



ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ  
И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ  
REAL, COMPLEX AND  
FUNCTIONAL ANALYSIS



УДК 517.982, 517.983, 519.21

<https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1-45-55>

EDN:ETIXQP

О НЕОГРАНИЧЕННОСТИ ЕСТЕСТВЕННЫХ ПРОЕКТОРОВ  
В ПРОСТРАНСТВАХ БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦ

В. Н. Куница<sup>2</sup>, К. В. Лыков<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь

<sup>2</sup>Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

e-mail: vikakunica@gmail.com, alkv@list.ru

Поступила: 29.04.2026

Исправлена: 14.05.2026

Принята: 29.05.2026

**Ключевые слова:** дополняемое подпространство, пространства последовательностей, естественные проекторы, бесконечные матрицы, матричный оператор, операторная норма, случайная проекция, закон нуля и единицы, мультипликаторы Шура–Адамара

**Аннотация.** В работе рассматриваются банаховы пространства операторов из  $\ell^p$  в  $\ell^q$ , реализуемых в виде бесконечных матриц. Показано, что при  $p > 1$  и  $q < \infty$  для почти всех подпространств, образованных случайно выбранными матричными единицами, естественные проекторы на эти подпространства будут неограничены. Кроме того, эти проекторы будут неограничены уже на классе матриц с элементами  $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ .

ON UNBOUNDEDNESS OF NATURAL PROJECTORS IN SPACES OF INFINITE MATRICES

V. N. Kunica<sup>2</sup>, K. V. Lykov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

<sup>2</sup>Belarusian State University, Minsk, Belarus

e-mail: vikakunica@gmail.com, alkv@list.ru

Received: 29.04.2026

Revised: 14.05.2026

Accepted: 29.05.2026

**Keywords:** complemented subspace, sequence spaces, canonical projectors, infinite matrices, matrix operator, operator norm, random projection, zero-one law, Schur–Hadamard multipliers

**Abstract.** In this paper, we consider Banach spaces of operators from  $\ell^p$  to  $\ell^q$  that can be realized as infinite matrices. We show that for  $p > 1$  and  $q < \infty$ , for almost all subspaces formed by randomly chosen matrix units, the canonical projectors onto these subspaces will be unbounded. Moreover, these projectors will be unbounded even on the class of matrices with elements  $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ .

1. Введение

Вопросы дополняемости в банаховых пространствах являются одновременно важными и сложными. Общим и конкретным исследованиям в этом направлении посвящено большое количество статей, включая работы как создателей функционального анализа (см., например, [1]), так и современных математиков [2–4]. В банаховых пространствах с выделенной минимальной системой векторов и сопряженной к ней системой функционалов (т. е. с выделенной биортогональной системой) имеет смысл находить ответы на более простой вопрос: будет ли ограничен естественный проектор на подпространство, порожденное данной минимальной системой. В настоящей работе будет рассматриваться такой вопрос относительно подсистем из матричных единиц в пространствах операторов между  $\ell^p$  и  $\ell^q$ .

Напомним некоторые понятия и дадим необходимые определения.

**Определение 1.1.** Подпространство (замкнутое)  $Y$  банахова пространства  $X$  называется дополняемым в  $X$ , если существует ограниченный проектор  $P$  из  $X$  на  $Y$ , т. е. такой ограниченный идемпотентный оператор ( $P^2 = P$ ), что  $P(Y) = Y$ .

Дополняемость в  $X$  подпространства  $Y \subset X$  равносильна существованию подпространства  $Z \subset X$  такого, что

$$X = Y \oplus Z.$$

Последнее равенство означает, что  $X$  разлагается в *прямую сумму* подпространств  $Y$  и  $Z$ , а норма  $x = y + z$ ,  $y \in Y, z \in Z$ , в  $X$  эквивалентна  $\|y\| + \|z\|$  (т. е.  $\|y\| + \|z\| \leq C\|x\|$  с константой  $C$ , не зависящей от  $x \in X$ ). Все конечномерные подпространства любого банахова пространства дополняемы, и то же имеет место для подпространств конечной коразмерности. Легко видеть, что в гильбертовом пространстве все замкнутые подпространства дополняемы (достаточно построить ортогональное дополнение или рассмотреть ортогональную проекцию). Оказывается, что в любом другом банаховом пространстве (т. е. неизоморфном гильбертову) обязательно найдется недополняемое замкнутое подпространство [5]. Примером недополняемого подпространства является подпространство  $c_0$  в пространстве  $\ell^\infty$  [6]. Некоторые интересные результаты о проблеме дополняемости можно посмотреть в работе [7].

Мы будем рассматривать банаховы пространства над полем  $\mathbb{R}$ . Напомним, что пространство  $\ell^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , состоит из всех последовательностей  $x = (x_1, x_2, \dots)$ , для которых конечна норма

$$\|x\|_p := \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p},$$

$\ell^\infty$  состоит из всех ограниченных последовательностей с нормой

$$\|x\|_\infty := \sup_i |x_i|,$$

а  $c_0$  состоит из всех сходящихся к нулю последовательностей с нормой пространства  $\ell^\infty$ . Напомним, что норма элемента  $x \in \ell^p$  может быть вычислена также с помощью элементов предсопряженного пространства:

$$\|x\|_p = \sup_{y \in S_{p^*}} \langle y, x \rangle,$$

где  $p^* := p/(p-1)$  при  $p > 1$  и  $p^* := \infty$  при  $p = 1$ , через  $S_r$  здесь и далее обозначается единичная сфера пространства  $\ell^r$ , а

$$\langle y, x \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i.$$

Через  $e^j$  мы будем обозначать единичный орт в пространствах последовательностей, т. е. вектор  $e^j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  с единицей на  $j$ -й позиции, а через  $x_i$  —  $i$ -ю координату вектора  $x$ , т. е.  $x_i = \langle e^i, x \rangle$ . Обозначение  $P_n$  зарезервируем за ортогональной проекцией на первые  $n$  координат во всех пространствах последовательностей, т. е.

$$P_n x = P_n(x) := \sum_{i=1}^n x_i e^i.$$

Отметим, что для всех  $p \in [1, \infty]$  при  $n \rightarrow \infty$

$$\|P_n x\|_p \rightarrow \|x\|_p,$$

а при  $p < \infty$

$$\|P_n x - x\|_p \rightarrow 0.$$

Через  $\mathcal{L}^{p,q}$  обозначим банахово пространство всех линейных и ограниченных операторов из  $\ell^p$  в  $\ell^q$ , а через  $\mathcal{M}^{p,q}$  — подмножество  $\mathcal{L}^{p,q}$ , состоящее из операторов, представимых в матричном виде (см. раздел 3). Несложно видеть, и мы покажем это в разделе 3, что  $\mathcal{M}^{p,q}$  образует замкнутое линейное подпространство в  $\mathcal{L}^{p,q}$ . В случае  $p < \infty$  имеет место равенство  $\mathcal{M}^{p,q} = \mathcal{L}^{p,q}$ , а в случае

$p = \infty$  множество  $\mathcal{M}^{p,q}$  будет собственным подпространством  $\mathcal{L}^{p,q}$ . Для матрицы  $A \in \mathcal{M}^{p,q}$  через  $\|A\|_{p,q}$  будем обозначать операторную норму  $A$  как элемента  $\mathcal{L}^{p,q}$ .

Хорошо известна связь между свойством базисности и ограниченности естественных проекторов [8]. В недавней работе [9] исследовался вопрос о базисности системы матричных единиц, рассматриваемой при разных способах нумерации, в пространстве операторов из  $c_0$  в  $\ell^\infty$ . В этой работе было показано, что в некотором смысле почти все перестановки матричных единиц будут образовывать последовательность, не являющуюся базисом (несмотря на то что система матричных единиц полна и минимальна в рассматриваемом пространстве операторов), и была отмечена связь с некоторыми вопросами об ограниченности проекций на подсистемы системы матричных единиц.

Напомним, что система векторов  $\{x^j\}_{j \in J}$  в банаховом пространстве  $X$  называется *минимальной*, если  $x^j \notin \overline{\text{span}}(\{x^j\}_{j \notin J})$  для любого  $j \in J$ . Здесь через  $\overline{\text{span}}(\{x^j\}_{j \notin J})$  обозначено замыкание в  $X$  линейной оболочки  $\text{span}(\{x^j\}_{j \notin J})$  системы  $\{x^j\}_{j \notin J}$  (т. е. исходной системы без выбранного элемента  $x^j$ ). Для минимальной системы  $\{x^j\}_{j \in J}$  всегда существует (но может быть не единственная) [8] такая система  $\{y^j\}_{j \in J}$  элементов из сопряженного пространства  $X^*$ , что  $y^j(x^k) = [k = j]$ , где  $[k = j]$  – это индикатор равенства  $k = j$  (т. е.  $[k = j] = 0$  при  $k \neq j$  и  $[k = j] = 1$  при  $k = j$ , такая форма записи индикатора называется нотацией Айверсона). Система  $\{y^j\}_{j \in J}$  при этом называется *сопряженной системой*, а система пар  $\{(x^j, y^j)\}_{j \in J}$  – *биортогональной системой*. Предположим теперь, что для каждого  $x \in X$  в  $\overline{\text{span}}(\{x^j\}_{j \in J})$  существует единственный элемент  $Px$  такой, что  $y^j(Px) = y^j(x)$ . Будем называть так определенный оператор ( $x \rightarrow Px$ ) *естественным проектором* относительно биортогональной системы  $\{(x^j, y^j)\}_{j \in J}$ . Очевидно, что при этом оператор  $P$  будет линейным, и, кроме того, будет выполняться равенство  $P^2 = P$ , т. е.  $P$  будет идемпотентом. Если оператор  $P$  определен и ограничен, то мы будем говорить, что естественный проектор на систему  $\{x^j\}_{j \in J}$  ограничен (при условии, конечно, что сопряженная система к  $\{x^j\}_{j \in J}$  уже выбрана). В остальных случаях, т. е. когда оператор  $P$  не определен или определен, но неограничен, мы будем говорить, что естественный проектор на систему  $\{x^j\}_{j \in J}$  неограничен.

*Матричной единицей*  $E_{ij}$  будем называть матрицу, у которой в позиции  $(i, j)$  стоит единица, а все остальные элементы равны нулю. Легко видеть, что во всех матричных пространствах  $\mathcal{M}^{p,q}$  система матричных единиц  $\{E_{ij}\}$  образует минимальную систему, и, кроме того,  $\|E_{ij}\|_{p,q} = 1$ . В качестве сопряженной системы мы будем использовать систему функционалов  $\{E_{ij}^*\}$ , действующих по правилу

$$E_{ij}^*(A) = a_{ij}$$

для произвольной матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^\infty \in \mathcal{M}^{p,q}$ . В рассматриваемых пространствах сходимость по норме влечет покоординатную сходимость, так как

$$\|A\|_{p,q} \geq |a_{ij}|,$$

поэтому все функционалы  $E_{ij}^*$  будут непрерывными.

В настоящей работе изучается вопрос об ограниченности естественных проекторов на подсистемы системы матричных единиц в пространствах  $\mathcal{M}^{p,q}$ . При  $p = 1$  или  $q = \infty$  все такие проекторы будут ограничены. Нетривиальным в поставленной задаче является случай  $p > 1$  и  $q < \infty$ . Мы не исследуем в этой работе ограниченность естественного проектора при конкретном выборе системы матричных единиц, но доказываем, что при  $p > 1$  и  $q < \infty$  почти все такие проекторы будут неограничены. «Почти все» здесь понимается в вероятностном смысле. Мы выбираем подсистему матричных единиц случайно: каждая матричная единица включается в подсистему с вероятностью  $1/2$  и независимо от других матричных единиц. Из закона нуля и единицы (см. [10, глава IV, § 1]) ясно, что если ограниченность такого случайного проектора является событием, то его вероятность равна либо нулю, либо единице. Мы доказываем, что это действительно будет событием, вероятность которого в случае  $p > 1$  и  $q < \infty$  равна нулю.

Отметим, что для любой бесконечной матрицы проекцию  $P_{\mathcal{E}}$  на произвольную подсистему  $\mathcal{E}$  матричных единиц можно определить без рассмотрения объемлющих матричных пространств и, следовательно, без понятия биортогональной системы. Под естественной проекцией матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^\infty$  можно понимать матрицу  $P_{\mathcal{E}}(A) = (a_{ij}[E_{ij} \in \mathcal{E}])_{i,j=1}^\infty$ . Описанный выше подход мы

предложили для включения рассматриваемой нами задачи в более широкий контекст, подразумевая будущие более общие исследования.

Наше изложение мы начнем с рассмотрения конечномерного случая. Для различения с бесконечномерным случаем мы используем обозначения  $\ell_n^p$ ,  $\mathcal{M}_n^{p,q}$  и т. д. для естественных  $n$ -мерных аналогов введенных выше объектов и конструкций.

## 2. Естественные проекторы в конечномерном случае

В этом разделе мы будем смотреть на матрицы размера  $n \times n$  как на ограниченные линейные операторы между  $n$ -мерными пространствами. Для фиксированных  $p$  и  $q$ ,  $1 \leq p, q \leq \infty$ , это будут все операторы из  $\ell_n^p$  в  $\ell_n^q$  с операторной нормой: для матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$

$$\|A\|_{p,q} := \sup_{x \in \ell_n^p: \|x\|_{\ell_n^p}=1} \|Ax\|_{\ell_n^q}.$$

Конечномерное банахово пространство всех матриц размера  $n \times n$ , рассматриваемое с операторной нормой  $\|\cdot\|_{p,q}$ , будем обозначать через  $\mathcal{M}_n^{p,q}$ .

Через  $E_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , обозначим матричные единицы, т. е. матрицы, у которых одна единица стоит в позиции  $(i, j)$ , а на всех других позициях стоят нули. Таким образом для произвольной матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  имеет место следующее разложение:

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}.$$

Случайным естественным проектором  $P_S$  в пространстве  $\mathcal{M}_n^{p,q}$  будем называть ортогональную проекцию на подпространство  $\mathcal{M}_n^{p,q}$ , образованное набором матричных единиц  $\{E_{ij}\}_{i,j \in S}$ ,  $S \subset \{1, 2, \dots, n\}^2$ , выбранных случайным образом в соответствии с симметричной схемой Бернулли:  $P((i, j) \in S) = \frac{1}{2}$  и события  $\{(i, j) \in S\}$ ,  $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$ , независимы в совокупности. Таким образом случайный естественный проектор может принимать одно из  $2^{n^2}$  равновероятных значений, каждое из которых является естественным проектором. Для каждого фиксированного  $s \subset \{1, 2, \dots, n\}^2$  и произвольной матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$

$$P_s(A) = \sum_{i,j:(i,j) \in s} a_{ij} E_{ij}.$$

**Теорема 2.1.** Пусть  $1 < p \leq \infty$ ,  $1 \leq q < \infty$ ,  $\delta = \min\{1/p^*, 1/q, 1/2\}$ . Тогда

$$P \left( \|P_S\|_{\mathcal{M}_n^{p,q} \rightarrow \mathcal{M}_n^{p,q}} \geq \frac{n^{\delta/2} - 1}{2} \right) \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

**Доказательство.** Мы будем использовать результаты работы Г. Беннетта [11] о матрицах с элементами  $a_{ij} = \pm 1$ . Нужный нам эффект роста норм естественных проекторов проявится уже на таких матрицах.

Обозначим

$$M = \max_{\theta_{ij} = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij} \right\|_{p,q}.$$

Легко видеть (см. также [11, Proposition 3.1]), что

$$M = \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_{ij} \right\|_{p,q} = n^{1/q+1/p^*}$$

С другой стороны, из [11, Proposition 3.2 и Corollary 3.3] следует, что с константой  $B$ , не зависящей от  $n$ ,

$$E_\theta \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij} \right\|_{p,q} \leq Bn^\gamma, \quad \text{где } \gamma = \max\{1/q, 1/q + 1/2 - 1/p, 1/p^*, 1/p^* + 1/q - 1/2\}.$$

Легко видеть, что

$$\gamma \leq 1/q + 1/p^* - \delta.$$

Поэтому

$$E_\theta \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij} \right\|_{p,q} \leq BMn^{-\delta}. \quad (1)$$

Отсюда можно сделать вывод, что для множества знаков

$$\Omega_n := \left\{ \theta = (\theta_{ij} = \pm 1)_{i,j=1}^n : \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij} \right\|_{p,q} \leq Mn^{-\delta/2} \right\}$$

выполняется неравенство

$$P(\Omega_n) \geq 1 - Bn^{-\delta/2}.$$

Действительно, иначе было бы так:

$$E_\theta \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij} \right\|_{p,q} \geq \int_{\Omega \setminus \Omega_n} \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij} \right\|_{p,q} d\theta \geq Mn^{-\delta/2} P(\Omega \setminus \Omega_n) > Mn^{-\delta/2} Bn^{-\delta/2} = BMn^{-\delta},$$

а это противоречит неравенству (1).

С другой стороны, для  $\theta \in \Omega_n$

$$\left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij} \right\|_{p,q} \leq Mn^{-\delta/2}$$

и, одновременно,

$$2 \left\| \sum_{i,j:\theta_{ij}=1} E_{ij} \right\|_{p,q} = \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij} \right\|_{p,q} \geq M - Mn^{-\delta/2},$$

Следовательно, для любого набора знаков  $\theta \in \Omega_n$

$$\frac{\left\| \sum_{i,j:\theta_{ij}=1} E_{ij} \right\|_{p,q}}{\left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij} \right\|_{p,q}} = \frac{\left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_{ij} \right\|_{p,q}}{2 \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij} \right\|_{p,q}} \geq \frac{M - Mn^{-\delta/2}}{2Mn^{-\delta/2}} = \frac{n^{\delta/2} - 1}{2}.$$

Но это означает, что для случайного множества  $S \subset \{1, 2, \dots, n\}^2$ , определяемого равенством  $S = \{(i, j) : \theta_{ij} = 1\}$ , и матрицы

$$A_\theta := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} E_{ij}$$

при  $\theta \in \Omega_n$  выполняется неравенство

$$\|P_S\|_{\mathcal{M}_n^{p,q} \rightarrow \mathcal{M}_n^{p,q}} \geq \frac{\|P_S(A_\theta)\|_{p,q}}{\|A_\theta\|_{p,q}} \geq \frac{n^{\delta/2} - 1}{2}.$$

Доказательство теоремы завершим наблюдением, что  $P(\Omega_n) \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . □

### 3. Реализация операторов между $\ell^p$ и $\ell^q$ в виде матриц

Будем говорить, что бесконечная матрица  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^\infty$ , составленная из вещественных чисел  $a_{ij}$ , корректно определяет (или *задает*) оператор из  $\ell^p$  в  $\ell^q$ , если для каждого  $x = (x_j) \in \ell^p$  выполняется следующее условие: для каждого  $i \in \mathbb{N}$  сходится ряд

$$\sum_{j=1}^\infty a_{ij} x_j =: y_i, \quad (2)$$

а вектор  $y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in \ell^q$ . В таком случае мы полагаем  $Ax = y$ . В общем случае определить по матрице  $A$ , задает ли она оператор из  $\ell^p$  в  $\ell^q$ , является сложной задачей. Отметим, однако, что

при  $p < \infty$  все ограниченные линейные операторы из  $\ell^p$  в  $\ell^q$  задаются матрицами. Именно, каждый линейный ограниченный оператор  $T$  из  $\ell^p$  в  $\ell^q$  корректно определяется матрицей  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$  с  $a_{ij} = (Te^j)_i$ . Действительно, последовательность  $(e^j)_{j=1}^{\infty}$  образует базис в пространстве  $\ell^p$  при  $p < \infty$ , поэтому для  $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^p$

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e^j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j e^j.$$

Из сходимости в  $\ell^q$  вытекает и покоординатная сходимость. Если оператор  $T$  линеен и непрерывен, то

$$Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j T e^j,$$

и, следовательно,

$$(Tx)_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j (Te^j)_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j,$$

а значит сходятся и все ряды  $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$  к  $(Tx)_i$ . При этом

$$((Tx)_1, (Tx)_2, \dots) = Tx \in \ell^q.$$

Аналогичное рассуждение показывает, что любой ограниченный линейный оператор из  $c_0$  в  $\ell^q$  также имеет корректное матричное представление. Отмеченное свойство представимости любого линейного ограниченного оператора в виде матрицы хорошо известно в более общей форме (не только для операторов из  $\ell^p$ ,  $p < \infty$ , или  $c_0$  в  $\ell^q$ ) [12, Theorem 2.33].

Отметим еще, что в случае  $1 \leq q < p < \infty$  все ограниченные линейные операторы из  $\ell^p$  в  $\ell^q$  являются компактными [13; 14], и это же верно для операторов из  $c_0$  в  $\ell^q$  при  $1 \leq q < \infty$ . Кроме того, множество всех матриц, задающих операторы из  $\ell^{\infty}$  в  $\ell^q$ ,  $1 \leq q < \infty$ , совпадает с аналогичным множеством в случае операторов из  $c_0$  в  $\ell^q$  [15], и, следовательно, все соответствующие этим матрицам операторы компактны. При этом в случае  $1 \leq q < 2$  все операторы из  $\ell^{\infty}$  в  $\ell^q$  компактны [14]. Однако не все компактные операторы из  $\ell^{\infty}$  в  $\ell^q$  можно представить в матричном виде (для контрпримеров можно использовать конечномерные операторы с координатными функционалами в виде банаховых пределов, про банаховы пределы см. в [16; 17]).

В любом случае, справедливо следующее утверждение.

**Предложение 3.1.** *Для любых  $p, q \in [1, \infty]$  все операторы из  $\ell^p$  в  $\ell^q$ , которые корректно определяются бесконечными матрицами, являются ограниченными и образуют банахово пространство  $\mathcal{M}^{p,q} \subset \mathcal{L}^{p,q}$  с операторной нормой: для каждой такой матрицы  $A$*

$$\|A\|_{p,q} := \sup_{x \in S_p} \|Ax\|_{\ell^q} < \infty.$$

**Доказательство.** Действительно, во-первых, если матрица  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$  корректно задает оператор из  $\ell^p$  в  $\ell^q$ , то этот оператор ограничен, т. е. принадлежит пространству  $\mathcal{L}^{p,q}$ . Чтобы в этом убедиться, применим дважды теорему Банаха–Штейнгауза о равномерной ограниченности. Все линейные функционалы  $y_i = y_i(x)$ , определенные равенством (2), автоматически являются непрерывными на  $\ell^p$ , если только соответствующий ряд сходится: каждый такой функционал является поточечным пределом последовательности ограниченных функционалов вида

$$y_i^{(n)}(x) := \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j,$$

и, в силу известного следствия из теоремы Банаха–Штейнгауза, ограничен. Значит, все конечномерные операторы вида

$$A^{(m)}(x) := (y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x), 0, 0, \dots)$$

также являются ограниченными. Кроме того, последовательность этих операторов поточечно ограничена, так как

$$\|A^{(m)}(x)\|_q \leq \|A(x)\|_q.$$

По теореме Банаха–Штейнгауза эта последовательность операторов будет равномерно ограничена. Но для любого  $x \in \ell^p$

$$\|A(x)\|_q = \lim_{m \rightarrow \infty} \|A^{(m)}(x)\|_q \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \|A^{(m)}\|_{p,q} \|x\|_p.$$

Во-вторых, подпространство  $\mathcal{M}^{p,q}$  замкнуто в  $\mathcal{L}^{p,q}$ . В случае  $p < \infty$ , как уже было отмечено, пространство  $\mathcal{M}^{p,q}$  просто совпадает с  $\mathcal{L}^{p,q}$ . В случае  $p = \infty$  имеет место изометрическое равенство  $\mathcal{M}^{\infty,q} = \mathcal{L}(c_0, \ell^\infty)$ , где через  $\mathcal{L}(c_0, \ell^\infty)$  мы обозначили пространство всех линейных ограниченных операторов из  $c_0$  в  $\ell^\infty$ . Это следует из описания пространства  $\mathcal{M}^{\infty,q}$ , см. [18, Lemma 1; 19, Theorem 9; 15, пункты 63 и 72], и обозначенного выше факта, что все операторы из  $\mathcal{L}(c_0, \ell^\infty)$  представляются матрицами.  $\square$

**Замечание 3.2.** Предложение 3.1 следует из общей теории так называемых FK-пространств (пространств последовательностей с некоторыми специальными, но часто встречающимися свойствами) [12; 20]. Известно, что все матричные операторы между FK-пространствами автоматически непрерывны (см., например, [20, Theorem 4.2.8] или [12, Theorem 2.31]). Мы решили написать прямое доказательство, использующее только теорему Банаха–Штейнгауза и относительно простые результаты о структуре матричных пространств, чтобы не вынуждать читателя изучать специальную теорию (безусловно, очень красивую, важную и полезную) перед прочтением нашей маленькой заметки. Аналогичное можно сказать и про предложение 3.3 далее.

Обозначим через  $P_{n,m}$  естественный проектор в  $\mathcal{M}^{p,q}$  на систему  $\{E_{ij}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ . Для любых целых  $k, l \geq 0$  и любой матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^\infty \in \mathcal{M}^{p,q}$  (пишем  $P_{n,m}A$  вместо  $P_{n,m}(A)$ )

$$\|P_{n,m}A\|_{p,q} = \sup_{x \in S_p, y \in S_{q^*}} \langle y, (P_{n,m}A)x \rangle \leq \sup_{x \in S_p, y \in S_{q^*}} \langle y, (P_{n+k, m+l}A)x \rangle = \|P_{n+k, m+l}A\|_{p,q}.$$

Промежуточное неравенство справедливо в силу того, что для любых  $x \in S_p, y \in S_{q^*}$  можно подобрать  $x' \in S_p, y' \in S_{q^*}$  такие, что

$$\langle y, (P_{n,m}A)x \rangle = \langle y, (P_{n+k, m+l}A)x \rangle = \langle y', (P_{n+k, m+l}A)x' \rangle.$$

Похожие соображения показывают, что  $\|P_{n,m}A\|_{p,q} \leq \|A\|_{p,q}$ . Кроме того,

$$\|P_{n,m}A\|_{p,q} \nearrow \|A\|_{p,q} \quad \text{при } n, m \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Действительно, пусть  $x' \in S_p, \varepsilon > 0$  и  $\|Ax'\|_q > \|A\|_{p,q} - \varepsilon$ . Для некоторого  $n_0$  будет выполняться неравенство  $\|P_{n_0}(Ax')\|_q > \|A\|_{p,q} - 2\varepsilon$  (напомним, что через  $P_n$  мы обозначаем проектор на первые  $n$  координат в пространстве последовательностей). Далее, так как все ряды вида  $\sum_j a_{ij}x'_j, i = 1, 2, \dots, \dots, n_0$  сходятся, то для некоторого  $m_0 > n_0$

$$\|P_{n_0}(A(P_{m_0}x'))\|_q > \|A\|_{p,q} - 3\varepsilon.$$

Но тогда  $\|(P_{n_0, m_0}A)x'\|_q > \|A\|_{p,q} - 3\varepsilon$ . Следовательно,  $\|P_{n_0, m_0}A\|_{p,q} > \|A\|_{p,q} - 3\varepsilon$ , и выполнено (3).

**Предложение 3.3.** Пусть  $\mathcal{E}$  – произвольная подсистема матричных единиц,  $p, q \in [1, \infty]$ . Предположим, что для любой матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^\infty \in \mathcal{M}^{p,q}$  матрица  $P_{\mathcal{E}}(A) := (a_{ij} \cdot [E_{ij} \in \mathcal{E}])_{i,j=1}^\infty$  также принадлежит  $\mathcal{M}^{p,q}$ . Тогда линейный оператор (матричная проекция)

$$P_{\mathcal{E}} : A \in \mathcal{M}^{p,q} \rightarrow P_{\mathcal{E}}(A) \in \mathcal{M}^{p,q}$$

будет ограниченным.

**Доказательство.** В силу (3)

$$\|(P_{n,n}P_{\mathcal{E}})(A)\|_{p,q} = \|P_{n,n}(P_{\mathcal{E}}(A))\|_{p,q} \nearrow \|P_{\mathcal{E}}(A)\|_{p,q}.$$

Получается, что последовательность ограниченных (в силу конечномерности и непрерывности координатных функционалов  $a_{ij}$ ) операторов  $P_{n,n}P_{\mathcal{E}} : \mathcal{M}^{p,q} \rightarrow \mathcal{M}^{p,q}$  поточечно ограничена, а значит, по теореме Банаха–Штейнгауза, и равномерно ограничена некоторой константой  $C > 0$ . Следовательно,

$$\|P_{\mathcal{E}}(A)\|_{p,q} \leq \sup_n \|P_{n,n}P_{\mathcal{E}}\|_{\mathcal{M}^{p,q} \rightarrow \mathcal{M}^{p,q}} \|A\|_{p,q} \leq C \|A\|_{p,q}. \quad \square$$

#### 4. Неограниченность естественных проекторов в пространствах операторов между $\ell^p$ и $\ell^q$

Для данных  $p$  и  $q$  определим подпространство  $\mathcal{R}$  в пространстве  $\mathcal{M}^{p,q}$  случайно: каждый элемент  $E_{ij}$  входит в это подпространство независимо от других с вероятностью  $1/2$ , а само подпространство  $\mathcal{R}$  определяется замыканием в  $\mathcal{M}^{p,q}$  линейной оболочки выбранных матричных единиц  $E_{ij}$ . Соответствующее вероятностное пространство, от которого зависит выбор подпространства  $\mathcal{R}$ , — это пополнение счетного произведения бернуллиевских (с двумя элементарными исходами) вероятностных пространств. Зададимся следующими вопросами. Будет ли событием (в вероятностном смысле) ограниченность естественного проектора  $P_{\mathcal{R}}$  на случайное подпространство  $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}^{p,q}$ ? Чему равна вероятность такого события? Под естественным проектором  $P_{\mathcal{R}}$  мы понимаем следующее отображение на множестве всех бесконечных матриц: для матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$

$$P_{\mathcal{R}}(A) = (a_{ij} \cdot [E_{ij} \in \mathcal{R}])_{i,j=1}^{\infty}.$$

Начнем со следующего простого утверждения, показывающего, что в случае  $p = 1$  и в случае  $q = \infty$  проблемы, по сути, нет.

**Предложение 4.1.** *Если  $p = 1$  или  $q = \infty$ , то все естественные проекторы в  $\mathcal{M}^{p,q}$  ограничены, и при  $\mathcal{R} \neq \{0\}$  норма каждого проектора  $P_{\mathcal{R}}$  равна единице.*

**Доказательство.** Легко видеть, что для любой матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty} \in \mathcal{M}^{1,q}$  при  $q < \infty$

$$\|A\|_{1,q} = \sup_{j \in \mathbb{N}} \left( \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{1/q},$$

а при  $q = \infty$

$$\|A\|_{1,\infty} = \sup_{i,j \in \mathbb{N}} |a_{ij}|.$$

Поэтому

$$\|P_{\mathcal{R}}(A)\|_{1,q} \leq \|A\|_{1,q}.$$

При этом для матричной единицы  $E_{ij} \in \mathcal{R}$  имеет место равенство

$$\|P_{\mathcal{R}}(E_{ij})\|_{1,q} = \|E_{ij}\|_{1,q},$$

что завершает доказательство при  $p = 1$ .

Далее, при  $p > 1$  и  $A \in \mathcal{M}^{p,\infty}$

$$\|A\|_{p,\infty} = \sup_{i \in \mathbb{N}} \left( \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^{p^*} \right)^{1/p^*},$$

и рассуждения для  $q = \infty$  аналогичны. □

При  $p > 1$  и  $q < \infty$  простых формул для норм матричных операторов из  $\ell^p$  в  $\ell^q$  нет, и в этом случае мы не можем использовать рассуждения, аналогичные доказательству предложения 4.1. Оказывается, что и сама ситуация с ограниченностью естественных проекторов будет другой, в некотором смысле противоположной.

**Теорема 4.2.** *Пусть  $1 < p \leq \infty$ ,  $1 \leq q < \infty$ . Почти наверное для проектора  $P_{\mathcal{R}}$  найдется матрица  $A \in \mathcal{M}^{p,q}$  такая, что  $P_{\mathcal{R}}(A) \notin \mathcal{M}^{p,q}$ .*

**Доказательство.** Выберем последовательность попарно непересекающихся подмножеств  $I_n \subset \mathbb{N}$  такую, что  $|I_n| = n$ , а в остальном произвольную. Пусть  $P_{n,n}$  — проекция на подпространство  $\text{span}\{E_{ij} : i, j \in I_n\}$  в пространстве  $\mathcal{M}^{p,q}$ . Для каждого натурального  $N \in \mathbb{N}$  через  $B_{N,n}$  обозначим событие, состоящее в том, что биоограничение  $P_{n,n}P_{\mathcal{R}}P_{n,n}$  ( $= P_{\mathcal{R}}P_{n,n}$ ) оператора  $P_{\mathcal{R}}$  в  $\mathcal{M}^{p,q}$  имеет норму, не превосходящую  $N$  (соответствующее подмножество вероятностного пространства действительно будет событием, так как оно определяется лишь конечным набором элементарных событий вида  $E_{ij} \in \mathcal{R}$ ,  $i, j \in I_n$ , т. е. цилиндрическим множеством нашего вероятностного пространства). Согласно теореме 2.1 при  $n > n_N$

$$P(B_{N,n}) = P(\|P_{n,n}P_{\mathcal{R}}P_{n,n}\|_{\mathcal{M}^{p,q} \rightarrow \mathcal{M}^{p,q}} \leq N) \leq P(\|P_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{M}_n^{p,q} \rightarrow \mathcal{M}_n^{p,q}} \leq N) < 1/2.$$

Но события  $\{B_{N,n}\}_n$  независимы в совокупности, поэтому для каждого  $N \in \mathbb{N}$

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{N,n}\right) \leq P\left(\bigcap_{n=N+1}^{N+m} B_{N,n}\right) < (1/2)^m \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty,$$

и, следовательно,

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{N,n}\right) = 0.$$

Значит,

$$P\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{N,n}\right) \leq \sum_{N=1}^{\infty} P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{N,n}\right) = 0.$$

Пусть теперь  $B$  – такое подмножество нашего вероятностного пространства, на котором соответствующие проекторы  $P_{\mathcal{R}}$  ограничены. Легко видеть, что

$$\|P_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{M}^{p,q} \rightarrow \mathcal{M}^{p,q}} \geq \|P_{n,n} P_{\mathcal{R}} P_{n,n}\|_{\mathcal{M}^{p,q} \rightarrow \mathcal{M}^{p,q}}$$

(и, кроме этого, несложно показать, что  $\|P_{n,n}\|_{\mathcal{M}^{p,q} \rightarrow \mathcal{M}^{p,q}} = 1$ ). Поэтому

$$B \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{N,n}.$$

Значит, в силу полноты используемого вероятностного пространства,  $B$  является событием, и  $P(B) = 0$ . Далее, если  $P_{\mathcal{R}}(A) \in \mathcal{M}^{p,q}$  для любой матрицы  $A \in \mathcal{M}^{p,q}$ , то, в силу предложения 3.3, оператор  $P_{\mathcal{R}}$  будет ограниченным в  $\mathcal{M}^{p,q}$ , что, как мы выяснили, происходит лишь с нулевой вероятностью. Следовательно, почти наверно найдется матрица  $A \in \mathcal{M}^{p,q}$ , для которой  $P_{\mathcal{R}}(A) \notin \mathcal{M}^{p,q}$ .  $\square$

Из теоремы 4.2 и предложения 3.3 получаем

**Следствие 4.3.** При  $p > 1$  и  $q < \infty$  вероятность того, что естественный проектор  $P_{\mathcal{R}}$  на случайное попространство  $\mathcal{R}$  будет ограничено действовать в пространстве  $\mathcal{M}^{p,q}$ , равна нулю.

**Замечание 4.4.** Как это видно из доказательства теоремы 4.2 почти наверно неограниченность случайного естественного проектора в  $\mathcal{M}^{p,q}$  проявляется на финитных матрицах, у которых ненулевые элементы  $a_{ij} = \pm 1$ .

Работа второго автора поддержана Национальной академией наук Беларуси в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2030», НИР 1.08.1.

### Литература

1. Banach S., Mazur S. Zur Theorie der linearen Dimension // Studia Math. 1933. Vol. 4. P. 100–112.
2. De Hevia D., Tradacete P. Complemented subspaces of Banach lattices // Banach J. Math. Anal. 2025. Vol. 19. Art. 60.
3. Plebanek G., Rondoš J., Sobota D. Complemented subspaces of Banach spaces  $\mathcal{C}(K \times L)$  // Journal of Functional Analysis. 2026. Vol. 290, iss. 2. Art. 111236.
4. Асташкин С. В. Последовательности независимых функций и структура симметричных пространств // УМН. 2024. Т. 79, № 3(477). С. 3–92.
5. Lindenstrauss J., Tzafriri L. On the complemented subspaces problem // Isr. J. Math. 1971. Vol. 9. P. 263–269.
6. Phillips R. S. On linear transformations // Transactions of the American Mathematical Society. 1940. Vol. 48, N 3. P. 516–541.
7. Кадец М. И., Митягин Б. С. Дополняемые подпространства в банаховых пространствах // УМН. 1973. Т. 28, № 6(174). С. 77–94.
8. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Изд. АФЦ, 1999. 560 с.
9. Astashkin S. V., Bakhtin A. A., Lykov K. V. Conditional bases in the matrix space with the cut-norm // Владикавказский математический журнал. 2026. Т. 2. С. 5–19. <https://doi.org/10.46698/b6298-9094-1158-n>
10. Ширяев А. Н. Вероятность–2. М.: МЦНМО, 2017. 408 с.

11. Bennett G. Schur multipliers // *Duke Math. J.* 1977. Vol. 44, N 3. P. 603–639.
12. Banaś J., Mursaleen M. *Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations.* Springer New Delhi, 2014. 315 p.
13. Pitt H. R. A note on bilinear form // *J. Lond. Math. Soc.* 1936. Vol. 11. P. 174–180.
14. Rosenthal H. P. On Quasi-Complemented Subspaces of Banach Spaces, With an Appendix on Compactness of Operators from  $L^p(\mu)$  to  $L^q(\nu)$  // *Journal of Functional Analysis.* 1969. Vol. 4. P. 176–214.
15. Stieglitz M., Tietz H. Matrixtransformationen von Folgenräumen Eine Ergebnisübersicht // *Mathematische Zeitschrift.* 1977. Vol. 154. P. 1–16.
16. Банах С. Теория линейных операций. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 272 с.
17. Семёнов Е. М., Сукочев Ф. А., Усачёв А. С. Геометрия банаховых пределов и их приложения // *УМН.* 2020. Т. 75, № 4(454). С. 153–194.
18. Lorentz G. G. Direct theorems on methods of summability II. *Canadian Journal of Mathematics.* 1951. Vol. 3. P. 236–256.
19. Bennett G., Kalton N. J. Inclusion theorems for K-spaces // *Canadian Journal of Mathematics.* 1973. Vol. 25, N 3. P. 511–524.
20. Wilansky A. *Summability through Functional Analysis* // North-Holland Mathematics Studies 85. Amsterdam; New York; Oxford, 1984. xii+318 p.

### References

1. Banach S., Mazur S. Zur Theorie der linearen Dimension. *Studia Math.*, 1933, vol. 4, pp. 100–112.
2. De Hevia D., Tradacete P. Complemented subspaces of Banach lattices *Banach J. Math. Anal.*, 2025, vol. 19, art. 60. <https://doi.org/10.1007/s43037-025-00447-0>
3. Plebanek G., Rondoš J., Sobota D. Complemented subspaces of Banach spaces  $\mathcal{C}(K \times L)$  *Journal of Functional Analysis*, 2026, vol. 290, iss. 2, art. 111236. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2025.111236>
4. Astashkin S. V. Sequences of independent functions and structure of rearrangement invariant spaces. *Russian Mathematical Surveys*, 2024. vol. 79, iss. 3, pp. 375–457. <https://doi.org/10.4213/rm10171e>
5. Lindenstrauss J., Tzafriri L. On the complemented subspaces problem *Isr. J. Math.*, 1971, vol. 9, pp. 263–269. <https://doi.org/10.1007/BF02771592>
6. Phillips R. S. On linear transformations *Transactions of the American Mathematical Society*, 1940, vol. 48, iss. 3, pp. 516–541. <https://doi.org/10.2307/1990096>
7. Kadets M. I., Mityagin B. S. Complemented subspaces in Banach spaces. *Russian Mathematical Surveys*, 1973, vol. 28, iss. 6, pp. 77–95. <https://doi.org/10.1070/RM1973v028n06ABEH001630>
8. Kashin B. S., Saakyan A. A. *Orthogonal Series.* Translations of Mathematical Monographs, Amer Mathematical Society, 1989, vol. 75. 451 p.
9. Astashkin S. V., Bakhtin A. A., Lykov K. V Conditional bases in the matrix space with the cut-norm *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2026, vol. 2, pp. 5–19. <https://doi.org/10.46698/b6298-9094-1158-n>
10. Shiryaev A. N. *Probability. 2nd Edition.* Springer, New York, 1996. 621 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-72208-5>
11. Bennett G. Schur multipliers *Duke Math. J.*, 1977, vol. 44, iss. 3, pp. 603–639. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-77-04426-X>
12. Banaś J., Mursaleen M. *Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations.* Springer New Delhi, 2014. 315 p. <https://doi.org/10.1007/978-81-322-1886-9>
13. Pitt H. R. A note on bilinear form *J. Lond. Math. Soc.*, 1936, vol. 11, pp. 174–180. <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-11.3.174>
14. Rosenthal H. P. On Quasi-Complemented Subspaces of Banach Spaces, With an Appendix on Compactness of Operators from  $L^p(\mu)$  to  $L^q(\nu)$ . *Journal of Functional Analysis*, 1969, vol. 4, pp. 176–214. [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(69\)90011-1](https://doi.org/10.1016/0022-1236(69)90011-1)
15. Stieglitz M., Tietz H. Matrixtransformationen von Folgenräumen Eine Ergebnisübersicht. *Mathematische Zeitschrift*, 1977, vol. 154, pp. 1–16. <https://doi.org/10.1007/BF01215107>

16. Banach S. *Theory of Linear Operations*. Dover Publications, 2009. 254 p.
17. Semenov E. M., Sukochev F. A., Usachev A. S. Geometry of Banach limits and their applications *Russian Math. Surveys*, 2020, vol. 75, iss. 4, pp. 725–763. <https://doi.org/10.1070/RM9901>
18. Lorentz G. G. Direct theorems on methods of summability II. *Canadian Journal of Mathematics*, 1951. vol. 3, pp. 236–256. <https://doi.org/10.4153/CJM-1951-028-7>
19. Bennett G., Kalton N. J. Inclusion theorems for K-spaces. *Canadian Journal of Mathematics*, 1973, vol. 25, iss. 3, pp. 511–524. <https://doi.org/10.4153/CJM-1973-052-2>
20. Wilansky A. *Summability through Functional Analysis*. North-Holland Mathematics Studies 85. Amsterdam, New York, Oxford, 1984. xii+318 p.