Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики НАН Беларуси. 2026. Том 34. № 1. С. 39–44

УДК 512.542 https://doi.org/10.67268/1812-5093-2026-34-1-39-44
EDN: UVLPLF

СТЕПЕНИ НЕПРИВОДИМЫХ КОМПОНЕНТ ПОДСТАНОВОЧНОГО ХАРАКТЕРА И НОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

А. А. Ядченко

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
e-mail: yadchenko_56@mail.ru

Поступила: 04.04.2026 **Исправлена:** 21.05.2026 **Принята:** 29.05.2026

Ключевые слова: конечные группы, степени характеров, нормальные подгруппы.

Аннотация. Для нечетного простого числа r найдены условия, при которых силовская r-подгруппа G_r абелева и нормальна в неприводимой комплексной линейной группе G.

DEGREES OF IRREDUCIBLE COMPONENTS OF PERMUTATION CHARACTER AND NORMAL SUBGROUPS OF A FINITE GROUP

A. A. Yadchenko

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
e-mail: yadchenko_56@mail.ru

Received: 04.04.2026 **Revised:** 21.05.2026 **Accepted:** 29.05.2026

Keywords: finite groups, degrees of characters, normal subgroups.

Abstract. For an odd prime number r, we found conditions under which a Sylow r-subgroup G_r is Abelian and normal in an irreducible complex linear group G.

1. Введение

Работа посвящена одному из самых важных направлений в теории конечных групп – существованию в них нормальных подгрупп. Пусть r – нечетное простое число и G_r – силовская подгруппа конечной группы G. Предположим, что группа G имеет точный комплексный неприводимый характер ψ степени n. Если группа G разрешима и $n < r$, то по теореме Ито [1] подгруппа $G_r \lhd G$ и абелева либо $n = r-1$ и n степень 2. Этот результат верен и для r-разрешимых групп. Д. Уинтер [2] доказал, что если G_r не является нормальной в разрешимой группе G, то n делится на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv -1,\ 0$ или $1 \pmod r$. В статьях [3–5] установлено, что результат Д. Уинтера верен и для p-разрешимых групп степени $n < 2p$. В работах [6; 7] этот результат был установлен для r-разрешимых групп и произвольного числа n, а в статье [8] распространен на π-разрешимые группы G с π-холловой TI-подгруппой G_π для любого конечного множества нечетных простых чисел π.

В работе [9] был установлен подобный результат с условием, что характер ψ является неприводимой компонентой подстановочного характера $(1_{G_{\pi'}})^G$ π-обособленной группы G.

Допустим, что G является произвольной группой, т. е. не обязательно разрешимой, r-разрешимой, π-разрешимой или π-обособленной. Для таких групп найдены условия, при выполнении которых подгруппа G_r нормальна в G (теорема).

Теорема 1.1. *Пусть G – конечная группа, M – такая ее подгруппа, что $(|M|, |G:M|) = 1$, $|G:M| = q^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{N}$, и нормализатор ее силовской q-подгруппы q-разложим. Предположим, что характер $(1_M)^G$ имеет единственную неглавную неприводимую компоненту ψ, степень которой не делится на r и не делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа $r \in \pi(M)$, что $f \equiv \pm 1 \pmod r$. Тогда $G_r \ker\psi \lhd G$ и факторгруппа $G_r/G_r \cap \ker\psi$ абелева.*

2. Некоторые обозначения и предварительные результаты

N – множество натуральных чисел; если $n \in \mathbf{N}$ и q – простое натуральное число, то $n = n_q n_{q'}$; π – некоторое множество простых натуральных чисел; если ψ – характер некоторой группы X, то $\mathrm{Irr}(\psi)$ обозначает множество всех неприводимых компонент характера ψ; если X подгруппа группы G, то $\pi(X)$ – множество всех простых делителей порядка группы X; $\pi' = \pi(X) \setminus \pi$; $X_{\pi'}$ обозначает π'-холлову подгруппу группы X; если $X \lhd G$ и φ – неприводимый характер подгруппы X, то условие, что φ g-инвариантен для некоторого элемента $g \in G \setminus X$ запишем для краткости в виде $I_G(\varphi) \neq X$; $c.d.(G)$ – множество степеней всех неприводимых характеров группы G; полагаем, что понятия разрешимой, r-разрешимой и π-разрешимой группы читателю известны; π-обособленной называется группа, которая π-разрешима или π'-разрешима; группа X называется q-разложимой для некоторого простого числа q, если $X = X_q \times X_{q'}$; $X^{\#}$ – множество всех неединичных элементов группы X; выражение $f \equiv 0, \pm 1 \pmod r$ означает, что $f \equiv 0, 1$ или $-1 \pmod r$. Все остальные обозначения и определения обычны и их можно найти, например, в [10; 11]. Всюду под характером группы будем понимать комплексный характер, а под группой – конечную группу.

Приведем вспомогательную лемму.

Лемма 2.1. *Пусть G – группа и X – ее подгруппа. Если $\psi \in \mathrm{Irr}(G)$ с ядром K и $\overline{\psi} \in \mathrm{Irr}(G/K)$ – характер, соответствующий в смысле леммы* 2.22 [11] *характеру ψ, то*

$$\left(\overline{\psi}, 1_{XK/K}^{G/K}\right)_{G/K} = \left(\psi, 1_X^G\right)_G.$$

Доказательство. Поскольку $\overline{\psi} \in \mathrm{Irr}\ (G/K)$ – характер, соответствующий в смысле леммы 2.22 [11] характеру ψ группы G, то по этой лемме $\overline{\psi}(gK) = \psi(gk) = \psi(g)$ для любых $g \in G$ и $k \in K$. По определению 2.16 [11] и закону взаимности Фробениуса для характеров

$$\left(\overline{\psi}, 1_{XK/K}^{G/K}\right)_{G/K} = \left((\overline{\psi})_{XK/K}, 1_{XK/K}\right)_{XK/K} =$$
$$= \frac{1}{|XK/K|} \sum_{gK \in XK/K} (\overline{\psi})_{XK/K}(gK) 1_{XK/K}(gK) =$$
$$= \frac{X \cap K}{|X||K|} \sum_{g \in XK} \psi(g) = \frac{X \cap K}{|X|} \sum_{g \in \widetilde{X}} \psi(g) =$$
$$= \frac{X \cap K}{|X|} \sum_{g(X \cap K) \in X/X \cap K} \psi_{X/X \cap K}(g(X \cap K)) =$$
$$= \frac{1}{|X|} \sum_{g \in X} \psi_X(g) = \left(\psi_X, 1_M\right)_X =$$
$$= (\psi, 1_X^G)_G.$$

Выше $\widetilde{X}$ – полное семейство представителей смежных классов X по $X \cap K$. □

3. Доказательство теоремы

Пусть G – конечная группа, M – такая ее подгруппа, что $(|M|, |G : M|) = 1$ и $|G : M| = q^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{N}$. Пусть также Q – силовская q-подгруппа группы G и ее нормализатор $N = N_G(Q)$ q-разложим, т. е. $N = Q \times N_{q'}$. Предположим, что степень n единственной неглавной неприводимой компоненты ψ характера $(1_M)^G$ не делится на r и не делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа $r \in \pi(M)$, что $f \equiv \pm 1 \pmod r$. Убедимся в том, что

$$G_r \ker\psi / \ker\psi \lhd G / \ker\psi.$$

Доказательство теоремы проведем индукцией по порядку группы G. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой выполняются условия теоремы, но в то же время факторгруппа $G_r \ker\psi / \ker\psi$ не является нормальной в группе $G / \ker\psi$.

Из [10, лемма 6.4.2] вытекает, что $G = MQ$. По [11, определение 5.1]

$$(1_M)^G(g) = \sum_{t \in T} (1_M)^0(tgt^{-1}) = 0$$

для каждого элемента $g \in Q^\#$, ибо $tgt^{-1} \notin M$ для каждого элемента $g \in Q^\#$ и для каждого элемента $t \in T$. Здесь T – полное семейство смежных классов группы G по подгруппе M, $(1_M)^0(x) = 1_M(x)$, если $x \in M$, и $(1_M)^0(y) = 0$, если $y \notin M$. Поскольку

$$(1_M)^G(1) = |G : M| = |Q|,$$

то по [10, теорема 4.2.7] $((1_M)^G)_Q = \rho_Q$ – регулярный характер подгруппы Q. Учитывая, что по теореме взаимности Фробениуса для характеров

$$((1_M)^G, 1_G)_G = (1_M, (1_G)_M)_M = (1_M, 1_M)_M = 1,$$

то

$$(1_M)^G = 1_G + \psi,$$

где характер ψ по условию теоремы неприводим. Аналогично получаем, что

$$((1_M)^G, \psi)_G = (1_M, \psi_M)_M = 1.$$

Значит,

$$\psi_M = 1_M + \theta$$

для некоторого такого характера θ подгруппы M, что $(\theta_M, 1_M)_M = 0$.

По [11, лемма 5.11]

$$\ker(1_M)^G = \cap_{g \in G} (\ker 1_M)^g = \cap_{g \in G} M^g = M_G. \qquad (*)$$

Поскольку $\psi \in \mathrm{Irr}\ (1_M)^G$, то $\ker(1_M)^G \subseteq \ker\psi$. Из формулы (*) вытекает, что $M_G = G \cap \ker\psi$. Отсюда следует, что

$$\ker\psi = \ker(1_M)^G = M_G.$$

Предположим, что $\ker\psi \neq 1$. По лемме

$$(\overline{\psi}, 1_{M\ker\psi/\ker\psi}^{G/\ker\psi})_{G/\ker\psi} = (\psi, 1_M^G)_G.$$

Поскольку

$$(|M/\ker\psi|, |G/\ker\psi : M/\ker\psi|) = 1,$$

и нормализатор $N_{G/\ker\psi}(Q\ker\psi/\ker\psi)$ силовской q-подгруппы $Q\ker\psi/\ker\psi$ факторгруппы $G/\ker\psi$ q-разложим, то мы замечаем, что факторгруппа $G/\ker\psi$ и ее точный неприводимый характер $\overline{\psi}$ удовлетворяют условию теоремы. Поскольку $|G/\ker\psi| < |G|$, то по индукции

$$G_r\ker\psi/\ker\psi \lhd G/\ker\psi.$$

Ограничим по теореме Клиффорда точный неприводимый характер $\overline{\psi}$ группы $G/\ker\psi$ на ее нормальную подгруппу $G_r\ker\psi/\ker\psi$. Поскольку

$$(|\overline{\psi}(1)|, |G_r\ker\psi/\ker\psi|) = 1$$

по условию теоремы, то все неприводимые компоненты искомого ограничения линейные, и ядро каждой из них содержит коммутант $(G_r\ker\psi/\ker\psi)'$. Так как пересечение ядер всех неприводимых компонент ограничения единично, ввиду точности характера $\overline{\psi}$, то $(G_r\ker\psi/\ker\psi)' = 1$, т. е. факторгруппа

$$G_r\ker\psi/\ker\psi \cong G_r/G_r \cap \ker\psi$$

абелева. В рассматриваемом случае теорема верна.

В дальнейшем считаем, что $\ker\psi = 1$. Значит, $M_G = \ker(1_M)^G = 1$ и будем это учитывать.

Предположим,что $N \neq Q$. Так как $N = Q \times N_{q'}$, то

$$|G| = |MN| = \frac{|M||N|}{|M \cap N|} = \frac{|M||Q||N_{q'}|}{|M \cap N|}.$$

Поскольку $|G| = |M||Q|$, то мы видим, что

$$|N_{q'}| = |M \cap N|.$$

По условию теоремы $N_{q'} \lhd N$. По [12, лемма 1.16.1] подгруппа $N_{q'}$ содержится в некоторой нормальной в G подгруппе, которая лежит, очевидно, в подгруппе M_G – максимальной нормальной в G, которая содержится в M. Так как $M_G = 1$, то $N_{q'} = 1$. Следовательно, $N = Q$.

Предположим, что в группе G существует собственная подгруппа $1 \neq K \lhd G$. Выберем из таких подгрупп подгруппу, имеющую максимальный порядок. Так как $K \not\subseteq M$, то

$$1 \neq K_q = Q \cap K \lhd Q, \quad K_{q'} = K \cap M \lhd M, \quad K = K_q K_{q'}.$$

Поэтому

$$Q_0 = K_q \cap Z(Q) \neq 1, \quad Q_0 \subseteq Z(K_q), \quad G = KN_G(K_q).$$

Отметим, что

$$Z(K_q) \operatorname{char} K_q \lhd N_G(K_q).$$

Отсюда вытекает, что

$$Q_0 \subseteq Z(K_q) = ((K_q))^x, \quad x \in N_G(K_q).$$

Так как по [11, теорема 5.18] характер $(1_M)^G$ рациональнозначный, то характер $\psi = (1_M)^G - 1_G$ также рациональнозначный. При этом

$$\psi(g) = \rho(g) - 1_Q(g) = 0 - 1 = -1$$

для каждого элемента $g \in Q$.

С одной стороны, для каждого элемента $1 \neq g \in Q_0$ по теореме Клиффорда

$$\psi(g) = e\Sigma_{t\in T}\xi^t(g) = e\Sigma_{t\in T}\xi(tgt^{-1}),$$

где $\xi \in \mathrm{Irr}(\psi_K)$, $e = (\psi_K, \xi)_K$ и T – полное семейство G по $I = I_G(\xi)$. Так как $K \subseteq I$, то из выделенной выше формулы вытекает, что $T \subseteq N_G(K_q)$.

С другой стороны, $\psi(g) = -1$, что показано ранее. Стало быть,

$$\psi(g) = e\Sigma_{t\in T}\xi(tgt^{-1}) = -1.$$

Отсюда вытекает, что

$$|\psi(g)| = |e\Sigma_{t\in T}\xi(tgt^{-1})| = e|\Sigma_{t\in T}\xi(tgt^{-1})| = 1.$$

Мы видим, что $e = 1$. Значит,

$$\psi(g) = \Sigma_{t\in T}\xi(tgt^{-1}) = -1.$$

Поскольку

$$\psi(1) = e|T|\xi(1) = |Q| - 1$$

и $e = 1$, то

$$(\xi')_K = e\xi = \xi$$

для такого неприводимого характера ξ' подгруппы I, что $\psi = (\xi')^G$ по [11, теорема 6.11] и

$$\psi(1) = |T|\xi(1) = |Q| - 1.$$

Так как $T \subseteq N_G(K_q)$, то из рассуждений выше вытекает, что $tgt^{-1} \in Z(K_q)$ для каждого элемента $t \in T$. Поэтому

$$\xi(g) = \xi(1)\zeta, \quad \zeta^q = 1, \quad \xi^t(g) = \xi(1)\zeta^t, \quad t \in T.$$

Следовательно,

$$\psi(g) = \Sigma_{t\in T}\xi(tgt^{-1}) = \Sigma_{t\in T}\xi(1)\zeta^t = \xi(1)\Sigma_{t\in T}\zeta^t = -1.$$

Отсюда вытекает, что

$$|\psi(g)| = |\xi(1)\Sigma_{t\in T}\zeta^t| = \xi(1)|\Sigma_{t\in T}\zeta^t| = 1.$$

Мы видим, что $\xi(1) = 1$. Отсюда следует, что подгруппа K абелева, а также, что $\xi'(1) = 1$. Поэтому $K_{q'} \lhd G$. Но $K_{q'} \subseteq M_G = 1$. Стало быть, $K = K_q$ есть q-группа.

Поскольку $N = Q$ и подгруппа $1 \neq K \subseteq Q$, причем K абелева, то из теоремы Бернсайда и из того, что $M_G = 1$, вытекает, что $K \neq Q$. Поскольку подгруппа K произвольная максимальная нормальная в группе G, то факторгруппа $\overline{G} = G/K$ простая с такой подгруппой $\overline{M}$, что $(|\overline{M}|, |\overline{G} : \overline{M}|) = 1$, $|\overline{G} : \overline{M}| = q^{\alpha_1}$, $\alpha_1 \in \mathbf{N}$, и $N_{\overline{G}}(\overline{Q}) = \overline{Q}$. Здесь $\overline{M} = MK/K$ и $\overline{Q} = Q/K$. Так как группа с самонормализуемой силовской подгруппой нечетного порядка не является простой, то мы заключаем, что $q = 2$. Тогда подгруппа M имеет нечетный порядок и, следовательно, группа $G_1 = MK$ разрешима. Поскольку $|G : G_1|$ является степенью 2 и $Q \subseteq I$, то $G = IG_1$, и по [11, упражнение 5.2] характер

$$\psi_{G_1} = ((\xi')^G)_{G_1} = ((\xi')^{IG_1})_{G_1} = ((\xi')_{I\cap G_1})^{G_1}$$

неприводим и точен. Нетрудно видеть, что $G_r \subseteq G_1$. По теореме Д. Уинтера [2] $G_r \lhd G_1$. Так как $(|G_r|, |K|) = 1$, то $G_r \subseteq C_G(K) \lhd G$. Поскольку подгруппа K максимальная нормальная в G, K есть 2-группа и $r \neq 2$, то мы получили противоречие. Это говорит о том, что $K = 1$, т. е. группа G простая, $q = 2$, и подгруппа M является холловой подгруппой нечетного порядка.

В силу [13] $G \cong PSL_2(p)$, p – простое число Мерсенна. Ее порядок

$$|G| = \frac{1}{2}p(p-1)(p+1 = 2^n), \quad n \in \mathbf{N}.$$

При этом по [14]

$$c.d.(G) = \{1; \frac{p-1}{2}; p-1; p; p+1 = 2^n\}, \quad |G_2| = p+1 = 2^n.$$

Так как $(1_M)^G(1) = |G_2|$ и $(1_M)^G = \psi + 1_M$, то легко видеть, что $\psi(1) = |G_2| - 1 = |Q| - 1 = p$. Поскольку r делит $p-1$ для любого $r \in \pi(G)$, то для неприводимого характера ψ степени p группы $PSL_2(p)$, p – простое число Мерсенна, не выполняется последнее требование теоремы, которое гласит: $\psi(1)$ не делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv 0, \pm 1 \pmod r$ для некоторого $r \in \pi(M) = \pi(G) \setminus 2$. Следовательно, простые группы $PSL_2(p)$, p – простое число Мерсенна, не удовлетворяют всем условиям теоремы. Поэтому группа G не может быть простой. □

Это последнее противоречие доказывает теорему.

Литература

1. *Ito N.* On the theorem of N. F. Blichfeldt // Nagoya Math. J. 1953. Vol. 15. P. 75–77.

2. *Winter D. L.* On finite solvable linear groups // Ill. J. Math. 1971. Vol. 15, N 3. P. 425–428.

3. *Winter D. L.* Solvability of certain p-solvable linear groups of finite order // Pacific J. Math. 1970. Vol. 34, N 3. P. 827–835.

4. *Isaacs I. M.* Complex p-solvable linear groups // J. Algebra. 1973. Vol. 24, N 3. P. 513–530.

5. *Winter D. L.* On the structure of certain p-solvable linear groups // J. Algebra. 1974. Vol. 31, N 3. P. 543–546.

6. *Ядченко А. А., Романовский А. В.* К проблемме Айзекса о конечных p-разрешимых линейных группах // Математические заметки. 2001. Т. 69, вып. 1. С. 144–152.

7. *Newton B.* On the degrees of complex p-solvable linear groups // J. Algebra. 2005. Vol. 288. P. 384–391.

8. *Ядченко А. А.* К проблеме Айзекса // Математический сборник. 2013. Т. 204, № 12. С. 147–156.

9. *Романовский А. В., Ядченко А. А.* Мономиальные характеры и нормальные подгруппы конечных групп // Укр. мат. журнал. 1991. Т. 43, № 7–8. С. 991–996.

10. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Harper and Row, 1968. 527 p.

11. *Isaacs I. M.* Character theory of finite groups. New York: Academic Press, 1976. 303 p.

12. *Чунихин С. А.* Подгруппы конечных групп. Минск: Наука и техника, 1964. 158 с.

13. *Arad Z., Ward M. B.* New criteria for the solvability of finite groups // J. Algebra. 1982. Vol. 77, N 1. P. 234–246.

14. *Conway J. H.* Atlas of finite groups. London: Clarendon Press, 1985. 252 p.

References

1. Ito N. On the theorem of N. F. Blichfeldt. *Nagoya Math. J.*, 1953, vol. 15, pp. 75–77.
2. Winter D. L. On finite solvable linear groups. *Ill. J. Math.*, 1971, vol. 15, no. 3, pp. 425–428.
3. Winter D. L. Solvability of certain p-solvable linear groups of finite order. *Pacific J. Math.,* 1970, vol. 34, no. 3, pp. 827–835.
4. Isaacs I. M. Complex p-solvable linear groups. *J. Algebra*, 1973, vol. 24, no. 3, pp. 513–530.
5. Winter D. L. On the structure of certain p-solvable linear groups. *J. Algebra*, 1974, vol. 31, no. 3, pp. 543–546.
6. Yadchenko A. A., Romanovskii A. V. On the Isaacs problem concerning finite p -solvable linear groups. *Math. Notes*, 2001, vol. 69, no. 1, pp. 144–152 (in Russian).
7. Newton B. On the degrees of complex p-solvable linear groups. *J. Algebra*, 2005, vol. 288, pp. 384–391.
8. Yadchenko A. A. On Isaacs' problem. *Math. Sbornik*, 2013, vol. 204, no. 12, pp. 1839–1848.
9. Romanovskii A. V., Yadchenko A. A. Monomial characters and normal subgroup of finite groups. *Ukr. Math. J.*, 1991, vol. 43, no. 7–8, pp. 925–929.
10. Gorenstein D. *Finite Groups*. New York, Harper and Row, 1968. 527 p.
11. Isaacs I. M. *Character Theory of Finite Groups*. New York, Academic Press, 1976. 303 p.
12. Chunihin S. A. *Subgroup of Finite Groups*. Minsk, Nauka i Tekhnika, 1975. 158 p.
13. Arad Z., Ward M. B. New criteria for the solvability of finite groups. *J. Algebra,* 1982, vol. 77, no. 1, pp. 234–246.
14. Conway J. H. *Atlas of finite groups.* London, Clarendon Press, 1985. 252 p.