводится к некоторой неоднородной системе меньшей размерности. Изучается нерезонансный случай, когда соответствующая однородная система не имеет нерегулярных периодических решений. Получено необходимое условие разрешимости задачи управления асинхронным спектром с иррегулярным допустимым множеством, использующее строение неособенной матрицы при управлении.

2. Предварительные сведения

Приведем кратко необходимые для замкнутости изложения понятия теории периодических и квазипериодических скалярных функций, которые без труда переносятся на векторно и матричнозначные функции [23, гл. I; гл. II, с. 118]. Пусть конечное множество действительных чисел $(\omega_1)^{-1},\ldots,(\omega_k)^{-1}$ рационально линейно независимо. Непрерывная функция $g(t)$ называется квазипериодической с периодами $\omega_1,\ldots,\omega_k$, если найдется непрерывная функция k переменных $G^*(t_1,\ldots,t_k)$, периодическая по t_j с периодом ω_j $(j=\overline{1,k})$, которая является диагональной для исходной функции, т. е.

$$g(t)\equiv G^*(t,\ldots,t).$$

Числа $2\pi/\omega_1,\ldots,2\pi/\omega_k$ образуют базис частот квазипериодической функции $g(t)$. Квазипериодическими будут, в частности, тригонометрические многочлены с рационально линейно независимыми частотами. Например, функция $g(t)=\sin t+\sin(\sqrt{2})t$ является квазипериодической с периодами $\omega_1=2\pi$ и $\omega_2=\sqrt{2}\pi$. Очевидно, что периодические функции являются подмножеством квазипериодических и имеют одночастотный базис.

Для непрерывной ω-периодической функции $f(t)$ среднее значение – это постоянная величина

$$\hat{f}=\frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} f(\tau)d\tau,$$

а осциллирующая часть определяется равенством

$$\tilde{f}(t)=f(t)-\hat{f}.$$

Показателем Фурье (частотой) функции $f(t)$ называется действительное число μ такое, что хотя бы один из интегралов

$$\int\limits_0^{\omega} f(t)\cos\mu t\,dt$$

или

$$\int\limits_0^{\omega} f(t)\sin\mu t\,dt$$

отличен от нуля. Множество показателей Фурье периодической функции образует ее спектр.

Через $\mathrm{rank}_{\mathrm{row}}H$ обозначим строчный ранг некоторой периодической матрицы $H(t)$, т. е. наибольшее число ее линейно независимых строк. Подобным образом можно определить и столбцовый ранг этой матрицы $\mathrm{rank}_{\mathrm{col}}H$. Отметим, что в общем случае строчный и столбцовый ранги матрицы $H(t)$ не обязаны совпадать. В стационарном случае введенные ранги, очевидно, совпадают. Будем говорить, что $H(t)$ – матрица неполного столбцового ранга, если ее столбцовый ранг меньше числа столбцов.

Рассмотрим квазипериодическую систему

$$\frac{dz}{dt}=g_1(t,z)+g_2(t,z),\quad z\in\mathbb{R}^n,$$

где вектор-функции g_1 и g_2 периодические по первому аргументу с периодами ω и Ω соответственно, причем отношение этих периодов иррационально. Периодическое решение $z=z(t)$ с периодом Ω данной системы называется частично нерегулярным [16], а его частотный спектр – частично асинхронным. Если $g_2(t,z)\equiv 0$, то решение $z(t)$ – нерегулярно (сильно нерегулярно).

В дальнейшем нам понадобится вытекающая из [16]

Лемма. *Линейная периодическая функциональная система*

$$\tilde{H}(t)w = 0$$

имеет отличное от тривиального сильно нерегулярное периодическое решение $w = w(t)$, если и только если ее матрица коэффициентов $\tilde{H}(t)$ имеет неполный столбцовый ранг.

Для разбиения некоторого k-вектора $l = \mathrm{col}\,(l_1, \ldots, l_k)$ примем следующие обозначения:

$$l = \mathrm{col}\,(l^{[s]}), l_{[k-s]}), \quad l^{[s]} = \mathrm{col}\,(l_1, \ldots, l_s), \quad l_{[k-s]}\mathrm{col}\,(l_{k-s+1}, \ldots, l_k),$$

т. е. векторы $l^{[s]}$ и $l_{[k-s]}$ составлены соответственно из s первых и $k-s$ последних компонент вектора l $(1 \leqslant s < k)$.

3. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

в которой $A(t)$ – непрерывная ω-периодическая $(n \times n)$-матрица, B – постоянная невырожденная $(n \times n)$-матрица, u – управление. В качестве управляющего воздействия $u(\cdot)$ в системе (1) будем использовать непрерывные на вещественной оси Ω-периодические n-вектор-функции такие, что числа ω и Ω несоизмеримы. Допустимое множество периодических функций такого рода будем называть иррегулярным.

Задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L и иррегулярным допустимым множеством состоит в следующем [22]: выбрать такое программное управление

$$u = u(t)$$

из указанного допустимого множества, чтобы квазипериодическая система

$$\dot{x} = A(t)x + Bu(t) \tag{2}$$

имела нетривиальное частично нерегулярное решение $x = x(t)$ периода Ω с заданным спектром частот L. Для решения этой задачи система (2) приводится к некоторой неоднородной системе меньшей размерности. Изучим нерезонансный случай, когда соответствующая однородная система не имеет нерегулярных периодических решений.

4. Основной результат

Пусть $u(t)$ – Ω-периодический n-вектор такой, что система (2) имеет частично нерегулярное решение $x(t)$ с множеством частот $L = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$. В силу постановки задачи элементы целевого множества попарно различны, соизмеримы между собой и несоизмеримы с $2\pi/\omega$. В таком случае найдется наибольшее положительное вещественное λ, которому будут кратны числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, т. е. $\lambda_j = k_j\lambda \quad (k_j \in N;\ j = \overline{1,s})$ и $\Omega = 2\pi/\lambda$, при этом отношение чисел ω и Ω иррационально.

Из работы [13] следует, что система (2) в смысле существования Ω-периодических решений эквивалентна системе, состоящей из двух подсистем

$$\dot{x} = \hat{A}x + Bu(t), \quad \tilde{A}(t)x = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим вторую подсистему из (3), которая является функциональной относительно неизвестного Ω-периодического вектора $x = x(t)$ с множеством частот L. Если осциллирующая часть $\tilde{A}(t)$ матрицы коэффициентов имеет полный столбцовый ранг, то согласно лемме эта подсистема не имеет искомых периодических решений. Поэтому далее будем предполагать, что имеет место оценка

$$\mathrm{rank}_{\mathrm{col}}\tilde{A} = r, \quad 1 \leqslant r < n. \tag{4}$$

В этом случае найдется постоянная неособенная $(n \times n)$-матрица Q, с помощью которой матрица $\tilde{A}(t)$ приводится к специальному виду

$$\tilde{A}(t)Q = \tilde{C}(t) = [\ 0\ \cdots\ 0\ \ \tilde{C}_{n,r}(t)\ ],$$

где первые $n-r$ столбцов нулевые, а столбцы правого блока $\tilde{C}_{n,r}$ размерности $n\times r$ линейно независимы (здесь и далее нижние индексы блочных матриц указывают их размерность). Один из алгоритмов построения преобразующей матрицы Q описан на этапе ii) доказательства теоремы работы [24].

Выполнив в системе (4) замену фазовых переменных

$$x = Qy \tag{5}$$

получим систему

$$\dot{y} = Q^{-1}\hat{A}Qy + Q^{-1}Bu(t), \quad \tilde{A}(t)Qy = 0,$$

которую запишем в виде

$$\dot{y} = \hat{C}y + Du(t), \quad \hat{C} = Q^{-1}\hat{A}Q, \quad D = Q^{-1}B,$$
$$\tilde{C}(t)y = [\,0\ \cdots\ 0\ \ \tilde{C}_{n,r}(t)]y = 0, \quad \tilde{C}(t) = \tilde{A}(t)Q. \tag{6}$$

В силу неособенности преобразования (5) система (6) также имеет Ω-периодическое решение $y(t) = Q^{-1}x(t)$. Поэтому выполняется, в частности, тождество

$$[\,0\ \cdots\ 0\ \ \tilde{C}_{n,r}(t)]y(t) \equiv 0,$$

которое с учетом принятых обозначений для разбиения векторов примет вид

$$\tilde{C}_{n,r}(t)y_{[n-r]}(t) \equiv 0.$$

Так как по построению матрица $\tilde{C}_{n,r}(t)$ имеет полный столбцовый ранг, то из последнего тождества в силу леммы вытекает тривиальность вектора $y_{[n-r]}(t)$. Следовательно, фазовый вектор имеет следующее строение:

$$y = \operatorname{col}(y^{[n-r]}), y_{[r]}), \quad y^{[n-r]} = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_{n-r}), \quad y_{[r]} = \operatorname{col}(0, \ldots, 0) = 0. \tag{7}$$

В соответствии с разбиением вектора y представим матрицу $\hat{C}$ в блочном виде. Пусть $\hat{C}^{(11)}_{n-r,n-r}$, $\hat{C}^{(21)}_{r,n-r}$ – ее левые верхний и нижний, а $\hat{C}^{(12)}_{n-r,r}$, $\hat{C}^{(22)}_{r,r}$ – правые верхний и нижний блоки, т. е.

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \hat{C}^{(11)}_{n-r,n-r} & \hat{C}^{(12)}_{n-r,r} \\ \\ \hat{C}^{(21)}_{r,n-r} & \hat{C}^{(22)}_{r,r} \end{pmatrix}.$$

С целью согласования размерностей матрицу D в свою очередь разобьем по вертикали на два блока $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$, образованные соответственно первыми $n-r$ и остальными r строками этой матрицы

$$D = \begin{pmatrix} D^{(1)} \\ \\ D^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Тогда, принимая во внимание введенные разбиения матриц $\hat{C}$, D систему (6) можно записать в виде

$$\dot{y}^{[n-r]} = \hat{C}^{(11)}_{n-r,n-r}y^{[n-r]} + \hat{C}^{(12)}_{n-r,r}y^{[r]} + D^{(1)}u(t),$$
$$\dot{y}^{[r]} = \hat{C}^{(21)}_{r,n-r}y^{[n-r]} + \hat{C}^{(22)}_{r,r}y^{[r]} + D^{(2)}u(t),$$

откуда на основании строения (7) фазового вектора получаем

$$\dot{y}^{[n-r]} = \hat{C}^{(11)}_{n-r,n-r}y^{[n-r]} + D^{(1)}u(t),$$
$$\hat{C}^{(21)}_{r,n-r}y^{[n-r]} + D^{(2)}u(t) = 0, \quad y^{[r]} = 0. \tag{8}$$

Поскольку исходная матрица B при управлении невырождена, то ввиду неособенности преобразования (5) матрица D также будет невырожденной. Поэтому строки матрицы D линейно независимы. Значит, ранг прямоугольной постоянной матрицы $D^{(2)}$ размерности $r\times n$, образованной последними строками матрицы D, равен числу строк, т. е.

$$\operatorname{rank} D^{(2)} = r, \quad r < n.$$

В этом случае найдется постоянная неособенная $(n\times n)$-матрица T такая, что у постоянной матрицы $D^{(2)}T=F^{(2)}$ первые r столбцов будут линейно независимыми, а последние $n-r$ столбцов – нулевыми (см., напр. [24])

$$F^{(2)}=D^{(2)}T=[\ F^{(21)}_{r,r}\ \ F^{(22)}_{r,n-r}\ ],\quad \det F^{(21)}_{r,r}\neq 0,\quad F^{(22)}_{r,n-r}=0.$$

Пусть также

$$F^{(1)}=D^{(1)}T=[\ F^{(11)}_{n-r,r}\ \ F^{(12)}_{n-r,n-r}\ ],\quad \operatorname{rank} F^{(1)}=n-r.$$

Введем линейное невырожденное преобразование управления

$$v(t)=T^{-1}u(t). \tag{9}$$

Тогда система (8) примет вид

$$\dot y^{[n-r]}=\hat C^{(11)}_{n-r,n-r}y^{[n-r]}+D^{(1)}Tv(t),$$
$$\hat C^{(21)}_{r,n-r}y^{[n-r]}+D^{(2)}Tv(t)=0,\quad y^{[r]}=0.$$

Новое представление вектора управления

$$v=\operatorname{col}(v^{[r]}),v_{[n-r]}),\quad v^{[r]}=\operatorname{col}(v_1,\ldots,v_r),\quad v_{[n-r]}=\operatorname{col}(v_{n-r+1},\ldots,v_n)$$

позволит с учетом введенных выше обозначений записать последнюю систему следующим образом:

$$\dot y^{[n-r]}=\hat C^{(11)}_{n-r,n-r}y^{[n-r]}+F^{(11)}_{n-r,r}v^{[r]}(t)+F^{(12)}_{n-r,n-r}v^{[n-r]}(t),$$
$$\hat C^{(21)}_{r,n-r}y^{[n-r]}+F^{(21)}_{r,r}v^{[r]}(t)+F^{(22)}_{r,n-r}v^{[n-r]}(t)=\hat C^{(21)}_{r,n-r}y^{[n-r]}+F^{(21)}_{r,r}v^{[r]}(t)=0,\quad y^{[r]}=0. \tag{10}$$

В силу неособенности матрицы $F^{(21)}_{r,r}$ из второго равенства в (10) выразим вектор

$$v^{[r]}(t)=-(F^{(21)}_{r,r})^{-1}\hat C^{(21)}_{r,n-r}y^{[n-r]}$$

и подставим полученное выражение в первую подсистему

$$\dot y^{[n-r]}=\hat C^{(11)}_{n-r,n-r}y^{[n-r]}+F^{(11)}_{n-r,r}(-(F^{(21)}_{r,r})^{-1}\hat C^{(21)}_{r,n-r}y^{[n-r]})+F^{(12)}_{n-r,n-r}v^{[n-r]}(t).$$

Таким образом, в результате выполненных преобразований получим систему

$$\dot y^{[n-r]}=H_{n-r,n-r}y^{[n-r]}+h(t), \tag{11}$$

где

$$H_{n-r,n-r}=\hat C^{(11)}_{n-r,n-r}-F^{(11)}_{n-r,r}(F^{(21)}_{r,r})^{-1}\hat C^{(21)}_{r,n-r},\quad h(t)=F^{(12)}_{n-r,n-r}v^{[n-r]}(t),$$

причем $y^{[r]}=0$, а $v^{[n-r]}(t)$ – нетривиальная компонента управления, составленная из первых $n-r$ элементов Ω-периодического вектора $T^{-1}u(t)$.

Рассмотрим соответствующую редуцированной системе (11) однородную стационарную систему

$$\dot y^{[n-r]}=H_{n-r,n-r}y^{[n-r]}. \tag{12}$$

Предположим, что система (12) не имеет Ω-периодических решений. Такой случай применительно к неоднородной системе (11) называется нерезонансным [25, п. 23].

Поскольку по исходному допущению система (2) имеет Ω-периодическое решение $x=x(t)$, то в силу обратимости выполненных преобразований (5), (9) и того, что компонента $y^{[r]}=0$, система (11) также имеет решение $y^{[n-r]}=y^{[n-r]}(t)$ периода Ω с таким же множеством частот. Из [2, с. 92] вытекает, что в нерезонансном случае система (11) не имеет Ω-периодических решений (отличных от тривиального), если выполняется условие $h(t)\equiv 0$. Поэтому далее считаем, что такое тождество не имеет места, т. е.

$$h(t)\not\equiv 0,$$

откуда следует, что правый блок размерности $(n-r)\times(n-r)$-матрицы $F^{(1)}=D^{(1)}T$ нетривиален

$$F^{(12)}_{n-r,n-r}\neq 0. \tag{13}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 4.1. *Пусть задача управления асинхронным спектром системы* (1) *с иррегулярным допустимым множеством имеет решение в нерезонансном случае. Тогда выполняется условие* (13).

Заключение. Для линейной периодической системы в нерезонансном случае дано необходимое условие разрешимости задачи управления асинхронным спектром с иррегулярным допустимым множеством, основанное на свойствах невырожденной матрицы при управлении. Полученное условие в совокупности с результатом работы [22] нацелено на построение критерия разрешимости рассматриваемой задачи.

Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси при поддержке БРФФИ (проект № Ф25КИ-015).

Литература

1. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. М.: Мир, 1966.

2. *Якубович В. А.* Линейные дифференциальные уравнения и их приложения. М.: Наука, 1972.

3. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. М.: Дрофа, 2004.

4. *Гусев А. Ф., Новоселова М. В.* Прикладная теория колебаний. Тверь: ТвГТУ, 2017.

5. *Стрелков С. П.* Введение в теорию колебаний. М.: Лань, 2024.

6. *Папалекси Н. Д.* Об одном случае параметрически связанных систем // Journ. Of Phys. Acad. Sc. USSR. 1939. Т. 1. С. 373–379.

7. *Пеннер Д. И., Дубошинский Я. Б., Дубошинский Д. Б., Козаков М. И.* Колебания с саморегулирующимся временем взаимодействия // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 5. С. 1065–1066.

8. *Пеннер Д. И., Дубошинский Д. Б., Козаков М. И., Вермель А. С., Галкин Ю. В.* Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний // Успехи физ. наук. 1973. Т. 109, вып. 1. С. 402–406.

9. *Massera J. L.* Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales // Bol. de la Facultad de Ingenieria. 1950. Vol. 4, N 1. P. 37–45.

10. *Курцвейль Я., Вейвода О.* О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Чехосл. мат. журнал. 1955. Т. 5, № 3. С. 362–370.

11. *Еругин Н. П.* О периодических решениях дифференциальных уравнений // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 1. С. 148–152.

12. *Гайшун И. В.* Уравнения в полных производных с периодическими коэффициентами // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 8. С. 684–686.

13. *Грудо Э. И., Деменчук А. К.* О периодических решениях с несоизмеримыми периодами линейных неоднородных периодических дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 3. С. 409–416.

14. *Борухов В. Т.* Сильно инвариантные подпространства неавтономных линейных периодических систем и их решения с периодом, несоизмеримым с периодом системы // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 5. С. 585–591.

15. *Ласунский А. В.* О периодических решениях системы разностных уравнений, период которых взаимно прост с периодом системы // Труды ИММ УрО РАН. 2025. Т. 31, № 1. С. 110–118.

16. *Demenchuk A. K.* Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems // Math. Bohemica. 2001. Vol. 126, N 1. P. 221–228.

17. *Ланда П. С., Дубошинский Я. Б.* Автоколебательные системы с высокочастотными источниками энергии // Успехи физ. наук. 1989. Т. 158, вып. 4. С. 729–742.

18. *Деменчук А. К.* Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний // Доклады НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 4. С. 37–42.

19. *Деменчук А. К.* Управление спектром нерегулярных колебаний линейных систем с совпадением рангов матрицы при управлении и расширенной матрицы // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 9. С. 1241–1246.

20. *Деменчук А. К.* Управление асинхронным спектром линейных систем с невырожденным средним значением матрицы коэффициентов // Труды Института математики. 2020. Т. 28, № 1–2. С. 11–16.

21. *Деменчук А. К.* Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления. Saarbrucken: Lambert Academic Publishing, 2012.

22. *Деменчук А. К., Макаров Е. К.* Задача управления асинхронным спектром линейных периодических систем с иррегулярным допустимым множеством – необходимое условие разрешимости // Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Т. 33, № 2. С. 90–95.

23. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции. М.: ГТТИ, 1953.

24. *Деменчук А. К.* Зависимость между компонентами сильно нерегулярного квазипериодического решения линейной однородной алгебраической системы // Труды Института математики НАН Беларуси. 2024. Т. 32, № 1. С. 67–74.

25. *Демидович Б. М.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

References

1. Hale J. *Oscillations in Nonlinear Systems*. Moscow, Mir, 1966 (in Russian).

2. Yakubovich V. A., Starginskii V. M. *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients and Their Applications*. Moscow, Nauka, 1972 (in Russian).

3. Babakov I. M. *Theory of Oscillations*. Moscow, Drofa, 2004 (in Russian).

4. Gusev A. F., Novoselova M. V. *Applied Theory of Oscillations*. Tver, TvGTU, 2017 (in Russian).

5. Strelkov S. P. *Introduction to the Theory of Oscillations*. Moscow, Lan, 2024 (in Russian).

6. Papaleksi N. D. On one case of parametrically related systems. *Journ. Of Phys. Acad.of Sc. of USSR*, 1939, vol. 1, pp. 373–379 (in Russian).

7. Penner D. I., Duboshinskii Ya. B., Duboshinskii D. B. Oscillations with self-regulating interaction time. *Doklady Acad. of Sci. of USSR*, 1972, vol. 204, no. 5, pp. 1065–1066 (in Russian).

8. Penner D. I., Duboshinsky D. B., Kozakov M. I., Vermel A. S., Galkin Yu. V. Asynchronous excitation of undamped oscillations. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 1973, vol. 109, no. 1, pp. 402–406 (in Russian).

9. Massera J. L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales. *Bol. de la Facultad de Ingenieria*, 1950, vol. 4, no. 1, pp. 37–45.

10. Kurzweil Ya., Veyvoda O. On periodic and almost periodic solutions of systems of ordinary differential equations. *Czechosl. Math. J.*, 1955, vol. 5, no. 3, pp. 362–370 (in Russian).

11. Erugin N. P. On periodic solutions of differential equations. *Priklad. Math. and Mech.*, 1956, vol. 20, is. 1, pp. 148–152 (in Russian).

12. Gaishun I. V. Total derivative equations with periodic coefficients. *Doklady Acad. of Sci. of BSSR*, 1979, vol. 23, no. 8, pp. 684–686 (in Russian).

13. Grudo E. I., Demenchuk A. K. On periodic solutions with incommensurate periods of linear inhomogeneous periodic differential systems. *Differential Equations*, 1987, vol. 23, no. 3, pp. 409–416 (in Russian).

14. Borukhov V. T. Strongly invariant subspaces non-autonomous linear periodic systems and their solutions with period, incommensurable with the period of the system. *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 5, pp. 585–591 (in Russian).

15. Lasunsky A. B. On periodic solutions of a system of difference equations whose period is coprime with the period of the system. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 110–118 (in Russian).

16. Demenchuk A. K. Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems. *Math. Bohemica*, 2001, vol. 126, no. 1, pp. 221–228.

17. Landa P. S., Duboshinskii Ya. B. Self-oscillatory systems with high-frequency energy sources. *Uspekhi Fiz. Nauk*, 1989, vol. 158, is. 4, pp. 729–742 (in Russian).

18. Demenchuk A. K. Problem of control of the spectrum of strongly irregular periodic oscillations. *Doklady NAN Belarusi*, 2009, vol. 53, no. 4, pp. 37–42 (in Russian).

19. Demenchuk A. K. Control of the spectrum of irregular oscillations of linear systems with the coincidence ranks of the control matrix and the extended matrix. *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 9, pp. 1241–1246 (in Russian).

20. Demenchuk A. K. Control of an asynchronous spectrum of linear systems with a non-degenerate average value of the coefficient matrix. *Trudy Instituta Matematiki*, 2020, vol. 28, № 1–2, pp. 11–16 (in Russian).

21. Demenchuk A. K. *Asynchronous oscillations in differential systems. Conditions of existence and control*. Saarbrucken, Lambert Academic Publishing, 2012 (in Russian).

22. Demenchuk A. K., Makarov E. K. The problem of controlling an asynchronous spectrum of linear periodic systems with an irregular allowable set is a necessary condition for solvability. *Proceeding of the Institute of Mathematics of the NAS of Belarus*, 2025, vol. 33, no. 2, pp. 90–95 (in Russian).

23. Levitan B. M. *Almost Periodic Functions*. Moscow, GTTI, 1953 (in Russian).

24. Demenchuk A. K. Dependence between the components of a strongly irregular quasi-periodic solution of a linear homogeneous algebraic system. *Proceeding of the Institute of Mathematics of the NAS of Belarus*, 2024, vol. 32, no. 1, pp. 67–74 (in Russian).

25. Demidovich B. M. *Lectures on Mathematical Theory of Stability*. Moscow, Nauka, 1967 (in Russian).