Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1. С. 68–75

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
COMPUTATIONAL MATHEMATICS

УДК 519.21+519.6 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1-68-75
EDN: YPMEOH

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПРИБЛИЖЕННОМУ ВЫЧИСЛЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ ОТ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРЕЙФОМ

А. В. Жерело

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: zherelo@bsu.by

Поступила: 31.03.2026 **Исправлена:** 14.05.2026 **Принята:** 29.05.2026

Ключевые слова: случайный процесс, стохастическое дифференциальное уравнение, интеграл Ито, математическое ожидание, приближенные вычисления, слабые аппроксимации.

Аннотация. Объектом исследования статьи является стохастическое дифференциальное уравнение Ито с дрейфом. В работе предложен метод приближенного вычисления математических ожиданий функций от решения рассматриваемого уравнения. Метод основан на использовании вспомогательного случайного процесса специального вида, зависящего только от процесса Винера. Такой подход позволяет использовать для получения приближенного значения искомого математического ожидания уже известные формулы приближенного вычисления для случая, когда функционал зависит только от процесса Винера. В работе представлены результаты численного эксперимента.

ON AN APPROACH TO THE APPROXIMATE CALCULATION OF MATHEMATICAL EXPECTATIONS FROM SOLUTIONS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DRIFT

A. V. Zherelo

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: zherelo@bsu.by

Received: 31.03.2026 **Revised:** 14.05.2026 **Accepted:** 29.05.2026

Keywords: random process, stochastic differential equation, Ito integral, mathematical expectation, approximate calculations, weak approximations.

Abstract. The object of the paper's research is the stochastic differential equation of Ito with drift. The paper proposes a method for approximate calculation of mathematical expectations of functions from the solution of such equation. The method is based on the use of an auxiliary random process of a special kind that depends only on the Wiener process. This approach allows us to use the already known approximate calculation formulas for the case when the functional depends only on the Wiener process to obtain an approximate value of the desired mathematical expectation. The paper presents the results of a numerical experiment.

1. Введение

В современной промышленности математическое моделирование, основанное на использовании дифференциальных уравнений, уже давно является обязательным этапом проектирования и создания конечных изделий. Разработанные методы активно проникают и в те направления деятельности человека, которые напрямую могут быть и не связаны с производством конечного продукта, например, в экономику и финансы. Явления, возникающие в таких направлениях, и для которых исследователям хотелось бы получить строгие математические описания, зачастую не предоставляют исследователю информации, достаточной для построения детерминированной модели. Отсутствие такой определенности приводит к необходимости использования уравнений, содержащих случайный компонент. Например, в финансах как на уровне макроэкономических показателей, так и на уровне описания микроэкономических явлений, на данный момент активно используются стохастические дифференциальные уравнения [1; 2]. В свою очередь, поскольку стохастические уравнения описывают, как правило, поведение моделируемой системы на микроуровне, т. е. описывают траектории стохастической системы, соответствующей исследуемому явлению, как правило, у исследователя в большей степени присутствует интерес к получению общей информации о моделируемой системе, чем о конкретной траектории. К примеру, если мы говорим о финансах, то интерес представляют такие показатели, как общий тренд движения рынка или учетной ставки, которые являются функционалами от случайных процессов, а именно, математические ожидания от решений используемых для описания моделируемых явлений стохастических уравнений.

Разработка методов приближенного вычисления математических ожиданий является актуальной задачей, поскольку точно вычислить значения от функционалов от решений в подавляющем количестве случаев невозможно. Как следствие, исследователи зачастую упрощают используемую модель ради возможности вычисления хотя бы некоторых функционалов от решения, возможно, жертвуя при этом полезной информацией о структуре моделируемого процесса.

В данной работе предлагается метод приближенного вычисления математических ожиданий от решения стохастического дифференциального уравнения, содержащего дрейф. Здесь и далее в статье будем говорить, что в стохастическом дифференциальном уравнении присутствует дрейф, если в соответствующей интегральной форме уравнения присутствует интеграл по времени.

2. Вспомогательное уравнение

Рассмотрим стохастическое уравнение вида

$$X_t = X_0 + \int\limits_0^t \alpha(X_s, s)ds + \int\limits_0^t \beta(X_{s-}, s)dW_s, \tag{1}$$

где $X_0 \in \mathbb{R}$, W_t – процесс Винера, $t \in [0,1]$, X_t согласован с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$.

Здесь и далее будем обозначать

$$\|x\| = \left(\mathbb{E}[x^2]\right)^{\frac{1}{2}},$$

где x – некоторая $\mathcal{F}_t$-измеримая случайная величина.

Далее в работе будем считать, что подынтегральные функции α и β удовлетворяют условию существования сильного решения:

$$\|\alpha(y_1,t) - \alpha(y_2,t)\ |^2 + \|\beta(y_1,t) - \beta(y_2,t)\ |^2 \leqslant K_1\|y_1 - y_2\|^2, \tag{2}$$
$$\|\alpha(y_1,t)\ |^2 + \|\beta(y_1,t)\|^2 \leqslant K_2(1 + \|y_1\|^2),$$

где y_1, y_2 $\mathcal{F}_t$-измеримы и $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

Основной задачей данной статьи является разработка метода приближенного расчета математического ожидания вида $\mathbb{E}[F(X_t)]$, где F – гладкий функционал, удовлетворяющий условию Липшица

$$\|F(y_1) - F(y_2)\| \leqslant C\|y_1 - y_2\|, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Точность расчета значений функционала такого вида, как правило, не высока. В частности, если мы рассмотрим хорошо известную схему Мильштейна, то увидим, что ее точность, с которой данная аппроксимация приближает моделируемое решение, имеет порядок $\mathcal{O}(t)$ (например, см. [3]). А это означает, что в случае вычисления даже простого функционала, такого как математическое ожидание от решения уравнения (1) будет хуже, поскольку при использовании метода Монте-Карло мы выбираем конечный набор моделируемых траекторий. Аналогичные рассуждения касаются и стохастического метода Рунге–Кутта [4], при котором можно достичь порядка аппроксимации решения $\mathcal{O}(t^2)$ и даже более, однако это значительно усложняет вычисления.

В случае использования слабых методов приближенного вычисления математических ожиданий так же существует задача улучшения точности получаемых значений. Например, в работе [5] была предложена формула приближенного вычисления математического ожидания указанного вида, однако точность полученной в упомянутой работе формулы составляет $\mathcal{O}(t^{3/2})$. Здесь стоит отметить, что, в отличие от упомянутых выше методов, это точность вычисления математического ожидания от функционала от решения.

При численном решении детерминированных обыкновенных дифференциальных уравнений с целью улучшения точности получаемых приближенных значений часто используют подход типа «предиктор-корректор». Если описать такой подход упрощенно, то он представляет собой комбинацию из двух шагов, где на первом шаге вычисляется промежуточное значение решения в некоторой промежуточной точке интервала дискретизации, которое затем используется для коррекции получаемого приближенного значения на конце интервала.

К сожалению, применить похожую схему напрямую к стохастическому дифференциальному уравнению не представляется возможным в силу того, что в уравнении (1) интеграл по dW_s является интегралом Ито и, следовательно, мы не можем использовать в подынтегральном выражении значение процесса X_s в некоторой внутренней точке принципиально, поскольку в таком случае интеграл в правой части не определен.

Чтобы избежать указанной проблемы, предлагается использовать вспомогательное уравнение вида

$$\tilde{X}_t = X_0 + \int_0^t \alpha\left(X_0 + \alpha(a,t/2)s + \beta(a,t/2)W_s, s\right) ds + \int_0^t \beta\left(X_0 + \alpha(a,t/2)s + \beta(a,t/2)W_{s-}, s\right) dW_s, \quad (3)$$

где $a \in \mathbb{R}$ – некоторый калибровочный параметр, который будет определен ниже. Приближенное вычисление $\mathbb{E}[F(X_t)]$ будет основано на методах, описанных в [6], которые применяются к $\tilde{X}_t$ в сочетании с результатами, представленными в [5].

3. Оценка приближения и выбор параметра

Предположим далее, что $a \in \mathbb{R}$ – некоторая известная величина. Оценим разницу между $\mathbb{E}[F(X_t)]$ и $\mathbb{E}[F(\tilde{X}_t)]$, где $\tilde{X}_t$ задается уравнением (3). Тогда

$$\left|\mathbb{E}[F(X_t)] - \mathbb{E}[F(\tilde{X}_t)]\right| \leqslant \mathbb{E}\left|F(X_t) - F(\tilde{X}_t)\right| \leqslant \|F(X_t) - F(\tilde{X}_t)\| \leqslant C\|X_t - \tilde{X}_t\| =$$

$$= C\left\{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \alpha(X_s,s) - \alpha\left(X_0 + \alpha(a,t/2)s + \beta(a,t/2)W_s, s\right) ds + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \int_0^t \beta(X_{s-},s) - \beta\left(X_0 + \alpha(a,t/2)s + \beta(a,t/2)W_{s-}, s\right) dW_s\right)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant (*).$$

На данном шаге используем неравенство $(x+y)^2 \leqslant 2(x^2+y^2)$

$$(*) \leqslant \sqrt{2}C\left\{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \alpha(X_s,s) - \alpha\left(X_0 + \alpha(a,t/2)s + \beta(a,t/2)W_s, s\right) ds\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\int_0^t \beta(X_{s-},s) - \beta\left(X_0 + \alpha(a,t/2)s + \beta(a,t/2)W_{s-}, s\right) dW_s\right)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant (*).$$

Воспользуемся далее следующим свойством математического ожидания интеграла Ито (например, см. [7; 8]):

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t f(s)dW_s\right)^2\right] = \int_0^t \mathbb{E}[f(s)^2]ds.$$

Тогда предыдущее выражение может быть записано в виде

$$(*) \leqslant \sqrt{2}C\left\{\int_0^t \mathbb{E}\left[\left(\alpha(X_s,s) - \alpha\left(X_0 + \alpha(a,t/2)s + \beta(a,t/2)W_s, s\right)\right)^2\right] ds + \right.$$

$$+\int\limits_0^t \mathbb{E}\left[(\beta(X_s,s)-\beta\left(X_0+\alpha(a,t/2)s+\beta(a,t/2)W_{s-},s\right))^2\right]ds\Bigg\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}C\Bigg\{\int\limits_0^t \|\alpha(X_s,s)-\alpha\left(X_0+\alpha(a,t/2)s+\beta(a,t/2)W_s,s\right)\|^2\,ds+$$

$$+\int\limits_0^t \|\beta(X_s,s)-\beta\left(X_0+\alpha(a,t/2)s+\beta(a,t/2)W_{s-},s\right)\|^2\,ds\Bigg\}^{\frac{1}{2}} \leqslant (*).$$

Теперь, воспользовавшись условием (2), можно представить оценку последнего выражения следующим образом:

$$(*) \leqslant \sqrt{2}C\Bigg\{K_1\int\limits_0^t \|X_s-(X_0+\alpha(a,t/2)s+\beta(a,t/2)W_s)\|^2\,ds\Bigg\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$=\sqrt{2}C\Bigg\{K_1\int\limits_0^t \Bigg\|\int\limits_0^s \alpha(X_\tau,\tau)-\alpha(a,t/2)d\tau+\int\limits_0^s \beta(X_{\tau-},\tau)-\beta(a,t/2)dW_\tau\Bigg\|^2 ds\Bigg\}^{\frac{1}{2}} \leqslant (*).$$

Здесь снова используем упомянутое ранее неравенство, свойства интегралов Ито и условие (2) и получим окончательный вид оценки

$$(*) \leqslant \sqrt{2}C\Bigg\{2K_1t\int\limits_0^t \|\alpha(X_\tau,\tau)-\alpha(a,t/2)\|^2+\|\beta(X_{\tau-},\tau)-\beta(a,t/2)\|^2 d\tau\Bigg\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2C\Bigg\{K_1t^2\Big(\|\alpha(X_{t/2},t/2)-\alpha(a,t/2)\|^2+\|\beta(X_{t/2},t/2)-\beta(a,t/2)\|^2+\mathcal{O}(t^3)\Big)\Bigg\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2tC\left\{K_1^2\|X_{t/2}-a\|^2+\mathcal{O}(t^3)\right\}^{\frac{1}{2}} = 2tCK_1\|X_{t/2}-a\|+\mathcal{O}(t^{5/2}). \tag{4}$$

Для определения значения параметра a нужно минимизировать значение

$$\|X_{t/2}-a\|^2=\mathbb{E}[(X_{t/2}-a)^2].$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\mathbb{E}[(X_{t/2}-a)^2]=\mathbb{E}[(X_{t/2}-\mathbb{E}[X_{t/2}]+\mathbb{E}[X_{t/2}]-a)^2]=$$

$$=(\mathbb{E}[X_{t/2}]-a)^2+\mathbb{E}[(X_{t/2}-\mathbb{E}[X_{t/2}])^2]+2(\mathbb{E}[X_{t/2}]-a)\mathbb{E}[(X_{t/2}-\mathbb{E}[X_{t/2}])]=$$

$$=(\mathbb{E}[X_{t/2}]-a)^2+\mathbb{E}\left[\left(\int\limits_0^{t/2}\beta(X_{s-},s)dW_s\right)^2\right]=(\mathbb{E}[X_{t/2}]-a)^2+\int\limits_0^{t/2}\mathbb{E}[\beta(X_{s-},s)^2]ds. \tag{5}$$

Принимая во внимание, что оба слагаемых положительны, минимальное значение будет достигаться при $a=\mathbb{E}[X_{t/2}]$.

Вычислить a точно в общем случае не представляется возможным. Однако $\mathbb{E}[X_{t/2}]$ можно вычислить приближенно используя формулу, предложенную в [5]. Причем, используя тот факт, что

$$\mathbb{E}[X_{t/2}]=X_0+\int\limits_0^{t/2}\mathbb{E}[\alpha(X_s,s)]ds,$$

и, применив формулу из [5] непосредственно к математическому ожиданию под знаком интеграла, согласно полученным в той же статье оценкам, выражение (5) можно записать

$$\mathbb{E}[(X_{t/2}-a)^2]=\int\limits_0^{t/2}\mathbb{E}[\beta(X_{s-},s)^2]ds+\mathcal{O}(t^3)\leqslant\int\limits_0^{t/2}\mathbb{E}[K_2(1+(X_{s-})^2]ds+\mathcal{O}(t^3)=$$

$$= \frac{1}{2}tK_2 + \int\limits_0^{t/2} \mathbb{E}[(X_{s-})^2]ds + \mathcal{O}(t^3) = \frac{1}{2}t(K_2 + X_0^2) + \mathcal{O}(t^2).$$

Подставив последнее выражение в (4) получим

$$\left|\mathbb{E}[F(X_t)] - \mathbb{E}[F(\tilde{X}_t)]\right| \leqslant t^2 C K_1 (K_2 + X_0^2) + \mathcal{O}(t^{5/2}).$$

4. Приближенная формула

Исходя из полученного выше результата для оценки значения $\mathbb{E}[F(X_t)]$ можно перейти к приближенному вычислению $\mathbb{E}[F(\tilde{X}_t)]$.

Здесь можно воспользоваться семейством формул, предложенных в [6], поскольку было положено, что функционал F является гладким.

Для демонстрации предложенного метода воспользуемся формулой, точной для полиномов третьей степени (см. [6]):

$$\mathbb{E}[W_{(\cdot)}] \approx S_0^{(1)}(F) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} F\left[\mathrm{sign}(u)1_{[|u|,1]}(\cdot)\right] du,$$

где G – это функционал, гладко зависящий от W_t. Тогда $G[W_{(\cdot)}] = F[\tilde{X}_{(\cdot)}]$ и

$$S_0^{(1)}(G) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} F\left[X_0 + \int\limits_0^t \alpha(X_0 + \alpha(a,t/2)s + \beta(a,t/2)\mathrm{sign}(u)1_{[|u|,1]}(s), s)ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^t \beta(X_0 + \alpha(a,t/2)s + \beta(a,t/2)\mathrm{sign}(u)1_{[|u|,1]}(s-), s)\frac{d(\mathrm{sign}(u)1_{[|u|,1]}(s))}{ds}\right] du = (*).$$

Здесь необходимо заметить, что $1_{[|u|,1]}(|u|-) = 0$, тогда

$$(*) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} F\left[X_0 + \int\limits_0^t \alpha(X_0 + \alpha(a,t/2)s + \beta(a,t/2)\mathrm{sign}(u)1_{[|u|,1]}(s), s)ds + \right.$$

$$\left. + \beta(X_0 + \alpha(a,t/2)|u|, |u|)\mathrm{sign}(u)1_{[|u|,1]}(t)\right] du = (*).$$

Воспользуемся тем фактом, что $1_{[|u|,1]}(s-) = 0$ для $|u| > t$, и представим последний интеграл в виде следующей суммы:

$$(*) = \int\limits_{-1}^{-t} F\left[X_0 + \int\limits_0^t \alpha(X_0 + \alpha(a,t/2)s, s)ds\right] du +$$

$$+ \int\limits_{-t}^{t} F\left[X_0 + \int\limits_0^t \alpha(X_0 + \alpha(a,t/2)s + \beta(a,t/2)\mathrm{sign}(u), s)ds + \beta(X_0 + \alpha(a,t/2)|u|, |u|)\mathrm{sign}(u)\right] du +$$

$$+ \int\limits_{t}^{1} F\left[X_0 + \int\limits_0^t \alpha(X_0 + \alpha(a,t/2)s, s)ds\right] du.$$

Таким образом, формулу для приближенного вычисления $\mathbb{E}[F(X_t)]$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[F(X_t)] \quad &\approx \quad S_0^{(1)}[F[\tilde{X}_t]] = (1-t)F\left[X_0 + \int\limits_0^t \alpha(X_0 + \alpha(a,t/2)s, s)ds\right] + \\ &+\frac{1}{2}\int\limits_0^t \sum_{k=0}^{1} F\left[X_0 + \int\limits_0^t \alpha(X_0 + \alpha(a,t/2)s + (-1)^k\beta(a,t/2), s)ds + \right. \\ &\left. +(-1)^k\beta(X_0 + \alpha(a,t/2)u, u)\right] du. \qquad (6)\end{aligned}$$

Здесь необходимо отметить, что полученная формула представляет особый интерес при приближенном вычислении математических ожиданий, поскольку и в методах типа Монте-Карло и в слабых аппроксимациях, таких как в [5] при проведении итоговых расчетов в используемых формулах в той или иной мере присутствует аппроксимация процесса, определяемого (1), тогда как в предложенной формуле присутствует аппроксимация процесса Винера, который значительно лучше изучен, что, в свою очередь, может быть использовано для построения более широкого и вычислительно простого класса формул.

5. Численный эксперимент

Рассмотрим далее уравнения, для которых получение аналитических представлений решений сопряжено со значительными вычислительными трудностями. Рассмотрим, для начала, уравнение вида

$$X_t = 1 + \int\limits_0^t \cos X_s ds + \int\limits_0^t \sin X_{s-} dW_s,$$

для которого вычислим значение функционала вида $\mathbb{E}[\sin X_t]$.

Вычисленные с помощью предложенной в работе [5] формулы значения параметра a для $t = 0,005$ и $t = 0,05$ равны соответственно $\mathbb{E}[X_{0,005}] \approx 1,00269$ и $\mathbb{E}[X_{0,05}] \approx 1,02678$.

Результаты численного эксперимента для математических ожиданий $\mathbb{E}[\sin X_t]$ и $\mathbb{E}[\cos X_t]$ приведены в табл. 1 и 2. В табл. 1–4 N обозначает количество симуляций траекторий, которое было использовано для расчета значения функционала по схеме Мильштейна (см. [9]), и которая получила широкое распространение в задачах для рассматриваемого типа уравнений (например, см.[3]).

Здесь необходимо обратить внимание читателя на тот факт, что даже при таком большом количестве моделируемых траекторий в схемах типа Монте-Карло не происходит стабилизации вычисляемых значений, в связи с чем в таблицах для каждого вычисляемого математического ожидания представлены результаты трех различных симуляций.

Таблица 1. **Результаты численного эксперимента для** $\mathbb{E}[\sin X_t]$

t	С применением формул (3) и (6)	Метод Мильштейна $N = 10000$		
0,01	0,840527	0,841178	0,841574	0,841930
0,1	0,832592	0,833878	0,843205	0,837589

Таблица 2. **Результаты численного эксперимента для** $\mathbb{E}[\cos X_t]$

t	С применением формул (3) и (6)	Метод Мильштейна $N = 10000$		
0,01	0,533343	0,533025	0,534185	0,53446
0,1	0,476793	0,482863	0,479152	0,48082

Далее приведем результаты численного эксперимента для еще одного нелинейного уравнения

$$X_t = 1 + \int\limits_0^t X_s^2 ds + \int\limits_0^t (\sin X_{s-})^2 dW_s.$$

Значения параметра a в этом случае равны $\mathbb{E}[X_{0,005}] \approx 1,00504$ и $\mathbb{E}[X_{0,05}] \approx 1,05386$. Результаты вычисления математического ожидания $\mathbb{E}[(\sin X_s)^2]$ приведены в табл. 3 и для $\mathbb{E}[(\cos X_s)^2]$ в табл. 4.

Таблица 3. **Результаты численного эксперимента для** $\mathbb{E}[(\sin X_s)^2]$

t	С применением формул (3) и (6)	Метод Мильштейна $N = 100000$		
0,01	0,714831	0,716077	0,714889	0,714839
0,1	0,76557	0,762969	0,759787	0,761945

Таблица 4. **Результаты численного эксперимента для** $\mathbb{E}[(\cos X_s)^2]$

t	С применением формул (3) и (6)	Метод Мильштейна $N = 100000$		
0,01	0,285169	0,284682	0,285335	0,285275
0,1	0,23443	0,238896	0,235424	0,237824

6. Заключение

В данной работе предложен подход к приближенному вычислению математических ожиданий от решений уравнения с дрейфом. Подход предполагает возможность использования большого семейства формул (см., например, [6; 10]) На основе элементарной формулы третьей степени точности построена приближенная формула для вычисления математического ожидания функции от решения стохастического дифференциального уравнения, содержащего дрейф. В уравнении используется стохастический интеграл по процессу Винера в смысле Ито.

Полученная формула относится к классу так называемых слабых аппроксимаций и опирается на формулу, точную для моментов третьего порядка процесса Винера, примененную к предложенному в работе вспомогательному процессу специального вида. Проведен численный эксперимент. Указанный подход позволяет разделить процедуру вычисления математического ожидания на два этапа, этап аналитических вычислений и этап численного расчета, что при многократном применении формулы значительно быстрее и вычислительно экономичнее, чем традиционно используемые методы типа Монте-Карло, которые требуют многократного моделирования поведения стохастической системы каждый раз, когда необходимо осуществить вычисление некоторого математического ожидания.

Литература

1. *Brigo D., Mercurio F.* Interest Rate Models – Theory and Practice With Smile, Inflation and Credit. Springer Finance, 2006.

2. *Andersen Leif B. G., Piterbarg V. V.* Interest Rate Modeling. Atlantic Financial Press, 2011.

3. *Kloeden P. E., Platen E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer, 1999.

4. *Rößler A.* Runge-Kutta methods for the strong approximation of solutions of stochastic differential equations // SIAM J. Numer. Anal. 2010. Vol. 48, N 3. P. 922–952.

5. *Жерело А. В.* Приближенная формула для математических ожиданий от решения стохастического дифференциального уравнения с дрейфом // Труды Института математики НАН Беларуси. 2025. Т. 33, № 1. С. 87–94.

6. *Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A.* Functiona Integrals; Approximate Evaluation and Applications. Dordreht: «Kluwer Acad. Publ.», 1993.

7. *Øksendal B.* Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. Springer, 2003.

8. *Applebaum D.* Levy Processes and Stochastic Calculus. Cambridge University Press, 2009.

9. *Мильштейн Г. Н.* Приближенное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применения. 1974. Т. 19, № 3. С. 583–588.

10. *Егоров А. Д., Жидков Е. П., Лобанов Ю. Ю.* Введение в теорию и приложения функциональных интегралов. М.: «Физматлит», 2006.

References

1. Brigo D., Mercurio F. *Interest Rate Models – Theory and Practice With Smile, Inflation and Credit*. Springer Finance, 2006.

2. Andersen Leif B. G., Piterbarg V. V. *Interest Rate Modeling.* Atlantic Financial Press, 2011.

3. Kloeden P. E., Platen E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, 1999.

4. Rößler A. Runge-Kutta methods for the strong approximation of solutions of stochastic differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 2010, vol. 48, no. 3, pp. 922–952.

5. Zherelo A. V. Approximate formula for mathematical expectations of a solution of a stochastic differential equation with drift. *Proceedings of the Institute of Mathematics of the NAS of Belarus*. 2025, vol. 33, no. 1, pp. 87–94 (in Russian).

6. Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A. *Functiona Integrals; Approximate Evaluation and Applications.* Dordreht, Kluwer Acad. Publ., 1993.

7. Øksendal B. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer, 2003.

8. Applebaum D. *Levy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge University Press, 2009.

9. Milshtein G. N. Approximate integration of stochastic differential equations. *Theory of Probability & Its Applications,* 1974, vol. 19, no 3. pp. 583–588 (in Russian).

10. Egorov A. D., Zhidkov E. P., Lobanov Yu. Yu. *Introduction in a Theory and Applications of Functional Integlas*. Moscow, Phismatlit, 2006 (in Russian).