Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1. С. 56–67

УДК 517.948.32 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1-56-67
EDN: FEQFZF

ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТИПА ЗАДАЧИ РИМАНА

А. П. Шилин

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail: a.p.shilin@gmail.com

Поступила: 05.04.2026 **Исправлена:** 15.05.2026 **Принята:** 29.05.2026

Ключевые слова: краевая задача Римана, линейные дифференциальные уравнения, метод вариации постоянных, обобщенные формулы Сохоцкого, определители.

Аннотация. На замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости, изучаются обобщенные краевые задачи Римана. В краевое условие задач наряду с предельными значениями искомых функций входят предельные значения их производных. Краевое условие записывается с помощью определителей, близких к определителям Вронского. Решение задач сводится к решению классической задачи Римана и решению линейных дифференциальных уравнений в областях комплексной плоскости с некоторыми ограничениями на решения. Явно указываются условия разрешимости исходных задач, при их выполнении приводятся явные формулы решений. Приведены примеры.

EXPLICIT SOLUTION OF DIFFERENTIAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS SUCH AS THE RIEMANN PROBLEM

A. P. Shilin

Belarusian State University, Minsk, Belarus
e-mail: a.p.shilin@gmail.com

Received: 05.04.2026 **Revised:** 15.05.2026 **Accepted:** 29.05.2026

Keywords: Riemann boundary value problem, linear differential equations, method of variation of constants, generalized formulas of Sokhotsky, determinants.

Abstract. Generalized Riemann boundary problems are studied on a closed curve located on the complex plane. The boundary condition of the problems, along with the limit values of the desired functions, includes the limit values of their derivatives. The boundary conditions is written using determinants close to Vronsky's determinants. The solution of the problems is reduced to solving the classical Riemann problem and solving linear differential equations in areas of the complex plane with some restrictions on the solutions. The conditions for the solvability of the initial problems are indicated explicitly, and when they are fulfilled, explicit formulas for solutions are indicated. Examples are given.

1. Введение

Теория краевой задачи Римана для аналитических функций хорошо разработана [1; 2] и нашла многочисленные приложения в математической физике, теории упругости, задачах электродинамики и других разделах физических и технических наук. Исследованы также различные обобщения задачи Римана. Одним из обобщений являются задачи с добавленными в краевое условие предельными значениями производных искомых функций. В этом направлении первые важные результаты получены в работе [3]; таким и близким задачам посвящены § 35, 36 в [1]. Разноплановые результаты в этих исследованиях связаны главным образом с выявлением достаточно общих свойств решений. Конструктивное исследование частного случая краевой задачи с производными проведено автором в [4], а в настоящей работе дано конструктивное исследование более сложных случаев. Конструктивные исследования, приводящие к явному виду условий разрешимости и к явным формулам самих решений, всегда вызывают самостоятельный математический интерес, а также представляются наиболее актуальными для возможных приложений.

2. Постановка задачи

Обозначим через L простую замкнутую кривую класса C^1 на расширенной комплексной плоскости. Пусть $D_\pm$ – области, для которых кривая L является границей, $0 \in D_+$, $\infty \in D_-$. Ориентируем кривую L так, чтобы при движении по ней в положительном направлении область D_+ оставалась слева.

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. В области D_+ зададим аналитические функции $p(z)$, $p_j(z)$, у которых вместе с производными $p'(z)$, $p_j^{(k)}(z)$ существуют H-непрерывные (т. е. удовлетворяющие условию Гельдера) предельные значение на кривой L, $j = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,n+1}$. В области D_- зададим аналитические функции $q(z)$, $q_j(z)$, у которых вместе с производными $q'(z)$, $q_j^{(k)}(z)$ существуют H-непрерывные предельные значения на кривой L, $j = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,m+1}$. Зададим также H-непрерывные функции $G(t) \neq 0$, $g(t)$, $t \in L$. Будем искать функции $\Phi_\pm(z)$, аналитические в соответствующих областях $D_\pm$, по краевому условию

$$\begin{vmatrix} p_1(t) & \dots & p_n(t) & \Phi_+(t) \\ p_1'(t) & \dots & p_n'(t) & \Phi_+'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{(n-1)}(t) & \dots & p_n^{(n-1)}(t) & \Phi_+^{(n-1)}(t) \\ p'(t)p_1^{(n)}(t) + p(t)p_1^{(n+1)}(t) & \dots & p'(t)p_n^{(n)}(t) + p(t)p_n^{(n+1)}(t) & p'(t)\Phi_+^{(n)}(t) + p(t)\Phi_+^{(n+1)}(t) \end{vmatrix} =$$

$$= G(t)\begin{vmatrix} q_1(t) & \dots & q_m(t) & \Phi_-(t) \\ q_1'(t) & \dots & q_m'(t) & \Phi_-'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{(m-1)}(t) & \dots & q_m^{(m-1)}(t) & \Phi_-^{(m-1)}(t) \\ q'(t)q_1^{(m)}(t) + q(t)q_1^{(m+1)}(t) & \dots & q'(t)q_m^{(m)}(t) + q(t)q_m^{(m+1)}(t) & q'(t)\Phi_-^{(m)}(t) + q(t)\Phi_-^{(m+1)}(t) \end{vmatrix} +$$

$$+ g(t), \quad t \in L, \tag{1}$$

предполагая, что все указанные в этом условии предельные значения искомых функций и их производных должны существовать и быть H-непрерывными.

3. Общая схема решения

Введем две новые неизвестные аналитические функции

$$F_+(z) = p'(z)W(p_1(z), \dots, p_n(z), \Phi_+(z)) + p(z)W'(p_1(z), \dots, p_n(z), \Phi_+(z)), \quad z \in D_+, \tag{2}$$

$$F_-(z) = q'(z)W(q_1(z), \dots, q_m(z), \Phi_-(z)) + q(z)W'(q_1(z), \dots, q_m(z), \Phi_-(z)), \quad z \in D_-. \tag{3}$$

Здесь и далее через W обозначается вронскиан функций, а сами функции указываются в скобках. Теперь краевому условию (1) можно придать вид краевого условия задачи Римана

$$F_+(t) = G(t)F_-(t) + g(t), \quad t \in L. \tag{4}$$

Пусть $\varkappa = \mathrm{Ind}_L G(t)$, $X_\pm(z)$ – канонические функции задачи Римана (4). Для решения задачи Римана важно знать поведение искомой функции на бесконечности. При $z \to \infty$ согласно результатам [4] $W(q_1(z), \dots, q_m(z), \Phi_-(z)) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{z^{(m+1)^2-(m+1)}}\right)$, и тогда $W'(q_1(z), \dots, q_m(z), \Phi_-(z)) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{z^{(m+1)^2-m}}\right)$. Аналитичность $q(z)$ на бесконечности означает, что при $z \to \infty$ $q(z) = \mathrm{O}(1)$, и тогда $q'(z) = \mathrm{O}(\frac{1}{z^2})$. Из формулы (3) теперь легко видеть, что

$$F_-(z) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{z^{(m+1)^2-m}}\right), \quad z \to \infty. \tag{5}$$

Тогда согласно теории краевой задачи Римана [1] при $\varkappa \geqslant m^2+m$ задача (4) разрешима безусловно, а при $\varkappa < m^2+m$ для ее разрешимости необходимы и достаточны условия

$$\int_L \frac{g(t)\, t^j\, dt}{X_+(t)} = 0, \tag{6}$$

где $j = \overline{0, m^2+m-1-\varkappa}$. При разрешимости задачи (4) ее решение дается формулами

$$F_\pm(z) = X_\pm(z)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)\, dt}{X_+(t)(t-z)} + R(z)\right), \quad z \in D_\pm, \tag{7}$$

где $R(z)$ – многочлен степени не выше $\varkappa - m^2 - m - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами при $\varkappa > m^2+m$ и $R(z) = 0$ при $\varkappa \leqslant m^2+m$.

Предположим, что задача (4) разрешима, а ее решение найдено. Далее равенства (2), (3) следует расценивать как дифференциальные уравнения для нахождения функций $\Phi_\pm(z)$.

4. Решение уравнений (2), (3)

Сделаем дальнейшие предположения:

1) $p(z) \neq 0, \quad W_+(z) \neq 0$, где $W_+(z) = W\left(p_1(z), \ldots, p_n(z)\right), \quad z \in D_+ \cup L$;

2) $q(z) \neq 0, \quad z \in D_- \cup L; \quad W_-(z) \neq 0$, где $W_-(z) = W\left(q_1(z), \ldots, q_m(z)\right), \quad z \in (D_- \cup L) \setminus \{\infty\}$;

3) $\Delta \neq 0$, где Δ – определитель

$$\begin{vmatrix} k_{10} & k_{20} & \ldots & k_{m0} \\ k_{11} & k_{21} & \ldots & k_{m1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{1,m-1} & k_{2,m-1} & \ldots & k_{m,m-1} \end{vmatrix},$$

элементы которого берутся из следующих разложений функций в ряды Тейлора в окрестности бесконечности:

$$q_j(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{k_{js}}{z^s}, \quad k_{js} \in \mathbb{C}, \quad j = \overline{1,m}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots .$$

Решив уравнение (2) вначале относительно $W\left(p_1(z), \ldots, p_n(z), \Phi_+(z)\right)$, получим затем для нахождения функции $\Phi_+(z)$ линейное неоднородное уравнение с произвольной комплексной постоянной C^+

$$W\left(p_1(z), \ldots, p_n(z), \Phi_+(z)\right) = \frac{1}{p(z)}\int_0^z F_+(\zeta)d\zeta + \frac{C^+}{p(z)}, \tag{8}$$

для которого функции $p_j(z), \quad j = \overline{1,n}$, образуют фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения. Далее находим $\Phi_+(z)$ методом вариации произвольных постоянных:

$$\Phi_+(z) = \sum_{j=1}^{n} C_j^+ p_j(z) + C^+ H_+(z) + h_+(z), \tag{9}$$

где C_j^+ – произвольные комплексные постоянные, $j = \overline{1,n}$,

$$H_+(z) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} p_j(z) \int_0^z \frac{W_j^+(\zeta)\, d\zeta}{p(\zeta)\, W_+^2(\zeta)}, \tag{10}$$

$$h_+(z) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} p_j(z) \int_0^z \frac{W_j^+(\zeta) \int_0^\zeta F_+(w)dw}{p(\zeta)\, W_+^2(\zeta)} d\zeta, \tag{11}$$

$W_j^+(\zeta) = W\left(p_1(\zeta), \ldots, p_{j-1}(\zeta), p_{j+1}(\zeta), \ldots, p_n(\zeta)\right)$, $j = \overline{1,n}$, $\left(W_1^+(\zeta) = 1 \text{ при } n = 1\right)$. Интегралы берутся по любым кривым, соединяющим в области D_+ точки 0 и z.

Решение уравнения (3) записывается по аналогичной формуле

$$\Phi_-(z) = \sum_{j=1}^{m} C_j^- q_j(z) + C^- H_-(z) + h_-(z), \tag{12}$$

где C_j^-, C^- – произвольные комплексные постоянные,

$$H_-(z)=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{m+j}q_j(z)\int_{z_0}^{z}\frac{W_j^-(\zeta)\,d\zeta}{q(\zeta)\,W_-^2(\zeta)},\tag{13}$$

$$h_-(z)=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{m+j}q_j(z)\int_{\infty}^{z}\frac{W_j^-(\zeta)\int_{\infty}^{\zeta}F_-(w)dw}{q(\zeta)\,W_-^2(\zeta)}d\zeta,\tag{14}$$

$W_j^-(\zeta)=W\left(q_1(\zeta),...,q_{j-1}(\zeta),q_{j+1}(\zeta),...,q_m(\zeta)\right)$, $j=\overline{1,m}$ $\left(W_1^-(\zeta)=1 \text{ при } m=1\right)$.

Формулы (13), (14) требуют анализа из-за возможных особенностей функций $H_-(z)$, $h_-(z)$ в точке $z=\infty$. В формуле (13) z_0 – фиксированная точка в области D_-, а интегрирование проводится по любой кривой, соединяющей в этой области точки z_0 и z. Для дальнейшего будем предполагать выполнение равенств

$$\operatorname*{res}_{\zeta=\infty}\frac{W_j^-(\zeta)}{q(\zeta)\,W_-^2(\zeta)}=0,\quad j=\overline{1,m},\tag{15}$$

выражающих необходимые и достаточные условия однозначности функции $H_-(z)$.

При сделанных предположениях $q(\infty)\neq 0$ и, кроме того, согласно [4] при $\zeta\to\infty$

$$W_j^-(\zeta)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{\zeta^{(m-1)^2-(m-1)}}\right),\quad j=\overline{1,m},\tag{16}$$

$$W_-(\zeta)\sim\frac{k}{\zeta^{m^2-m}},\tag{17}$$

где k – некотороя ненулевая постоянная. Тогда при $\zeta\to\infty$

$$\frac{W_j^-(\zeta)}{q(\zeta)W_-^2(\zeta)}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{\zeta^{(m-1)^2-(m-1)-2m^2+2m}}\right)=\mathrm{O}\left(\zeta^{m^2+m-2}\right),\quad j=\overline{1,m}.\tag{18}$$

Это говорит о том, что интегрирование в формуле (13) может привести к функциям, имеющим в точке $z=\infty$ полюсы порядка m^2+m-1. Тогда и наибольший порядок полюса, который можно предположить у функции $H_-(z)$, также равен m^2+m-1. Покажем, что этот полюс все же может быть разве что порядка m^2+m-2 (для $m=1$ это будет приводить и вовсе к отсутствию полюса).

Асимптотические равенства (16) означают, что в окрестности точки $\zeta=\infty$ справедливы представления $W_j^-(\zeta)=\frac{l_j}{\zeta^{(m-1)^2-(m-1)}}+...$, где l_j – некоторые постоянные (возможно, для каких-то j равные нулю), $j=\overline{1,m}$. Здесь многоточие означает слагаемые более высоких относительно $\frac{1}{\zeta}$ степеней, и такой же смысл имеют многоточия в последующих аналогичных равенствах. Тогда на основании асимптотики (17) будет получаться сначала

$$\int_{z_0}^{z}\frac{W_j^-(\zeta)\,d\zeta}{q(\zeta)W_-^2(\zeta)}=\int_{z_0}^{z}\left(k_1l_j\zeta^{m^2+m-2}+...\right)d\zeta=\frac{k_1l_jz^{m^2+m-1}}{m^2+m-1}+...,$$

где $k_1=\frac{1}{q(\infty)k^2}$, а затем

$$H_-(z)=\frac{k_1}{m^2+m-1}\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{m+j}k_{j_0}l_jz^{m^2+m-1}+...\right).$$

Запишем очевидное тождество

$$\begin{vmatrix} q_1(z) & q_2(z) & ... & q_m(z)\\ q_1'(z) & q_2'(z) & ... & q_m'(z)\\ ... & ... & ... & ...\\ q_1^{(m-2)}(z) & q_2^{(m-2)}(z) & ... & q_m^{(m-2)}(z)\\ q_1(z) & q_2(z) & ... & q_m(z)\end{vmatrix}\equiv 0,\quad z\in D_-.$$

Раскроем определитель по элементам последней строки:

$$\sum_{j=1}^{m}(-1)^{m+j}q_j(z)W_j^-(z)\equiv 0,\quad z\in D_-.$$

Полученное тождество означает, в частности, что при разложении функции, стоящей в его левой части, в ряд Лорана в окрестности точки $z=\infty$ все коэффициенты разложения окажутся нулями. Найдем лишь коэффициент при $\frac{1}{z^{(m-1)^2-(m-1)}}$:

$$\sum_{j=1}^{m}(-1)^{m+j}q_j(z)W_j^-(z)=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{m+j}\left(k_{j_0}+\ldots\right)\left(\frac{l_j}{z^{(m-1)^2-(m-1)}}+\ldots\right),$$

откуда видно, что нужный коэффициент равен $\sum_{j=1}^{m}(-1)^{m+j}k_{j_0}l_j$. Поскольку этот коэффициент равен нулю, то полюс порядка m^2+m-1 у функции $H_-(z)$ в точке $z=\infty$ невозможен.

В формуле (14) для анализа поведения функций при $z\to\infty$ первообразные удобно брать в виде интегралов $\int_\infty^z$, в которых интегрирование проводится по любым кривым, соединяющим в точки ∞ и z в области D_-. При $\zeta\to\infty$ из асимптотического равенства (5) получим

$$\int_\infty^\zeta F_-(w)dw=\mathrm{O}\left(\frac{1}{\zeta^{(m+1)^2-(m+1)}}\right),$$

а тогда на основании равенств (18)

$$\frac{W_j^-(\zeta)\int_\infty^\zeta F_-(w)dw}{q(\zeta)W_-^2(\zeta)}=\mathrm{O}\left(\zeta^{m^2+m-2-(m+1)^2+(m+1)}\right)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{\zeta^2}\right),\quad j=\overline{1,m},$$

поэтому все интегралы в формуле (14) будут сходиться и давать аналитические в области D_- (и равные нулю в точке $z=\infty$) функции.

Таким образом, у функции $\Phi_-(z)$ возможен полюс в точке $z=\infty$ за счет полюса у функции $H_-(z)$ (кроме случая $m=1$). Полюс будет отсутствовать при выполнении равенств

$$\int_{|t|=\rho}\frac{H_-(t)dt}{t^k}=0,\quad k=\overline{2,m^2+m-1},\tag{19}$$

где ρ – достаточно большое положительное число. При невыполнении этих равенств в формуле (12) следует брать $C^-=0$.

Решение $F_\pm(z)$ задачи Римана (4) H-непрерывно вплоть до кривой L [1]. Таким же свойством будут обладать функции $H_+(z)$, $h_+(z)$, поскольку в правых частях формул (10), (11) все функции этим свойством обладают. А тогда этим же свойством согласно формуле (9) будет обладать и функция $\Phi_+(z)$. Производные $\Phi_+^{(k)}(z)$, $k=\overline{1,n+1}$, также H-непрерывны вплоть до кривой L – это обосновывается вполне аналогично [5, с. 366] с помощью формул для производной искомой функций в методе вариации произвольных постоянных. Аналогично и найденная функция $\Phi_-(z)$ будет удовлетворять требованиям в постановке задачи. Подведем итог в отношении решения задачи (1).

Теорема 1. *При $\varkappa\geqslant m^2+m$ задача* (1) *разрешима безусловно, а при $\varkappa<m^2+m$ для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнение условий* (6)*, в которых $j=\overline{0,m^2+m-1-\varkappa}$. В случае разрешимости задачи* (1) *ее решение дается формулами* (9), (12)*, причем в формуле* (12) *постоянная C^- остается произвольной, если выполняются равенства* (15) *и* (19) *(при $m=1$ – только равенства* (15)*), и полагается равной нулю в противном случае.*

5. Пример 1

Рассмотрим пример задачи (1) для $n=m=2$, считая, что $-1\in D_+$; $\frac{1}{2}$, $1\in D_-$. Возьмем $p_1(z)=z-1$, $p_2(z)=z(z-1)^2$, $p(z)=\frac{1}{(z-1)^4}$, $q_1(z)=\sin\frac{1}{z}$, $q_2(z)=\cos\frac{1}{z}$, $q(z)=\frac{z}{z+1}$, $G(t)=1$, $g(t)=$ $=\frac{6}{t^7}+1$. Краевому условию в этом случае можно придать вид

$$\begin{vmatrix} t-1 & t(t-1)^2 & \Phi_+(t) \\ 1 & (t-1)(3t-1) & \Phi'_+(t) \\ 0 & \frac{10-18t}{(t-1)^5} & \frac{-4\Phi''_+(t)+(t-1)\Phi'''_+(t)}{(t-1)^5} \end{vmatrix} - \frac{6}{t^7} - 1 =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\frac{1}{t} & \cos\frac{1}{t} & \Phi_-(t) \\ -\frac{1}{t^2}\cos\frac{1}{t} & \frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t} & \Phi'_-(t) \\ \frac{1+t-4t^2-6t^3}{(t+1)^2t^5}\cos\frac{1}{t} + \frac{6t+5}{(t+1)^2t^4}\sin\frac{1}{t} & \frac{6t+5}{(t+1)^2t^4}\cos\frac{1}{t} + \frac{6t^3+4t^2-t-1}{(t+1)^2t^5}\sin\frac{1}{t} & \frac{\Phi''_-(t)}{(t+1)^2} + \frac{t\Phi'''_-(t)}{t+1} \end{vmatrix}, \quad t \in L. \quad (20)$$

Отметим, что в согласии со сделанными предположениями $p(z) \neq 0$ и $W(p_1(z), p_2(z)) = (z-1)^2(2z-1) \neq 0$ в $D_+ \cup L$, $q(z) \neq 0$ в $D_- \cup L$, $W(q_1(z), q_2(z)) = \frac{1}{z^2} \neq 0$ в $(D_- \cup L) \setminus \{\infty\}$. Условие $\Delta \neq 0$ выполняется, поскольку в примере получится

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Задача (4) принимает вид $F_+(t) = F_-(t) + \frac{6}{t^7} + 1$ и является задачей Римана о скачке. Поскольку $(m+1)^2 - m$ при $m = 2$ дает 7, то эту задачу следует решать в классе функций, имеющих на бесконечности нуль по меньшей мере 7-го порядка. Единственное решение $F_+(z) = 1$, $F_-(z) = -\frac{6}{z^7}$ такой задачи очевидно. Далее будем решать дифференциальные уравнения

$$\begin{vmatrix} z-1 & z(z-1)^2 & \Phi_+(z) \\ 1 & (z-1)(3z-1) & \Phi'_+(z) \\ 0 & \frac{10-18z}{(z-1)^5} & \frac{-4\Phi''_+(z)+(z-1)\Phi'''_+(z)}{(z-1)^5} \end{vmatrix} = 1, \quad z \in D_+, \quad (21)$$

$$\begin{vmatrix} \sin\frac{1}{z} & \cos\frac{1}{z} & \Phi_-(z) \\ -\frac{1}{z^2}\cos\frac{1}{z} & \frac{1}{z^2}\sin\frac{1}{z} & \Phi'_-(z) \\ \frac{1+z-4z^2-6z^3}{(z+1)^2z^5}\cos\frac{1}{z} + \frac{6z+5}{(z+1)^2z^4}\sin\frac{1}{z} & \frac{6z+5}{(z+1)^2z^4}\cos\frac{1}{z} + \frac{6z^3+4z^2-z-1}{(z+1)^2z^5}\sin\frac{1}{z} & \frac{\Phi''_-(z)}{(z+1)^2} + \frac{z\Phi'''_-(z)}{z+1} \end{vmatrix} = -\frac{6}{z^7}, \quad z \in D_-. \quad (22)$$

Уравнение (8), к которому сводится уравнение (21), приобретает вид

$$W(z-1,\ z(z-1)^2,\ \Phi_+(z)) = C^+(z-1)^4 + (z-1)^5.$$

Далее используем формулы (10), (11):

$$H_+(z) = -(z-1)\int_0^z \frac{\zeta(\zeta-1)^2}{(2\zeta-1)^2}d\zeta + z(z-1)^2\int_0^z \frac{(\zeta-1)}{(2\zeta-1)^2}d\zeta,$$

$$h_+(z) = -(z-1)\int_0^z \frac{\zeta(\zeta-1)^3}{(2\zeta-1)^2}d\zeta + z(z-1)^2\int_0^z \frac{(\zeta-1)^2}{(2\zeta-1)^2}d\zeta.$$

После вычисления интегралов соответствующей формуле (9) можно придать вид

$$\Phi_+(z) = (z-1)\Bigg[C_1^+ + C_2^+ z(z-1) + \frac{C^+}{16}\left(2z(z+1) + (1-2z)^2\ln(1-2z)\right) + \\ + \frac{1}{48}\left(2z(4z^2-3z-3) - 3(1-2z)^2\ln(1-2z)\right)\Bigg], \quad (23)$$

где под $\ln(1-2z)$ понимается главная ветвь логарифмической функции, а разрез проводится в области D_- от точки $z = \frac{1}{2}$ до точки $z = \infty$.

Переходим к уравнению (22). Вычисления по формулам (13), (14) дают

$$H_-(z) = -\sin\frac{1}{z}\int_{z_0}^z \left(\zeta^4 + \zeta^3\right)\cos\frac{1}{\zeta}d\zeta + \cos\frac{1}{z}\int_{z_0}^z \left(\zeta^4 + \zeta^3\right)\sin\frac{1}{\zeta}d\zeta,$$

$$h_-(z) = -\sin\frac{1}{z}\int_\infty^z \left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta^3}\right)\cos\frac{1}{\zeta}d\zeta + \cos\frac{1}{z}\int_\infty^z \left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta^3}\right)\sin\frac{1}{\zeta}d\zeta = \left(1 + \frac{1}{z}\right) - \sin\frac{1}{z} - \cos\frac{1}{z}.$$

Легко видеть, что у функции $H_-(z)$ в точке $z=\infty$ полюс с главным членом $\frac{z^4}{20}$ будет складываться с точкой ветвления. Добиваясь аналитичности функции $\Phi_-(z)$ в этой точке, следует далее брать в соответствующей формуле (12) $C^-=0$, а самой этой формуле, переобозначая C_1^--1, C_2^--1 снова соответственно на C_1^- и C_2^-, можно придать вид

$$\Phi_-(z)=C_1^-\sin\frac{1}{z}+C_2^-\cos\frac{1}{z}+1+\frac{1}{z}. \tag{24}$$

Итак, решение задачи (20) содержит пять произвольных постоянных C_1^+, C_2^+, C^+, C_1^-, C_2^- и записывается по формулам (23) и (24).

6. Приложение к интегро-дифференциальным уравнениям

Зададим H-непрерывные функции $a(t)\neq 0$, $b(t)\neq 0$, $f(t)$, $t\in L$. Будем искать $\max(n,m)+1$ раз H-непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$a(t)\begin{vmatrix} p_1(t) & \dots & p_n(t) & \varphi(t)\\ p_1'(t) & \dots & p_n'(t) & \varphi'(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ p_1^{(n-1)}(t) & \dots & p_n^{(n-1)}(t) & \varphi^{(n-1)}(t)\\ p'(t)p_1^{(n)}(t)+p(t)p_1^{(n+1)}(t) & \dots & p'(t)p_n^{(n)}(t)+p(t)p_n^{(n+1)}(t) & p'(t)\varphi^{(n)}(t)+p(t)\varphi^{(n+1)}(t)\end{vmatrix}+$$

$$+b(t)\begin{vmatrix} q_1(t) & \dots & q_m(t) & \varphi(t)\\ q_1'(t) & \dots & q_m'(t) & \varphi'(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ q_1^{(m-1)}(t) & \dots & q_m^{(m-1)}(t) & \varphi^{(m-1)}(t)\\ q'(t)q_1^{(m)}(t)+q(t)q_1^{(m+1)}(t) & \dots & q'(t)q_m^{(m)}(t)+q(t)q_m^{(m+1)}(t) & q'(t)\varphi^{(m)}(t)+q(t)\varphi^{(m+1)}(t)\end{vmatrix}+$$

$$+\frac{a(t)}{\pi i}\begin{vmatrix} p_1(t) & \dots & p_n(t) & 0!\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}\\ p_1'(t) & \dots & p_n'(t) & 1!\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ p_1^{(n-1)}(t) & \dots & p_n^{(n-1)}(t) & (n-1)!\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^n}\\ p'(t)p_1^{(n)}(t)+p(t)p_1^{(n+1)}(t) & \dots & p'(t)p_n^{(n)}(t)+p(t)p_n^{(n+1)}(t) & \begin{matrix} n!p'(t)\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+1}}+\\ +(n+1)!p(t)\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{n+2}}\end{matrix}\end{vmatrix}-$$

$$-\frac{b(t)}{\pi i}\begin{vmatrix} q_1(t) & \dots & q_m(t) & 0!\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}\\ q_1'(t) & \dots & q_m'(t) & 1!\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ q_1^{(m-1)}(t) & \dots & q_m^{(m-1)}(t) & (m-1)!\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^m}\\ \begin{matrix} q'(t)q_1^{(m)}(t)+\\ +q(t)q_1^{(m+1)}(t)\end{matrix} & \dots & \begin{matrix} q'(t)p_m^{(m)}(t)+\\ +q(t)q_m^{(m+1)}(t)\end{matrix} & \begin{matrix} m!q'(t)\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{m+1}}+\\ +(m+1)!q(t)\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{m+2}}\end{matrix}\end{vmatrix}=f(t),\quad t\in L, \tag{25}$$

в котором интегралы понимаются в смысле конечной части по Адамару. Введем интеграл типа Коши

$$\Phi_\pm(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z},\quad z\in D_\pm.$$

Используя обобщенные формулы Сохоцкого [6]

$$\Phi_\pm^{(k)}(t)=\pm\frac{1}{2}\varphi^{(k)}(t)+\frac{k!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}},\quad k=\overline{0,\max(n,m)+1}, \tag{26}$$

для предельных значений на кривой L функций $\Phi_\pm(z)$ и их производных, уравнению (25) можно придать вид краевой задачи (1), где $G(t)=\frac{b(t)}{a(t)}$, $g(t)=\frac{f(t)}{2a(t)}$. Условия разрешимости этой задачи будут и условиями разрешимости уравнения (25). При разрешимости задачи (1) постоянные C_j^-, C^- в формуле (12) следует брать с учетом равенства $C_1^- k_{1_0} + \ldots + C_m^- k_{m_0} + C^- H_-(\infty) = 0$, вытекающего из свойства $\Phi_-(\infty) = 0$ интеграла типа Коши. Решение уравнения (25) записывается при этом по формуле $\varphi(t) = \Phi_+(t) - \Phi_-(t)$, получающейся из равенств (26) при $k = 0$.

7. Задача с бесконечным числом условий разрешимости

Рассмотрим краевую задачу, близкую к (1), но имеющую свою специфику:

$$\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & \Phi_+(t) \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n & \Phi'_+(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} & \Phi_+^{(n-1)}(t) \\ \lambda_1^{n+1} - \left(a + \frac{P'(t)}{P(t)}\right)\lambda_1^n & \ldots & \lambda_n^{n+1} - \left(a + \frac{P'(t)}{P(t)}\right)\lambda_n^n & \Phi_+^{(n+1)}(t) - \left(a + \frac{P'(t)}{P(t)}\right)\Phi_+^{(n)}(t) \end{vmatrix} =$$

$$= G(t)\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & \Phi_-(t) \\ \mu_1 & \ldots & \mu_m & \Phi'_-(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1^{m-1} & \ldots & \mu_m^{m-1} & \Phi_-^{(m-1)}(t) \\ \mu_1^{m+1} - \left(b + \frac{Q'(t)}{Q(t)}\right)\mu_1^m & \ldots & \mu_m^{m+1} - \left(b + \frac{Q'(t)}{Q(t)}\right)\mu_m^m & \Phi_-^{(m+1)}(t) - \left(b + \frac{Q'(t)}{Q(t)}\right)\Phi_-^{(m)}(t) \end{vmatrix} +$$

$$+g(t), \quad t \in L. \tag{27}$$

Здесь λ_j, a, μ_j, b – заданные комплексные числа, причем числа λ_j попарно различны, $j = \overline{1,n}$, и попарно различны числа μ_j, $j = \overline{1,m}$. $P(t)$ и $Q(t)$ – заданные многочлены любых натуральных степеней, $P(z) \neq 0$ при $z \in D_+ \cup L$, $Q(z) \neq 0$ при $z \in D_- \cup L$. Остальные предположения прежние. Для функций

$$F_+(z) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & \Phi_+(z) \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n & \Phi'_+(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} & \Phi_+^{(n-1)}(z) \\ \lambda_1^{n+1} - \left(a + \frac{P'(z)}{P(z)}\right)\lambda_1^n & \ldots & \lambda_n^{n+1} - \left(a + \frac{P'(z)}{P(z)}\right)\lambda_n^n & \Phi_+^{(n+1)}(z) - \left(a + \frac{P'(z)}{P(z)}\right)\Phi_+^{(n)}(z) \end{vmatrix}, \; z \in D_+, \tag{28}$$

$$F_-(z) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & \Phi_-(z) \\ \mu_1 & \ldots & \mu_m & \Phi'_-(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1^{m-1} & \ldots & \mu_m^{m-1} & \Phi_-^{(m-1)}(z) \\ \mu_1^{m+1} - \left(b + \frac{Q'(z)}{Q(z)}\right)\mu_1^m & \ldots & \mu_m^{m+1} - \left(b + \frac{Q'(z)}{Q(z)}\right)\mu_m^m & \Phi_-^{(m+1)}(z) - \left(b + \frac{Q'(z)}{Q(z)}\right)\Phi_-^{(m)}(z) \end{vmatrix}, \; z \in D_-, \tag{29}$$

снова получаем краевую задачу Римана (4). Из аналитичности на бесконечности функции $\Phi_-(z)$ вытекает, очевидно, аналитичность на бесконечности функции $F_-(z)$, поэтому задачу (4) теперь следует решать в классе функций, ограниченных на бесконечности. Согласно [1] при $\varkappa \geqslant -1$ эта задача будет разрешима безусловно, а при $\varkappa < -1$ для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнение условий (6), в которых $j = \overline{0, -\varkappa - 2}$. При разрешимости задачи ее решение снова записывается по формулам (7), в которых теперь $R(z)$ – многочлен с произвольными комплексными коэффициентами степени не выше $\varkappa$ при $\varkappa \geqslant 0$, $R(z) = 0$ при $\varkappa < 0$. Предположим, что задача Римана разрешима, а ее решение найдено. Расценивая теперь (28), (29) как дифференциальные уравнения для нахождения функций $\Phi_\pm(z)$, будем решать эти уравнения.

8. Решение уравнений (28), (29)

Если уравнение (28) умножить на $\frac{e^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)z}}{e^{az}P(z)}$, то получим уравнение в виде (2), где $p_j(z) = e^{\lambda_j z}$, $j=\overline{1,n}$, $p(z)=\frac{1}{e^{az}P(z)}$, а в роли прежней функции $F_+(z)$ будет функция $\frac{F_+(z)e^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)z}}{e^{az}P(z)}$. Но решать уравнение (28) лучше по-другому, к тому же новые функции $p_j(z)$, $p(z)$ не будут обладать прежними свойствами. Решим вначале однородное уравнение (28). После умножения однородного уравнения на $e^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)z}$ ему можно придать вид

$$W'\left(e^{\lambda_1 z},\ldots,e^{\lambda_n z},\Phi_+(z)\right)-\left(a+\frac{P'(z)}{P(z)}\right)W\left(e^{\lambda_1 z},\ldots,e^{\lambda_n z},\Phi_+(z)\right)=0,$$

откуда вначале получим

$$W\left(e^{\lambda_1 z},\ldots,e^{\lambda_n z},\Phi_+(z)\right)=C^+e^{az}P(z),$$

а затем придем к уравнению

$$\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & \Phi_+(z) \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n & \Phi'_+(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^n & \ldots & \lambda_n^n & \Phi_+^{(n)}(z) \end{vmatrix} = C^+e^{(a-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_n)z}P(z). \tag{30}$$

Уравнение (30) есть уравнение с постоянными коэффициентами с соответствующей фундаментальной системой решений $e^{\lambda_j z}$, $j=\overline{1,n}$. Частное решение $\Phi_+^*(z)$ лучше находить методом неопределенных коэффициентов, что даст

$$\Phi_+^*(z)=C^+e^{(a-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_n)z}P_1(z),$$

где $P_1(z)$ – вполне определенный многочлен для каждого уравнения (30). Теперь понятно, что фундаментальную систему решений однородного уравнения (28) образуют функции

$$e^{\lambda_1 z},\ldots,e^{\lambda_n z},e^{(a-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_n)z}P_1(z)$$

и, следовательно, можно записать общее решение неоднородного уравнения (28), полученное с помощью метода вариации произвольных постоянных:

$$\Phi_+(z)=\sum_{j=1}^{n}C_j^+e^{\lambda_j z}+C^+e^{(a-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_n)z}P_1(z)+\Phi_+^{**}(z), \tag{31}$$

где

$$\Phi_+^{**}(z)=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{(-1)^{n+1+j}}{V_+}\int_0^z\frac{F_+(\zeta)W_j^+(\zeta)d\zeta}{W_+(\zeta)},$$

$$W_j^+(\zeta)=W\left(e^{\lambda_1\zeta},\ldots,e^{\lambda_{j-1}\zeta},e^{\lambda_{j+1}\zeta},\ldots,e^{\lambda_n\zeta},e^{(a-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_n)\zeta}P_1(\zeta)\right),\quad j=\overline{1,n},$$

$$W_{n+1}^+(\zeta)=W\left(e^{\lambda_1\zeta},\ldots,e^{\lambda_n\zeta}\right),$$

$$W_+(\zeta)=W\left(e^{\lambda_1\zeta},\ldots,e^{\lambda_n\zeta},e^{(a-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_n)\zeta}P_1(\zeta)\right),$$

V_+ – определитель Вандермонда чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

Аналогично записывается общее решение уравнения (29):

$$\Phi_-(z)=\sum_{j=1}^{m}C_j^-e^{\mu_j z}+C^-e^{(b-\mu_1-\mu_2-\ldots-\mu_m)z}Q_1(z)+\Phi_-^{**}(z), \tag{32}$$

где $Q_1(z)$ – вполне определенный многочлен,

$$\Phi_-^{**}(z)=\sum_{j=1}^{m+1}\frac{(-1)^{m+1+j}}{V_-}\int_{z_0}^z\frac{F_-(\zeta)W_j^-(\zeta)d\zeta}{W_-(\zeta)}, \tag{33}$$

$$W_j^-(\zeta)=W\left(e^{\mu_1\zeta},\ldots,e^{\mu_{j-1}\zeta},e^{\mu_{j+1}\zeta},\ldots,e^{\mu_m\zeta},e^{(b-\mu_1-\mu_2-\ldots-\mu_m)\zeta}Q_1(\zeta)\right),\quad j=\overline{1,m},$$

$$W^-_{m+1}(\zeta) = W\left(e^{\mu_1\zeta}, \dots, e^{\mu_m\zeta}\right),$$

$$W_-(\zeta) = W\left(e^{\mu_1\zeta}, \dots, e^{\mu_m\zeta}, e^{(b-\mu_1-\mu_2-\dots-\mu_m)\zeta}Q_1(\zeta)\right),$$

V_- – определитель Вандермонда чисел $\mu_1, \dots, \mu_m$, $z_0 \in D_-$.

Для однозначности функции $\Phi_-(z)$ необходимы и достаточны условия

$$\operatorname*{res}_{\zeta=\infty} \frac{F_-(\zeta)W^-_j(\zeta)}{W_-(\zeta)} = 0, \quad j = \overline{1, m+1}, \tag{34}$$

которые далее предположим выполненными. В точке $z = \infty$ функция $\Phi_-(z)$ будет иметь, вообще говоря, существенную особенность, которую следует устранить. Решение однородного уравнения (29), содержащееся в формуле (32) при $\Phi^{**}_-(z) = 0$, может оказаться аналитическим (и притом равным нулю) в точке $z = \infty$ лишь при $C^-_j = C^- = 0$, $j = \overline{1, m}$, поскольку функции $e^{\mu_1 z}, \dots, e^{\mu_m z}, e^{(b-\mu_1-\mu_2-\dots-\mu_m)z}Q_1(z)$ линейно независимы. Надлежащим подбором постоянных C^-_j, C^- в формуле (32) можно добиться аналитичности в точке $z = \infty$ лишь частного решения. Для этого функцию $\Phi_-(z)$ следует разложить в ряд Лорана в окрестности бесконечности и приравнять к нулю коэффициенты при положительных степенях z этого разложения. Возникнет бесконечное число условий разрешимости, которые следует расценивать как бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для нахождения постоянных C^-_j, C^-. Система имеет вид

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j^k C^-_j + \alpha_k C^- = \beta_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \tag{35}$$

где

$$\alpha_k = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} \frac{e^{(b-\mu_1-\mu_2-\dots-\mu_m)t}Q_1(t)dt}{t^{k+1}}, \qquad \beta_k = -\frac{k!}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} \frac{\Phi^{**}_-(t)dt}{t^{k+1}},$$

ρ – достаточно большое положительное число.

Теперь можно сформулировать окончательный результат в отношении задачи (27).

Теорема 2. *Для разрешимости задачи* (27) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (6) *для* $j = \overline{0, -\varkappa - 2}$ *(если* $\varkappa < -1$*), выполнялись условия* (34) *и была совместна система* (35). *При разрешимости задачи ее решение записывается по формулам* (31), (32), *причем в формуле* (32) *постоянные* C^-_j, C^- *являются решением системы* (35).

Отметим, что при $\varkappa > -1$ произвол коэффициентов многочлена $R(z)$, входящего в выражение для $F_-(z)$, можно использовать для выполнения условий разрешимости исходной задачи. В этом случае условиям (34) в развернутом виде можно придать вид системы линейных алгебраических уравнений для нахождения этих коэффициентов. Если некоторые коэффициенты останутся произвольными, то их можно использовать для достижения совместности системы (35).

9. Пример 2

Рассмотрим пример задачи (27), предполагая, что $1 \in D_-$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \Phi_+(t) \\ 1 & -1 & \Phi'_+(t) \\ -1 - \frac{1}{t-1} & -3 - \frac{1}{t-1} & \Phi'''_+(t) - \left(2 + \frac{1}{t-1}\right)\Phi''_+(t) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{t} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \Phi_-(t) \\ 2 & 3 & \Phi'_-(t) \\ 12 - \frac{4}{t} & 36 - \frac{9}{t} & \Phi'''_-(t) - \left(\frac{1}{t} - 1\right)\Phi''_-(t) \end{vmatrix} + \frac{-4t^4 + 4t^3 - 38t^2 + 42t - 6}{t^2(t-1)}, \quad t \in L.$$

Здесь $n = m = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 3$, $a = 2$, $b = -1$, $P(t) = t - 1$, $Q(t) = t$, выражения для $G(t)$ и $g(t)$ очевидны. Для соответствующей задачи Римана (4) получится $\varkappa = \operatorname{Ind}_L \frac{1}{t} = -1$, поэтому задача разрешима безусловно. Единственное решение этой задачи оказывается равным

$$F_+(z) = \frac{2(2z - 2z^2 - 1)}{z - 1}, \quad z \in D_+; \qquad F_-(z) = \frac{6(6z - 1)}{z}, \quad z \in D_-.$$

Общее решение соответствующего уравнения (28)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \Phi_+(z) \\ 1 & -1 & \Phi_+'(z) \\ -1-\frac{1}{z-1} & -3-\frac{1}{z-1} & \Phi_+'''(z)-\left(2+\frac{1}{z-1}\right)\Phi_+''(z) \end{vmatrix} = \frac{2(2z-2z^2-1)}{z-1}, \quad z\in D_+,$$

записывается по формуле

$$\Phi_+(z) = C_1^+e^z + C_2^+e^{-z} + C^+e^{2z}(7-3z) + z. \tag{36}$$

Подробнее остановимся на аналогичном решении соответствующего уравнения (29)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \Phi_-(z) \\ 2 & 3 & \Phi_-'(z) \\ 12-\frac{4}{z} & 36-\frac{9}{z} & \Phi_-'''(z)-\left(\frac{1}{z}-1\right)\Phi_-''(z) \end{vmatrix} = \frac{6(6z-1)}{z}, \quad z\in D_-. \tag{37}$$

Вначале для уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \Phi_-(z) \\ 2 & 3 & \Phi_-'(z) \\ 4 & 9 & \Phi_-''(z) \end{vmatrix} = C^-e^{-6z}z,$$

аналогичного уравнению (30), находим частное решение $C^-e^{-6z}(72z+17)$, поэтому фундаментальную систему решений однородного уравнения (37) образуют функции e^{2z}, e^{3z}, $e^{-6z}(72z+17)$. Формула (33) принимает вид

$$\Phi_-^{**}(z) = \frac{1}{864}\left(e^{2z}\int_1^z \frac{(6\zeta-1)(-648\zeta-81)e^{-2\zeta}d\zeta}{\zeta^2} - \right.$$

$$\left. -e^{3z}\int_1^z \frac{(6\zeta-1)(-576\zeta-64)e^{-3\zeta}d\zeta}{\zeta^2} + e^{-6z}(72z+17)\int_1^z \frac{(6\zeta-1)e^{6\zeta}d\zeta}{\zeta^2}\right).$$

Важно заметить, что вычеты на бесконечности всех подынтегральных функций оказываются равными нулю. Дальнейшие вычисления дают

$$\Phi_-^{**}(z) = -\frac{69}{32}e^{-2}e^{2z} + \frac{34}{27}e^{-3}e^{3z} - \frac{1}{864}e^{6}e^{-6z}(72z+17) + 1.$$

Следовательно, в формуле (32), принимающей в случае уравнения (37) вид

$$\Phi_-(z) = C_1^-e^{2z} + C_2^-e^{3z} + C^-e^{-6z}(72z+17) + \Phi_-^{**}(z),$$

для ограниченности решения на бесконечности следует взять

$$C_1^- = \frac{69}{32}e^{-2}, \quad C_2^- = -\frac{34}{27}e^{-3}, \quad C^- = \frac{1}{864}e^{6},$$

и тогда записывать и решать систему (35) нет необходимости. Окончательно получится, что решение примера дается формулами (36) и $\Phi_-(z) = 1$.

10. Заключительное замечание

Разносторонние исследования можно проводить для многих задач, близких к (1) и (27). Такие задачи можно связать с известными краевыми задачами Гильберта, Карлемана, Газемана и т. п. Определители в этих задачах могут приводить к разным линейным уравнениям высших порядков. При этом число подобных задач, допускающих явное решение, едва ли будет велико.

Литература

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
3. *Крикунов Ю. М.* О решении обобщенной краевой задачи Римана и линейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения // Ученые записки Казанского университета. 1952. Т. 112, № 10. С. 191–199.

4. *Шилин А. П.* Дифференциальная краевая задача Римана и ее приложение к интегро-дифференциальным уравнениям // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2019. Т. 63, № 4. С. 391–397. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-391-397

5. *Шилин А. П.* Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с линейными функциями в коэффициентах // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2022. Т. 58, № 4. С. 358–369. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-358-369

6. *Зверович Э. И.* Обобщение формул Сохоцкого // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2012. № 2. С. 24–28.

References

1. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*. Moscow, Nauka, 1977 (in Russian).

2. Muskhelishvili N. I. *Singular Integral Equations*. Moscow, Nauka, 1968 (in Russian).

3. Krikunov Yu. M. On the solution of the generalized Riemann boundary value problem and the linear singular integro-differential equation. *Scientific Notes Kazan University*, 1952, vol. 112, no. 10, pp. 191–199 (in Russian).

4. Shilin A. P. Riemann's differential boundary-value problem and its application to integro-differential equations. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 4, pp. 391–397 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-391-397

5. Shilin A. P. A hypersingular integro-differential equation with linear functions in coefficients. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2022, vol. 58, no. 4, pp. 358–369 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-358-369

6. Zverovich E. I. Generalization of Sokhotsky formulas. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2012, no. 2, pp. 24–28 (in Russian).